

Corso di laurea in Ingegneria civile strutturale e geotecnica

Tecnica delle costruzioni

modulo A

18 – Flessione composta - tensoflessione

Aurelio Gherzi

9/11/2020

Flessione composta

cioè sforzo normale e momento flettente

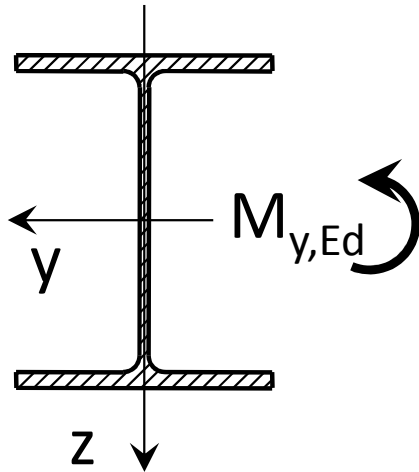
Si esamina nell'ordine:

- Tensoflessione retta
 - Per definire i concetti generali
- Tensoflessione deviata
 - Formulazione generale in presenza di due componenti del momento flettente
- Pressoflessione retta
 - Che risente dell'effetto dell'instabilità
- Pressoflessione deviata
 - Solo per citare le formule generali

Tensoflessione retta

modello elastico lineare

- Per sezioni di classe 3
 - Si usano le formule del modello elastico lineare
 - Si impone come limite tensionale f_y / γ_{M0}



N trazione

$$\sigma = \frac{N_{Ed}}{A} + \frac{M_{y,Ed}}{I_y} z$$

$$|\sigma_{max}| = \frac{|N_{Ed}|}{A} + \frac{|M_{y,Ed}|}{W_{y,el}} \leq \frac{f_y}{\gamma_{M0}}$$

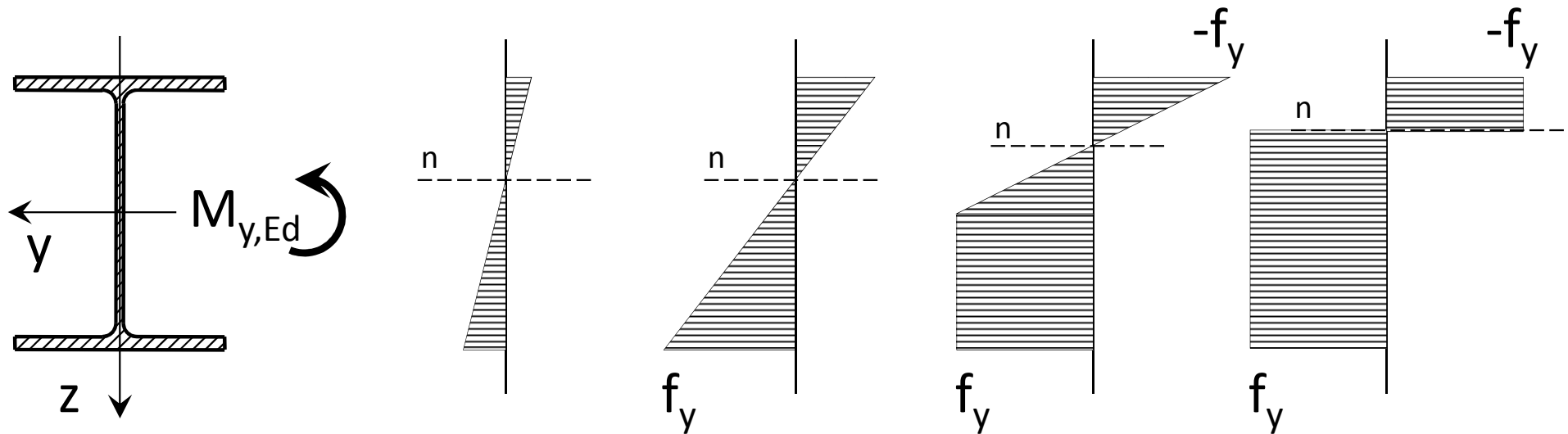
$$\frac{|N_{Ed}|}{A f_y / \gamma_{M0}} + \frac{|M_{y,Ed}|}{W_{y,el} f_y / \gamma_{M0}} \leq 1$$

$$\left| \frac{N_{Ed}}{N_{Rd}} \right| + \left| \frac{M_{y,Ed}}{M_{y,Rd}} \right| \leq 1$$

$$|M_{y,Ed}| \leq |M_{y,Rd}| \left(1 - \left| \frac{N_{Ed}}{N_{Rd}} \right| \right) = M_{N,y,Rd}$$

Tensoflessione retta

- Per sezioni di classe 1 e 2



N trazione

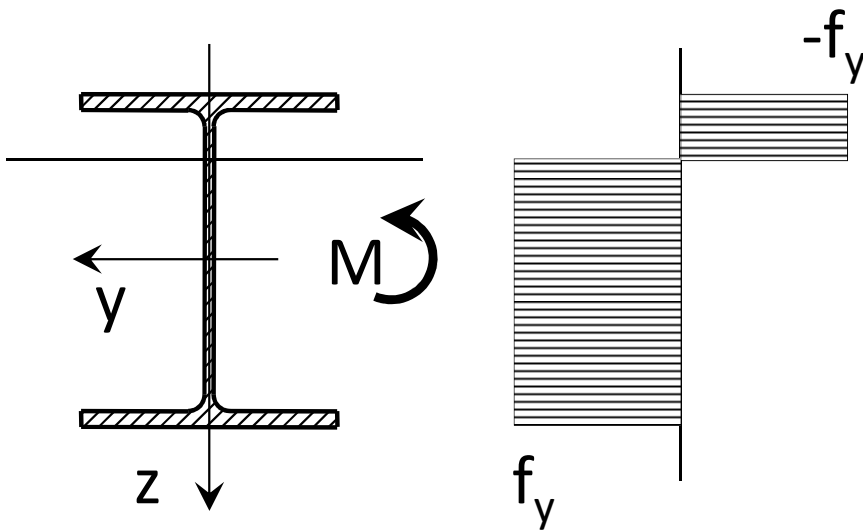
con N ed M che crescono proporzionalmente

Tensoflessione retta

- Per sezioni di classe 1 e 2
 - a. Si considera la sezione pienamente plasticizzata (parte in trazione e parte in compressione)
 - b. Data una posizione dell'asse neutro si calcola N (o viceversa dato N si calcola la posizione dell'asse neutro)
 - c. Si determina il momento resistente corrispondente a N : $M_{N,Rd}$

Tensoflessione retta

- a. Si considera la sezione pienamente plasticizzata (parte in trazione e parte in compressione)



N trazione

Nota: si ipotizza che f_y sia uguale per tutte le parti della sezione

- b. Data una posizione dell'asse neutro si calcola N

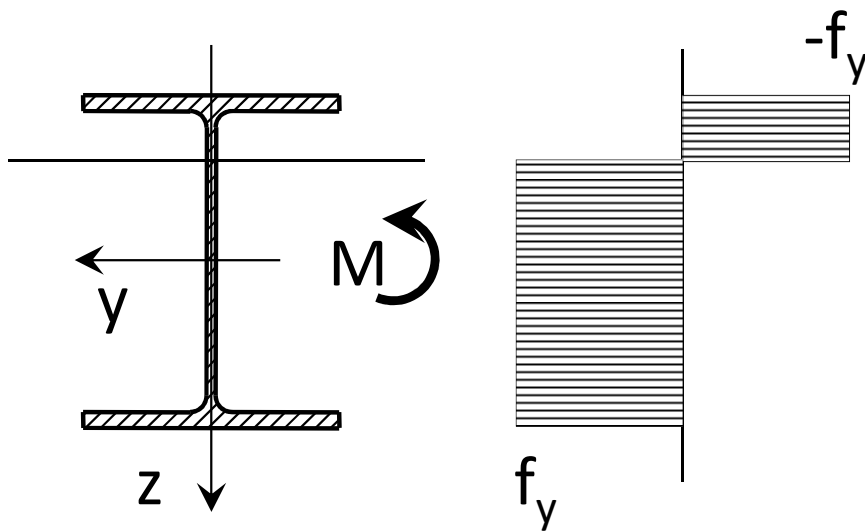
$$N = \int \sigma dA = \int_{\text{tesa}} \sigma dA + \int_{\text{comp}} \sigma dA =$$

$$= \frac{f_y}{\gamma_{M0}} A_{\text{tesa}} - \frac{f_y}{\gamma_{M0}} A_{\text{comp}}$$

$$N = \frac{f_y}{\gamma_{M0}} (A_{\text{tesa}} - A_{\text{comp}})$$

Tensoflessione retta

- a. Si considera la sezione pienamente plasticizzata (parte in trazione e parte in compressione)



N trazione

- b. O viceversa dato N si calcola la posizione dell'asse neutro n

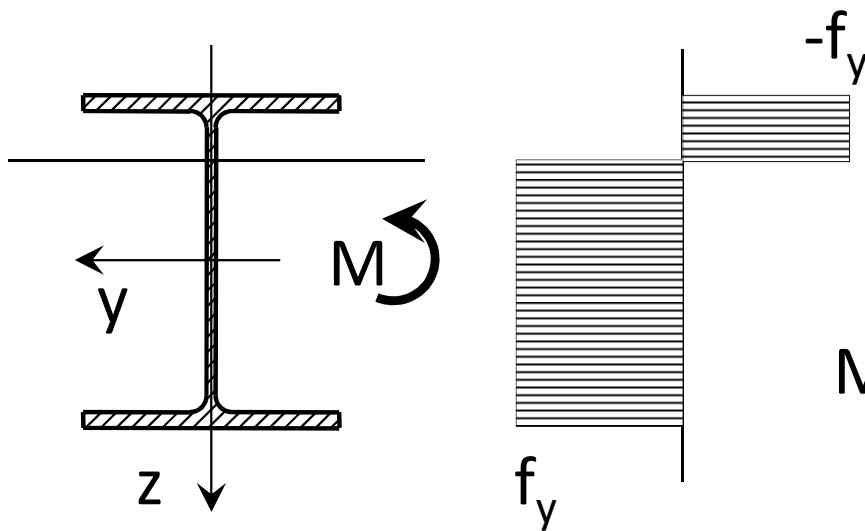
$$N = \frac{f_y}{\gamma_{M0}} (A_{\text{tesa}} - A_{\text{comp}}) =$$

$$= \frac{f_y}{\gamma_{M0}} (A_{\text{tesa}} - (A - A_{\text{tesa}}))$$

$$\Rightarrow A_{\text{tesa}} = \frac{1}{2} \left[\frac{N \gamma_{M0}}{f_y} + A \right]$$

Tensoflessione retta

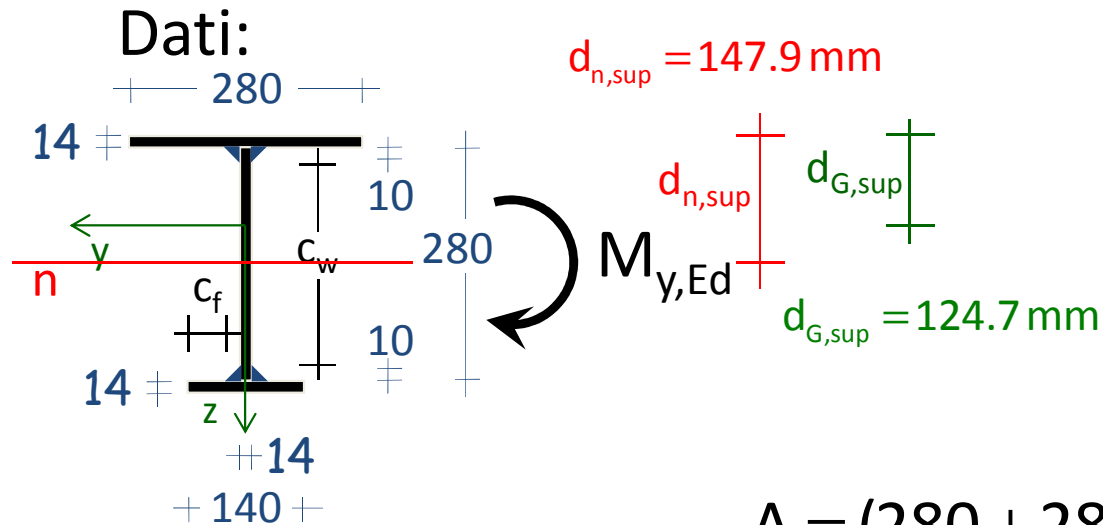
c. Si determina il momento resistente corrispondente a N: $M_{N,Rd}$



N trazione

$$\begin{aligned}
 M_y &= \int \sigma z dA = \int_{\text{tesa}} \sigma z dA + \int_{\text{comp}} \sigma z dA = \\
 &= \frac{f_y}{\gamma_{M0}} S_{A_{\text{tesa}}} - \frac{f_y}{\gamma_{M0}} S_{A_{\text{comp}}} = \frac{f_y}{\gamma_{M0}} (2 S_{A_{\text{tesa}}})
 \end{aligned}$$

Esempio – sezione composta di classe 1



$$M_{y,Ed} = -200 \text{ kNm}$$

$$N_{Ed} = 400 \text{ kN}$$

Acciaio S235

$$A = (280 + 280 + 140) \times 14 = 98 \times 10^2 \text{ mm}^2$$

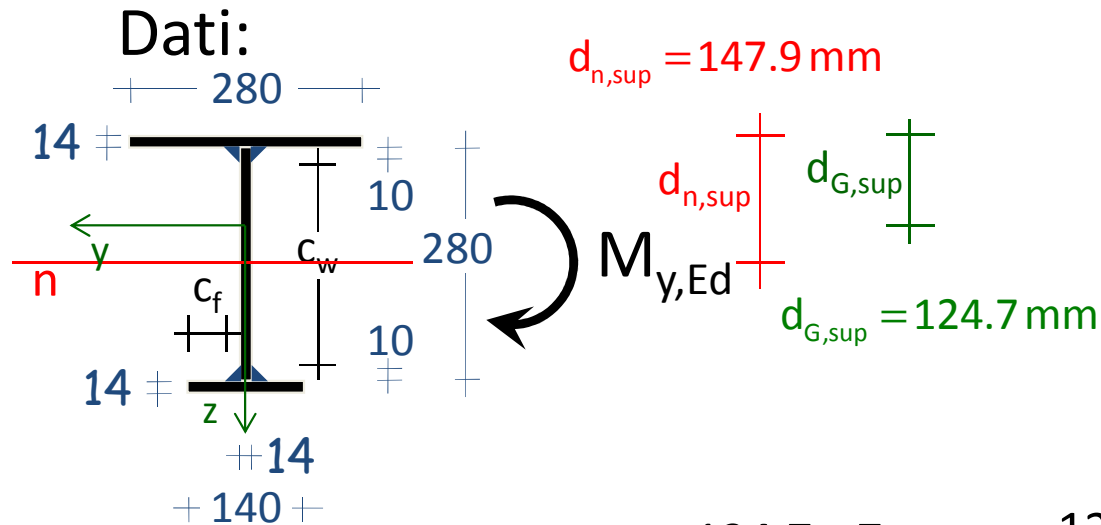
$$A_{tesa} = \frac{1}{2} \left[\frac{N \gamma_{M0}}{f_y} + A \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{400 \times 10^3 \times 1.05}{235} + 98 \times 10^2 \right] = 57.94 \times 10^2 \text{ mm}^2$$

È tesa tutta l'ala superiore più
una parte dell'anima, di area
 $5794 - 280 \times 14 = 1874 \text{ mm}^2$

e quindi di altezza $\frac{1874}{14} = 133.9 \text{ mm}$

$$d_{n,sup} = 14 + 133.9 = 147.9 \text{ mm}$$

Esempio – sezione composta di classe 1



$$M_{y,Ed} = -200 \text{ kNm}$$

$$N_{Ed} = 400 \text{ kN}$$

Acciaio S235

$$124.7 - 7$$

$$124.7 - \left[(147.9 - 14) / 2 + 14 \right]$$

$$S_{A,tesa} = 280 \times 14 \times 117.7 + 133.9 \times 14 \times 43.8 = 543.49 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$$M_{y,N,Rd} = 2 S_{A,tesa} \frac{f_y}{\gamma_{M0}} = 2 \times 543.49 \times 10^3 \frac{235}{1.05} \times 10^{-6} = 243.3 \text{ kNm}$$

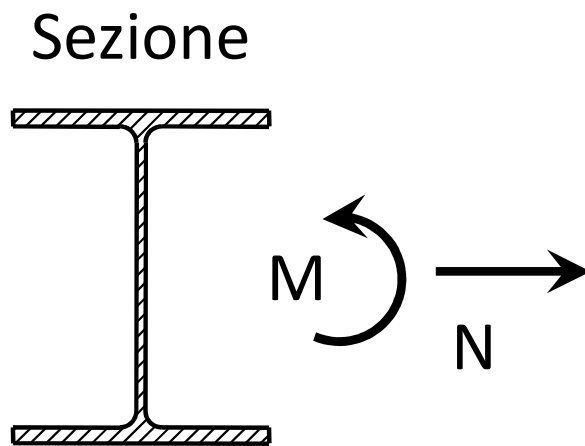
Tensoflessione retta

- Quello indicato è un procedimento generale che si può sempre utilizzare
- Per sezioni comuni la normativa fornisce espressioni approssimate che descrivono l'interazione tra N e $M_{N,Rd}$ (dominio di resistenza)

Dominio di resistenza

Dominio di resistenza, o curva di interazione = insieme delle coppie M-N per cui si ottiene lo stato limite ultimo della sezione

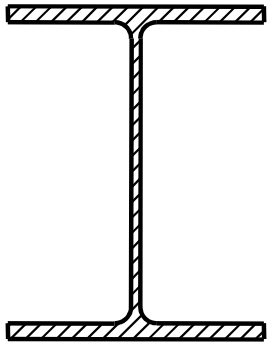
Per comportamento elastico lineare (classe 3)



$$|M_{y,Ed}| \leq |M_{y,Rd}| \left(1 - \left| \frac{N_{Ed}}{N_{Rd}} \right| \right) = M_{N,y,Rd}$$

$$\left| \frac{M_{y,Ed}}{M_{N,y,Rd}} \right| = 1 - \left| \frac{N_{Ed}}{N_{Rd}} \right|$$

Dominio di resistenza per sezioni di classe 3



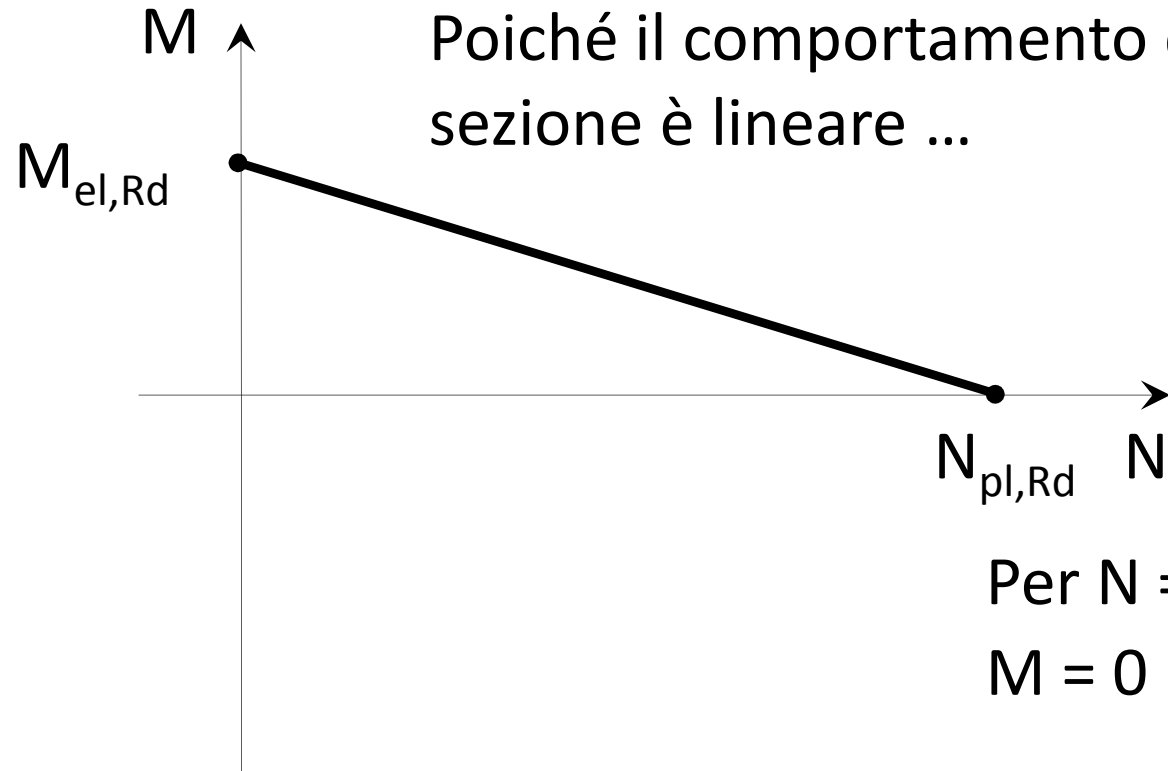
$$M_{el,N,Rd} = M_{el,Rd} \left(1 - \frac{N}{N_{pl,Rd}} \right)$$

Per $N = 0$

$$M = M_{el,Rd}$$

$$M_{el,Rd} = \frac{W_{el} f_y}{\gamma_{M0}}$$

$$N_{pl,Rd} = \frac{A f_y}{\gamma_{M0}}$$



Per $N = N_{pl,Rd}$

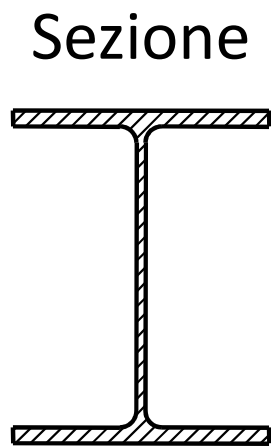
$$M = 0$$

Dominio di resistenza

per sezioni di classe 1 e 2

Dominio di resistenza, o
curva di interazione = insieme delle coppie M-N per cui
si ottiene lo stato limite ultimo
della sezione

Per ricavare una coppia M-N del dominio



Si assegna una posizione dell'asse
neutro

Si determina N

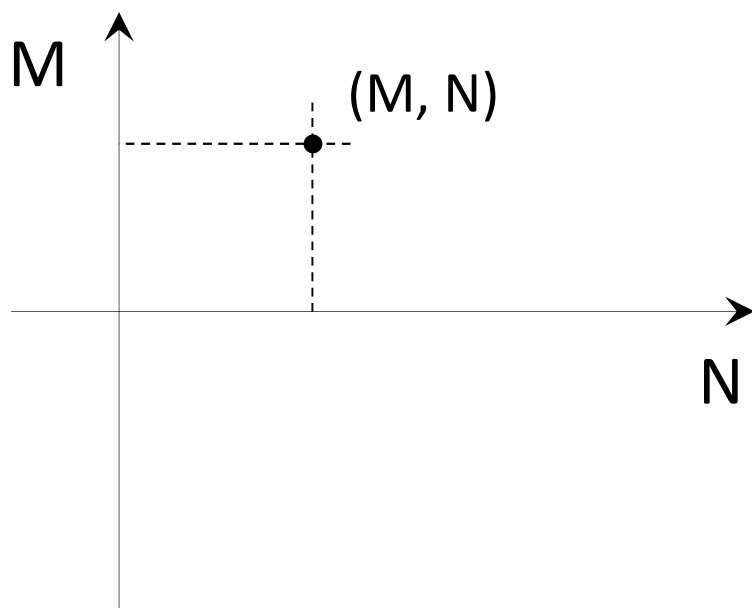
Si determina M ($M_{pl,N}$ o $M_{el,N}$)

Domini di resistenza

per sezioni di classe 1 e 2

Dominio di resistenza, o curva di interazione = insieme delle coppie M-N per cui si ottiene lo stato limite ultimo della sezione

Per ricavare una coppia M-N del dominio



Si assegna l'asse neutro

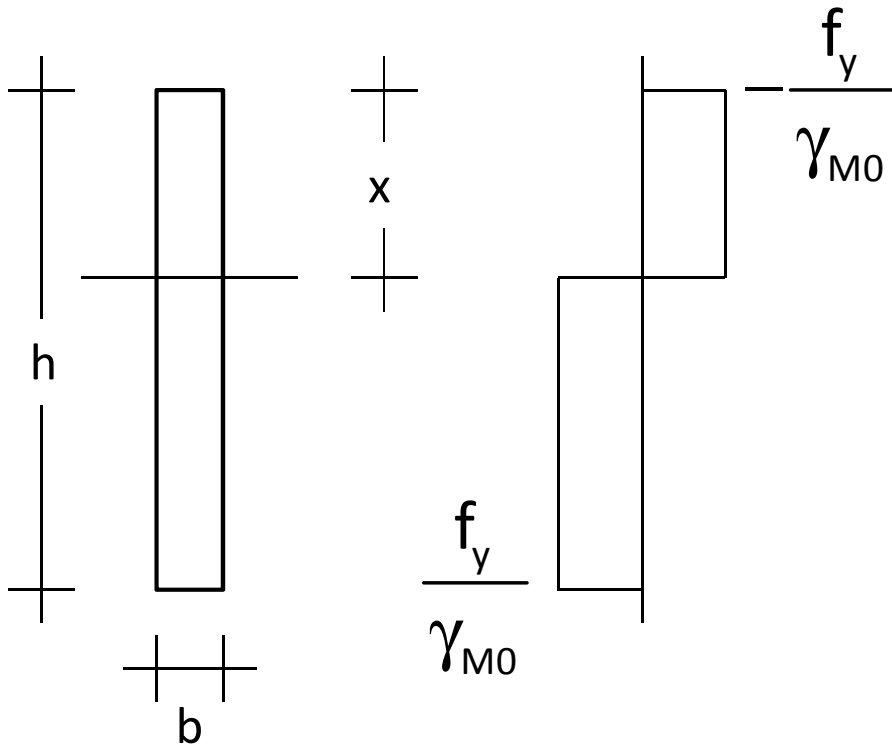
Si determina N

Si determina M ($M_{pl,N}$ o $M_{el,N}$)

e si riporta la coppia
M – N nel diagramma

Esempio

Sezione rettangolare (ad esempio un piatto)

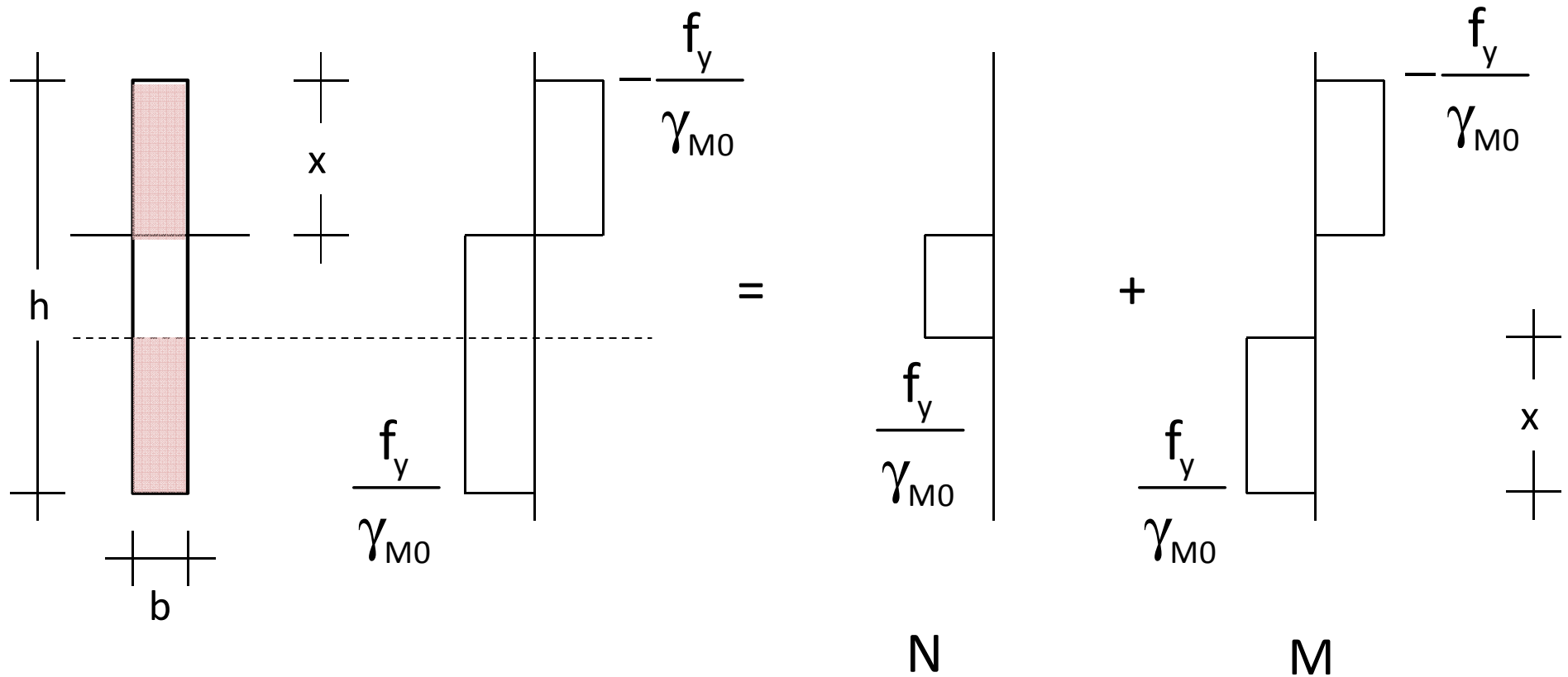


$$N = \frac{f_y}{\gamma_{M0}} (A_{\text{tesa}} - A_{\text{comp}}) = \frac{f_y}{\gamma_{M0}} [b(h-x) - bx] =$$
$$= b(h-2x) \frac{f_y}{\gamma_{M0}}$$

$$M_y = \frac{f_y}{\gamma_{M0}} (2 S_{A_{\text{tesa}}}) = \frac{f_y}{\gamma_{M0}} \left[2bx \left(\frac{h}{2} - \frac{x}{2} \right) \right] =$$
$$= bx(h-x) \frac{f_y}{\gamma_{M0}}$$

Esempio

Sezione rettangolare (ad esempio un piatto)

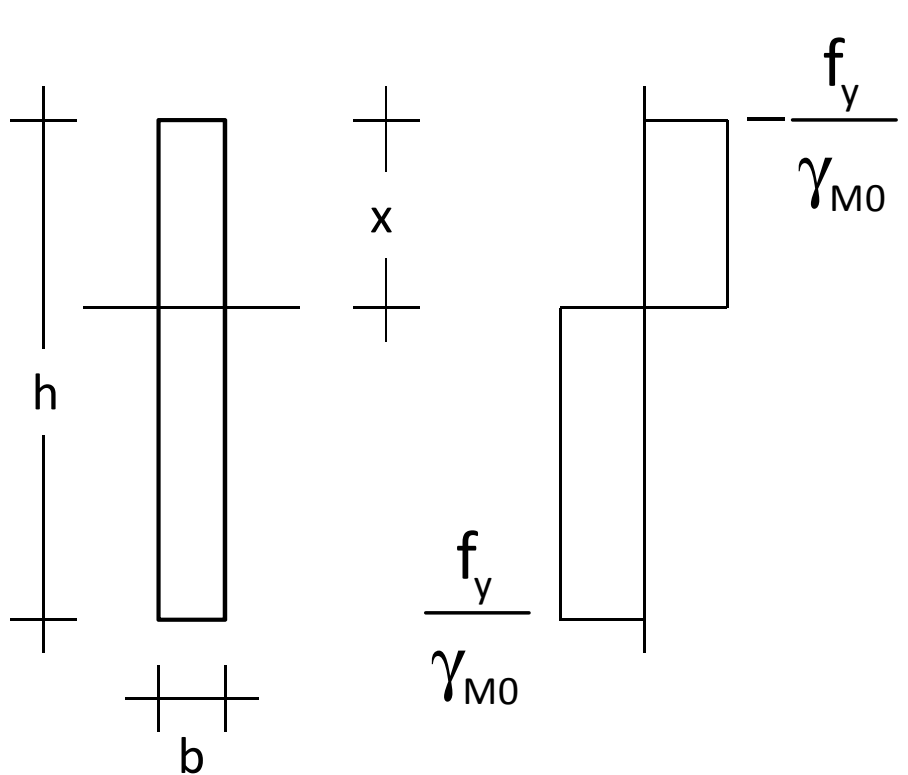


Modo alternativo di
procedere
(specifico per questo
caso, non generale)

$$N = b (h - 2x) \frac{f_y}{\gamma_{M0}} \quad M = b x (h - x) \frac{f_y}{\gamma_{M0}}$$

Esempio

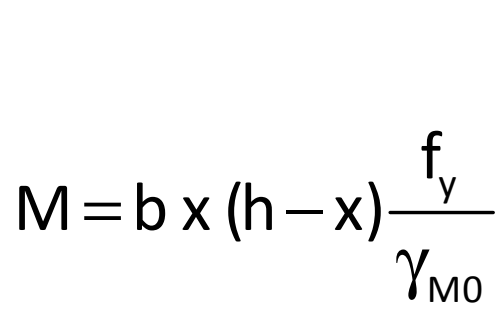
Sezione rettangolare (ad esempio un piatto)



$$N = b (h - 2x) \frac{f_y}{\gamma_{M0}}$$

$$x = \frac{1}{2} \left(h - \frac{N \gamma_{M0}}{b f_y} \right) = \frac{h}{2} \left(1 - \frac{N \gamma_{M0}}{b h f_y} \right) = \frac{h}{2} \left(1 - \frac{N}{N_{Rd}} \right)$$

$$h - x = \frac{h}{2} \left(1 + \frac{N}{N_{Rd}} \right)$$



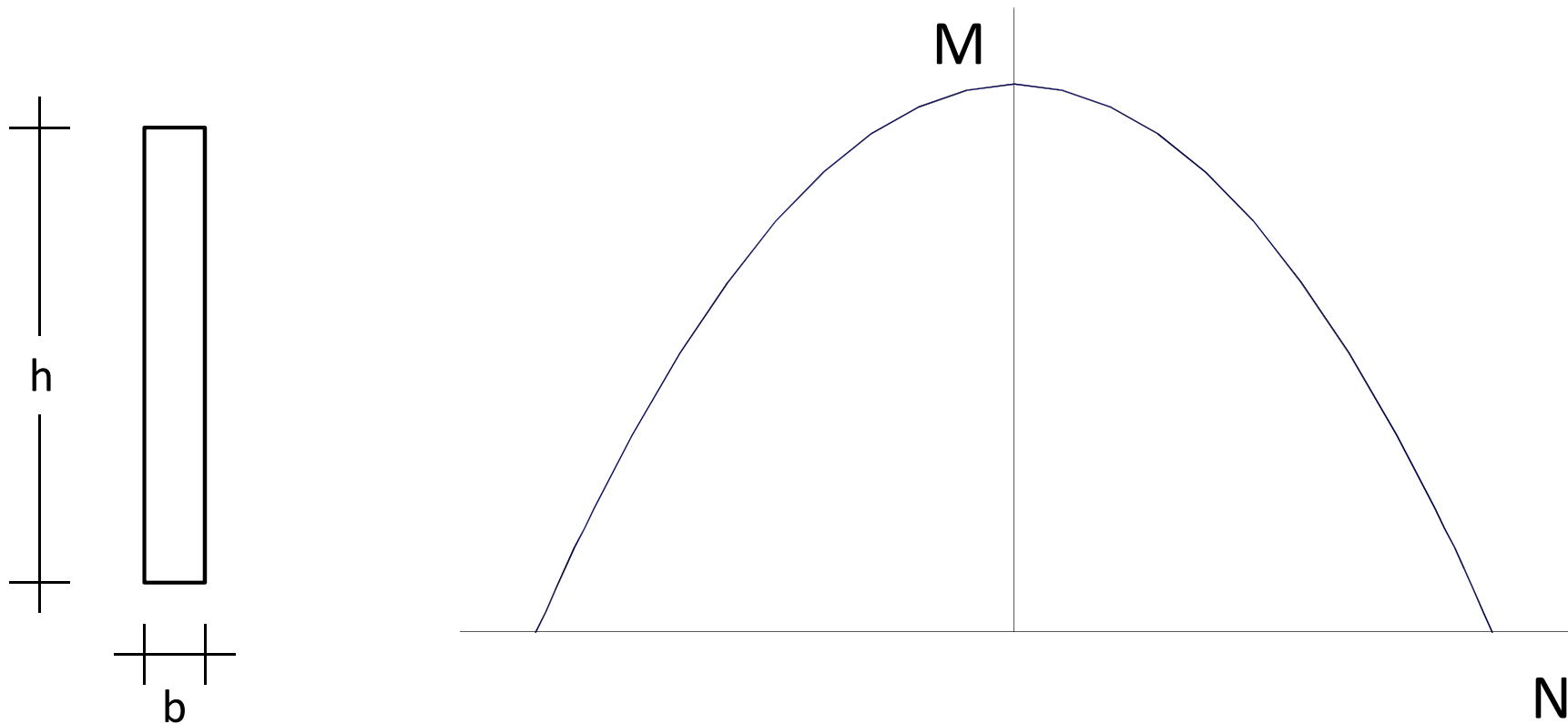
$$M = b x (h - x) \frac{f_y}{\gamma_{M0}}$$

$$M = \overset{W_{pl}}{\frac{b h^2}{4}} \frac{f_y}{\gamma_{M0}} \left[1 - \left(\frac{N}{N_{Rd}} \right)^2 \right]$$

$$\frac{M}{M_{Rd}} = \left[1 - \left(\frac{N}{N_{Rd}} \right)^2 \right]$$

Esempio

Sezione rettangolare (ad esempio un piatto)

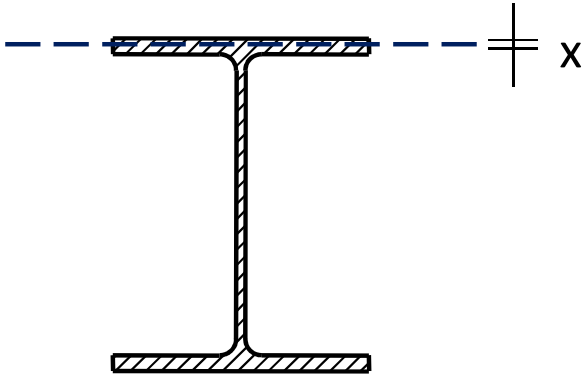


Il dominio ha un andamento parabolico

Questo vale solo per sezioni rettangolari (ad esempio un piatto)

Dominio di resistenza

sezione a doppio T con M nell'asse forte



Per $x=0$

$$N = A \frac{f_y}{\gamma_{M0}} = N_{Rd}$$

$$M = 0$$

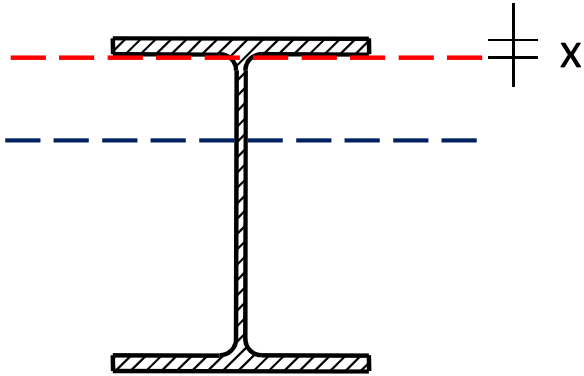
Per $0 \leq x \leq t_f$

$$N = (A - 2bx) \frac{f_y}{\gamma_{M0}} = N_{Rd} - 2bx \frac{f_y}{\gamma_{M0}}$$

$$M = bx(h-x) \frac{f_y}{\gamma_{M0}}$$

Dominio di resistenza

sezione a doppio T con M nell'asse forte



Per $0 \leq x \leq t_f$

$$N = (A - 2bt_f) \frac{f_y}{\gamma_{M0}} = N_{Rd} - 2bt_f \frac{f_y}{\gamma_{M0}} = N_1$$

$$M = bt_f (h - t_f) \frac{f_y}{\gamma_{M0}} = M_1$$

Per $t_f \leq x \leq h - t_f$

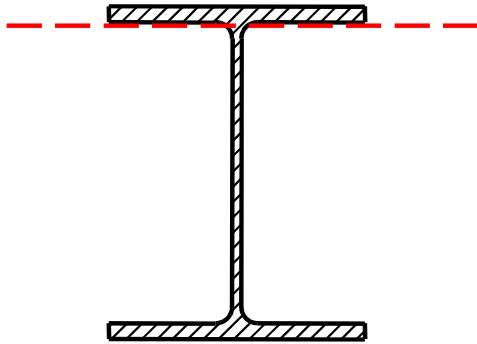
$$N = (h - 2x) t_w \frac{f_y}{\gamma_{M0}}$$

$$M = M_{Rd} - \left(\frac{h}{2} - x \right)^2 t_w \frac{f_y}{\gamma_{M0}}$$

Trattazione semplificata:
trascuro il raccordo
circolare

Dominio di resistenza

sezione a doppio T con M nell'asse forte



Per $N = 0$

$$M = M_{pl,Rd}$$

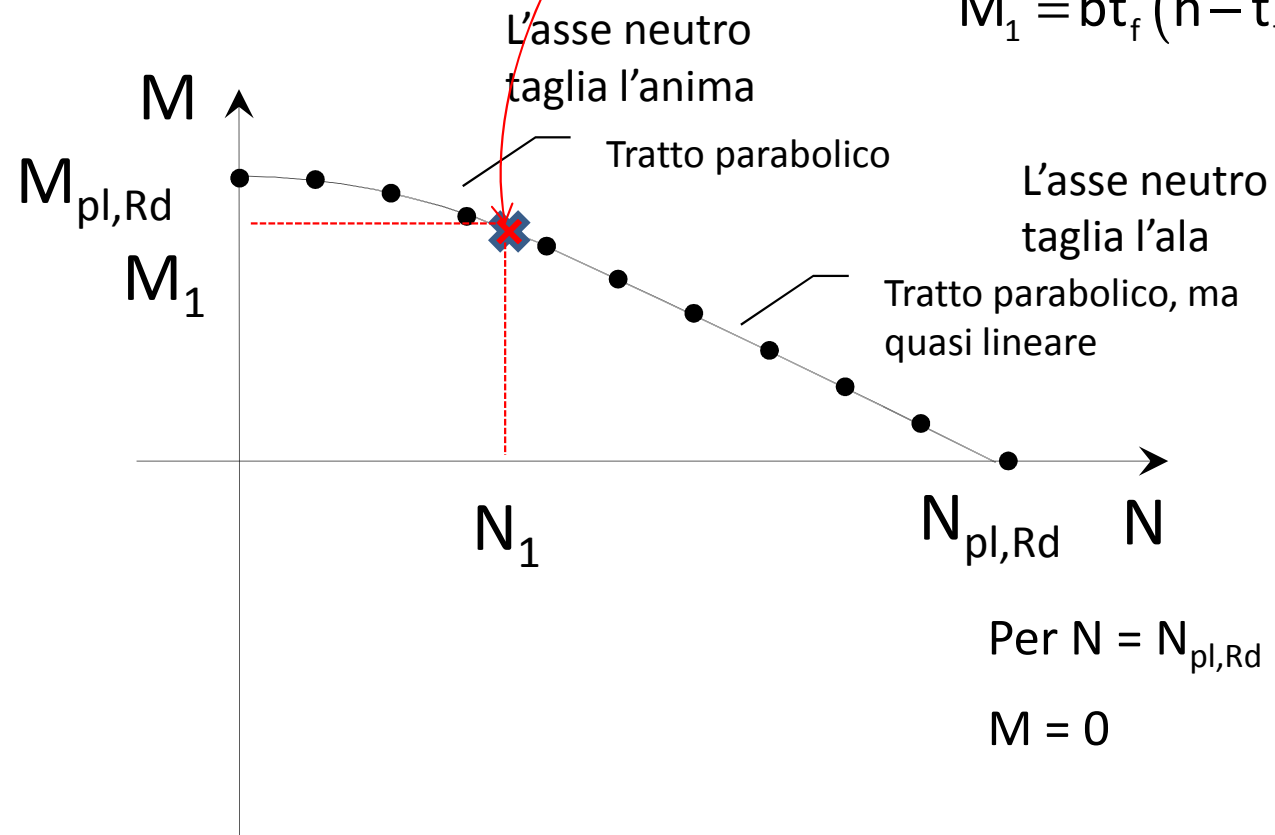
$$M_{pl,Rd} = \frac{W_{pl} f_y}{\gamma_{M0}}$$

$$N_{pl,Rd} = \frac{A f_y}{\gamma_{M0}}$$

Punto di raccordo: $x=t_f$

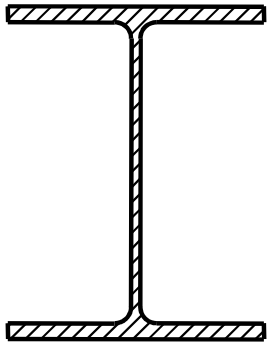
$$N_1 = (A - 2bt_f) \frac{f_y}{\gamma_{M0}}$$

$$M_1 = bt_f (h - t_f) \frac{f_y}{\gamma_{M0}}$$



Dominio di resistenza

sezione a doppio T con M nell'asse forte



$$M_{pl,N,Rd} = M_{pl,Rd}$$

$$N \leq \frac{a}{2} N_{pl,Rd}$$

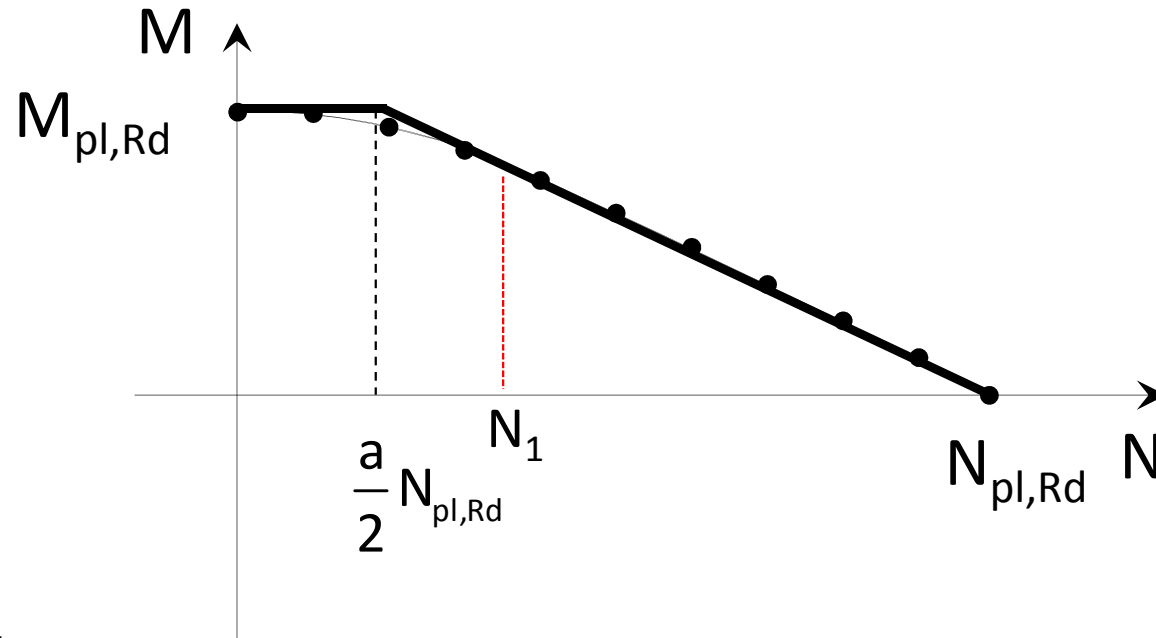
$$M_{pl,N,Rd} = M_{pl,Rd} \left(1 - \frac{N}{N_{pl,Rd}} \right) \frac{1}{1 - 0.5a}$$

$$N > \frac{a}{2} N_{pl,Rd}$$

$$a = \frac{A - 2bt_f}{A} \leq 0.5$$

$$n = \frac{N_{Ed}}{N_{Rd}}$$

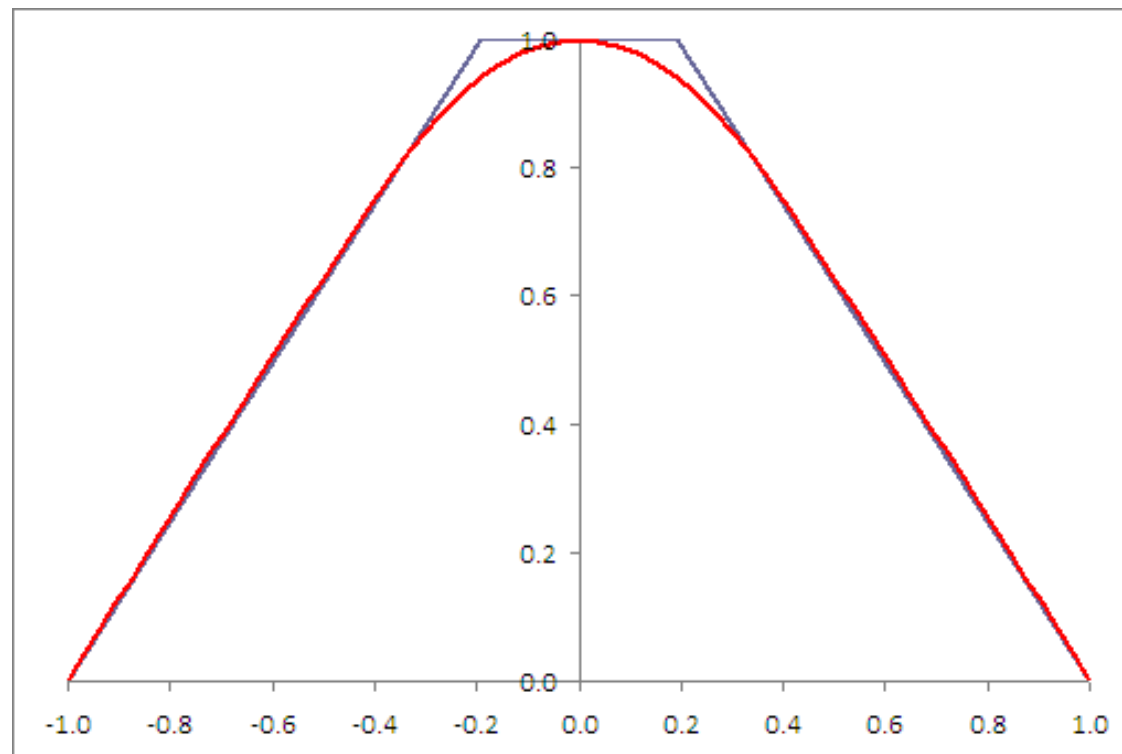
$$N_1 = \frac{(A - 2bt_f) A f_y}{A \gamma_{M0}} = a N_{Rd}$$



Dominio di resistenza

sezione a doppio T con M nell'asse forte

- Per sezioni IPE (ad esempio IPE 300)



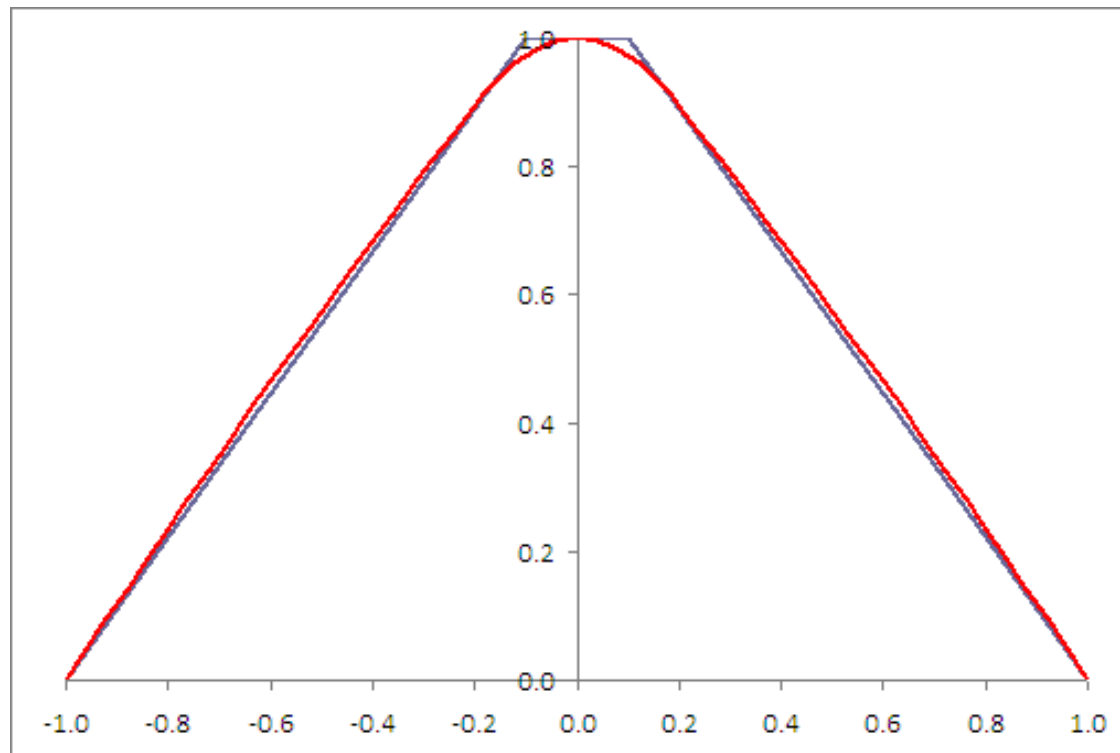
$$\frac{a}{2} \cong 0.2$$

Vedi foglio Excel Flessione composta

Dominio di resistenza

sezione a doppio T con M nell'asse forte

- Per sezioni HE (ad esempio HE 300 B)

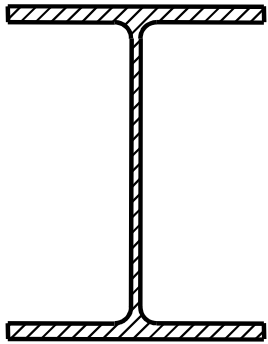


$$\frac{a}{2} \cong 0.1$$

Vedi foglio Excel Flessione composta

Dominio di resistenza

sezione a doppio T con M nell'asse forte



$$M_{pl,N,Rd} = M_{pl,Rd} \quad N \leq 0.1 N_{pl,Rd}$$

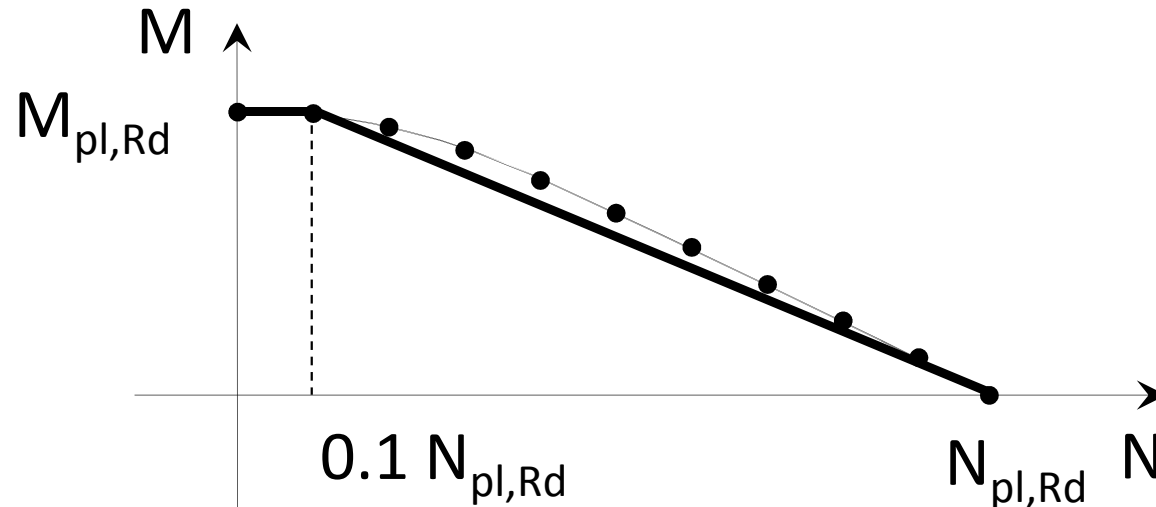
$$N \leq 0.1 N_{pl,Rd}$$

$$M_{pl,N,Rd} = 1.11 M_{pl,Rd} \left(1 - \frac{N}{N_{pl,Rd}} \right) \quad N > 0.1 N_{pl,Rd}$$

$$N > 0.1 N_{pl,Rd}$$

$$M_{pl,Rd} = \frac{W_{pl} f_y}{\gamma_{M0}}$$

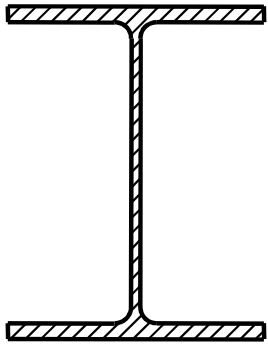
$$N_{pl,Rd} = \frac{A f_y}{\gamma_{M0}}$$



Un tempo si suggeriva
questa semplificazione

Dominio di resistenza

sezione a doppio T con M nell'asse forte



$$M_{pl,N,Rd} = M_{pl,Rd} \quad N \leq 0.1 N_{pl,Rd}$$

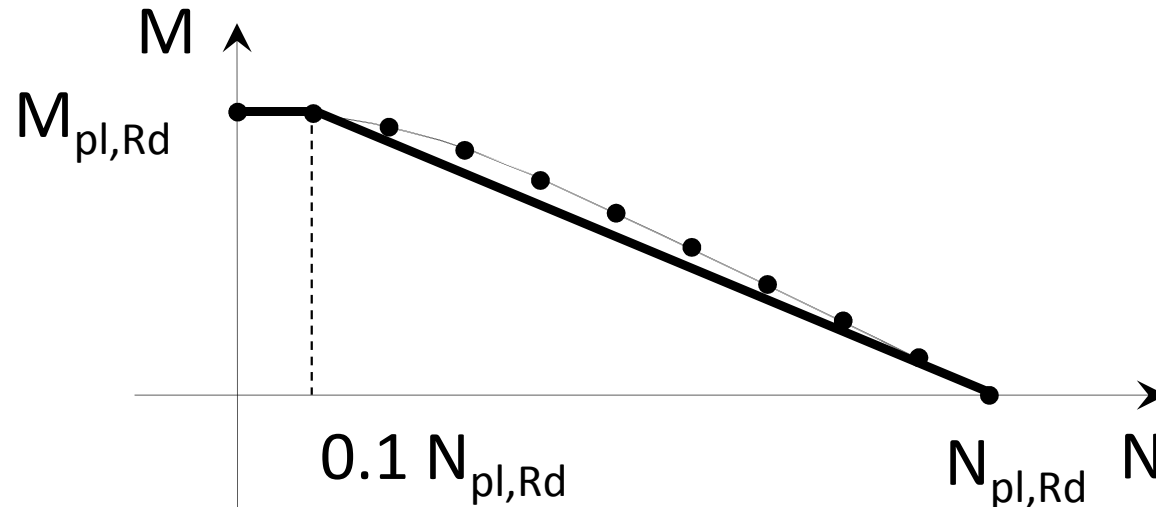
$$N \leq 0.1 N_{pl,Rd}$$

$$M_{pl,N,Rd} = 1.11 M_{pl,Rd} \left(1 - \frac{N}{N_{pl,Rd}} \right) \quad N > 0.1 N_{pl,Rd}$$

$$N > 0.1 N_{pl,Rd}$$

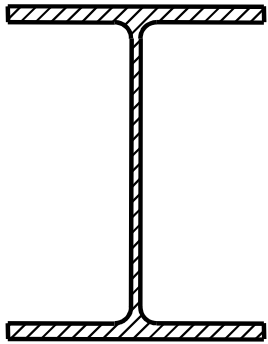
$$M_{pl,Rd} = \frac{W_{pl} f_y}{\gamma_{M0}}$$

$$N_{pl,Rd} = \frac{A f_y}{\gamma_{M0}}$$



Semplificazione cautelativa,
più vicina al vero per profili HE,
molto prudente per profili IPE

Dominio di resistenza per sezioni di classe 3

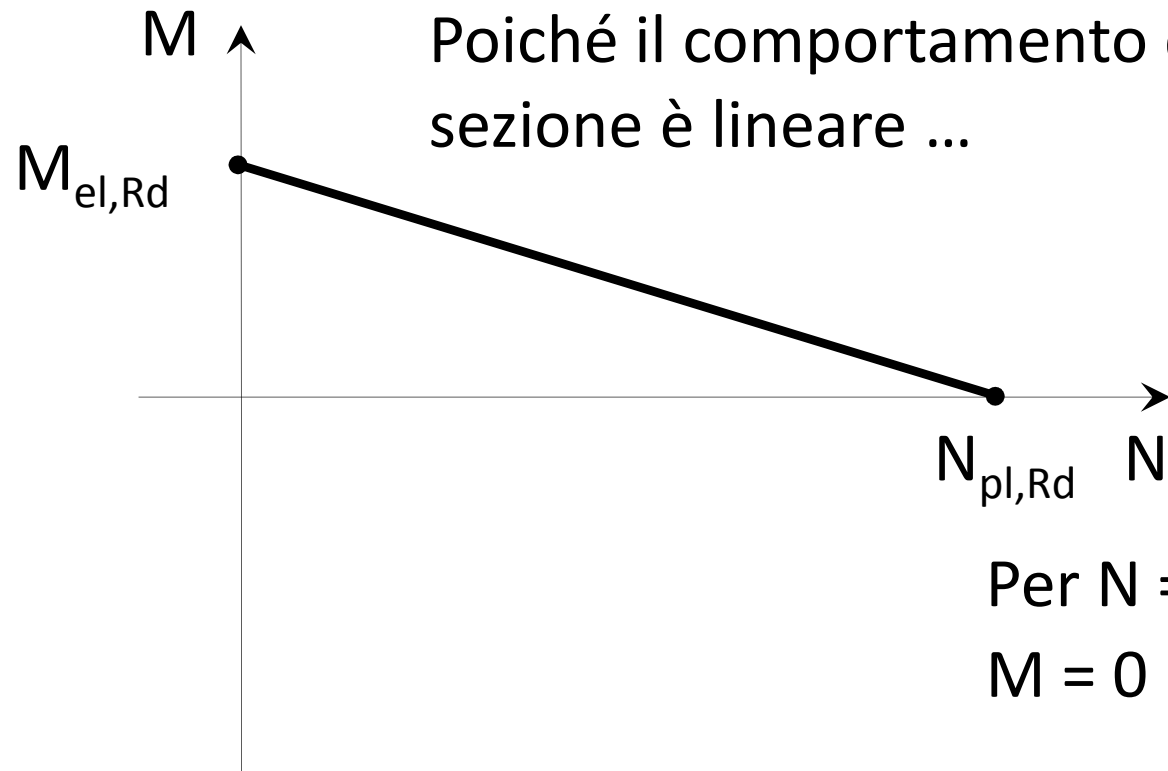


$$M_{el,N,Rd} = M_{el,Rd} \left(1 - \frac{N}{N_{pl,Rd}} \right)$$

Per $N = 0$
 $M = M_{el,Rd}$

$$M_{el,Rd} = \frac{W_{el} f_y}{\gamma_{M0}}$$

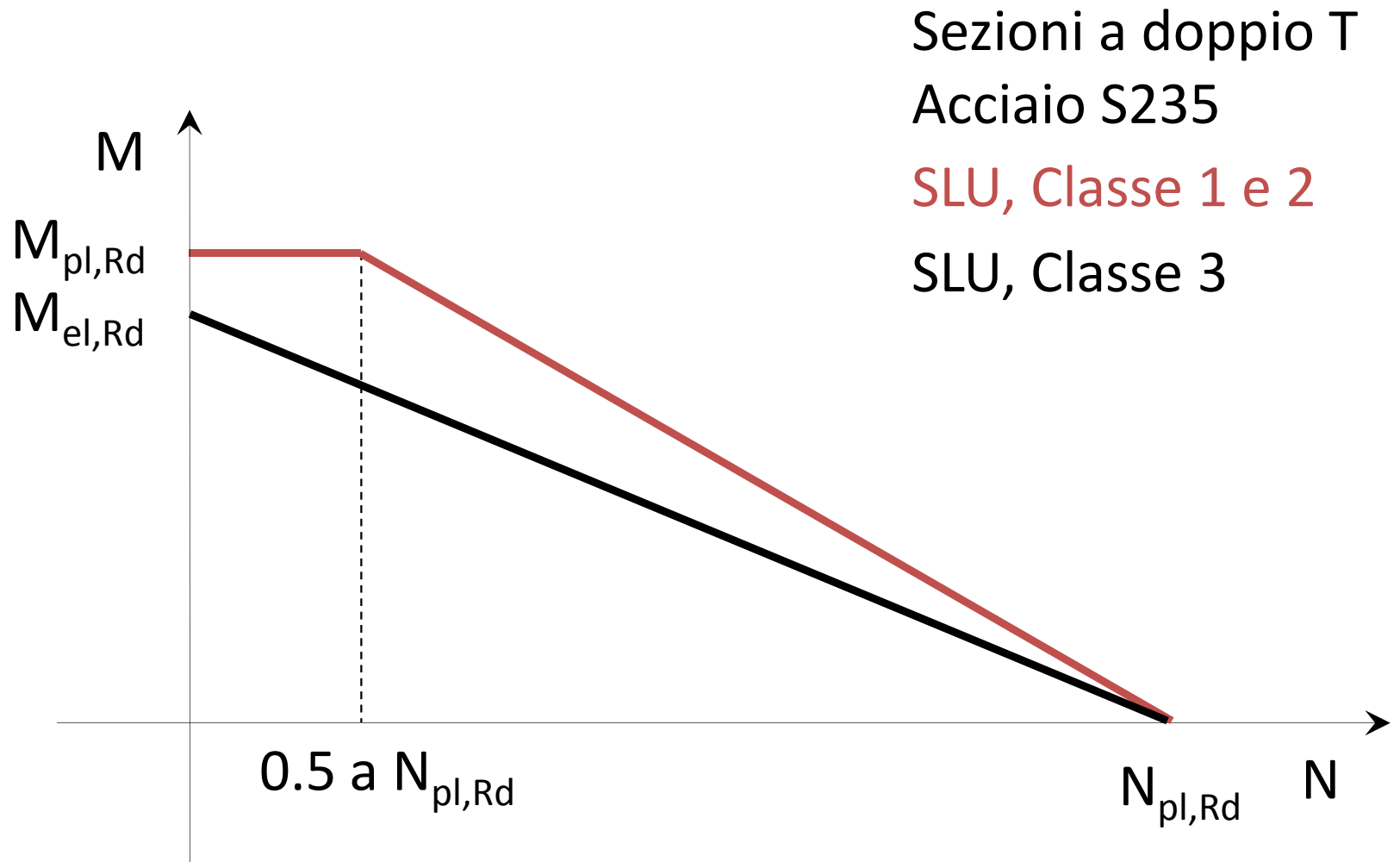
$$N_{pl,Rd} = \frac{A f_y}{\gamma_{M0}}$$



Per $N = N_{pl,Rd}$
 $M = 0$

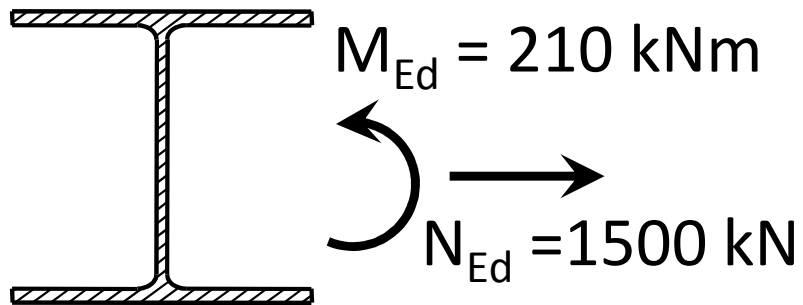
Dominio di resistenza

confronto tra classe 1-2 e classe 3



Esempio

Dati:



Sezione	HEB300
A	149 cm^2
W_{pl}	1868 cm^3
Acciaio	S235

1 - Classe della sezione

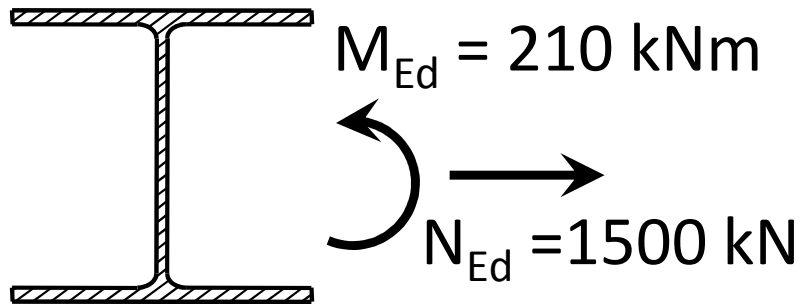
Anima: $\frac{c_w}{t_w} = \frac{208}{11} = 19 \leq 72 \varepsilon = 72$

Ala: $\frac{c}{t_f} = \frac{117.5}{19} = 6.2 \leq 9 \varepsilon = 9$

La sezione appartiene alla classe 1.

Esempio

Dati:



Sezione	HEB300
A	149 cm ²
W_{pl}	1868 cm ³
Acciaio	S235

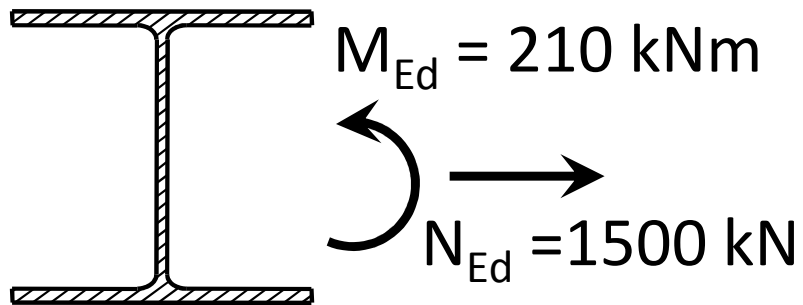
2 - Determinazione di $N_{pl,Rd}$ ed $M_{pl,Rd}$

$$N_{pl,Rd} = \frac{A f_y}{\gamma_{M0}} = \frac{235 \times 149}{1.05 \times 10} = 3334.8 \text{ kN}$$

$$M_{pl,Rd} = \frac{W_{pl} f_y}{\gamma_{M0}} = \frac{235 \times 1868}{1.05 \times 10^3} = 418.1 \text{ kNm}$$

Esempio

Dati:



Sezione	HEB300
A	149 cm ²
W_{pl}	1868 cm ³
Acciaio	S235
$b=300 \text{ mm}$	$t=19 \text{ mm}$

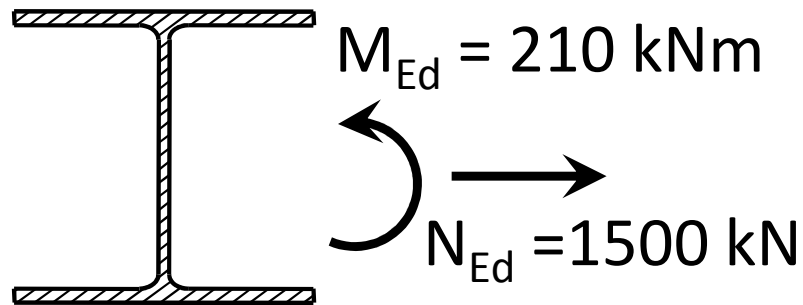
3 - Determinazione di a

$$a = \frac{A - 2 b t_f}{A} = \frac{14900 - 2 \times 300 \times 19}{14900} = 0.235$$

$$\frac{a}{2} N_{pl,Rd} = \frac{0.235}{2} 3334.8 = 391.8 \text{ kN}$$

Esempio

Dati:



Sezione	HEB300
Acciaio	S235
$N_{pl,Rd}$	3334.8 kN
$M_{pl,Rd}$	418.1 kNm

4 - Determinazione di $M_{pl,N,Rd}$ e verifica

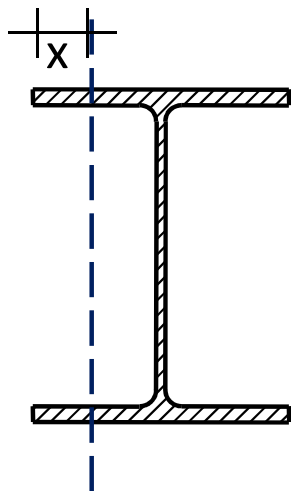
$$N_{Ed} = 1500 \text{ kN} \geq \frac{a}{2} N_{pl,Rd} = 391.8 \text{ kN}$$

$$M_{pl,N,Rd} = M_{pl,Rd} \left(1 - \frac{N_{Ed}}{N_{pl,Rd}} \right) \frac{1}{1 - 0.5 \times 0.235} = 260.7 \text{ kNm} > M_{Ed} = 210.0 \text{ kNm}$$

La sezione è verificata

Dominio di resistenza

sezione a doppio T con M nell'asse debole



Per $x=0$

$$N = A \frac{f_y}{\gamma_{M0}} = N_{Rd}$$

$$M = 0$$

Per $0 \leq x \leq (b-t_w)/2$

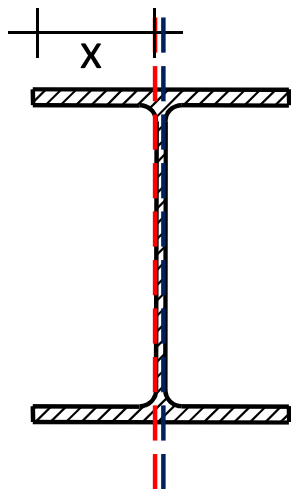
$$N = (A - 4xt_f) \frac{f_y}{\gamma_{M0}} = N_{Rd} - 4xt_f \frac{f_y}{\gamma_{M0}}$$

$$M = 2xt_f (b-x) \frac{f_y}{\gamma_{M0}}$$

Trattazione semplificata:
trascuro il raccordo
circolare

Dominio di resistenza

sezione a doppio T con M nell'asse debole



Per $x = (b - t_w)/2$

$$N = (A - 2(b - t_w)t_f) \frac{f_y}{\gamma_{M0}} \cong (A - 2bt_f) \frac{f_y}{\gamma_{M0}}$$

$$M = x t_f (b + t_w) \frac{f_y}{\gamma_{M0}}$$

Per $(b - t_w)/2 \leq x \leq (b + t_w)/2$

$$N = (b - 2x) t_w \frac{f_y}{\gamma_{M0}}$$

$$M = M_{Rd} - \left(\frac{b}{2} - x \right)^2 h \frac{f_y}{\gamma_{M0}}$$

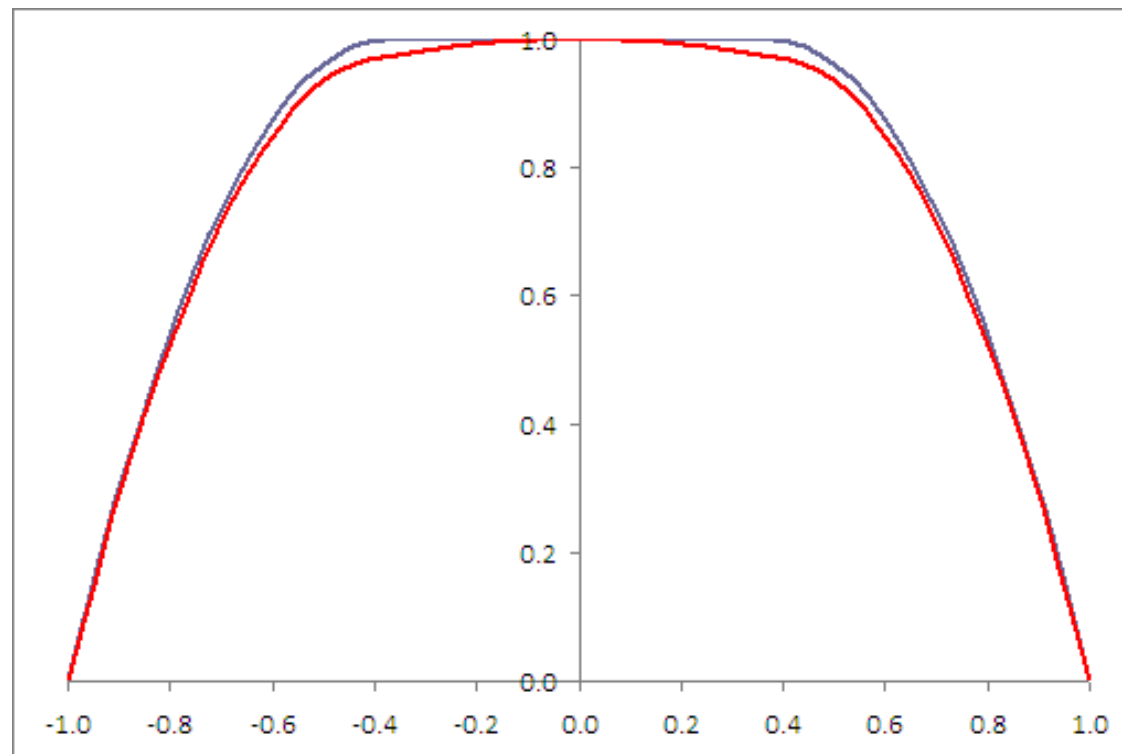
Il passaggio dalle precedenti a queste relazioni corrisponde a

$$N \cong (A - 2bt_f) \frac{f_y}{\gamma_{M0}}$$

Dominio di resistenza

sezione a doppio T con M nell'asse debole

- Per sezioni IPE (ad esempio IPE 300)

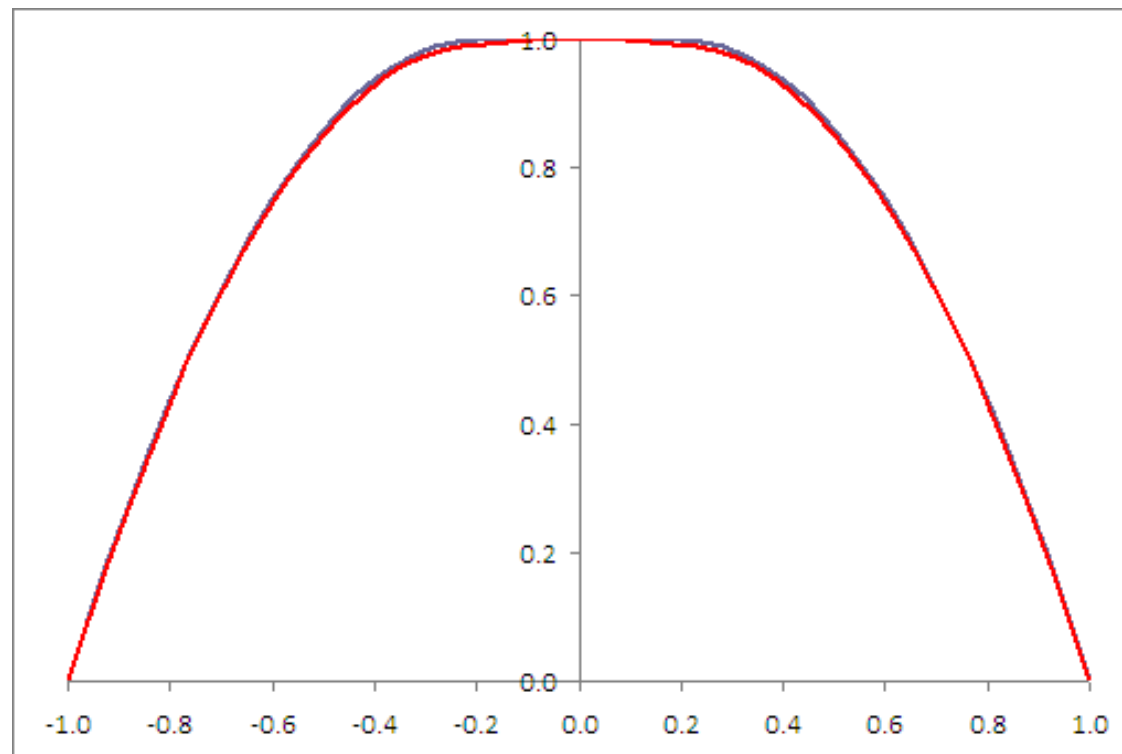


Vedi foglio Excel Flessione composta

Dominio di resistenza

sezione a doppio T con M nell'asse debole

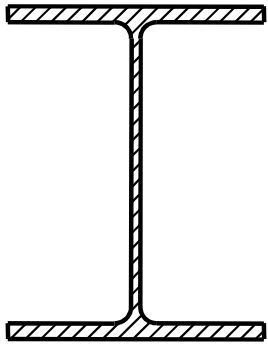
- Per sezioni HE (ad esempio HE 300 B)



Vedi foglio Excel Flessione composta

Dominio di resistenza

sezione a doppio T con M nell'asse debole



$$M_{pl,N,Rd} = M_{pl,Rd} \quad N \leq a N_{pl,Rd}$$

$$N \leq a N_{pl,Rd}$$

$$M_{pl,N,Rd} = M_{pl,Rd} \left[1 - \left(\frac{N/N_{pl,Rd} - a}{1 - a} \right)^2 \right] \quad N > a N_{pl,Rd}$$

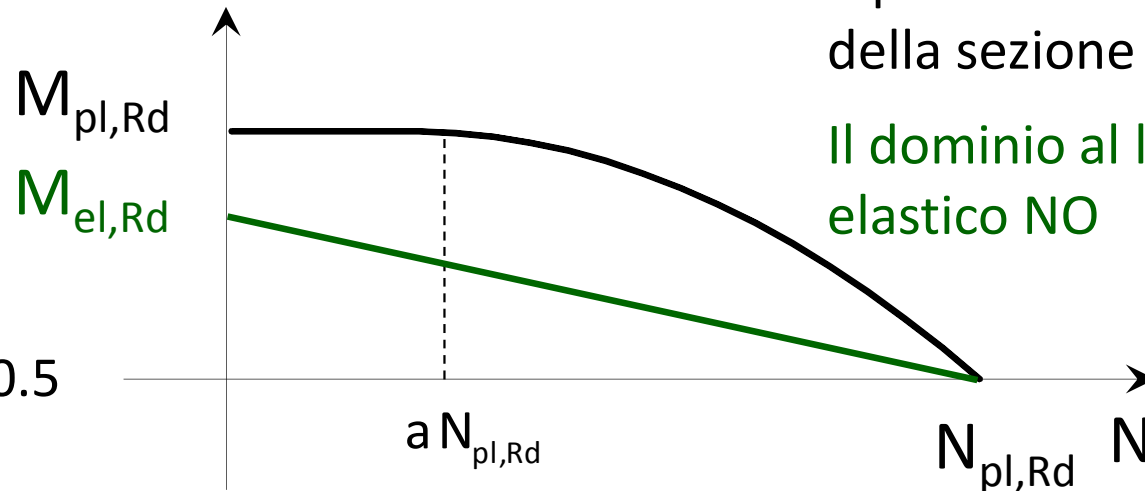
$$N > a N_{pl,Rd}$$

M

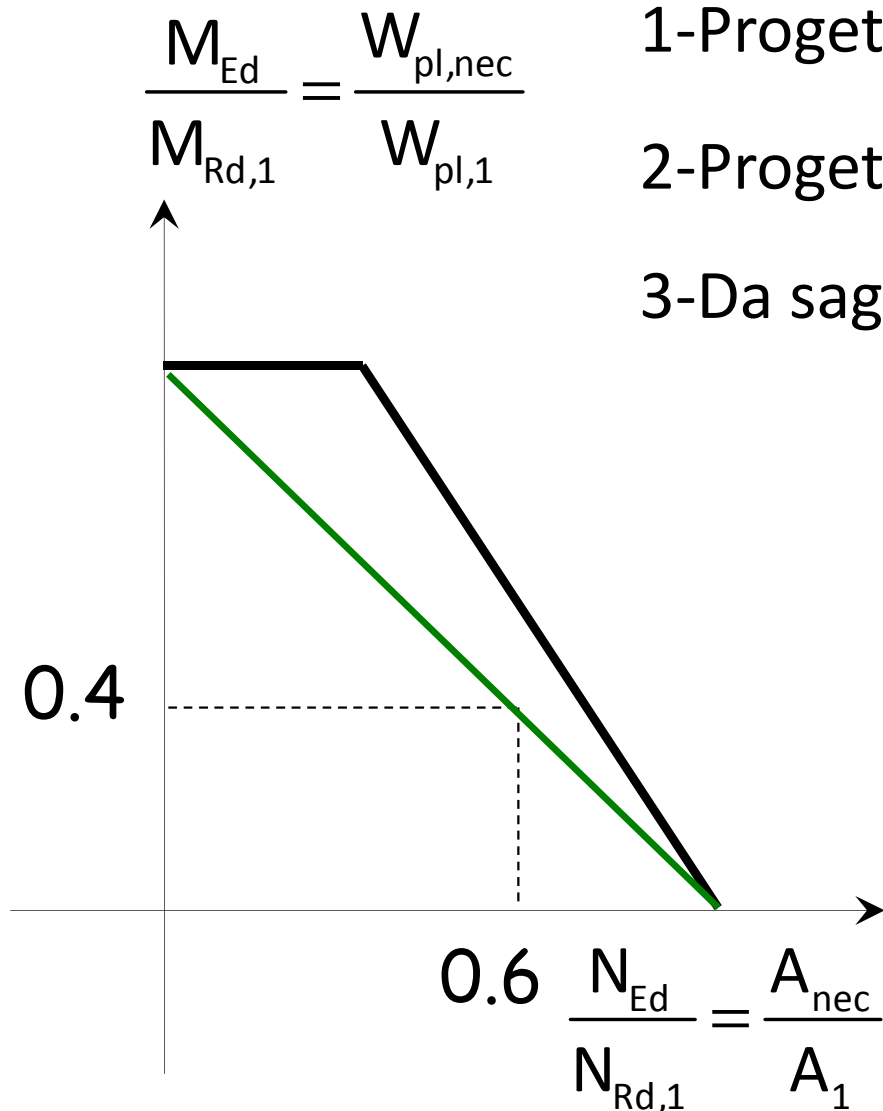
Il dominio plastico
dipende dalla forma
della sezione

Il dominio al limite
elastico NO

$$a = \frac{A - 2 b t_f}{A} \leq 0.5$$



Considerazioni di progetto



1-Progetto a flessione (M_{Ed}) $\rightarrow W_{pl,nec}$

2-Progetto a sforzo normale (N_{Ed}) $\rightarrow A_{nec}$

3-Da sagomario scelgo il profilo $\rightarrow A_1$

Come proporzionare A_1 e $W_{pl,1}$?

Considero il diagramma lineare, a vantaggio di sicurezza:

Scelta l'area $A_1 \rightarrow \frac{A_{nec}}{A_1}$

Dovrò avere: $\frac{W_{pl,nec}}{W_{pl,1}} = 1 - \frac{A_{nec}}{A_1}$

Tensoflessione deviata

- Per sezioni di classe 3
 - Si usano le formule del modello elastico lineare
 - Si impone come limite tensionale f_y / γ_{M0}

$$\left| \frac{M_{y,Ed}}{M_{y,N,Rd}} \right| + \left| \frac{M_{z,Ed}}{M_{z,N,Rd}} \right| \leq 1$$

Tensoflessione deviata

- Per sezioni di classe 1 e 2
 - Per sezioni con doppio asse di simmetria la normativa fornisce espressioni semplificate

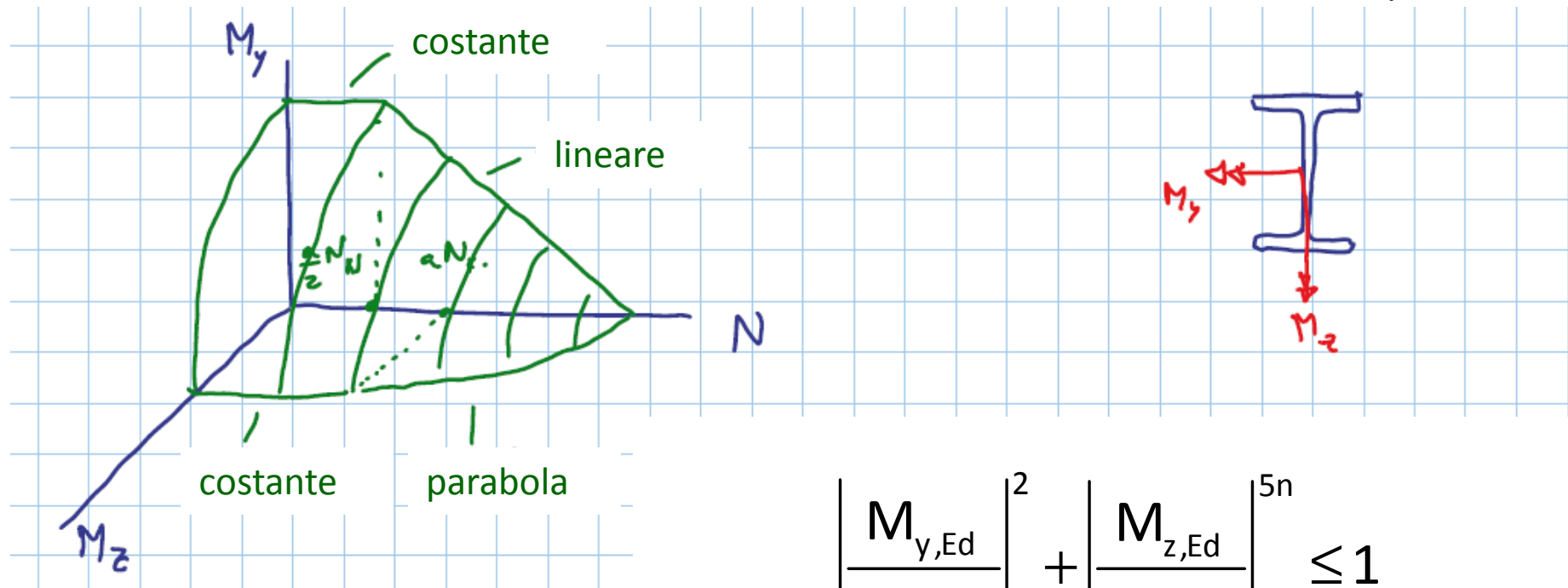
$$\left| \frac{M_{y,Ed}}{M_{y,N,Rd}} \right|^2 + \left| \frac{M_{z,Ed}}{M_{z,N,Rd}} \right|^{5n} \leq 1$$

$$\text{con } n = \frac{N_{Ed}}{N_{Rd}}$$

col limite per esponente ≥ 1

Tensoflessione deviata

- Dominio di resistenza a flessione composta deviata (M_y M_z N)



Assegnato N_{Ed}

calcolo

$M_{y,N,Rd}$ e $M_{z,N,Rd}$

$$\left| \frac{M_{y,Ed}}{M_{y,N,Rd}} \right|^2 + \left| \frac{M_{z,Ed}}{M_{z,N,Rd}} \right|^{5n} \leq 1$$

$$\text{con } n = \max \left(\frac{N_{Ed}}{N_{Rd}}; 0.2 \right)$$