

Corso

# Progetto di strutture in zona sismica

Catania

ottobre 2017 - gennaio 2018

06 - Risposta elastica di schemi a più gradi di libertà

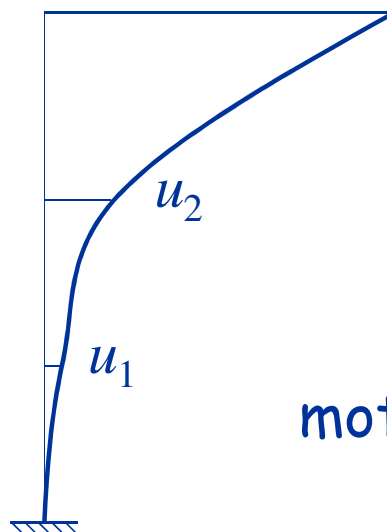
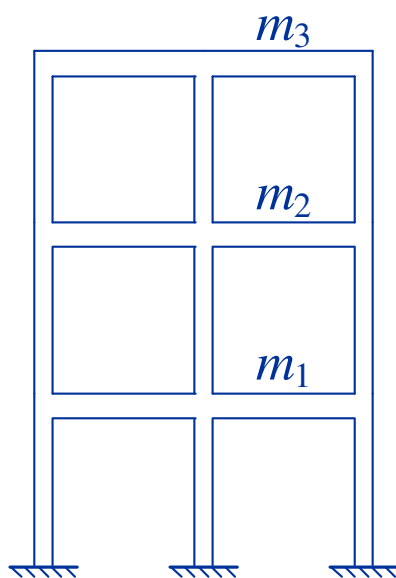
18 ottobre 2017

Aurelio Ghersi

# Strutture a più gradi di libertà

Le strutture reali hanno più gradi di libertà (dinamici)

- Per un telaio piano si possono assumere come parametri gli spostamenti dei traversi



L'equazione del moto è in questo caso un sistema di equazioni differenziali

moto libero non smorzato

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{k} \mathbf{u} = 0$$

moto forzato

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k} \mathbf{u} = -\mathbf{m} \mathbf{I} \ddot{u}_g$$



# Moto di oscillazione libera

(trattazione matematica)

L'equazione del moto, in termini matriciali, è analoga a quella dell'oscillatore semplice

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{k} \mathbf{u} = 0$$

La soluzione, in caso di moto libero, è un insieme di funzioni armoniche

$$u_i(t) = \phi_{i,j} \cos(\omega_j t)$$

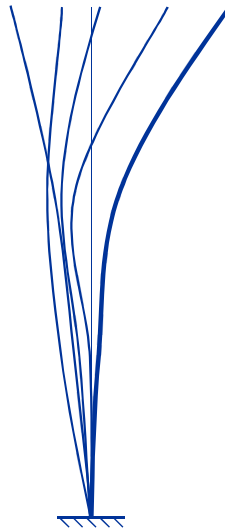
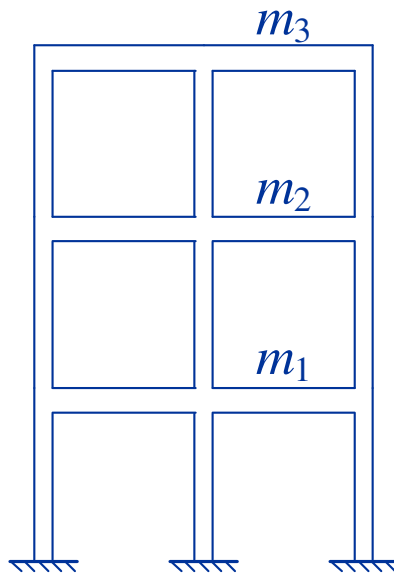
a condizione che sia  $\det(\mathbf{k} - \omega_j^2 \mathbf{m}) = 0$

Da questa si ricavano le frequenze angolari  $\omega_j$  e quindi i periodi  $T_j$  (autovalori) e le deformate  $\phi$  (autovettori)

# Modi di oscillazione libera (significato fisico)

## Modi di oscillazione libera della struttura

- Se si assegna una deformata iniziale qualsiasi e si lascia la struttura libera di oscillare ...

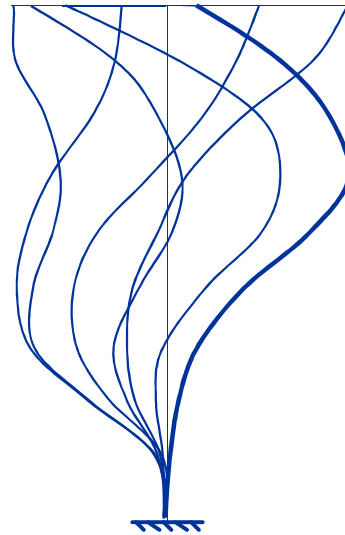
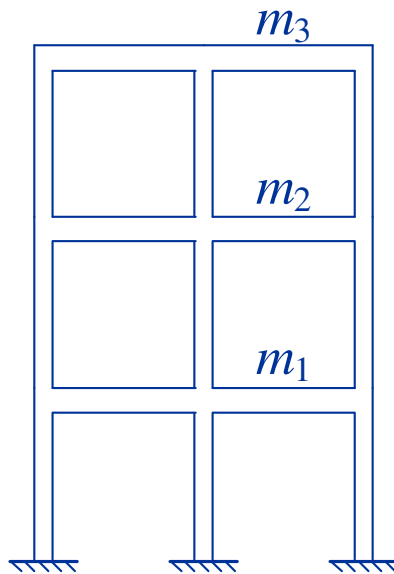


... la struttura si muove in maniera disordinata

# Modi di oscillazione libera (significato fisico)

## Modi di oscillazione libera della struttura

- Se si assegna una deformata iniziale qualsiasi e si lascia la struttura libera di oscillare ...



... la struttura si  
muove in maniera  
disordinata

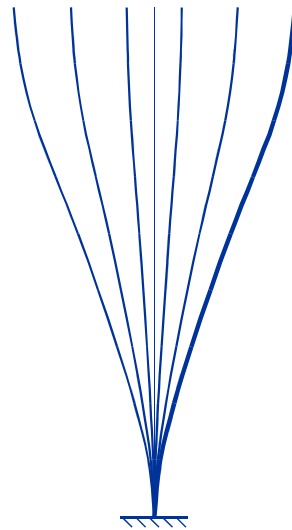
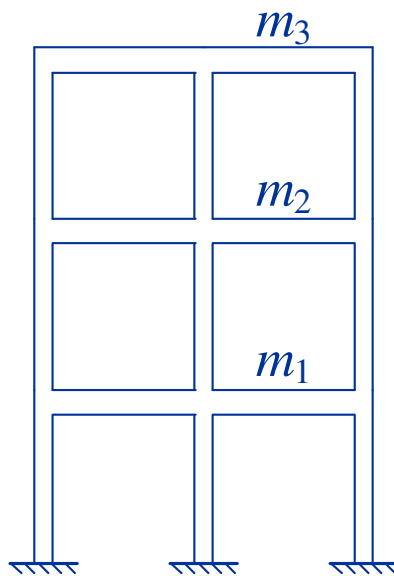
altro esempio

# Modi di oscillazione libera

(significato fisico)

Questo è un "modo di oscillazione libera"

- Se si assegna una particolare deformata iniziale e si lascia la struttura libera di oscillare ...



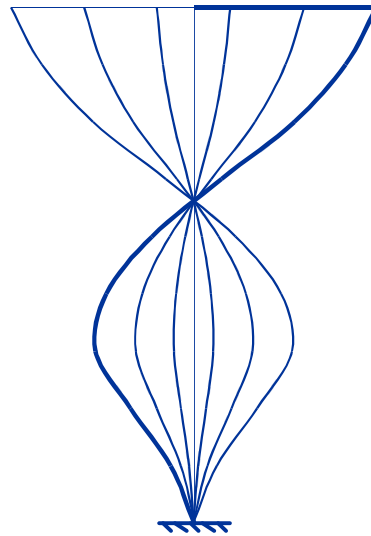
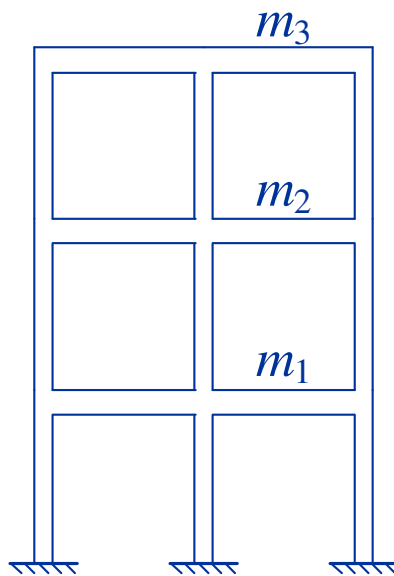
... la struttura si muove mantenendo la forma della deformata ed oscilla con un periodo ben preciso

$T$  = periodo di oscillazione libera

# Modi di oscillazione libera (significato fisico)

Questo è un "modo di oscillazione libera"

- Se si assegna una particolare deformata iniziale e si lascia la struttura libera di oscillare ...



altro esempio

... la struttura si muove mantenendo la forma della deformata ed oscilla con un periodo ben preciso

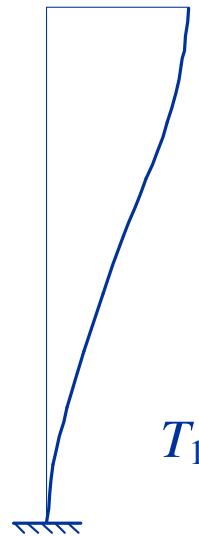
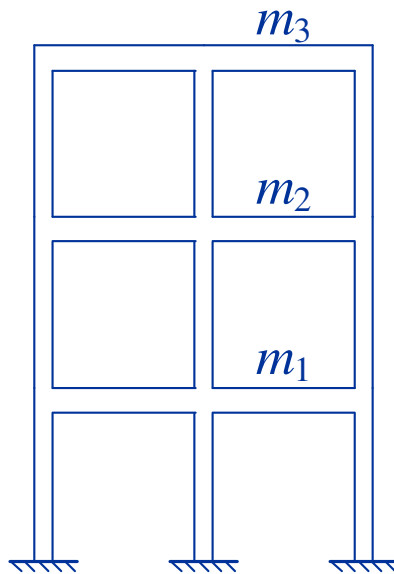
$T$  = periodo di oscillazione libera

# Modi di oscillazione libera

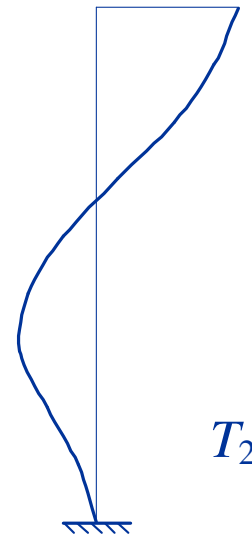
Telaio piano (con traversi inestensibili):

numero di modi di oscillazione libera = numero di piani

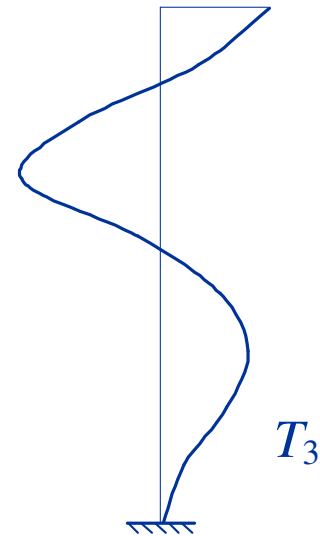
I modi sono ordinati con periodo decrescente



Primo modo



Secondo modo



Terzo modo



# Moto forzato

Possibili approcci per valutare la risposta elastica

Analisi dinamica, con valutazione della storia della risposta, istante per istante (time history)

Analisi modale con spettro di risposta, per valutare la massima risposta

Analisi statica, per valutare in maniera approssimata la massima risposta

# Analisi dinamica

(trattazione matematica)

- Se il sistema ha  $n$  gradi di libertà (dinamici) il suo moto è descritto con  $n$  funzioni spostamento  $u$  (quindi con un vettore di funzioni  $u$ )
- L'equazione del moto (equilibrio dinamico) in termini matriciali è analoga a quella dell'oscillatore semplice

$$m \ddot{u} + c \dot{u} + k u = -m I \ddot{u}_g$$

è formalmente simile, ma in realtà è un sistema di equazioni differenziali

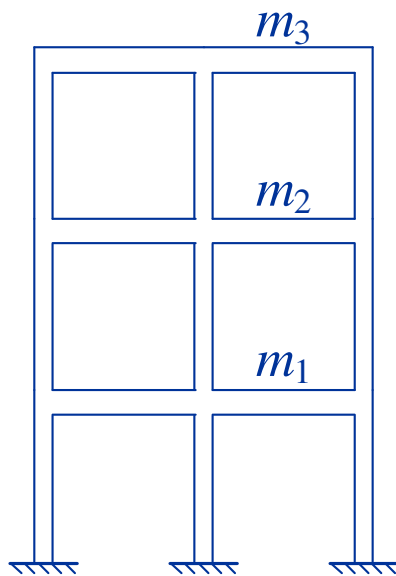
- Se la forzante non è armonica il sistema di equazioni deve essere risolto per via numerica



# Analisi dinamica (trattazione matematica)

Risoluzione per via numerica

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k} \mathbf{u} = -\mathbf{m} \mathbf{I} \ddot{u}_g$$



Noti i valori di  $\mathbf{u}$ ,  $\dot{\mathbf{u}}$ ,  $\ddot{\mathbf{u}}$  in un certo istante  $t_1$  ed il valore di  $\ddot{u}_g$  tra  $t_1$  e  $t_1 + \Delta t$  si possono ricavare i valori di  $\mathbf{u}$ ,  $\dot{\mathbf{u}}$ ,  $\ddot{\mathbf{u}}$  nell'istante  $t_1 + \Delta t$

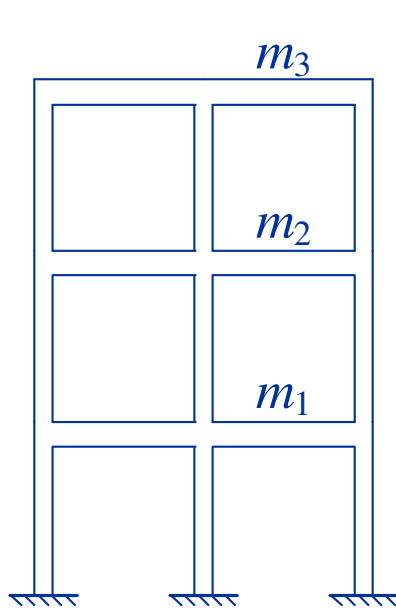
Si ottiene la risposta nel tempo, istante dopo istante (time history)



# Analisi dinamica

(trattazione matematica)

Questo tipo di analisi è consentito dalla normativa ed è detto **analisi dinamica (lineare)**, con valutazione della storia della risposta



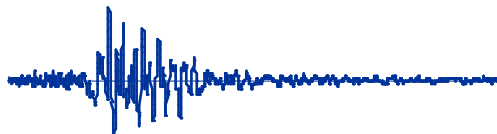
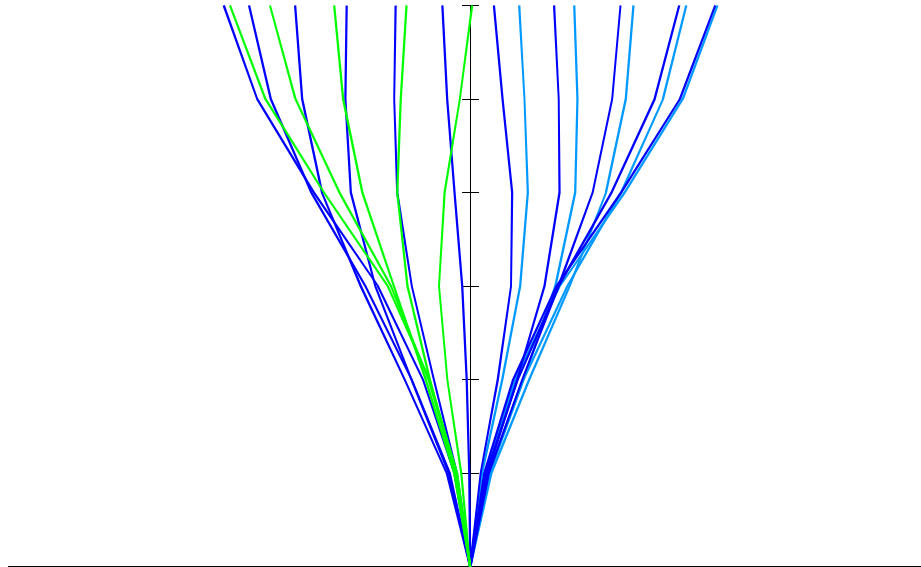
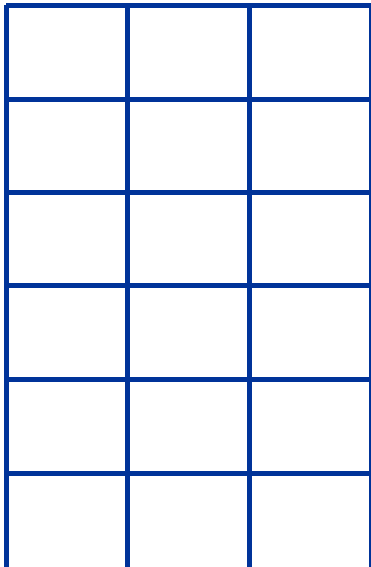
Noti i valori di  $\mathbf{u}$ ,  $\dot{\mathbf{u}}$ ,  $\ddot{\mathbf{u}}$  in un certo istante  $t_1$  ed il valore di  $\ddot{u}_g$  tra  $t_1$  e  $t_1 + \Delta t$  si possono ricavare i valori di  $\mathbf{u}$ ,  $\dot{\mathbf{u}}$ ,  $\ddot{\mathbf{u}}$  nell'istante  $t_1 + \Delta t$

Si ottiene la risposta nel tempo, istante dopo istante (time history)



# Analisi dinamica

## con valutazione della storia della risposta



Si ottiene la risposta istante per istante  
La struttura si deforma nel tempo  
La forma della deformata varia nel tempo

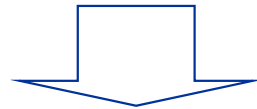
# Analisi dinamica

con valutazione della storia della risposta

- Determinare la risposta istante per istante è possibile ma è matematicamente oneroso

Ma ci serve veramente?

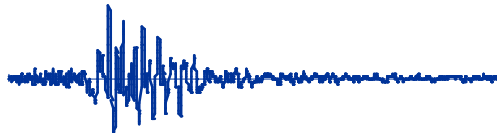
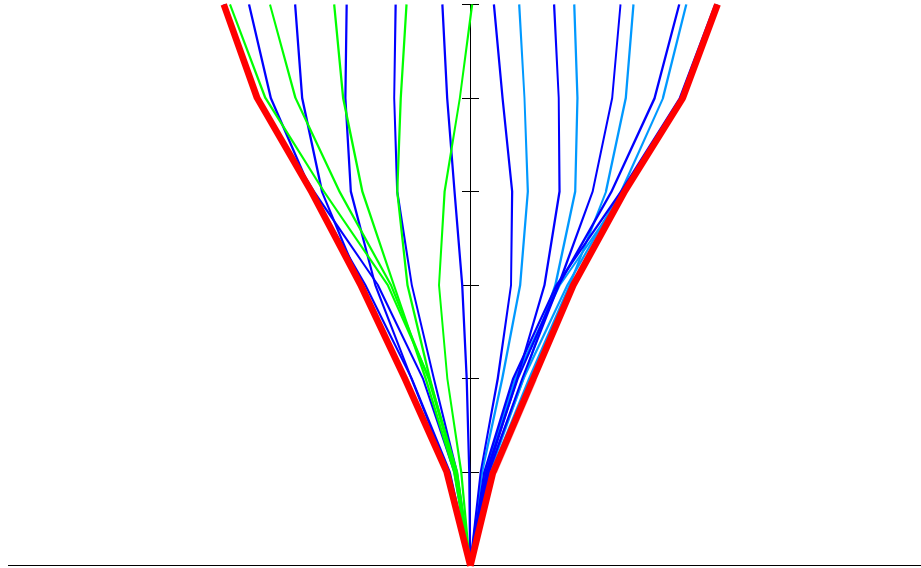
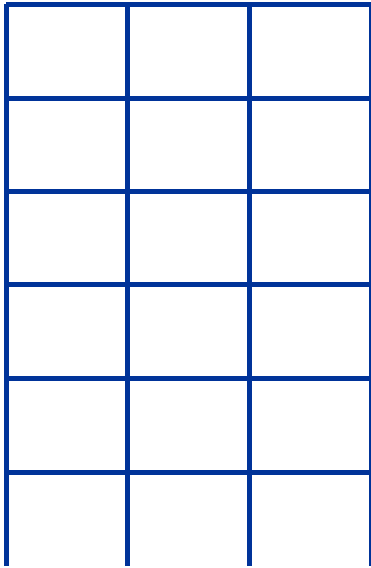
- In realtà a noi interessano i massimi spostamenti e le massime sollecitazioni



Per ottenere questi si può usare  
un procedimento più semplice:  
l'analisi modale (con spettro di risposta)

# Analisi modale

(con spettro di risposta)



La struttura si deforma nel tempo  
La forma della deformata varia nel tempo

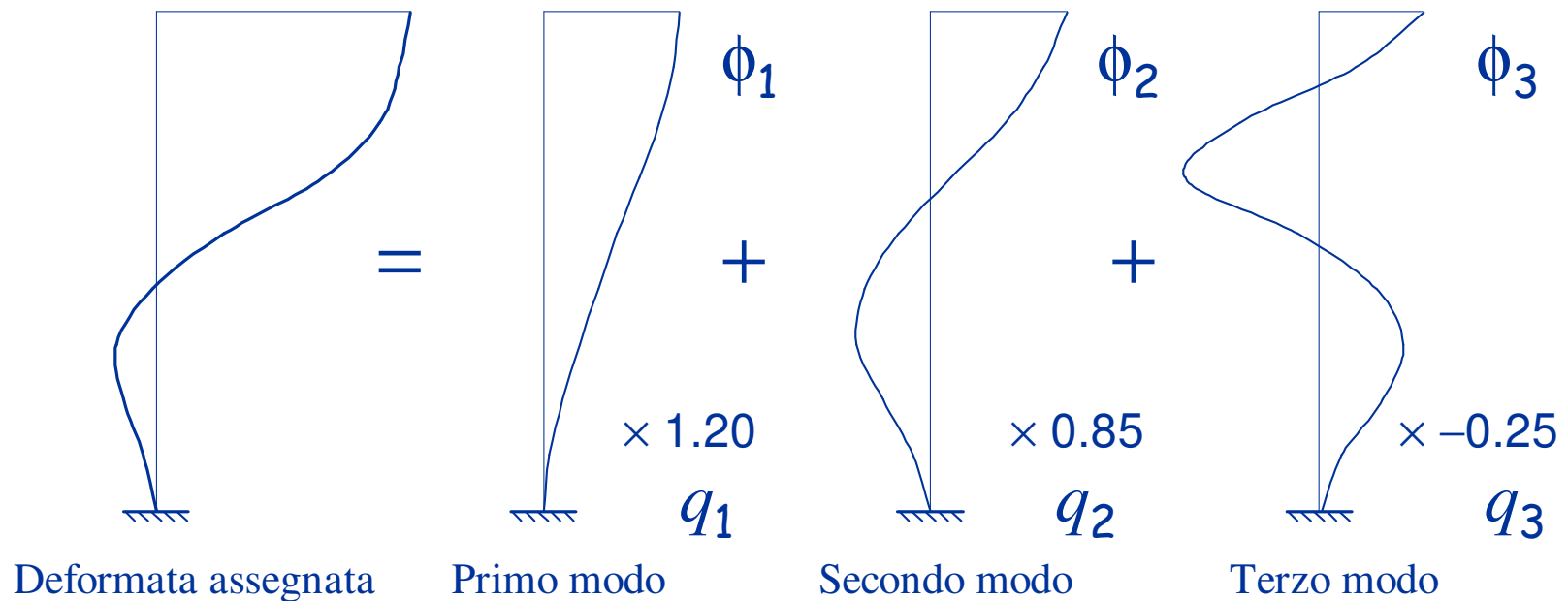
L'analisi modale fornisce l'involuppo degli spostamenti, delle sollecitazioni, ecc.



# Dall'analisi dinamica all'analisi modale

(trattazione matematica)

Una qualsiasi deformata può essere espressa come combinazione delle deformate modali



$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\phi} \mathbf{q}$$





# Dall'analisi dinamica all'analisi modale

## moto libero non smorzato

Con questa posizione, l'equazione del moto diventa

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{k} \mathbf{u} = 0 \quad \mathbf{u} = \boldsymbol{\phi} \mathbf{q} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = 0$$

Nelle matrici  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{K}$  solo i termini della diagonale principale sono diversi da zero

Il sistema di equazioni è quindi costituito da equazioni disaccoppiate, ciascuna contenente una sola incognita

Si può valutare il contributo di ciascun modo separatamente, come se fosse un oscillatore semplice



# Dall'analisi dinamica all'analisi modale

## moto libero con smorzamento

Con la stessa posizione, l'equazione del moto in presenza di smorzamento diventa

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k} \mathbf{u} = 0 \quad \mathbf{u} = \boldsymbol{\phi} \mathbf{q} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = 0$$

In molti casi anche la matrice  $\mathbf{C}$  è diagonale e le equazioni sono disaccoppiate  
(sistemi classicamente smorzati)



# Dall'analisi dinamica all'analisi modale

## risposta ad un accelerogramma

L'equazione del moto

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k} \mathbf{u} = -\mathbf{m} \mathbf{I} \ddot{u}_g$$

diventa

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = -\boldsymbol{\phi}^T \mathbf{m} \mathbf{I} \ddot{u}_g$$

Anche in questo caso se la struttura è classicamente smorzata il sistema si scompone in tante equazioni separate

$$\ddot{q}_j + 2 \xi_j \omega_j \dot{q}_j + \omega_j^2 q_j = \underbrace{(-\Gamma_j)}_{\text{partecipazione modale}} \ddot{u}_g$$

$$\Gamma_j = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \phi_{i,j}}{\sum_{i=1}^n m_i \phi_{i,j}^2}$$

Si noti che l'accelerazione del terreno è moltiplicata per  $\Gamma_j$

**Coefficiente di partecipazione modale:**  
indica se il contributo del modo al moto totale del sistema è più, o meno, rilevante



# Dall'analisi dinamica all'analisi modale

## risposta ad un accelerogramma

- Matematicamente, il moto della struttura è, istante per istante, la combinazione dei moti corrispondenti a ciascun modo
- I coefficienti  $q$  variano con le leggi di oscillatori semplici (con accelerazione di input scalata mediante  $\Gamma$ ) e il loro valore, istante per istante, può essere facilmente calcolato
- Si può determinare così la time history (è un procedimento alternativo a quello prima descritto)

# Dall'analisi dinamica all'analisi modale

## risposta ad un accelerogramma

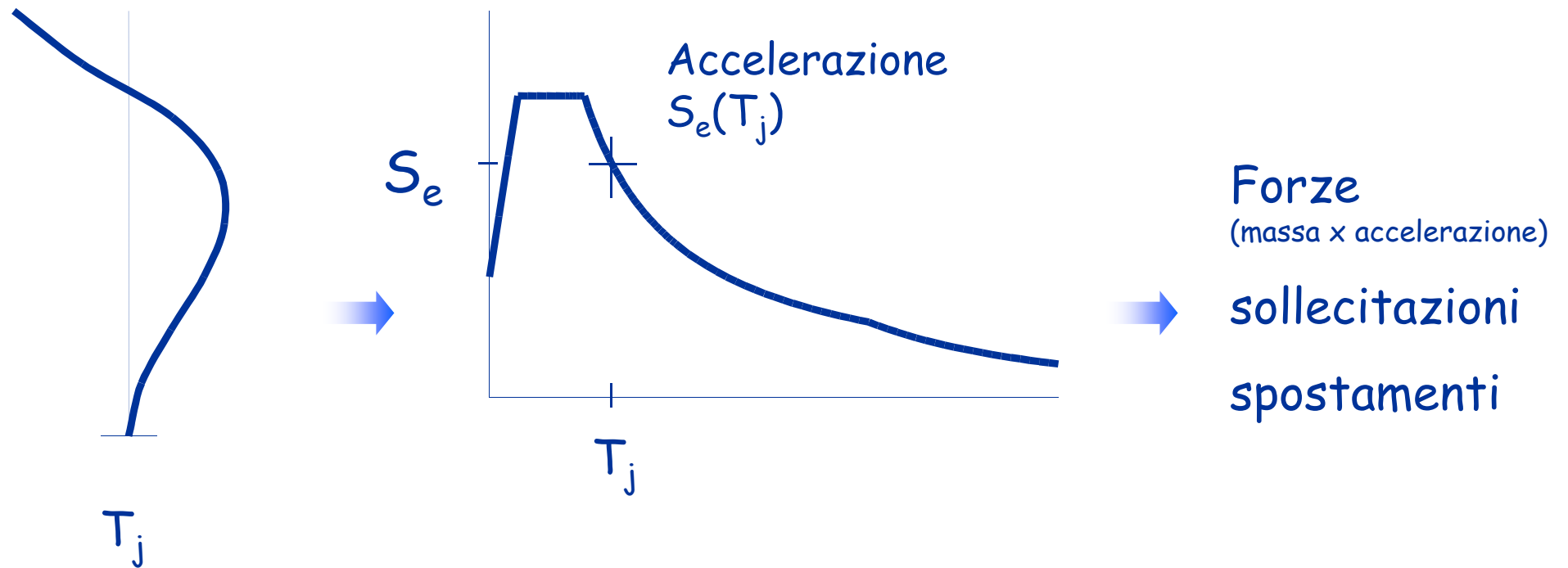
Se interessano solo i massimi:

- Si può valutare la risposta massima corrispondente a ciascun modo, utilizzando lo spettro di risposta dell'accelerogramma
- È possibile ricavare per ciascun modo un insieme di forze e calcolare le sollecitazioni prodotte
- Il contributo di quel "modo" al moto complessivo della struttura è scalato mediante un **coefficiente di partecipazione modale** o - in maniera più chiara - in funzione della **massa partecipante**

# Dall'analisi dinamica all'analisi modale

## contributo massimo di un modo

Per valutare la massima risposta della struttura vincolata a deformarsi secondo uno dei suoi modi di oscillazione ...



# Dall'analisi dinamica all'analisi modale

## contributo massimo di un modo

$S_e(T_j)$  = ordinata spettrale corrispondente al periodo  $T_j$

Il taglio alla base corrispondente al modo  $j$  è

$$V_{b,j} = M_j^* S_e(T_j)$$

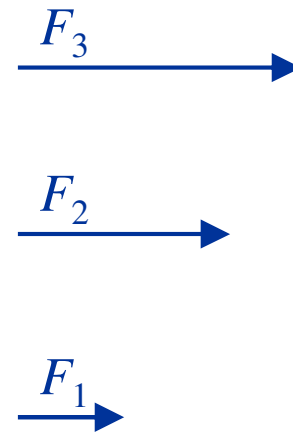
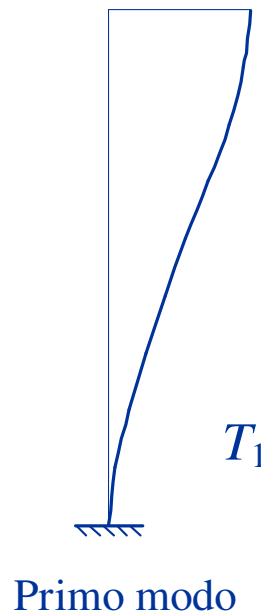
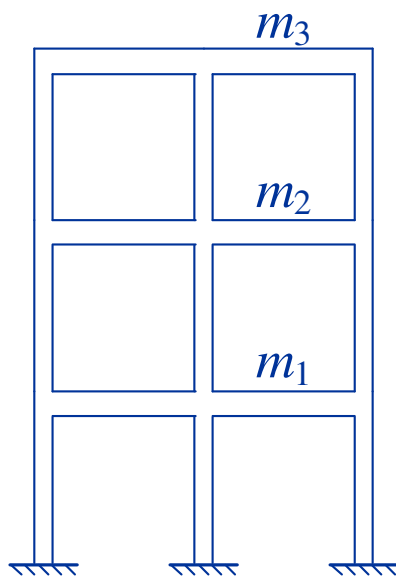
$M_j^*$  è detta massa partecipante

$$M_j^* = \sum_{i=1}^n m_i \phi_{i,j} \Gamma_j = \frac{\left( \sum_{i=1}^n m_i \phi_{i,j} \right)^2}{\sum_{i=1}^n m_i \phi_{i,j}^2}$$

# Dall'analisi dinamica all'analisi modale

## contributo massimo di un modo

Si ritorna in sostanza all'idea di applicare alla struttura un insieme di forze (statiche) orizzontali



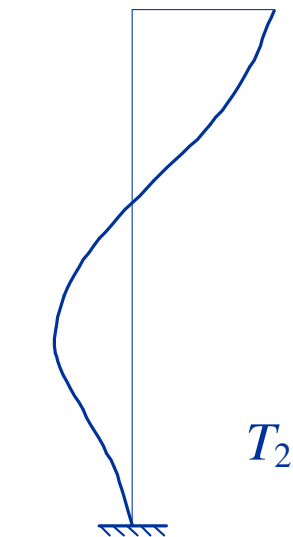
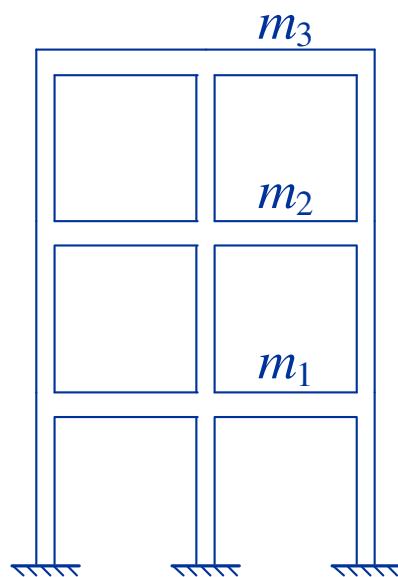
Forze  
corrispondenti al  
primo modo



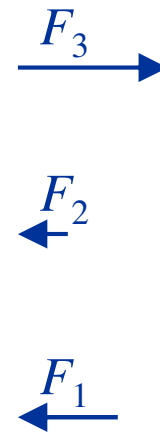
# Dall'analisi dinamica all'analisi modale

## contributo massimo di un modo

Si ritorna in sostanza all'idea di applicare alla struttura un insieme di forze (statiche) orizzontali



Secondo modo



Forze  
corrispondenti al  
secondo modo

# Analisi modale

## con spettro di risposta

Per valutare la risposta massima dell'intera struttura occorre considerare il contributo massimo di più modi, ciascuno valutato tenendo conto dello spettro di risposta

Per questo si parla di **analisi modale con spettro di risposta**

- Il contributo di ciascun "modo" al moto complessivo della struttura è scalato mediante un coefficiente di partecipazione modale o - in maniera più chiara - in funzione della massa partecipante
- La somma delle masse partecipanti di tutti i modi è pari alla massa totale della struttura  
(per questo motivo si parla in genere di masse partecipanti come percentuale della massa totale)

# Analisi modale

## con spettro di risposta

Consiste nel valutare separatamente la risposta della struttura vincolata a deformarsi secondo ciascuno dei suoi modi di oscillazione . . .

. . . e poi combinare le massime sollecitazioni (o spostamenti) trovati per i singoli modi con criteri statistici

- SRSS = radice quadrata della somma dei quadrati
- CQC = combinazione quadratica completa

# Analisi modale con spettro di risposta

Combinazione dei risultati:

- È opportuno usare sempre la CQC

$$E = \left( \sum_j \sum_i \rho_{ij} \cdot E_i \cdot E_j \right)^{1/2}$$

con:

$E_j$  valore dell'effetto relativo al modo  $j$ ;

$\rho_{ij}$  coefficiente di correlazione tra il modo  $i$  e il modo  $j$ , calcolato con formule di comprovata validità quale:

$$\rho_{ij} = \frac{8\sqrt{\xi_i \cdot \xi_j} (\beta_{ij} \cdot \xi_i + \xi_j) \cdot \beta_{ij}^{3/2}}{(1 - \beta_{ij}^2)^2 + 4 \cdot \xi_i \cdot \xi_j \cdot \beta_{ij} (1 + \beta_{ij}^2) + 4 \cdot (\xi_i^2 + \xi_j^2) \cdot \beta_{ij}^2} \quad [7.3.5a]$$

che, nel caso di uguale smorzamento dei modi  $i$  e  $j$ , si esprime come:

$$\rho_{ij} = \frac{8\xi^2 \beta_{ij}^{3/2}}{(1 + \beta_{ij}) \cdot [(1 - \beta_{ij})^2 + 4\xi^2 \beta_{ij}]} \quad [7.3.5b]$$

$\xi_{ij}$  smorzamento viscoso dei modi  $i$  e  $j$ ;

$\beta_{ij}$  è il rapporto tra l'inverso dei periodi di ciascuna coppia  $i$ - $j$  di modi ( $\beta_{ij} = T_j/T_i$ ).

# Analisi modale

## con spettro di risposta

Consiste nel valutare separatamente la risposta della struttura vincolata a deformarsi secondo ciascuno dei suoi modi di oscillazione . . .

. . . e poi combinare le massime sollecitazioni (o spostamenti) trovati per i singoli modi con criteri statistici

- SRSS = radice quadrata della somma dei quadrati
  - CQC = combinazione quadratica completa
- Attenzione: nel fare la combinazione si perde il segno (che può essere utile);  
ma se c'è un modo prevalente si può assegnare a ciascun valore il segno che esso ha nel modo prevalente

# Contributo dei singoli modi

Il primo modo è nettamente predominante per entità di massa partecipante. Le forze sono tutte dello stesso verso

Gli altri modi hanno masse partecipanti via via minori. Essi danno forze discordi, che producono un effetto minore rispetto alla base

In generale, è opportuno considerare tanti modi da:

- raggiungere una massa partecipante dell'85%
- non trascurare modi con massa partecipante superiore al 5%

# Contributo dei singoli modi

Il primo modo è nettamente predominante per entità di massa partecipante. Le forze sono tutte dello stesso verso

Gli altri modi  
Essi danno  
minore r

Il primo modo è nettamente predominante

a minori.  
effetto

In genere

Possiamo fare ulteriori semplificazioni

odi da:

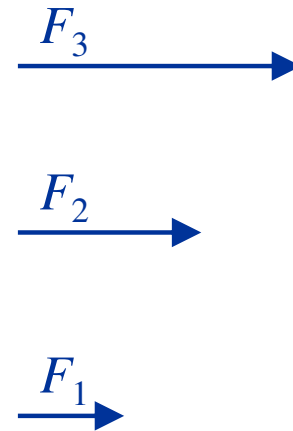
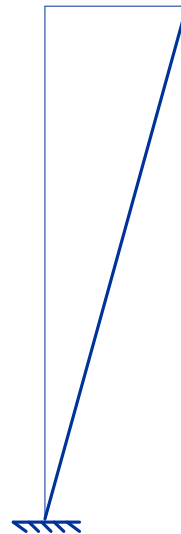
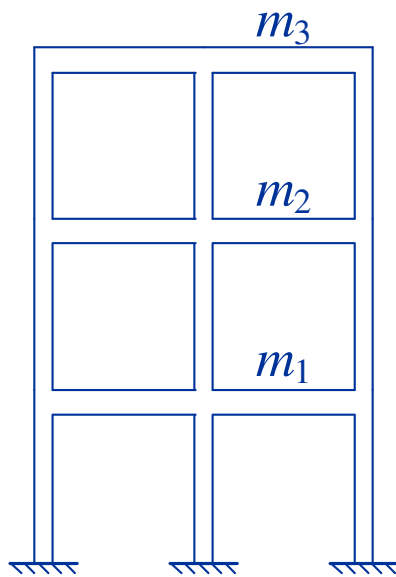
- raggiun

%

- non trascurare modi con massa partecipante superiore al 5%

# Analisi statica

Se si considera solo un modo (il primo), assumendo per esso una deformata lineare, si ha la cosiddetta analisi statica



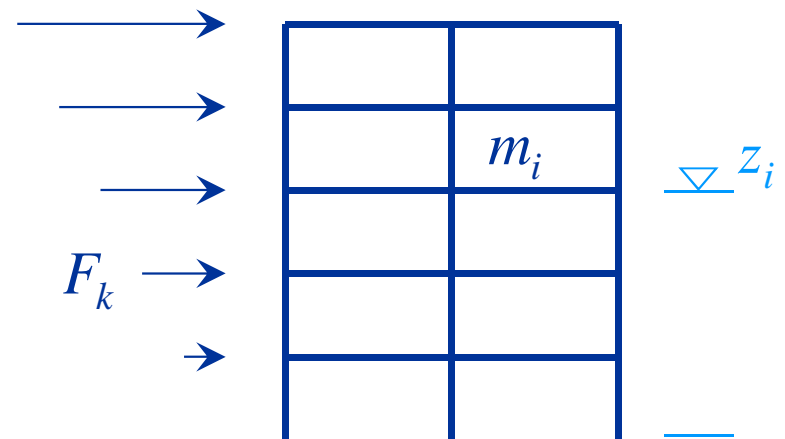
Forze  
corrispondenti alla  
forma lineare



# Analisi statica

Consiste nel considerare un unico insieme di forze, che rappresentano (in modo semplificato) l'effetto del primo modo

$$F_k = m_k z_k \frac{\sum_{i=1}^n m_i}{\sum_{i=1}^n m_i z_i} S_e(T_1)$$



Il periodo proprio può essere valutato con formule semplificate

$$T_1 = C_1 H^{3/4}$$

Le forze possono essere ridotte con  $\lambda=0.85$  se l'edificio ha almeno 3 piani e periodo non troppo alto

# Considerazioni: analisi statica o analisi modale?

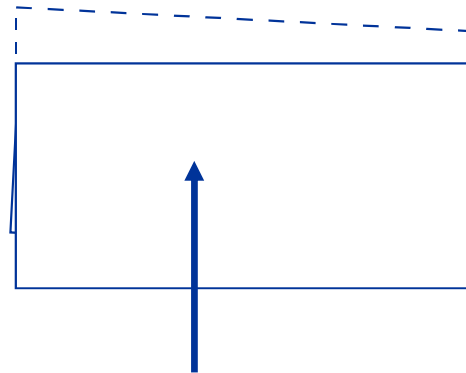
- L'analisi statica ha un significato fisico facilmente comprensibile (applicare alla struttura un insieme di forze orizzontali)
- In molti casi l'analisi statica fornisce risultati quasi uguali o leggermente cautelativi rispetto all'analisi modale
- L'analisi statica può però presentare seri problemi:
  - per strutture non regolari
  - per strutture molto deformabili

# Considerazioni: analisi statica o analisi modale?

L'analisi statica fornisce risultati attendibili purché:

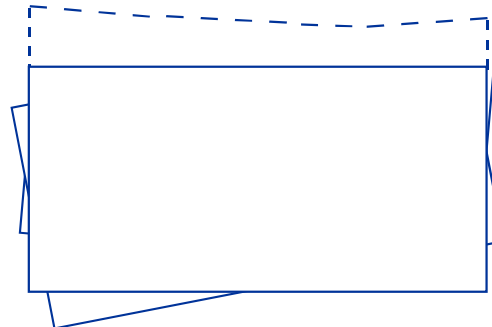
- la struttura abbia comportamento piano (basse rotazioni planimetriche)

Analisi statica



Per edifici con  
forti rotazioni,  
non va bene

Analisi modale



modo 1

modo 2

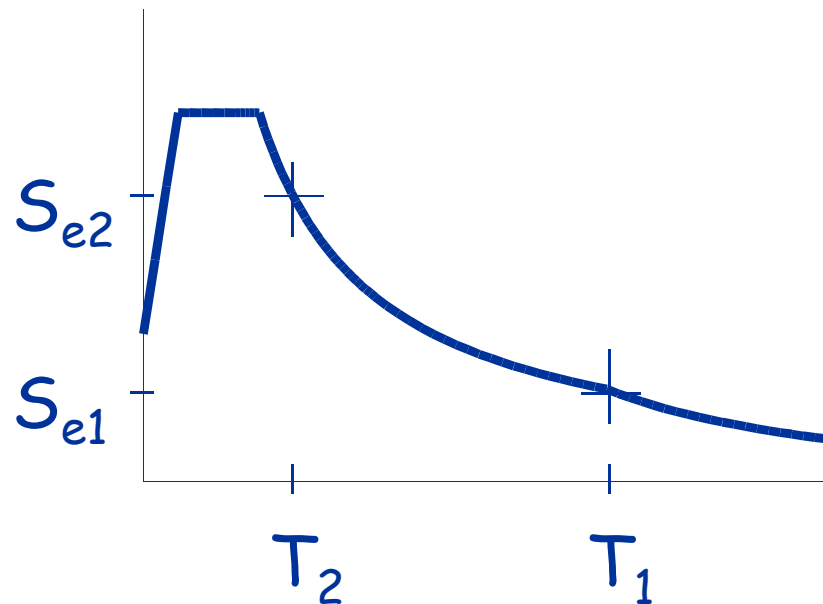
inviluppo

# Considerazioni: analisi statica o analisi modale?

L'analisi statica fornisce risultati attendibili purché:

- la struttura abbia comportamento piano (basse rotazioni planimetriche)
- la struttura abbia periodo non eccessivamente alto

accelerazione  
molto bassa,  
non cautelativa



# Considerazioni: analisi statica o analisi modale?

L'analisi statica fornisce risultati attendibili purché:

- la struttura abbia comportamento piano (basse rotazioni planimetriche)
- la struttura abbia periodo non eccessivamente alto
- la stima del periodo proprio sia affidabile (o, meglio, corretta con la formula di Rayleigh)

La norma prevede un coefficiente riduttivo  $\lambda$  che rende i risultati dell'analisi statica non particolarmente gravosi rispetto a quelli dell'analisi modale

# Considerazioni: analisi statica o analisi modale?

La NTC08 vieta l'uso dell'analisi statica se:

- il periodo proprio supera  $2.5 T_c$
- la struttura è irregolare in altezza

Nota: il riferimento all'irregolarità in altezza non è coerente con gli studi teorici, che evidenziano l'importanza della regolarità in pianta

Questo è un primo esempio di come la normativa tratti in maniera poco corretta gli aspetti connessi alla regolarità (o mancanza di regolarità)

# Considerazioni: analisi statica o analisi modale?

La NTC08 vieta l'uso dell'analisi statica se:

- il periodo proprio supera  $2.5 T_c$
- la struttura è irregolare in altezza

Nota: il riferimento all'irregolarità in altezza non è coerente con gli studi teorici, che evidenziano l'importanza della regolarità in pianta

La Bozza NTC, più correttamente, consente l'analisi statica "per le sole costruzioni la cui risposta sismica, in ogni direzione principale, non dipenda significativamente dai modi di vibrare superiori"

# Considerazioni: analisi statica o analisi modale?

Oggi l'analisi modale è sicuramente il metodo principale di riferimento per l'analisi strutturale, perché è affidabile e ormai alla portata di tutti (grazie ai programmi per computer)

- L'analisi statica è però uno strumento fondamentale per capire il comportamento fisico della struttura e per valutarne a priori la risposta (e quindi anche per controllare a posteriori i risultati dell'analisi modale)
- Esaminare i modi di oscillazione libera e le masse partecipanti può fornire al progettista esperto importanti informazioni sul comportamento della struttura



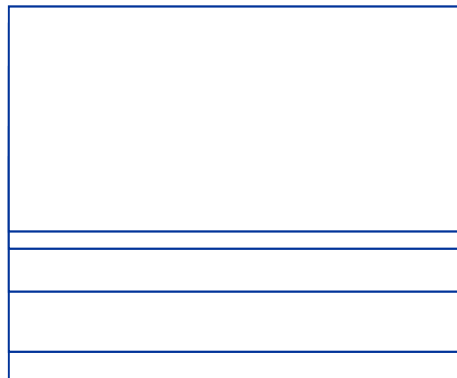
# Modi di oscillazione libera

Telaio spaziale (con impalcati indeformabili nel piano):

numero di modi di oscillazione libera =  $3 \times$  numero di piani

Se la pianta ha due assi di simmetria, i modi di oscillazione libera sono disaccoppiati:

-  $n$  modi di traslazione in una direzione



Vista dell'edificio,  
dall'alto

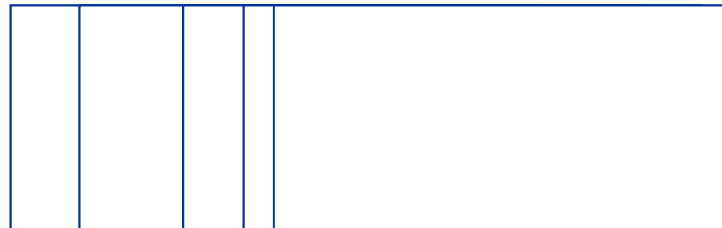
# Modi di oscillazione libera

Telaio spaziale (con impalcati indeformabili nel piano):

numero di modi di oscillazione libera =  $3 \times$  numero di piani

Se la pianta ha due assi di simmetria, i modi di oscillazione libera sono disaccoppiati:

- n modi di traslazione in una direzione
- n modi di traslazione nell'altra direzione



Vista dell'edificio,  
dall'alto

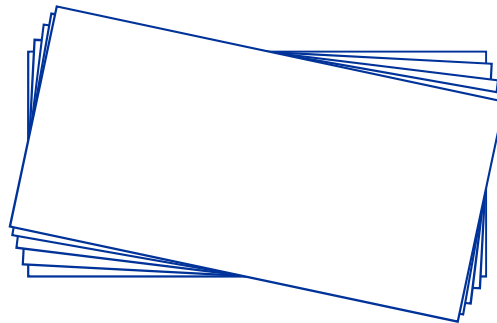
# Modi di oscillazione libera

Telaio spaziale (con impalcati indeformabili nel piano):

numero di modi di oscillazione libera =  $3 \times$  numero di piani

Se la pianta ha due assi di simmetria, i modi di oscillazione libera sono disaccoppiati:

- n modi di traslazione in una direzione
- n modi di traslazione nell'altra direzione
- n modi di rotazione



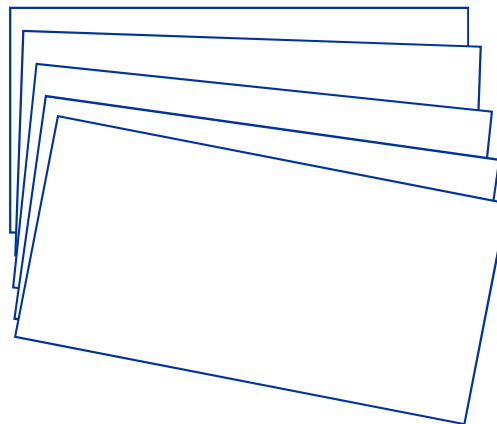
Vista dell'edificio,  
dall'alto

# Modi di oscillazione libera

Telaio spaziale (con impalcati indeformabili nel piano):

numero di modi di oscillazione libera =  $3 \times$  numero di piani

Se la pianta non ha assi di simmetria:  
i modi di oscillazione libera sono accoppiati



# Modi di oscillazione libera

Telaio spaziale

senza impalcati indeformabili nel piano

Il numero di modi di oscillazione libera è molto maggiore

# Considerazioni: analisi statica o analisi modale?

- Oggi l'analisi modale è sicuramente il metodo principale di riferimento per l'analisi strutturale, perché è affidabile e ormai alla portata di tutti (grazie ai programmi per computer)
- Esaminare i modi di oscillazione libera e le masse partecipanti può fornire al progettista esperto importanti informazioni sul comportamento della struttura
- Ma l'analisi modale può essere difficile da interpretare

# Considerazioni: analisi statica o analisi modale?

Negli schemi spaziali è più difficile valutare l'importanza dei modi:

- se il comportamento è disaccoppiato, sono eccitati solo quei modi che danno spostamento nella direzione di azione del sisma
- in caso contrario tutti i modi possono dare contributo
- se non vi è un impalcato indeformabile nel suo piano il numero di modi cresce enormemente ed è più difficile cogliere la risposta totale della struttura

# Considerazioni: analisi statica o analisi modale?

- Oggi l'analisi modale è sicuramente il metodo principale di riferimento per l'analisi strutturale, perché è affidabile e ormai alla portata di tutti (grazie ai programmi per computer)
- Esaminare i modi di oscillazione libera e le masse partecipanti può fornire al progettista esperto importanti informazioni sul comportamento della struttura
- Ma l'analisi modale può essere difficile da interpretare
- Con l'analisi modale si perde il segno dei risultati



# Considerazioni: analisi statica o analisi modale?

- Oggi l'analisi modale è sicuramente il metodo principale di riferimento per l'analisi strutturale, perché è affidabile e ormai alla portata di tutti (grazie ai programmi per computer)
- L'analisi statica è però uno strumento fondamentale per capire il comportamento fisico della struttura e per valutarne a priori la risposta (e quindi anche per controllare a posteriori i risultati dell'analisi modale)