

Corso

# Progetto di strutture in zona sismica

Catania

ottobre 2017 - gennaio 2018

15 - Rigidezza laterale (o traslazionale)

9 novembre 2017

Aurelio Gheresi

# Elementi resistenti alle azioni orizzontali

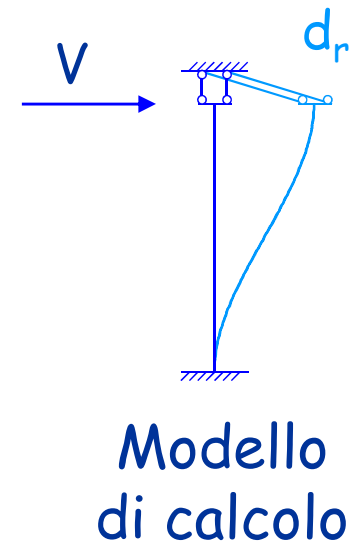
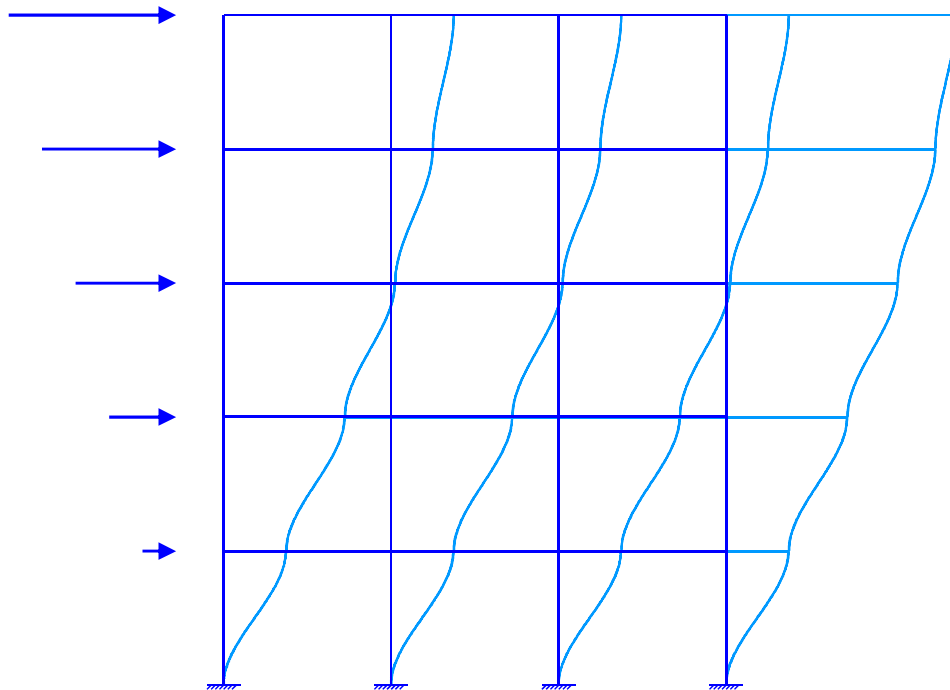
In genere nelle strutture si hanno travi sia emergenti che a spessore e pilastri rettangolari, che possono essere orientati col lato più lungo in una delle due dimensioni della pianta

I singoli pilastri assorbono un'aliquota dell'azione sismica minore o maggiore in proporzione alla loro rigidezza

In che modo si può stimare la rigidezza?

# Rigidezza

- Rigidezza di un pilastro = rapporto tra taglio  $V$  e spostamento relativo  $d_r$
- Se le travi sono infinitamente rigide



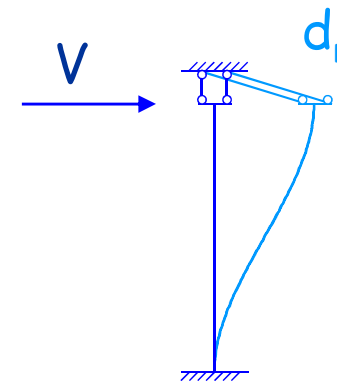
# Rigidezza

- Rigidezza di un pilastro = rapporto tra taglio  $V$  e spostamento relativo  $d_r$
- Se le travi sono infinitamente rigide

$$d_r = \frac{V L_p^3}{12 E I_p}$$

$$\text{rigidezza} = \frac{12 E I_p}{L_p^3}$$

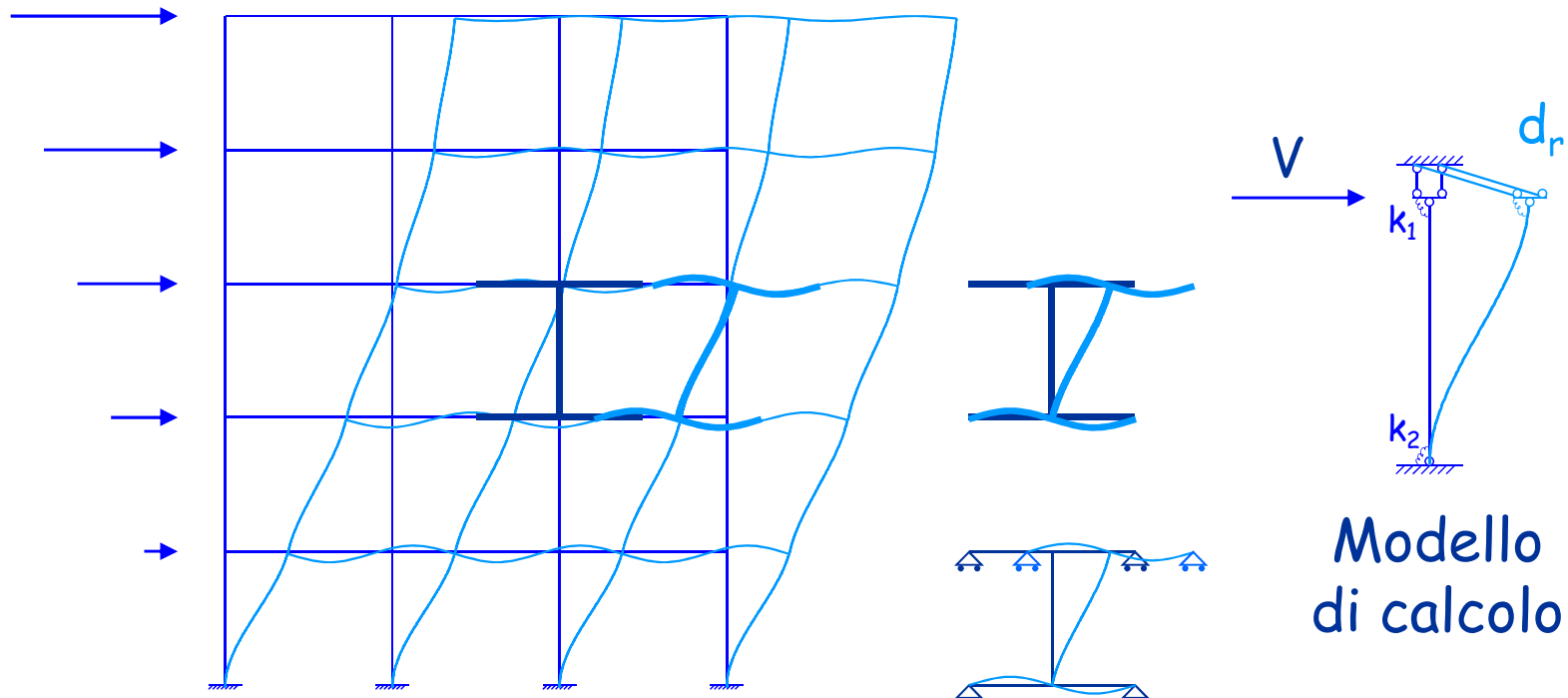
La rigidezza è proporzionale al momento d'inerzia della sezione



Modello  
di calcolo

# Rigidezza

- Rigidezza di un pilastro = rapporto tra taglio  $V$  e spostamento relativo  $d_r$
- In realtà le travi sono deformabili



# Rigidezza

- Rigidezza di un pilastro = rapporto tra taglio  $V$  e spostamento relativo  $d_r$
- In realtà le travi sono deformabili

$$k_1 = \frac{12 E I_{t,\text{sup}}}{L_t}$$

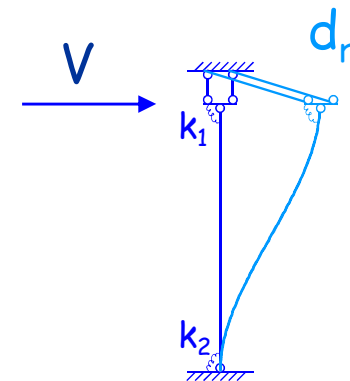


ma poiché la trave serve da vincolo anche al pilastro di sopra, prendo la metà (nel caso di piani intermedi)

$$k_1 = \frac{6 E I_{t,\text{sup}}}{L_t}$$

$$k_2 = \frac{6 E I_{t,\text{inf}}}{L_t}$$

pongo  $r_1 = \frac{E I_p / L_p}{E I_{t,\text{sup}} / L_t}$   $r_2 = \frac{E I_p / L_p}{E I_{t,\text{inf}} / L_t}$

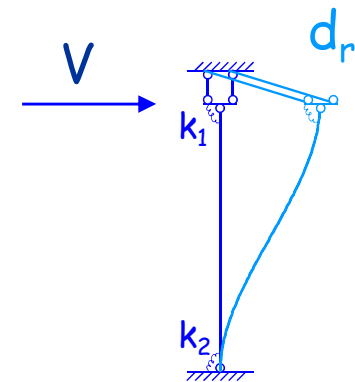


Modello di calcolo

# Rigidezza

- Rigidezza di un pilastro = rapporto tra taglio  $V$  e spostamento relativo  $d_r$
- In realtà le travi sono deformabili

$$\begin{aligned}d_r &= \frac{V L_p^3}{12 E I_p} \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{r_1 + r_2 + 2 r_1 r_2 / 3}{1 + (r_1 + r_2) / 6} \right] \\&= \frac{V L_p^3}{12 E I_p} \left[ 1 + \frac{1}{2} (r_1 + r_2) - \frac{1}{2} \frac{(r_1 - r_2)^2 / 6}{1 + (r_1 + r_2) / 6} \right] \\&\cong \frac{V L_p^3}{12 E I_p} \left[ 1 + \frac{1}{2} (r_1 + r_2) \right] \quad \text{se } r_1 \cong r_2\end{aligned}$$



Modello  
di calcolo

Lo spostamento dipende anche  
dalla rigidezza delle travi

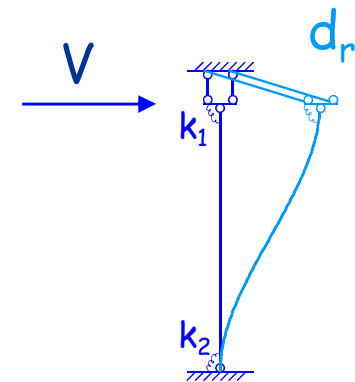
# Rigidezza

- Rigidezza di un pilastro = rapporto tra taglio  $V$  e spostamento relativo  $d_r$
- In realtà le travi sono deformabili

In maniera semplificata, spostamento e rigidezze si possono esprimere direttamente con

$$d_r \cong \frac{V L_p^3}{12 E I_p} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{E I_p / L_p}{E I_{t,sup} / L_t} + \frac{E I_p / L_p}{E I_{t,inf} / L_t} \right) \right]$$

$$\text{rigidezza} = \frac{12 E I_p}{L_p^3} \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \left( \frac{E I_p / L_p}{E I_{t,sup} / L_t} + \frac{E I_p / L_p}{E I_{t,inf} / L_t} \right)}$$



Modello  
di calcolo



# Rigidezza

- Rigidezza di un pilastro = rapporto tra taglio  $V$  e spostamento relativo  $d_r$
- In realtà le travi sono deformabili

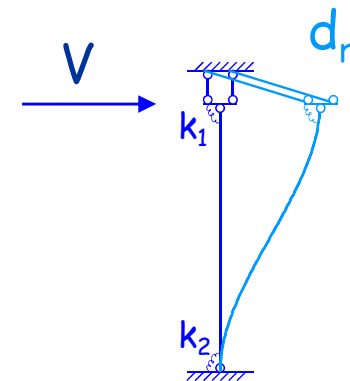
Ora preferisco però usare sempre l'espressione generale

$$\text{rigidezza} = \frac{12 E I_p}{L_p^3} \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \frac{r_1 + r_2 + 2 r_1 r_2 / 3}{1 + (r_1 + r_2) / 6}}$$

$$\text{con } r_1 = \frac{E I_p / L_p}{E I_{t,\text{sup}} / L_t} \quad r_2 = \frac{E I_p / L_p}{E I_{t,\text{inf}} / L_t}$$

Note:  $r = 0$  se la trave è infinitamente rigida (incastro)

si potrebbe dimezzare  $r$  se vi è solo il pilastro sup. o inf. ma non sembra funzioni bene



Modello  
di calcolo

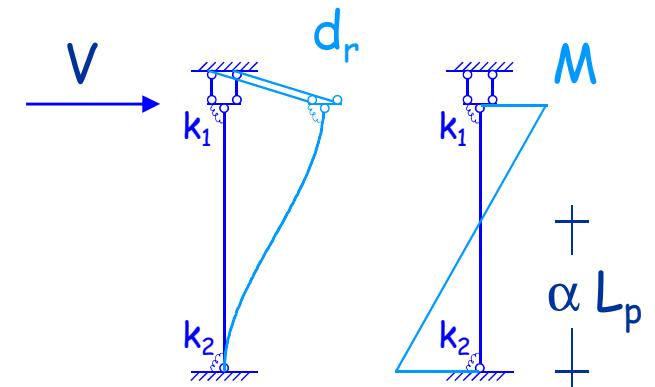
# Rigidezza

- Rigidezza di un pilastro = rapporto tra taglio  $V$  e spostamento relativo  $d_r$
- In realtà le travi sono deformabili

Dallo schema si può ottenere anche la posizione del punto di nullo di  $M$

Dista dalla base  $\alpha L_p$ , con

$$\alpha = 0.5 \frac{1 + r_1 / 3}{1 + r_1 / 6 + r_2 / 6}$$



Modello  
di calcolo

Note:  $r = 0$  se la trave è infinitamente rigida (incastro)  
si potrebbe dimezzare  $r$  se vi è solo il pilastro sup. o inf. ma non sembra funzioni bene

# Rigidezza

Esempio, con travi emergenti e a spessore:

pilastro	30x70	$l=3.20$ m
travi	30x60	$l=4.50$ m
$k = 30.60$ kN/mm		

pilastro	70x30	$l=3.20$ m
travi	30x60	$l=4.50$ m
$k = 12.88$ kN/mm		

pilastro	30x70	$l=3.20$ m
travi	60x24	$l=4.50$ m
$k = 5.36$ kN/mm		

# Rigidezza

Esempio, con solo travi a spessore:

pilastro	30x70	$l=3.20$ m
travi	60x28	$l=4.00$ m
$k = 9.19$ kN/mm		

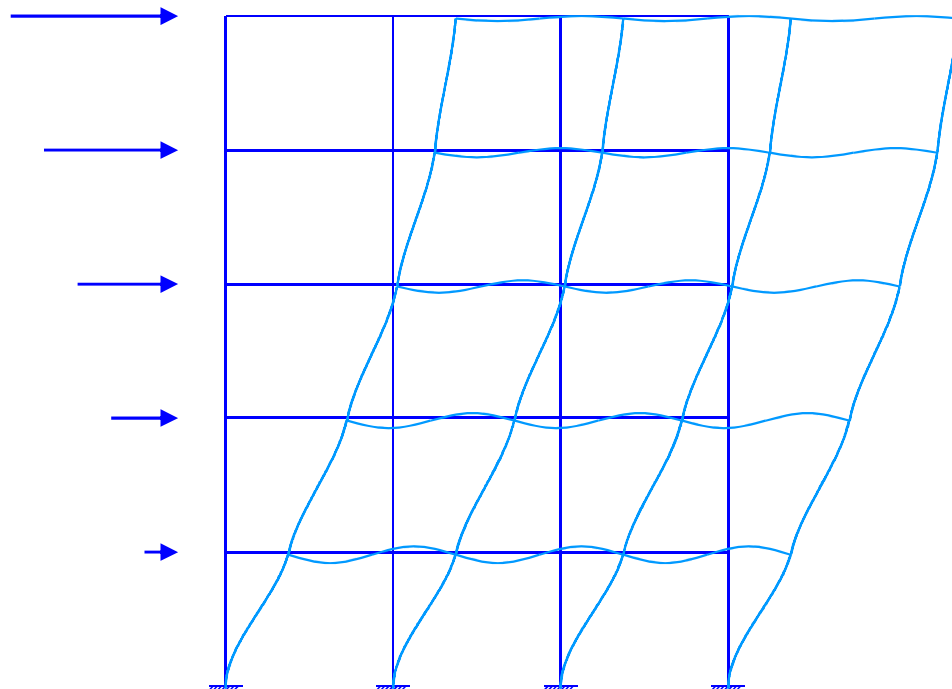
pilastro	70x30	$l=3.20$ m
travi	60x28	$l=4.00$ m
$k = 6.50$ kN/mm		

pilastro	30x70	$l=3.20$ m
una sola trave	60x28	$l=4.00$ m
$k = 4.82$ kN/mm		

# Rigidezza

Nota:

- Le formule sono ricavate nell'ipotesi di rotazione uguale per tutti i nodi



Cadono in difetto se vi sono forti variazioni tra un pilastro e l'altro

In particolare nel caso di un pilastro di piatto tra due pilastri di coltello



In questo caso la rotazione del nodo centrale può essere nulla; valutare la rigidezza del pilastro centrale senza riduzioni

# Rigidezza

Esempio, con travi emergenti e a spessore:

pilastro	30x70	$l=3.20$ m
travi	30x60	$l=4.50$ m
$k = 30.60$ kN/mm		

pilastro	70x30	$l=3.20$ m
travi	30x60	$l=4.50$ m
$k = 12.88$ kN/mm		

pilastro	70x30	$l=3.20$ m
travi	$\infty$ rigide	
$k = 18.17$ kN/mm		

# Foglio di calcolo Rigidezza

<b>Superiormente</b>			<b>pilastro</b>			<b>k (t=inf)</b>			98.92	kN/mm
esiste un pilastro al di sopra ▼			b	30	cm	riduzione			0.309	
			h	70	cm					
			Lp	3.20	m	<b>k</b>			30.60	kN/mm
<b>Inferiormente</b>						<b>punto di nullo di M a</b>			0.500	da base
esiste un pilastro al di sotto ▼										
<b>Travi superiori e inferiori</b>			<b>travi superiori</b>							
diverse tra loro ▼			<b>trave sx</b>			<b>trave dx</b>				
			b	30	cm	b	30	cm		
			h	60	cm	h	60	cm		
			Lt	4.50	m	Lt	4.50	m		
<b>Travi a destra e sinistra</b>			<b>travi inferiori</b>							
due, dx e sx, diverse tra loro ▼			<b>trave sx</b>			<b>trave dx</b>				
			b	30	cm	b	30	cm		
			h	60	cm	h	60	cm		
			Lt	come sup		Lt	come sup			
E	31500	MPa								

In **rosso** i dati da inserire

Caselle a discesa per selezionare le possibili situazioni

In **blu** i risultati forniti

Vedi file Excel Rigidezze (vers 2.1, set 2017)

# Foglio di calcolo Rigidezza

Superiormente	
esiste un pilastro al di sopra	▼
non esiste pilastro al di sopra	
esiste un pilastro al di sopra	
la trave superiore è infinitamente rigida	

$r_1$  potrebbe dimezzarsi  
caso standard

$r_1 = 0$

Inferiormente	
esiste un pilastro al di sotto	▼
non esiste pilastro al di sotto	
esiste un pilastro al di sotto	
la trave inferiore è infinitamente rigida	
il pilastro è incastrato alla base	

$r_2$  potrebbe dimezzarsi  
caso standard

$r_2 = 0$

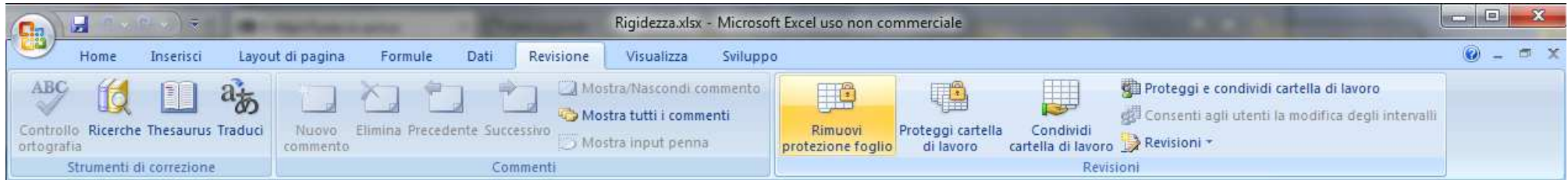
Travi superiori e inferiori	
diverse tra loro	▼
uguali tra loro	
diverse tra loro	

Travi a destra e sinistra	
due, dx e sx, diverse tra loro	▼
una sola	
due, dx e sx, diverse tra loro	
due, dx e sx, uguali tra loro	

Vedi file Excel Rigidezze (vers 2.1, set 2017)



# Foglio di calcolo Rigidezza



Nota: nel foglio di calcolo è inserita una protezione, per evitare che si inseriscano valori in celle sbagliate. La protezione è senza password e può essere rimossa se si vuole modificare il file

# Foglio di calcolo Rigidezza

<b>Superiormente</b>			<b>pilastro</b>			k (t=inf)	98.92	kN/mm	non esiste pilastro al di sopra							
non esiste pilastro al di sopra ▼			b	30	cm	riduzione	0.328		esiste un pilastro al di sopra							
			h	70	cm				la trave superiore è infinitamente rigida							
			Lp	3.20	m	k	32.49	kN/mm								
						<b>punto di nullo di M a</b>		0.500	da base	non esiste pilastro al di sotto						
						questo valore teorico deve essere ridotto				esiste un pilastro al di sotto						
										la trave inferiore è infinitamente rigida						
										il pilastro è incastrato alla base						
<b>Travi superiori e inferiori</b>						<b>travi (inf=sup)</b>										
uguali tra loro ▼			trave sx			trave dx										
			b	30	cm	b	30	cm	uguali tra loro							
			h	60	cm	h	60	cm	diverse tra loro							
			Lt	4.50	m	Lt	3.80	m								
<b>Travi a destra e sinistra</b>										una sola						
due, dx e sx, diverse tra loro ▼									due, dx e sx, diverse tra loro							
									due, dx e sx, uguali tra loro							
E	31500	MPa														
lp	857500	cm <sup>4</sup>	sx	30	lt,sup	540000	cm <sup>4</sup>	30	sx	30	lt,inf	540000	cm <sup>4</sup>			
E lp / Lp	8.44E+07	kN mm		60	E lt,s / Lt	3.78E+07	kN mm	60		60	E lt,i / Lt	3.78E+07	kN mm			
				4.50	r1	2.04		4.50		4.50	r2	2.04				
	30		dx	30	lt,sup	540000	cm <sup>4</sup>	30	30	dx	30	lt,inf	540000	cm <sup>4</sup>		
	60			60	E lt,s / Lt	4.48E+07	kN mm	60	60		60	E lt,i / Lt	4.48E+07	kN mm		
	3.80			3.80					3.80		3.80					

Nel foglio sono presenti zone che contengono valori intermedi di calcolo, da non modificare (sono visibili in carattere grigio chiaro)

Vedi file Excel Rigidezze (vers 2.1, set 2017)