

Corso di aggiornamento  
Progettazione strutturale  
e Norme Tecniche per le Costruzioni

**Verifica sismica di edifici esistenti in c.a.**

11 - Analisi non lineare: verifica in termini di deformazioni

Imola  
16-18 maggio 2013  
Aurelio Gheresi

# Analisi non lineare (pushover)

Ordinanza 3431 e Circolare 2/2/09

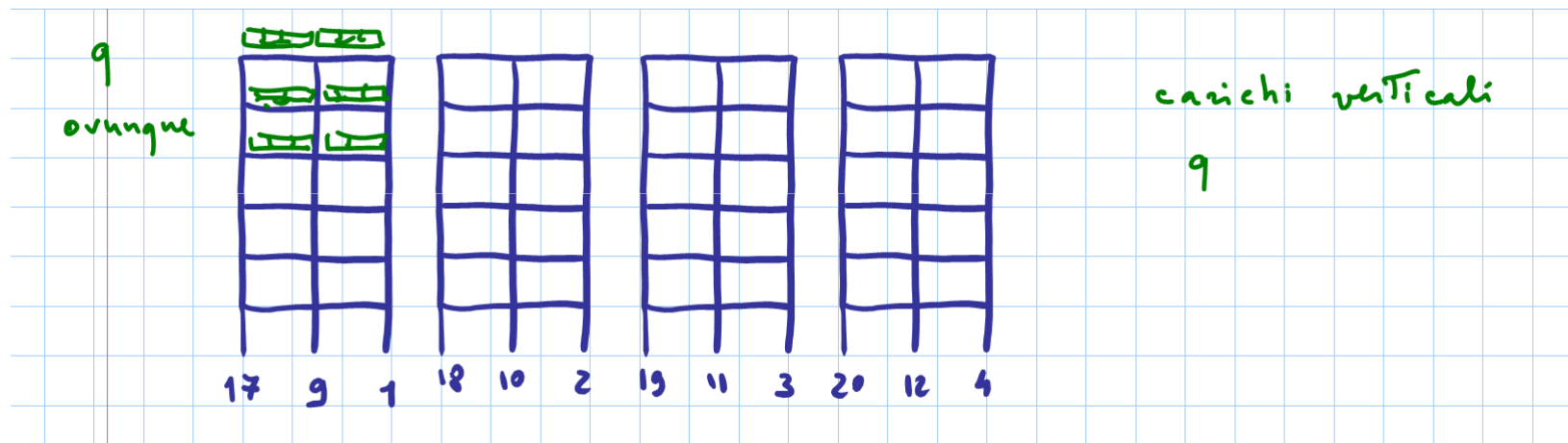
# Pushover

- Analisi non lineare che mostra il comportamento di una struttura soggetta ad una distribuzione crescente di forze orizzontali
  - Occorre applicare preliminarmente i carichi verticali agenti sulla struttura (valori per la condizione sismica)  
Si effettua in genere una analisi lineare, ritenendo che sotto i carichi di esercizio la struttura sia in campo elastico
  - A questi si somma l'effetto di una distribuzione di forze orizzontali, scalate in maniera via via crescente  
Questo effetto si valuta con analisi non lineare
  - Si ottengono così indicazioni sul progressivo stato della struttura (sollecitazioni, spostamenti, ecc.)

# Pushover

esempio - direzione y

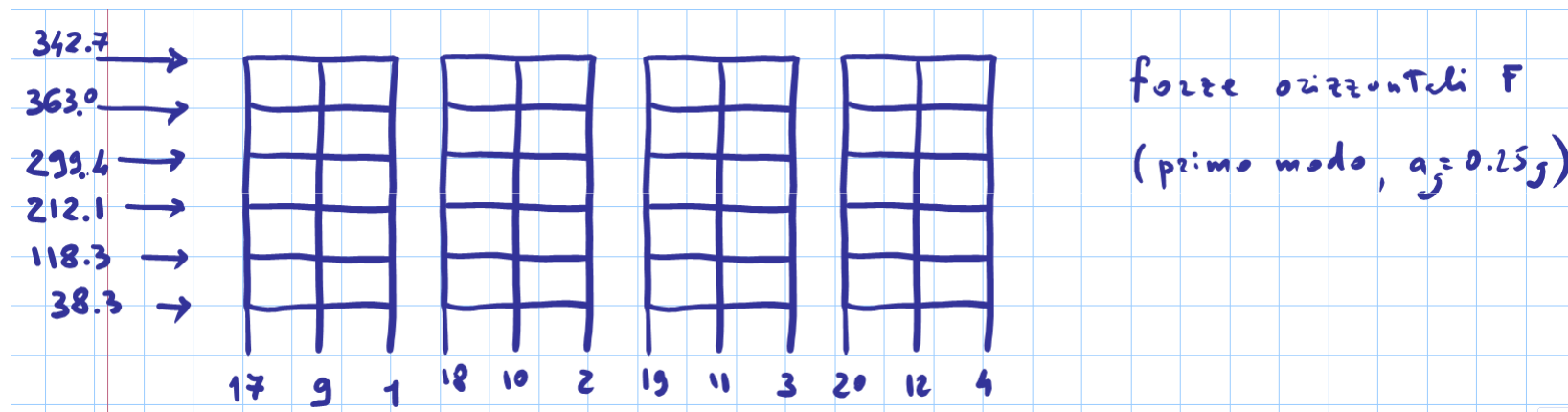
- Carichi verticali



# Pushover

esempio - direzione y

- Distribuzione di forze



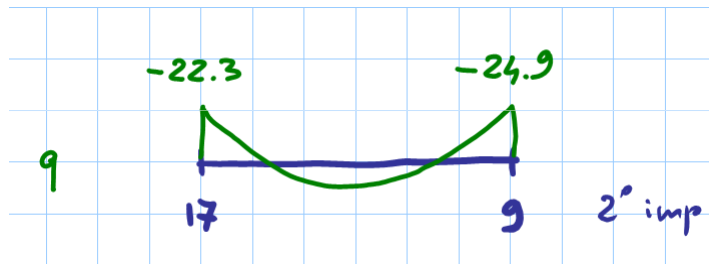
- Le forze usate nell'esempio sono quelle corrispondenti al primo modo

Nota: poiché le forze devono essere scalate, è la distribuzione (cioè i rapporti) che conta, non i valori in sé

# Pushover

esempio - direzione y

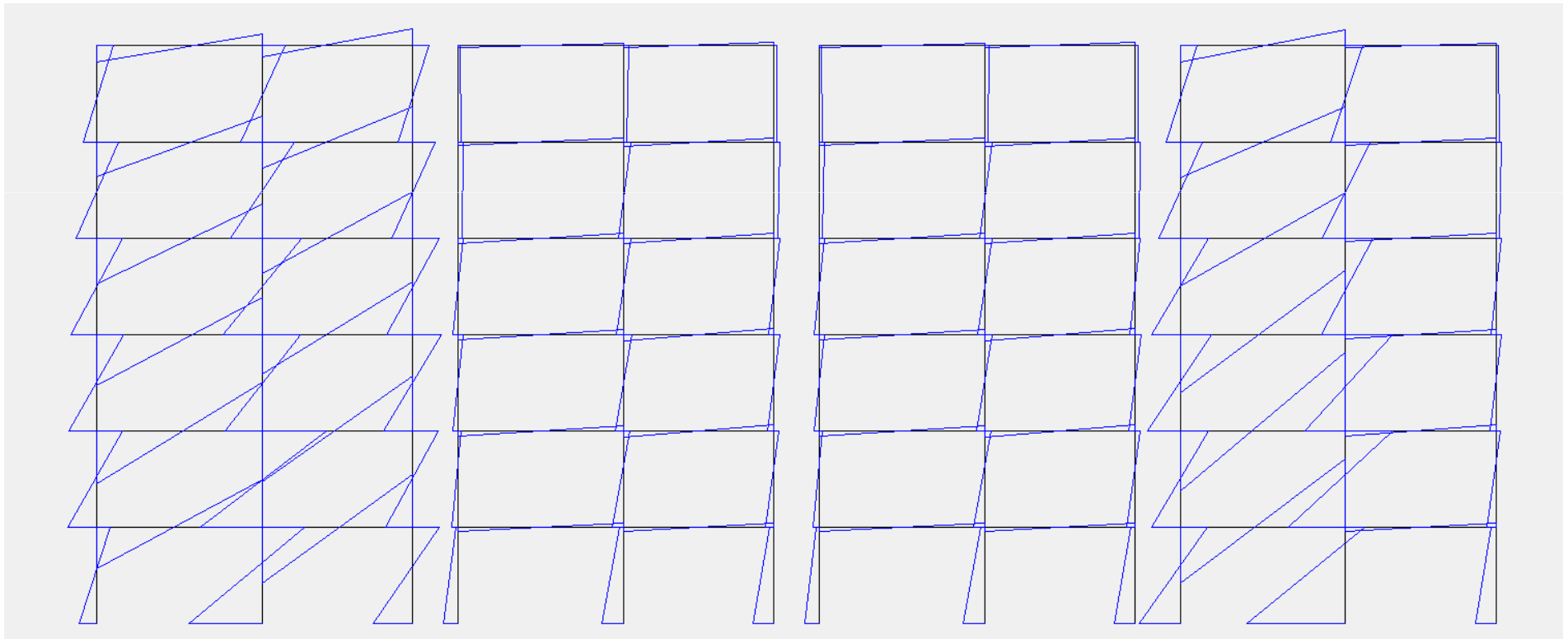
- Carichi verticali:  
risolto lo schema si hanno i valori in tutte le aste  
Ad esempio, per la trave 17-9, 2° impalcato:



# Pushover

esempio - direzione y

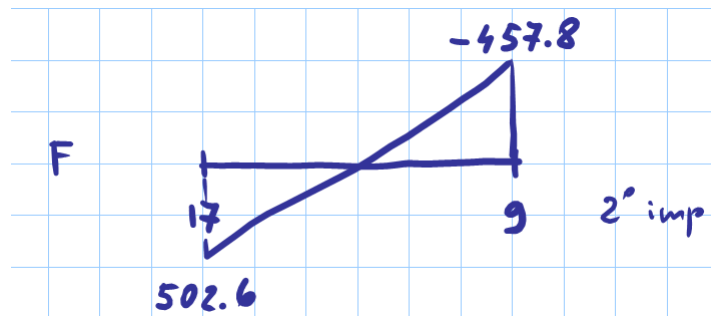
- Primo passo - effetto delle forze orizzontali



# Pushover

esempio - direzione y

- Primo passo:  
applicando le forze allo schema e risolto lo schema  
si hanno i valori in tutte le aste  
Ad esempio, per la trave 17-9, 2° impalcato:



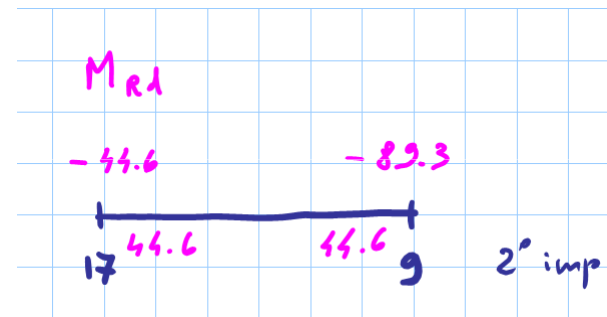
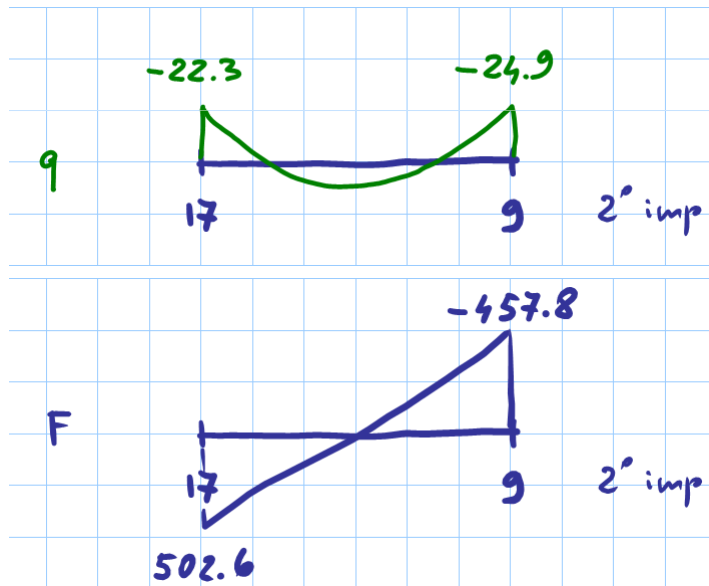


# Pushover

## esempio - direzione y

- Per questa trave si ha quindi:

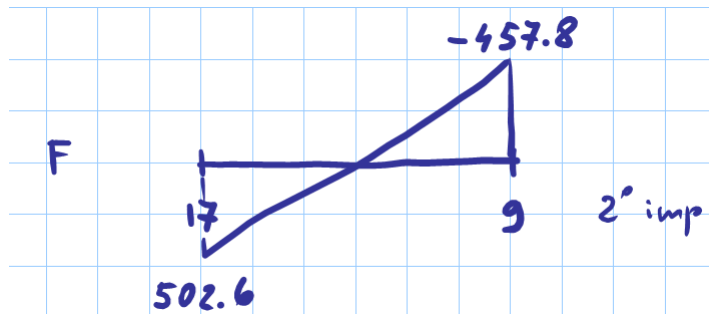
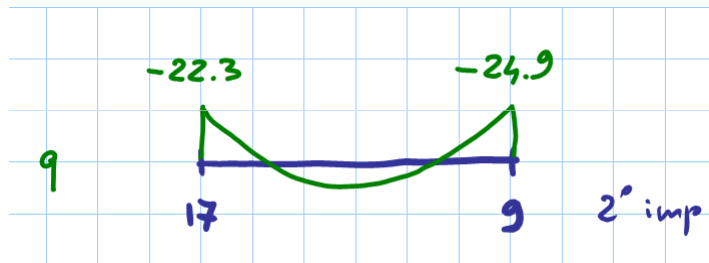
La trave ha come momenti resistenti i valori qui indicati



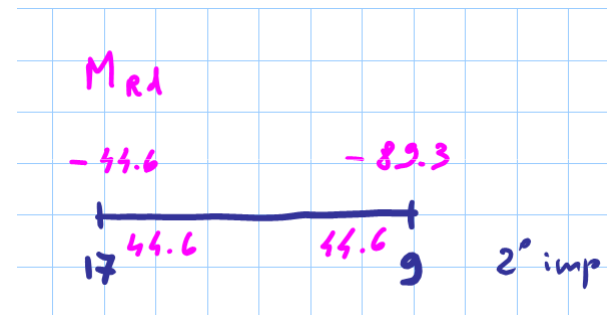
# Pushover

## esempio - direzione y

- Si può valutare l'aliquota di forza orizzontale che porta la trave al limite di resistenza:



La sezione di destra raggiunge il limite di resistenza per forze pari all'11.9% di quelle di riferimento

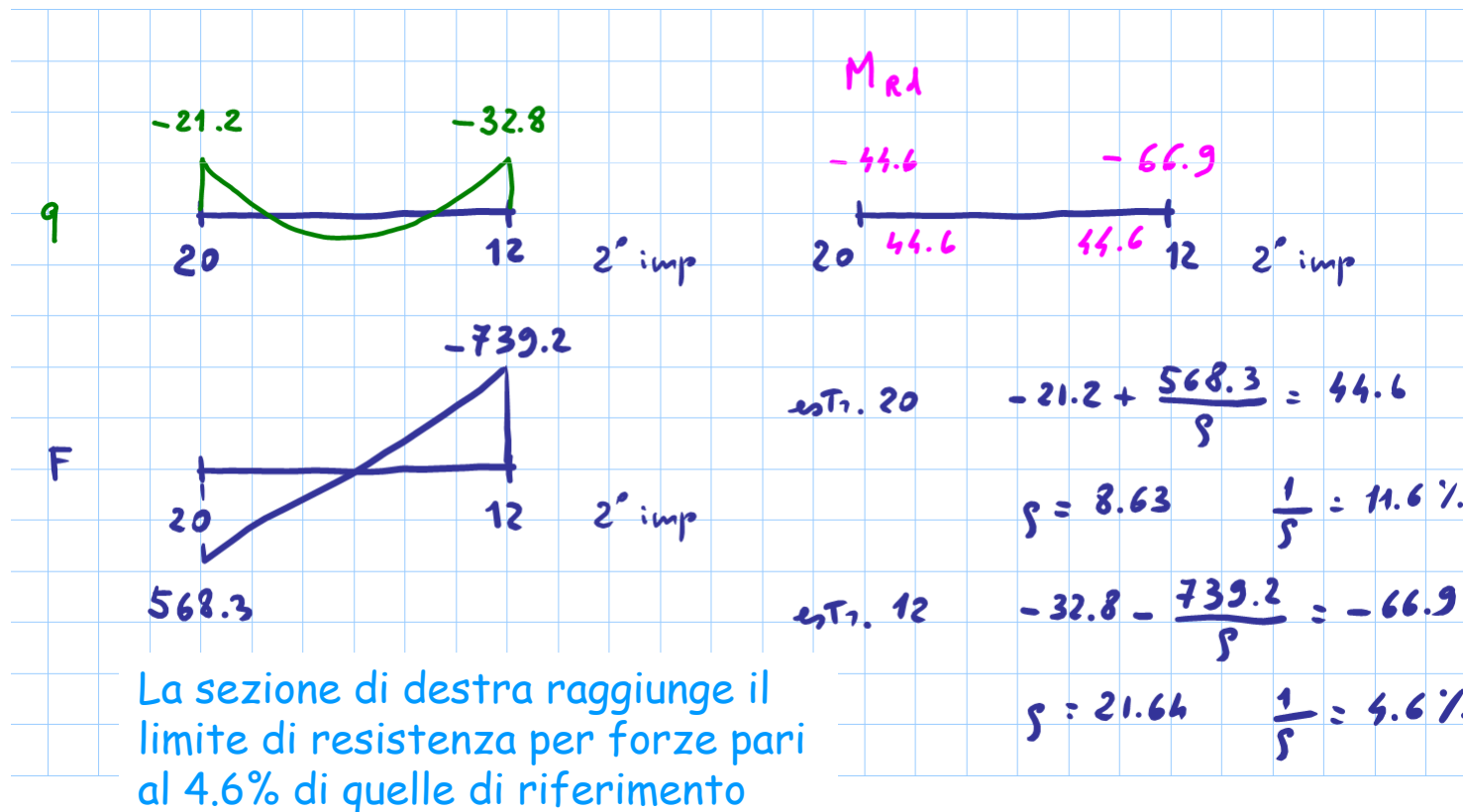


$$\begin{aligned} \hookrightarrow T_1. 17 & \quad -22.3 + \frac{502.6}{8} = 44.6 \\ & \quad f = 7.51 \quad \frac{1}{f} = 13.3 \% \\ \hookrightarrow T_1. 9 & \quad -24.9 - \frac{457.8}{5} = -89.3 \\ & \quad f = 8.42 \quad \frac{1}{f} = 11.9 \% \end{aligned}$$

# Pushover

## esempio - direzione y

- Analogamente, per la trave 20-12, 2° impalcato:



# Pushover

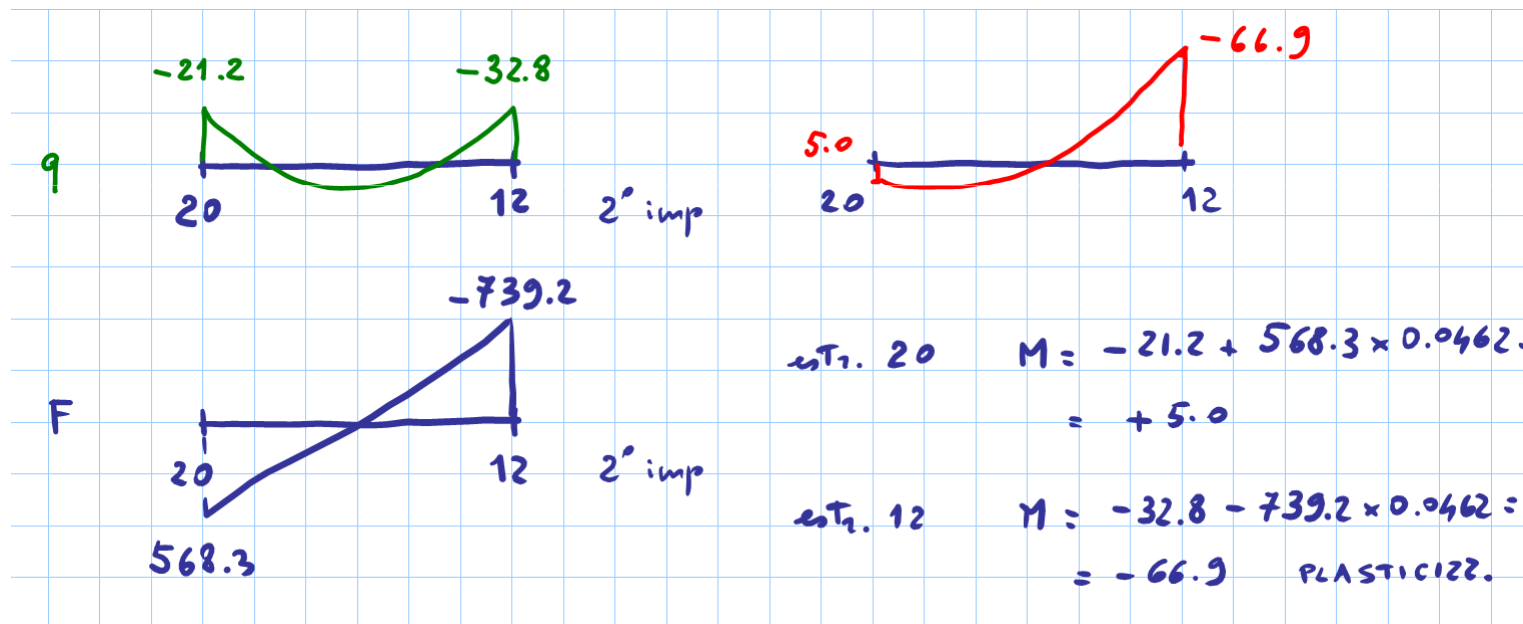
esempio - direzione y

- Esaminando tutte le aste, travi e pilastri, si determina il valore minimo del moltiplicatore che porta al limite una sezione
- Si trova che il valore più piccolo è 4.62%, che porta al raggiungimento del limite di plasticizzazione per la trave 20-12, 2° impalcato

# Pushover

## esempio - direzione y

- Per questo moltiplicatore (0.0462), nella trave 20-12, 2° impalcato si ha

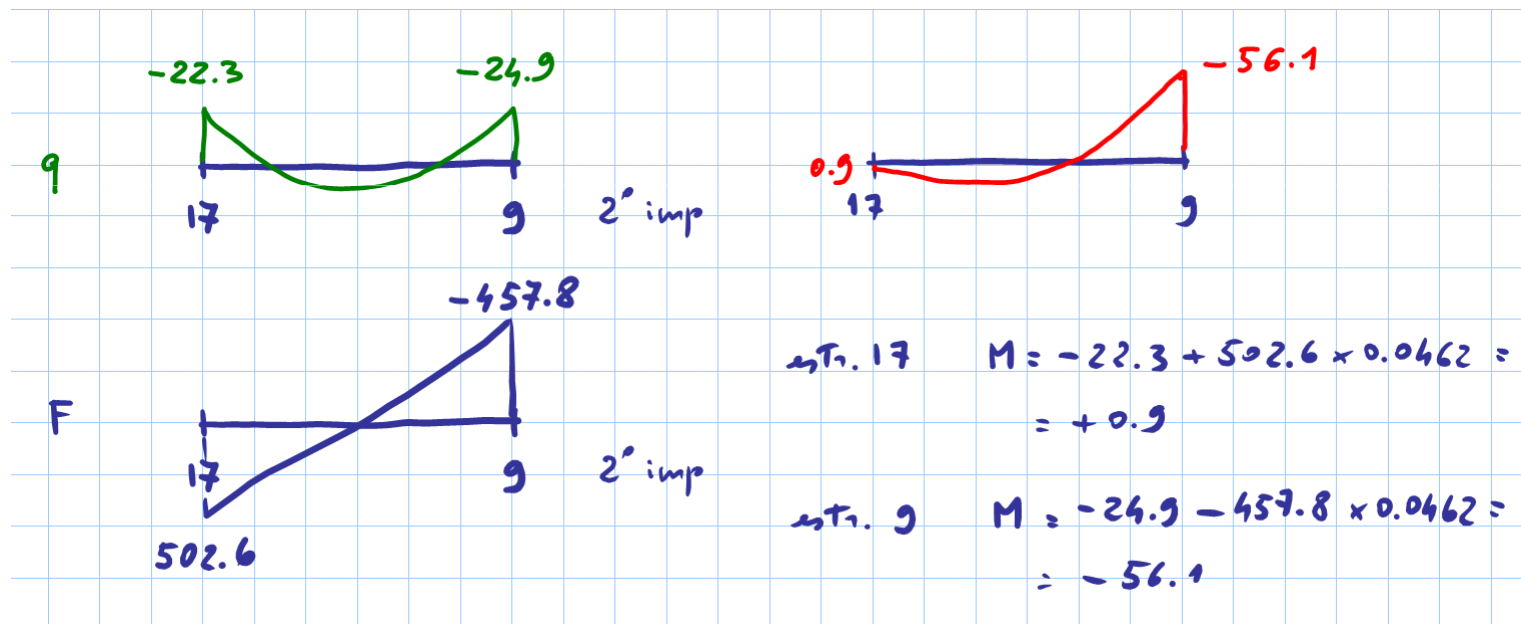


- L'estremo destro si è plasticizzato

# Pushover

## esempio - direzione y

- Per lo stesso moltiplicatore (0.0462), nella trave 17-9, 2° impalcato si ha

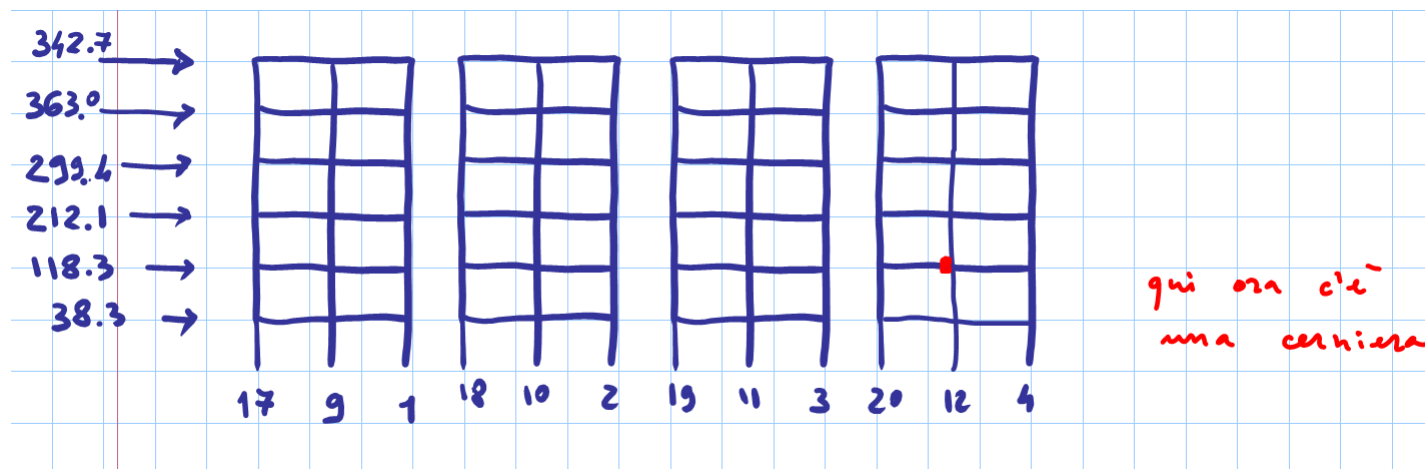


- Entrambi gli estremi sono ancora lontani dal limite

# Pushover

esempio - direzione y

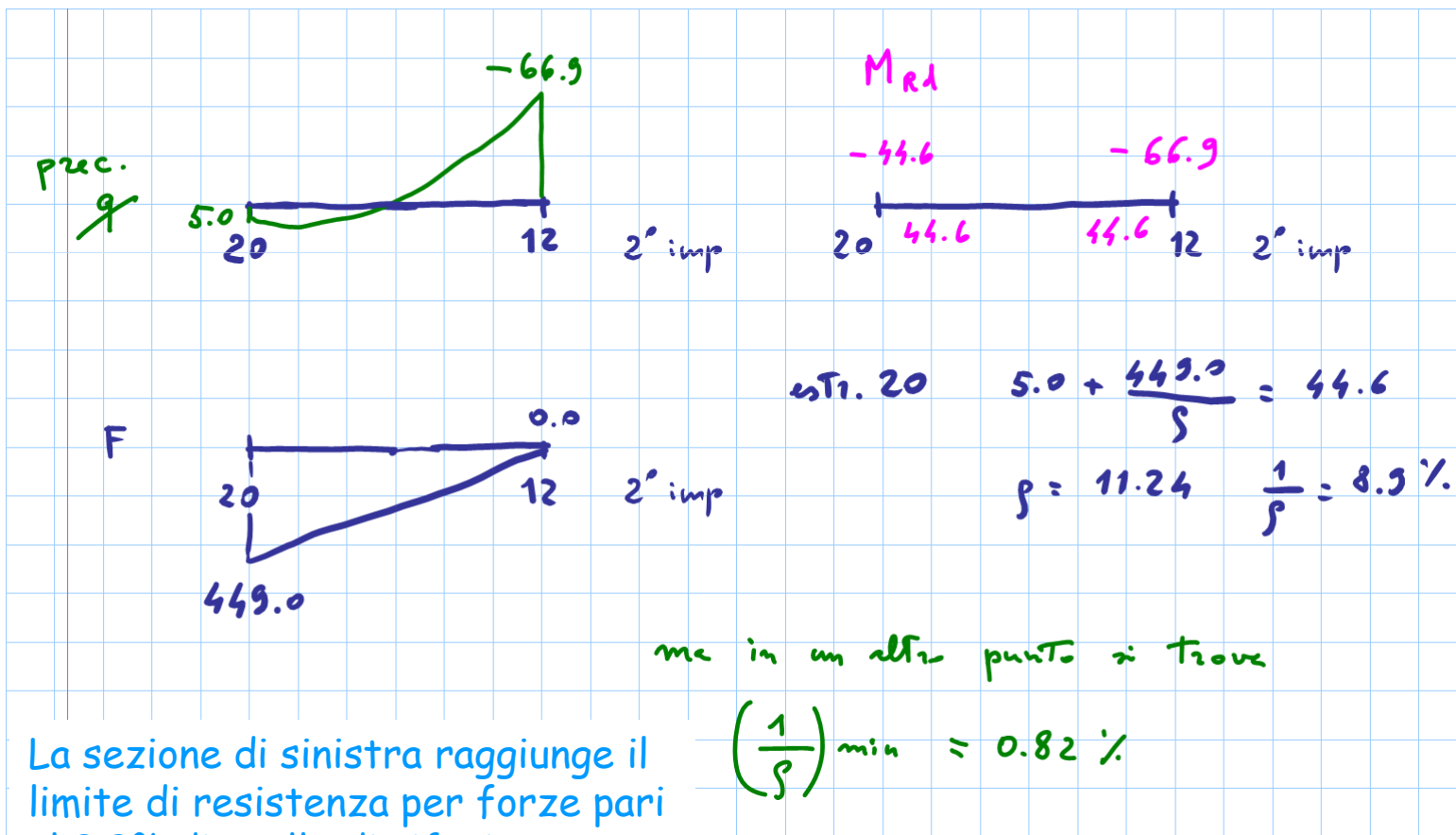
- I valori trovati (corrispondenti ai diagrammi in rosso) sono i valori finali del primo passo, nonché quelli iniziali per il secondo passo
- Nella sezione in cui si è raggiunto il momento resistente  $M$  non può crescere. Si mette quindi nello schema una cerniera e si ripete il calcolo



# Pushover

## esempio - direzione y

- Secondo passo, per la trave 20-12, 2° impalcato:



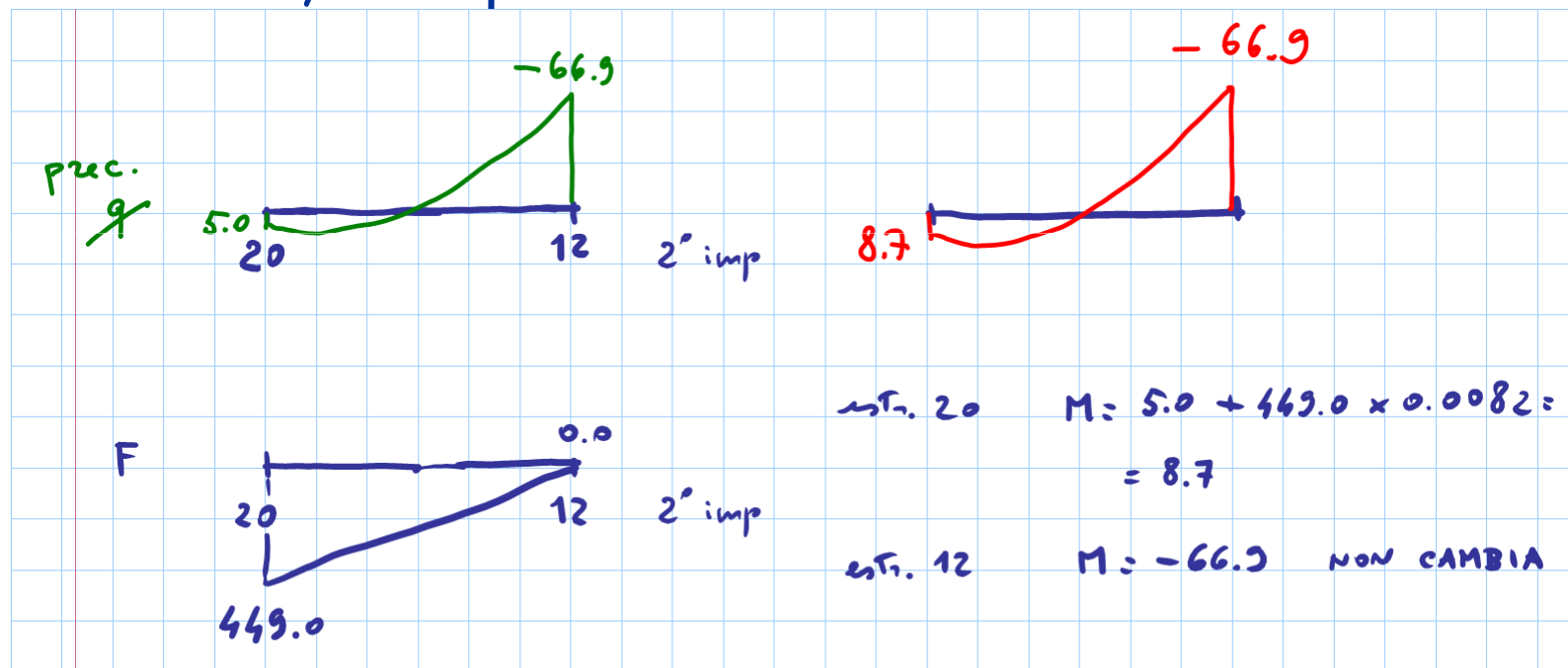
La sezione di sinistra raggiunge il limite di resistenza per forze pari al 8.9% di quelle di riferimento



# Pushover

## esempio - direzione y

- Per questo moltiplicatore (0.0082), nella trave 20-12, 2° impalcato si ha

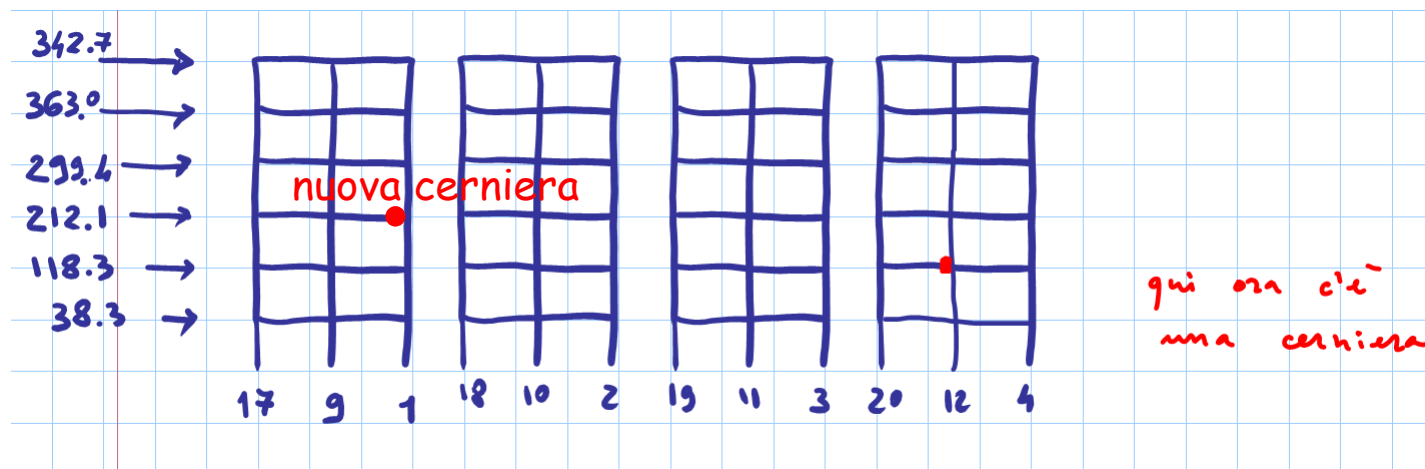


- Si noti che questi (diagramma in rosso) sono i valori che corrispondono a forze pari al  $4.62 + 0.82 = 8.84\%$  delle forze di riferimento

# Pushover

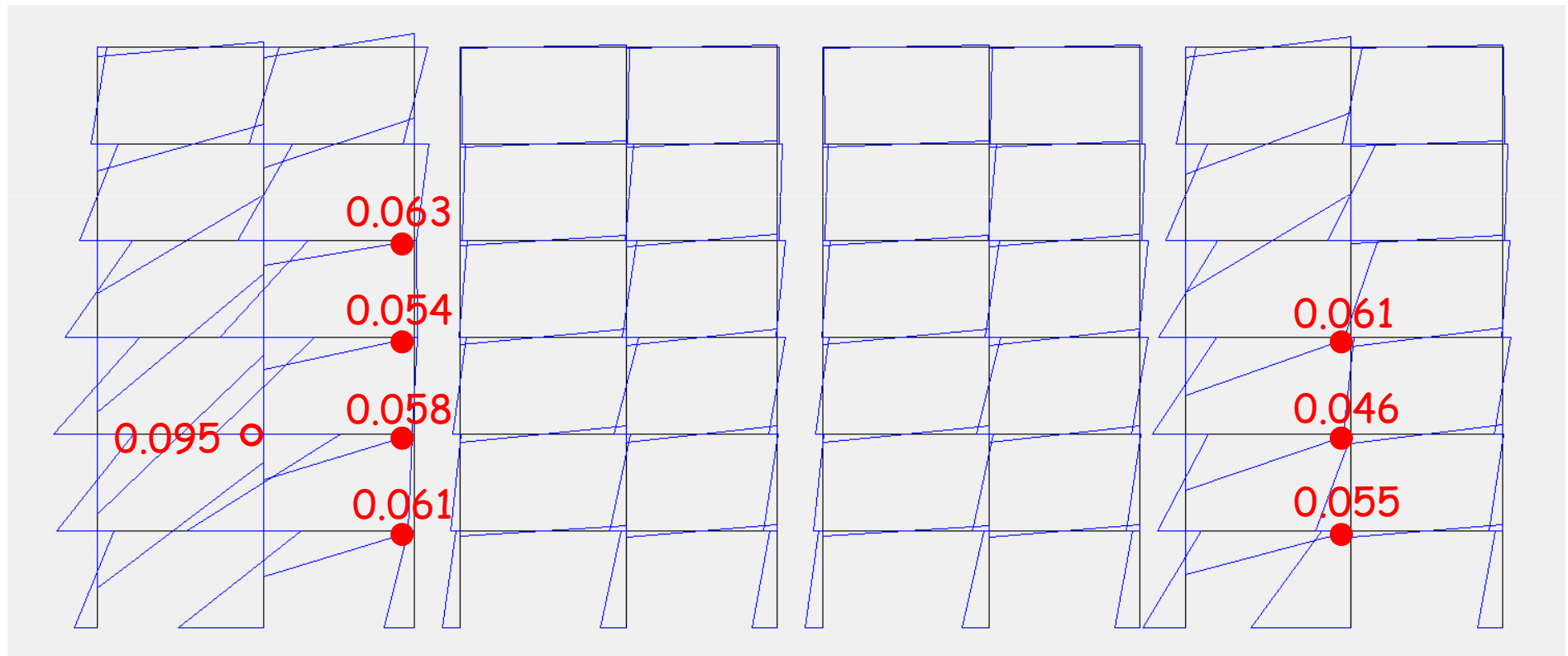
esempio - direzione y

- I valori trovati (corrispondenti ai diagrammi in rosso) sono i valori finali del secondo passo, nonché quelli iniziali per il terzo passo
- Nella sezione in cui si è raggiunto il momento resistente  $M$  non può crescere. Si mette quindi nello schema un'altra cerniera e si ripete il calcolo



# Diagramma del momento

## Forze modo 1 - passo 7



# Applicazione alla struttura in esame

## telai in direzione y

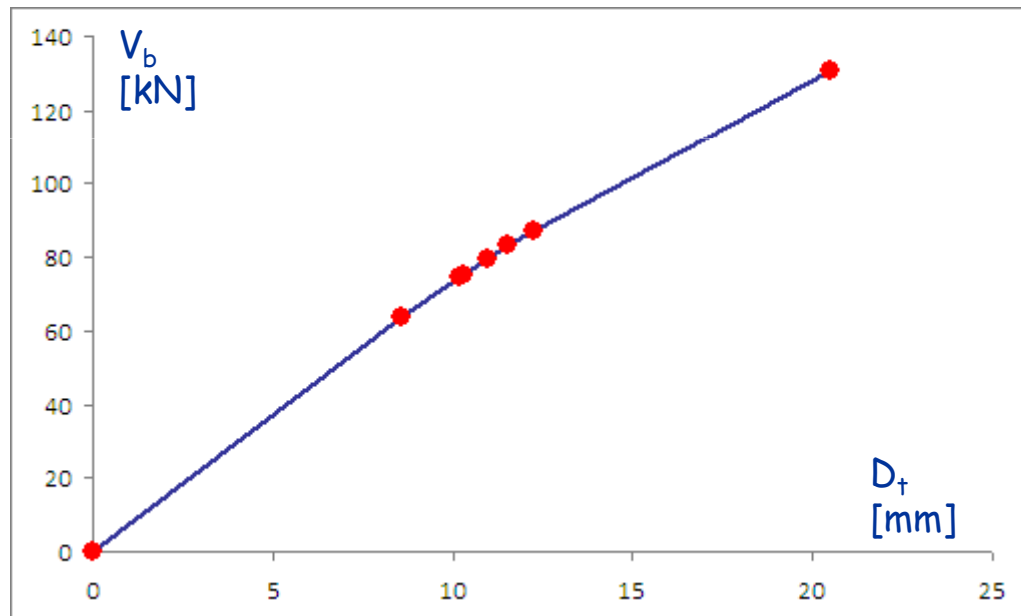
- Riepilogo dei risultati dei primi passi dell'analisi non lineare, fatti in maniera parzialmente manuale, ovvero con l'utilizzo di una analisi lineare e facendo variare via via lo schema

Passo	$1/\rho$		Dt	Vb	cerniera pil/tra	pia				
0			0	0						
1	4.62%	4.62%	8.573	63.47	20-12	2	des			
2	0.82%	5.44%	10.192	74.72	9-1	3	des			
3	0.05%	5.49%	10.298	75.42	20-12	1	des			
4	0.30%	5.79%	10.947	79.55	9-1	2	des			
5	0.26%	6.05%	11.530	83.08	9-1	1	des	20-12	3	des
6	0.29%	6.34%	12.260	87.09	9-1	4	des			
7	3.17%	9.51%	20.483	130.65	17-9	2	des			

# Applicazione alla struttura in esame

## telai in direzione y

- Curva di pushover (parte iniziale)



# Analisi statica non lineare

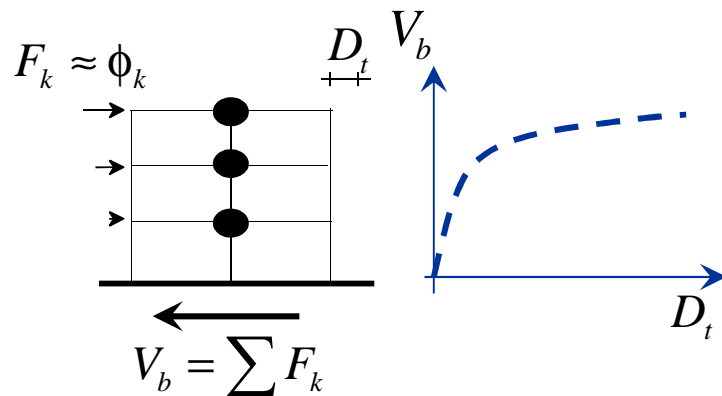
- Si valuta il comportamento non lineare della struttura per forze statiche crescenti
- Si ipotizza che gli spostamenti così ottenuti siano uguali a quelli reali (calcolabili con l'analisi dinamica non lineare)
- È necessario individuare quale sia il valore di  $a_g$  che corrisponde ad un assegnato punto della pushover
- Si giudica la struttura confrontando gli spostamenti di calcolo con quelli limite

# Analisi statica non lineare

## determinazione dello spostamento "richiesto"

Multi Degree of Freedom

Telaio MDOF

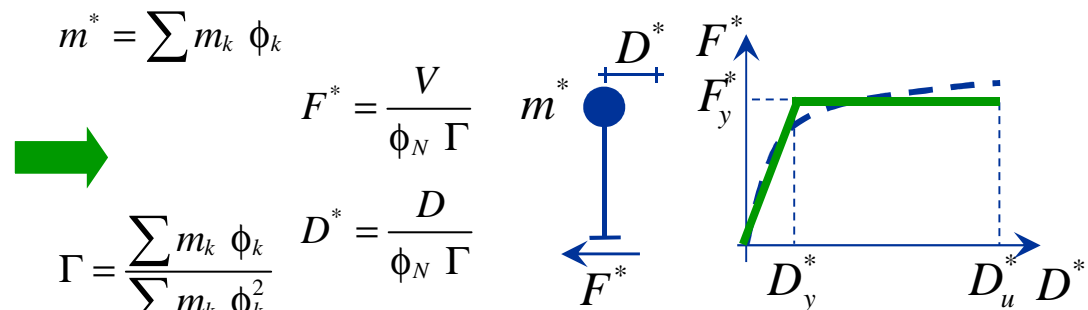


Spostamento richiesto (MDOF)

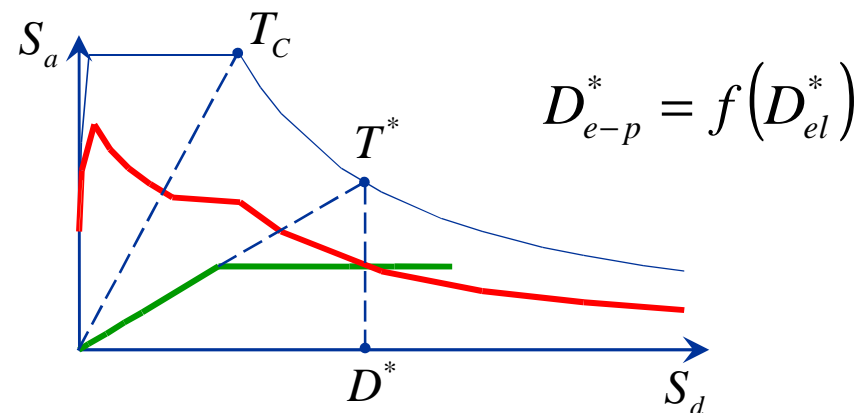
$$D_t = \Gamma D^*$$

Single Degree of Freedom

Sistema SDOF equivalente



Spostamento richiesto (SDOF)



# Proposta alternativa

È veramente necessario passare al sistema SDOF?

Proposta:

determinare lo spostamento richiesto (elasto-plastico) direttamente dallo spostamento (elastico) fornito dall'analisi modale con spettro di risposta del sistema MDOF

- corretto per tener conto della differenza  $D_{e-p} - D_{el}$
- corretto per tener conto della pendenza iniziale della bilineare

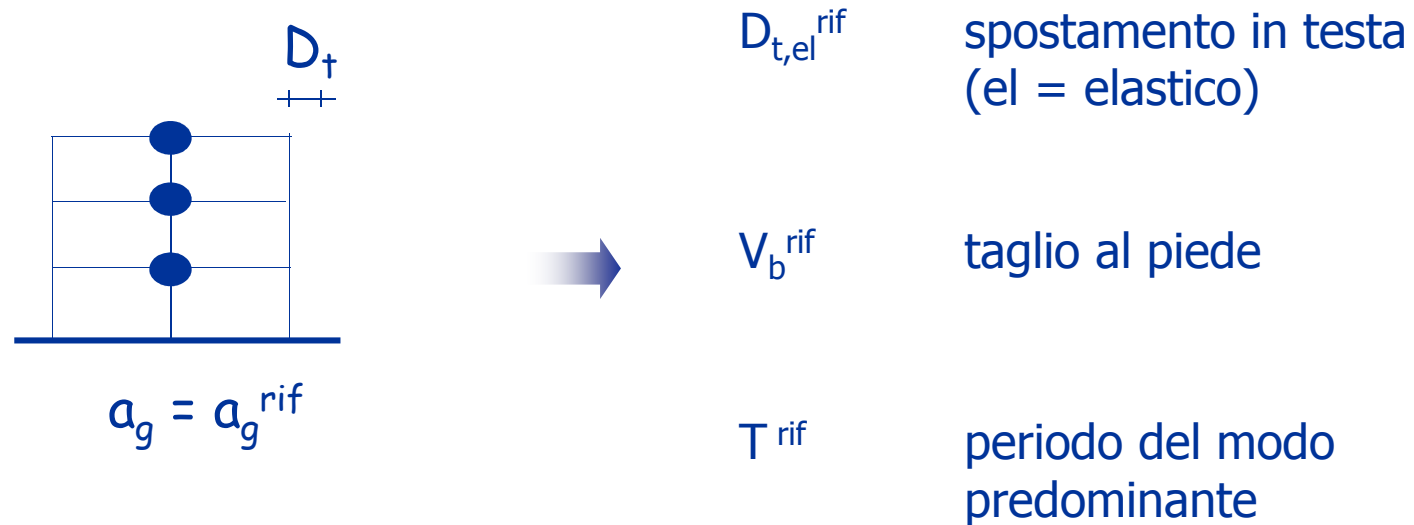
Le stesse correzioni fatte nello SDOF



# Analisi statica non lineare

## 1 - analisi modale

- Analisi modale con spettro di risposta (elastica)

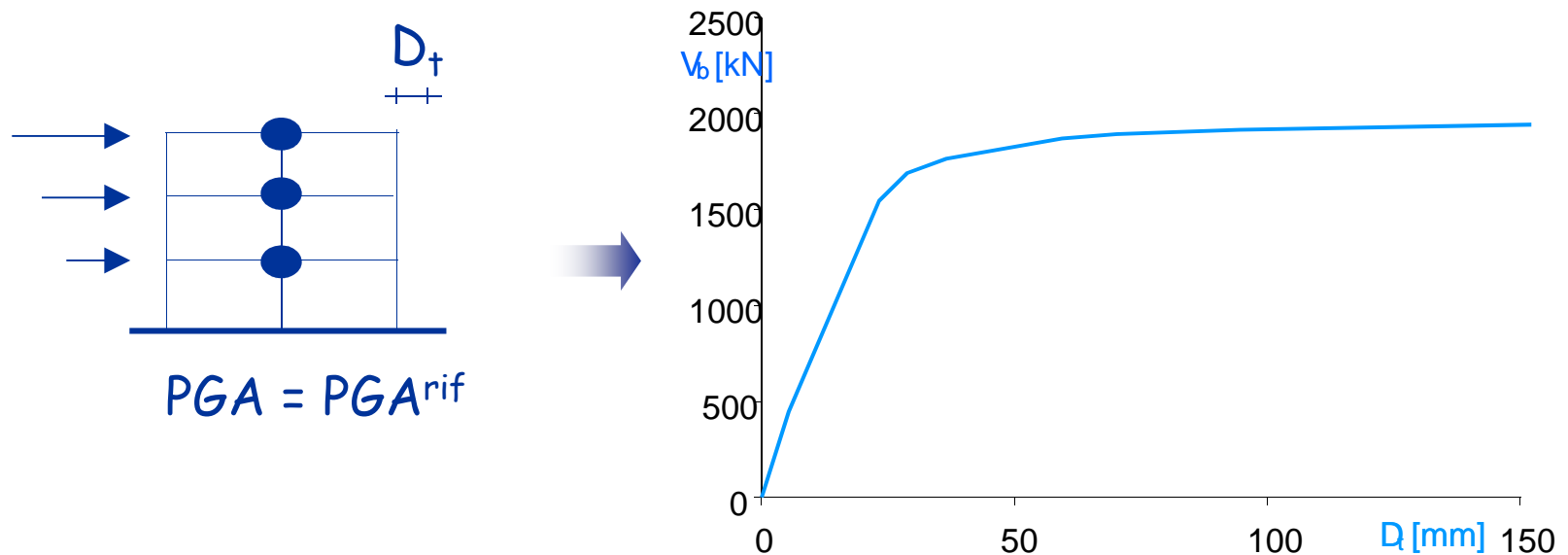


Nota: poiché il modello è elastico lineare,  
gli spostamenti variano linearmente con PGA

# Analisi statica non lineare

## 2 - analisi incrementale (pushover)

- Applicazione di forze crescenti ad uno schema con possibilità di plasticizzazione

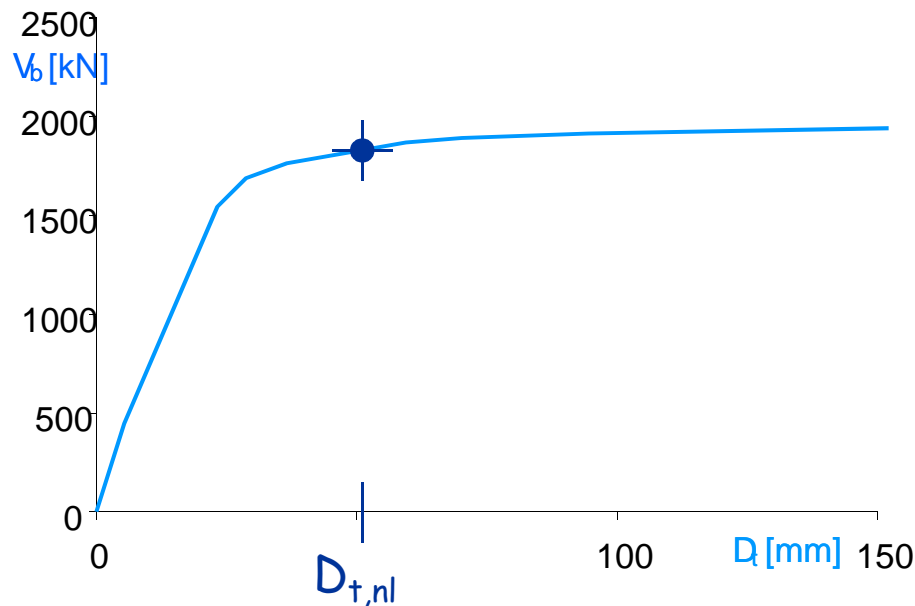


Nota: deve essere fatta due volte,  
con due distribuzioni di forze

# Analisi statica non lineare

## relazione $D_t - a_g$

Quale accelerazione  $a_g$  corrisponde ad un punto qualsiasi della curva?



$$a_g = a_g^{rif} \frac{D_{t,el}}{D_{t,el}^{rif}}$$



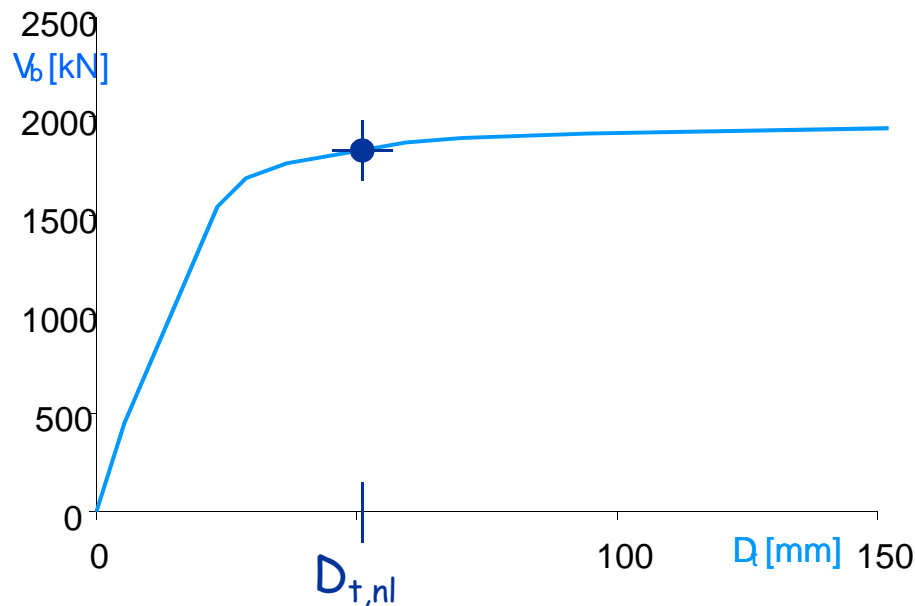
Idea base: uguaglianza di spostamenti

$$D_{t,el} = D_{t,nl}$$

# Analisi statica non lineare

## relazione $D_t - a_g$

Quale accelerazione  $a_g$  corrisponde ad un punto qualsiasi della curva?



Ma in realtà  
questo non è  
esatto

Occorre  
effettuare due  
correzioni

Idea base: uguaglianza di spostamenti

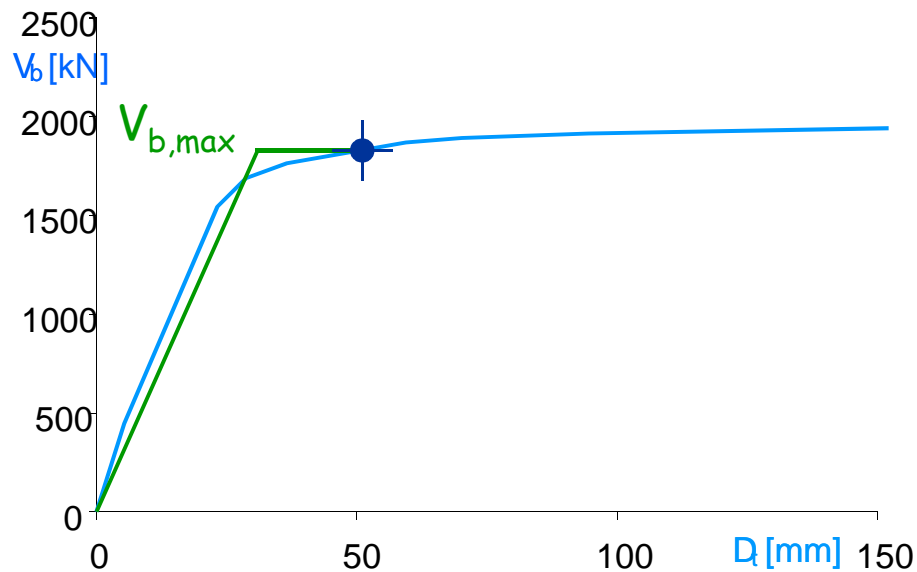
$$D_{t,el} = D_{t,nl}$$

# Analisi statica non lineare

## 3 - bilinearizzazione

Per ciascun punto della curva:

- Trasformazione della curva in una bilatera



Prima possibilità  
(Eurocodice, NTC08)

Uguaglianza del  
valore massimo

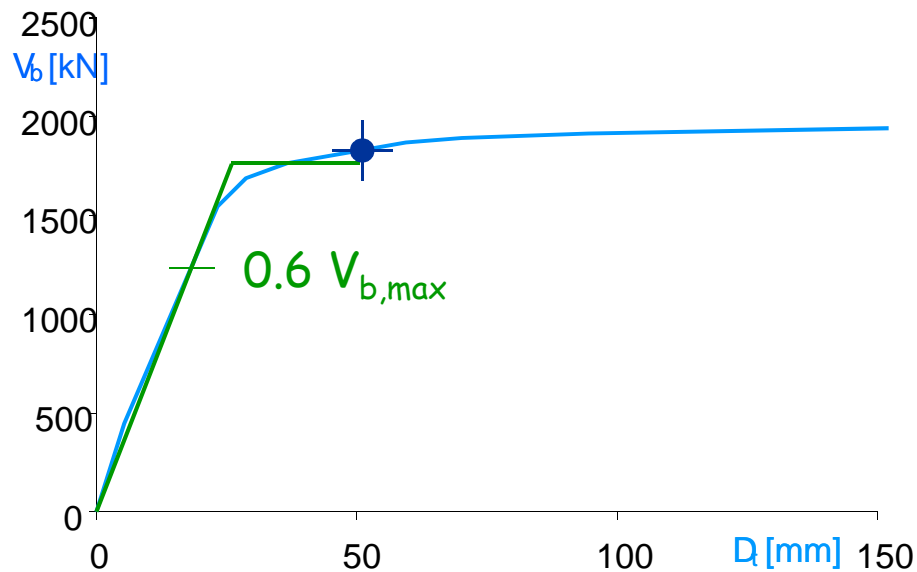
Criterio generale: area sottesa uguale

# Analisi statica non lineare

## 3 - bilinearizzazione

Per ciascun punto della curva:

- Trasformazione della curva in una bilatera



Seconda possibilità  
(Fajfar)

Il tratto lineare  
interseca la curva  
al 60% di  $V_{b,max}$

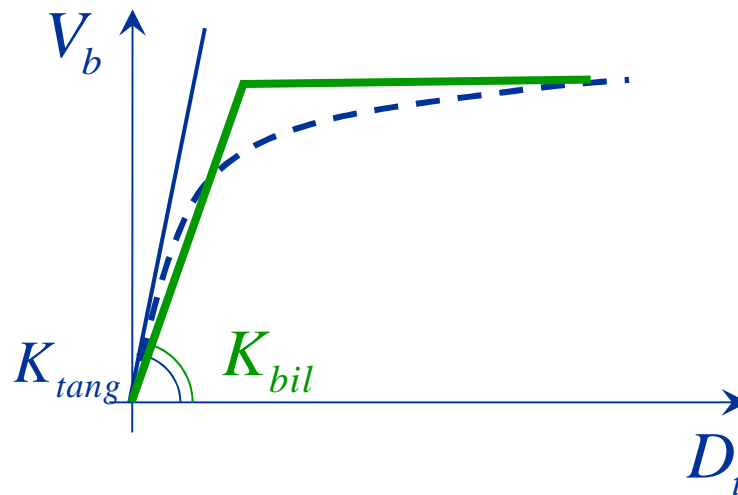
Criterio generale: area sottesa uguale

# Analisi statica non lineare

## 4 - correzione per variazione rigidezza

- La bilinearizzazione comporta una variazione di rigidezza e quindi di periodo

$$T_{tang} = T_1 \text{ (analisi modale)}$$



$$T_{bil} = T_1 \sqrt{\frac{K_{tang}}{K_{bil}}}$$

$$D_{t,tang} = D_{t,bil} \frac{S_{de}(T_1)}{S_{de}(T_{bil})}$$

- Gli spostamenti si modificano in funzione della variazione di periodo

$$S_{de}(T) = \text{spostamento spettrale}$$

# Spostamento richiesto

## 5 - correzione per spostamento elasto-plastico

- Lo spostamento di una struttura che vada in campo plastico può essere uguale oppure maggiore di quello di una struttura che rimane in campo elastico
- Si assume:

$$D_{t,el} = D_{t,e-p}$$

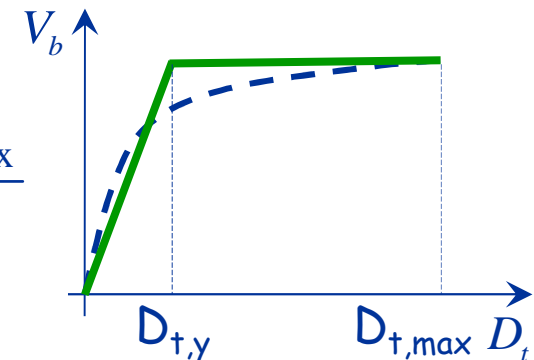
$$T \geq T_c$$

$$D_{t,el} = D_{t,e-p} \frac{1}{\mu} \left[ 1 + (\mu - 1) \frac{T}{T_c} \right]$$

$$T < T_c$$

Nota: la duttilità  $\mu$  è ricavata dalla bilineare

$$\mu = \frac{D_{t,max}}{D_{t,y}}$$





# Passaggi matematici

(per mio ricordo)

- Dall'articolo di Bosco, Gheresi, Marino, "On the evaluation of seismic response of structures by nonlinear static methods"

$$R_\mu = \mu \quad \text{when } T^* \geq T_C \quad (8a)$$

$$R_\mu = (\mu - 1) \frac{T^*}{T_C} + 1 \quad \text{when } T^* < T_C \quad (8b)$$

$$a_g = \bar{a}_g \frac{D}{D_{el}} \frac{S_{de}(T_1)}{S_{de}(T_e)} \quad \text{if } T_e \geq T_C \text{ or } R_\mu \leq 1 \quad (20a)$$

$$a_g = \bar{a}_g \frac{D}{D_{el}} \frac{S_{de}(T_1)}{S_{de}(T_e)} \frac{R_\mu}{1 + (R_\mu - 1) T_C / T_e} \quad \text{if } T_e < T_C \text{ and } R_\mu > 1 \quad (20b)$$

$$\frac{1}{\mu} \left[ 1 + (\mu - 1) \frac{T}{T_c} \right]$$

# Spostamento richiesto

6 - determinazione di  $a_g$

- Riunendo le indicazioni precedenti

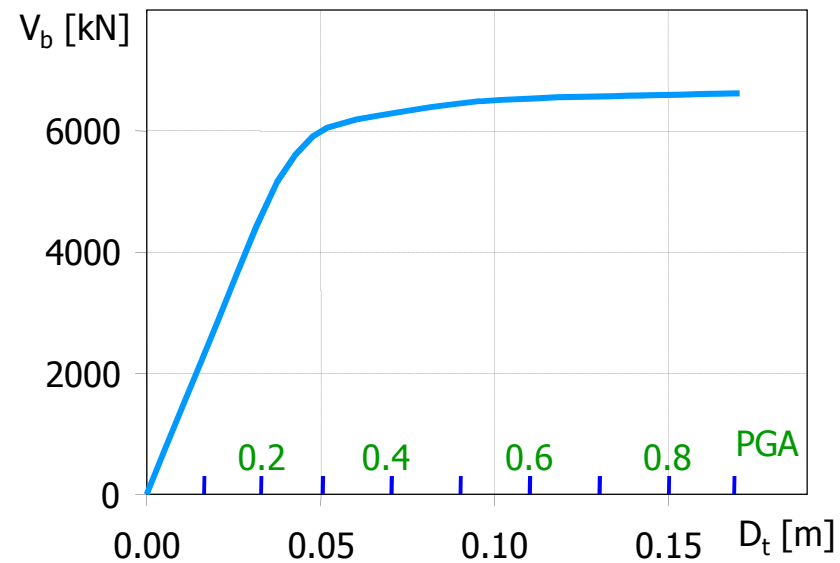
$$a_g = a_g^{rif} \frac{D_{t,nl}}{D_{t,el}^{rif}} \frac{S_{de}(T_1)}{S_{de}(T_{bil})} \quad T \geq T_c$$

$$a_g = a_g^{rif} \frac{D_{t,nl}}{D_{t,el}^{rif}} \frac{S_{de}(T_1)}{S_{de}(T_{bil})} \frac{1}{\mu} \left[ 1 + (\mu - 1) \frac{T}{T_c} \right] \quad T < T_c$$

# Relazione spostamenti - PGA

- Con le relazioni precedenti, si può far corrispondere ad ogni spostamento un valore di PGA.

Si può quindi usare una doppia scala di riferimento per le ascisse



# Applicazione alla struttura in esame

## telai in direzione x

- Analisi lineare e pushover

analisi modale		
ag	Dt [mm]	Vb [kN]
0.25	119.28	2291.83
T	1.064	s

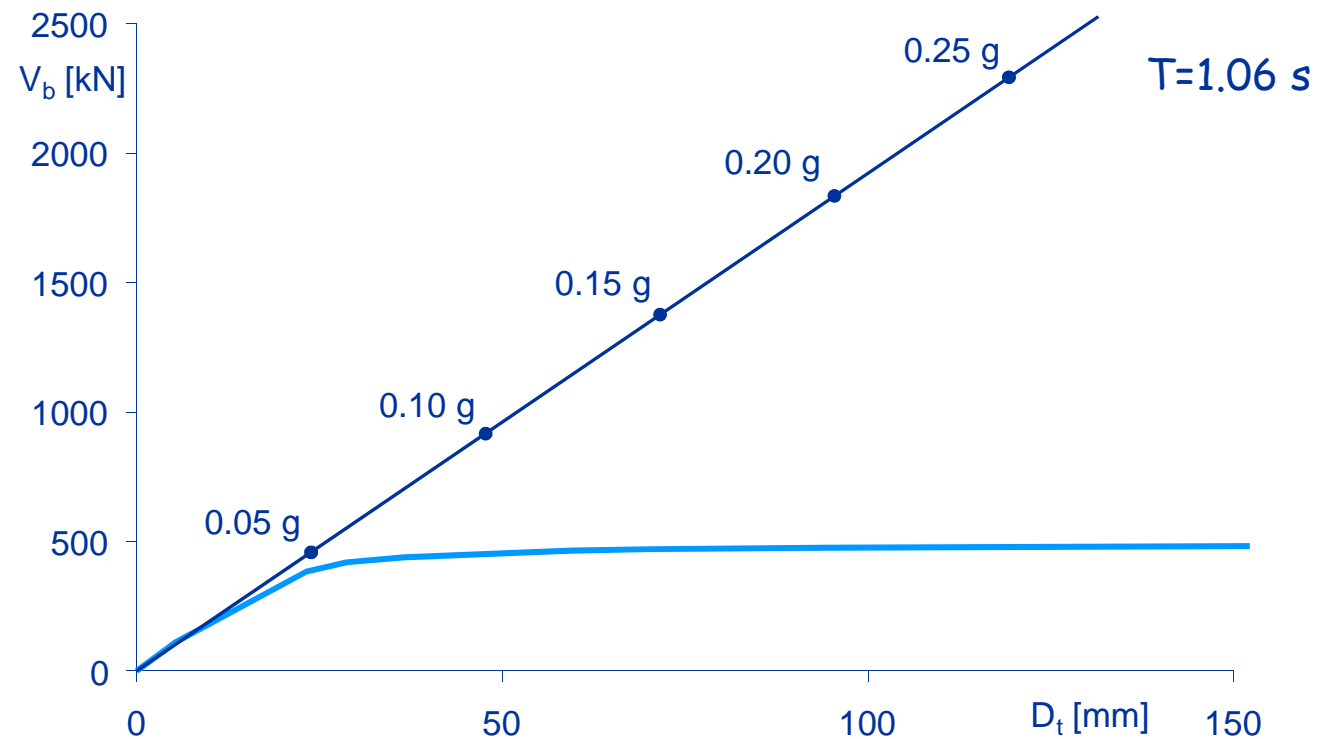
$$K_{tang} = \frac{2291.83}{119.28} = 19.21 \text{ kN/mm}$$

pushover		
passo	Dt [mm]	Vb [kN]
0	0.00	0.00
1	5.36	111.43
2	23.22	383.86
3	28.73	419.63
4	36.53	438.76
5	59.42	464.63
6	70.19	470.50
7	94.52	475.79
8	152.17	482.80
9	166.20	483.79
10	229.01	483.79
11	296.82	483.79
12	364.16	483.79
13	424.16	483.79
14	484.16	483.79
15	544.16	483.79
16	599.55	483.79

# Applicazione alla struttura in esame

## telai in direzione x

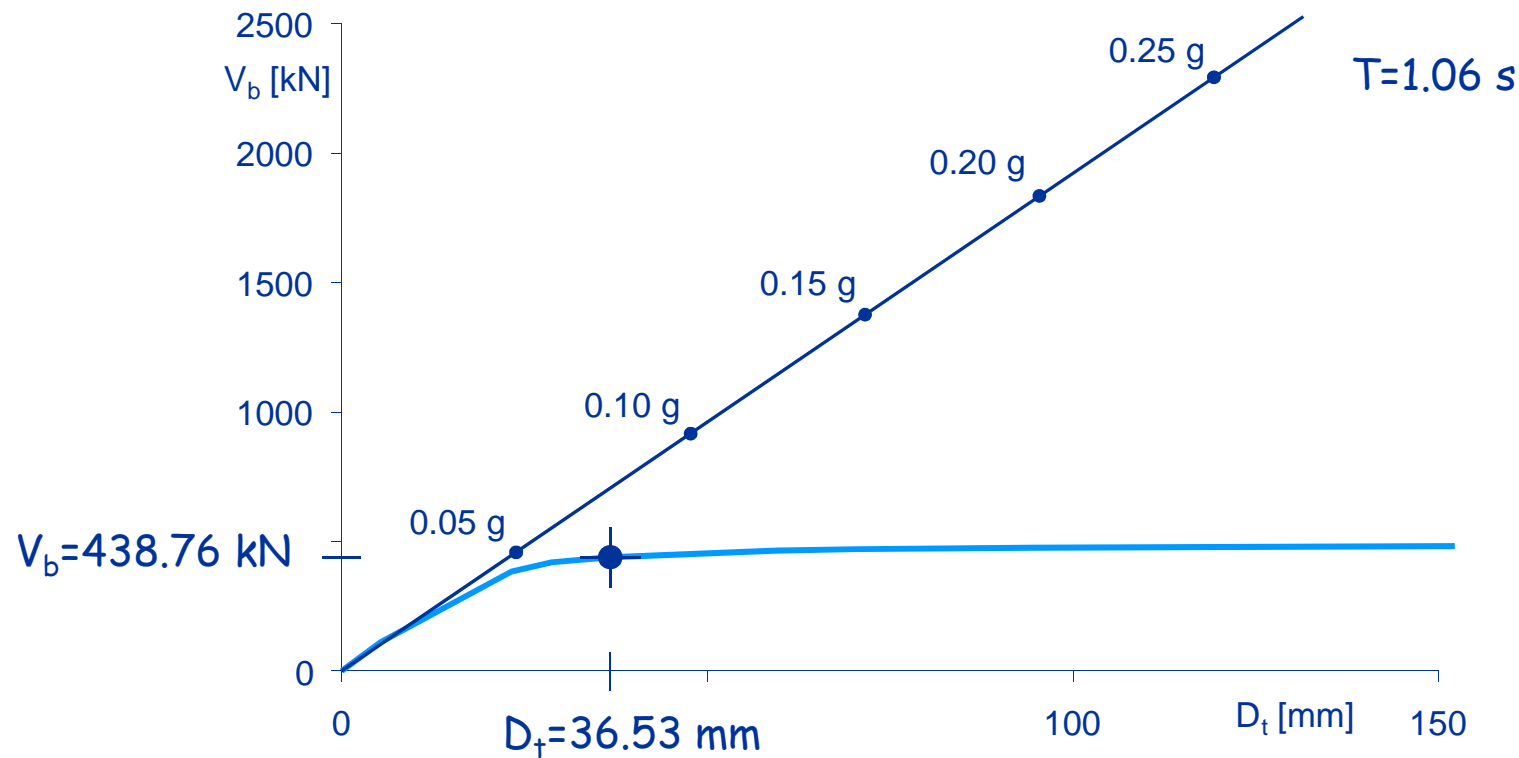
- Analisi lineare e pushover



# Applicazione alla struttura in esame

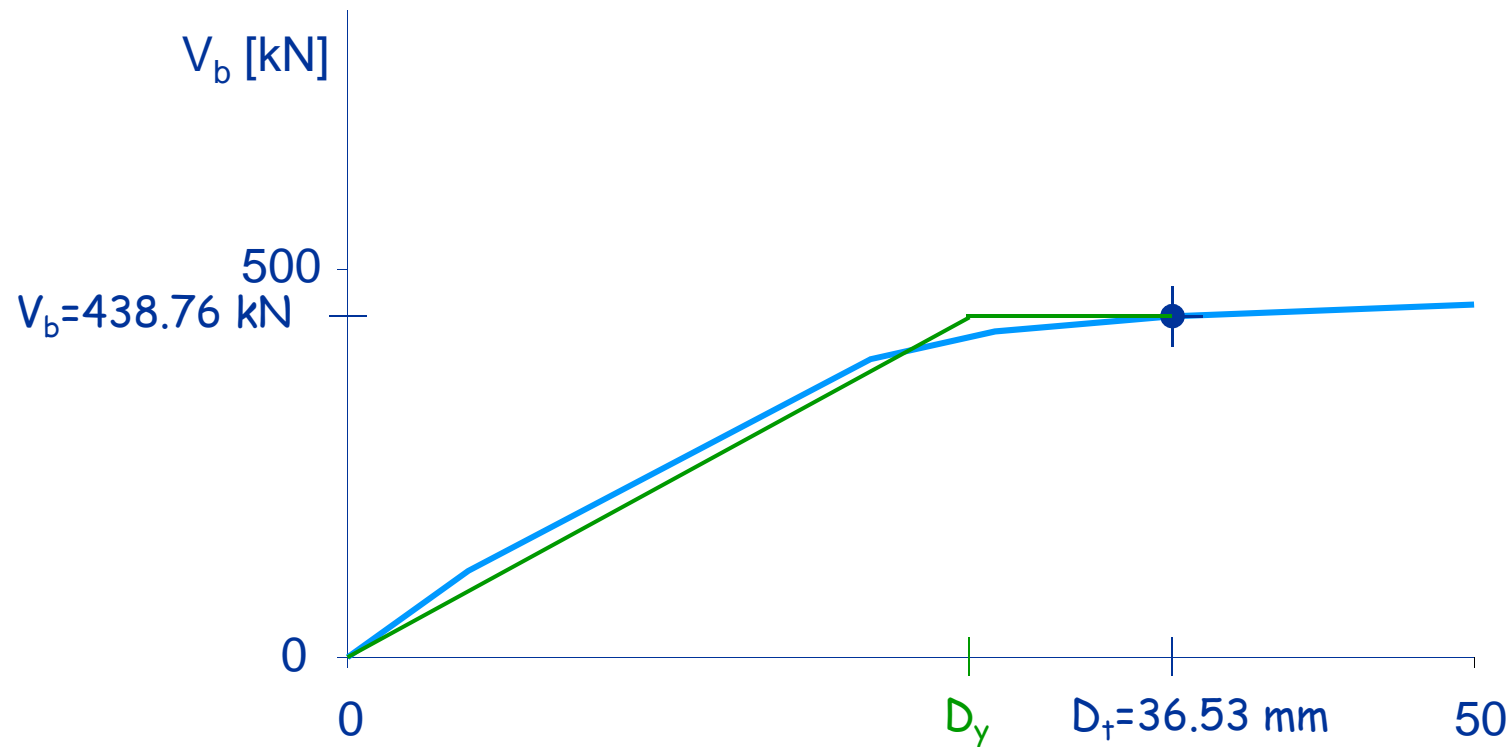
## telai in direzione x

- Determinazione dell'accelerazione corrispondente ad un punto della curva



# Bilinearizzazione

secondo indicazioni Eurocodice e NTC08



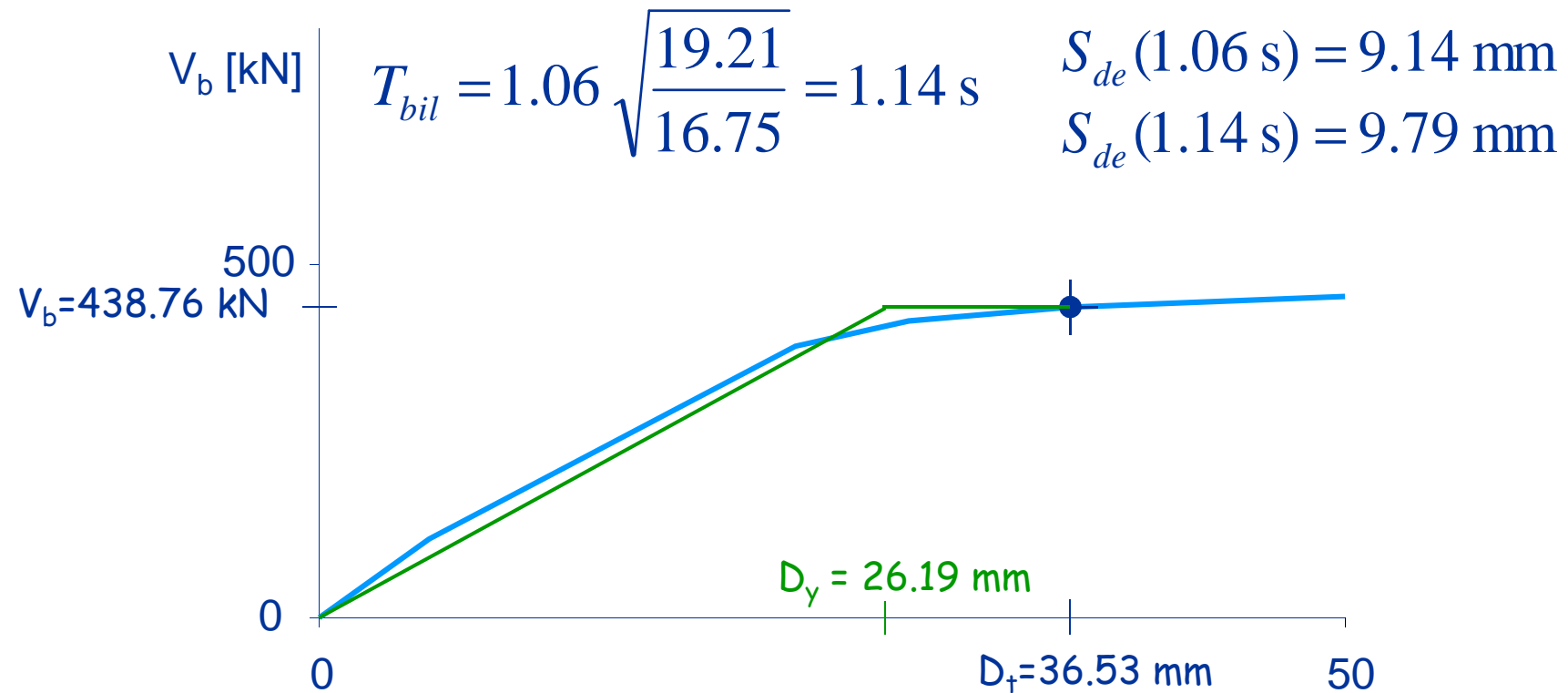
$A$  = area sottesa dalla curva  
 $= 10284$  kN mm

$V_y = V_b$

$$D_y = \frac{2 (D_t V_b - A)}{V_y} = 26.19 \text{ mm}$$

# Correzione 1

rigidezza della tangente e della bilineare



$$K_{tang} = 19.21 \text{ kN/mm}$$

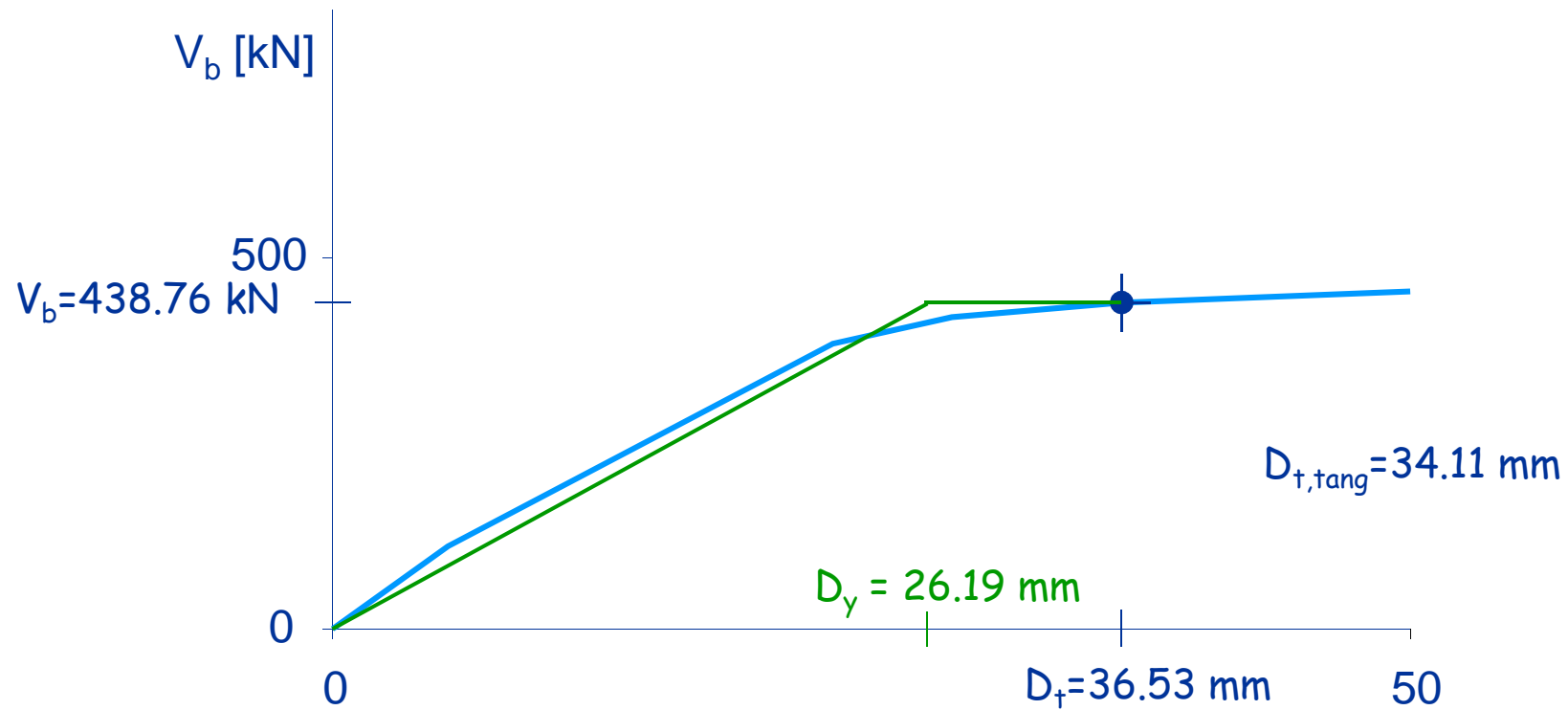
$$K_{bil} = \frac{438.76}{26.19} = 16.75 \text{ kN/mm}$$

$$D_{t,tang} = 36.53 \frac{9.14}{9.79} = 34.11 \text{ mm}$$



## Correzione 2

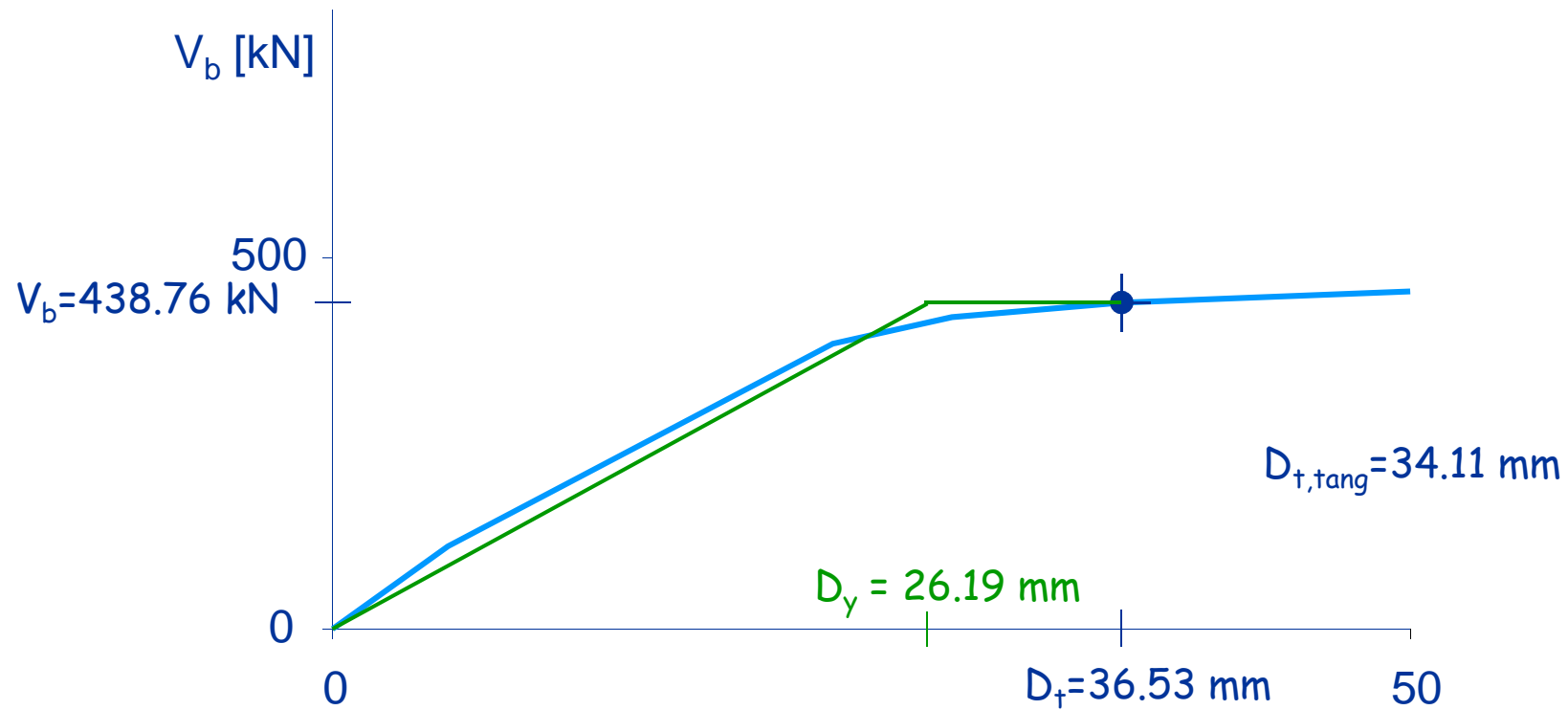
spostamento elastico ed elastoplastico



$$T > T_C$$

La correzione  
non è necessaria

# Accelerazione $a_g$ corrispondente al punto assegnato



$$a_g = a_g^{rif} \frac{D_{t,tang}}{D_{t,el}^{rif}} = 0.25 \frac{34.11}{119.28} = 0.071 g$$

# Applicazione alla struttura in esame

## telai in direzione x

- Accelerazione per tutti i punti della curva

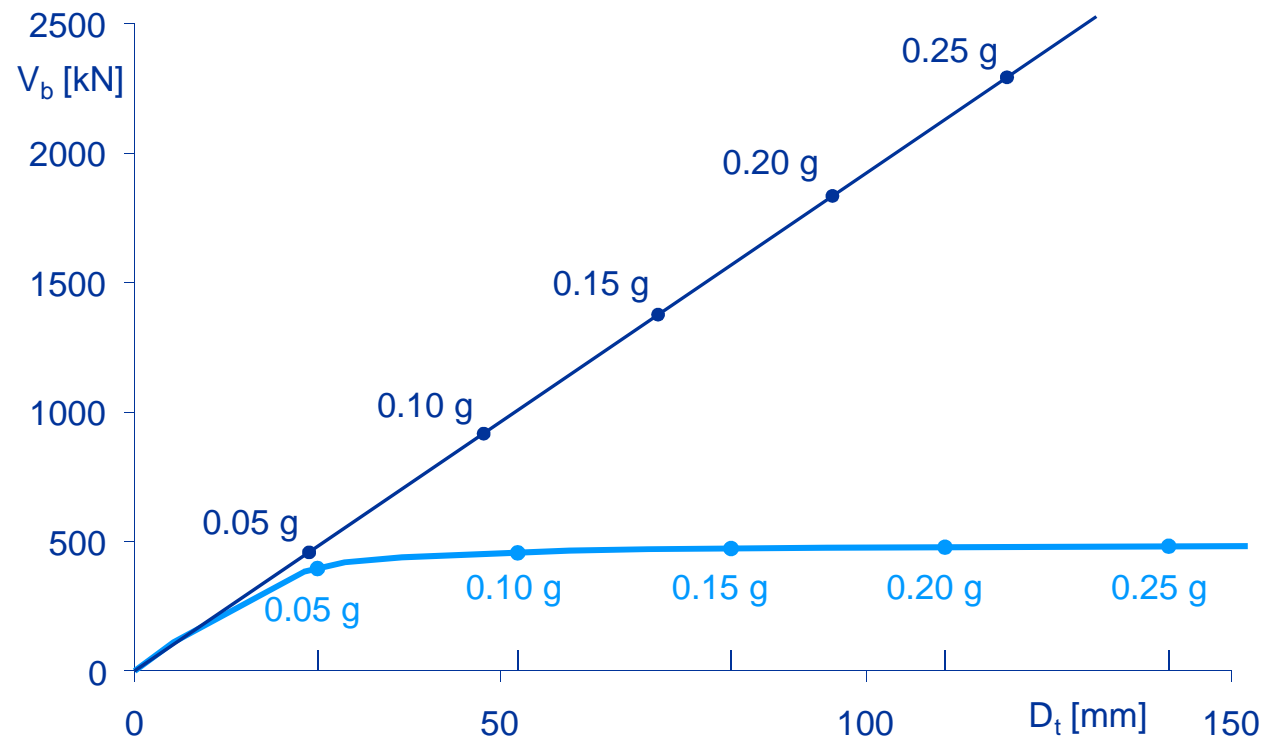
analisi modale											
ag	Dt [mm]	Vb [kN]					Kel				
0.25	119.28	2291.83					19.21				
T	1.064	s					ag(T)	0.319	g		
							D(T)	9.14	mm		
pushover											
passo	Dt [mm]	Vb [kN]	Area	Vy	Dy	Kbil	T	Dep(T)	Dep/D	Dt,el	ag
0	0.00	0.00	0	0.00	0.00		1.064	9.14	1.000	0.00	0.000
1	5.36	111.43	299	111.43	5.36	20.77	1.064	9.14	1.000	5.36	0.011
2	23.22	383.86	4721	383.86	21.84	17.57	1.113	9.56	1.046	22.21	0.047
3	28.73	419.63	6935	419.63	24.41	17.19	1.125	9.67	1.057	27.18	0.057
4	36.53	438.76	10284	438.76	26.19	16.75	1.140	9.79	1.071	34.11	0.071
5	53.42	484.63	20820	484.63	30.08	15.45	1.187	10.20	1.115	53.28	0.112
6	70.19	470.50	25659	470.50	31.32	15.02	1.203	10.34	1.131	62.07	0.130
7	94.52	475.79	37170	475.79	32.80	14.51	1.225	10.52	1.151	82.13	0.172
8	152.17	482.80	64801	482.80	35.91	13.45	1.272	10.93	1.195	127.30	0.267
9	166.20	483.79	71582	483.79	36.48	13.26	1.281	11.01	1.204	138.08	0.289
10	229.01	483.79	101967	483.79	36.48	13.26	1.281	11.01	1.204	190.26	0.399
11	296.82	483.79	134773	483.79	36.48	13.26	1.281	11.01	1.204	246.59	0.517
12	364.16	483.79	167348	483.79	36.48	13.26	1.281	11.01	1.204	302.53	0.634
13	424.16	483.79	196376	483.79	36.48	13.26	1.281	11.01	1.204	352.37	0.739
14	484.16	483.79	225403	483.79	36.48	13.26	1.281	11.01	1.204	402.21	0.843
15	544.16	483.79	254430	483.79	36.48	13.26	1.281	11.01	1.204	452.05	0.947
16	588.55	483.79	281224	483.79	35.49	13.26	1.281	11.01	1.204	498.06	1.044

File Pushover-x.xls - foglio Dt-ag

# Applicazione alla struttura in esame

## telai in direzione x

- Analisi lineare e pushover con corrispondenza tra punti e  $a_g$

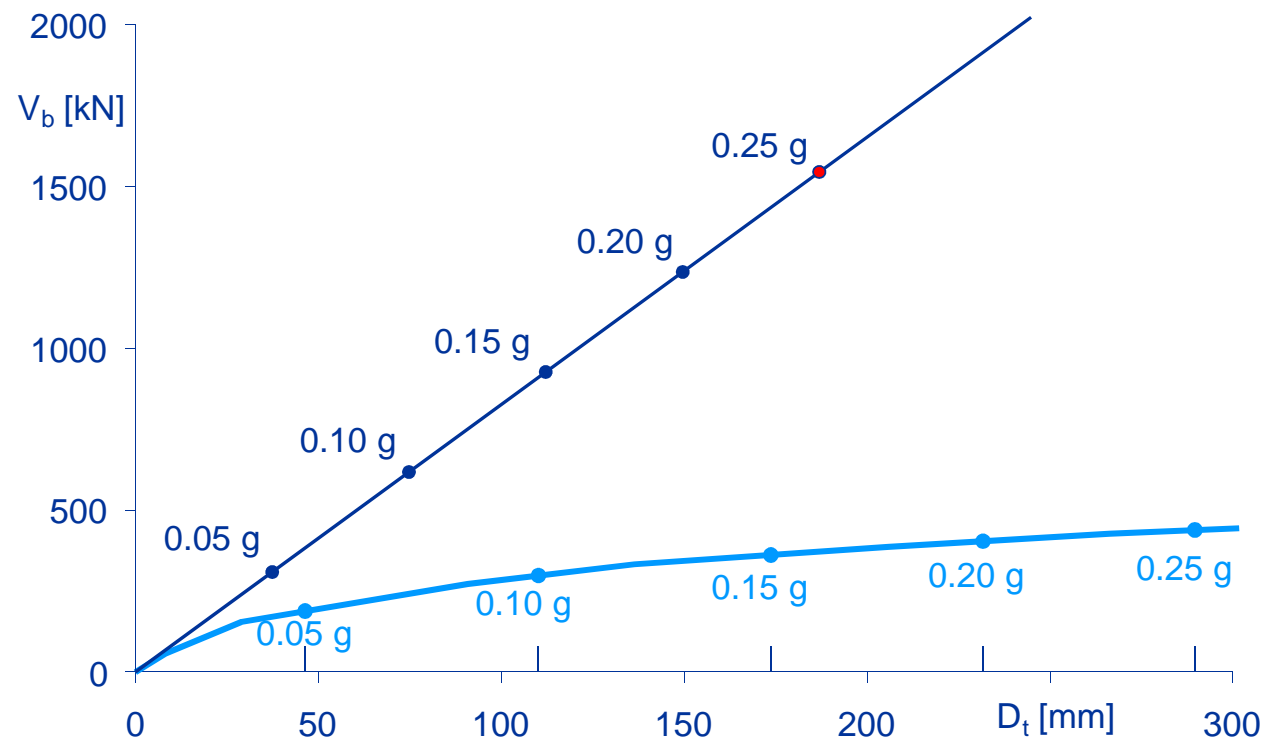


File Pushover-x.xls - foglio Graf Vb-Dt

# Applicazione alla struttura in esame

## telai in direzione y

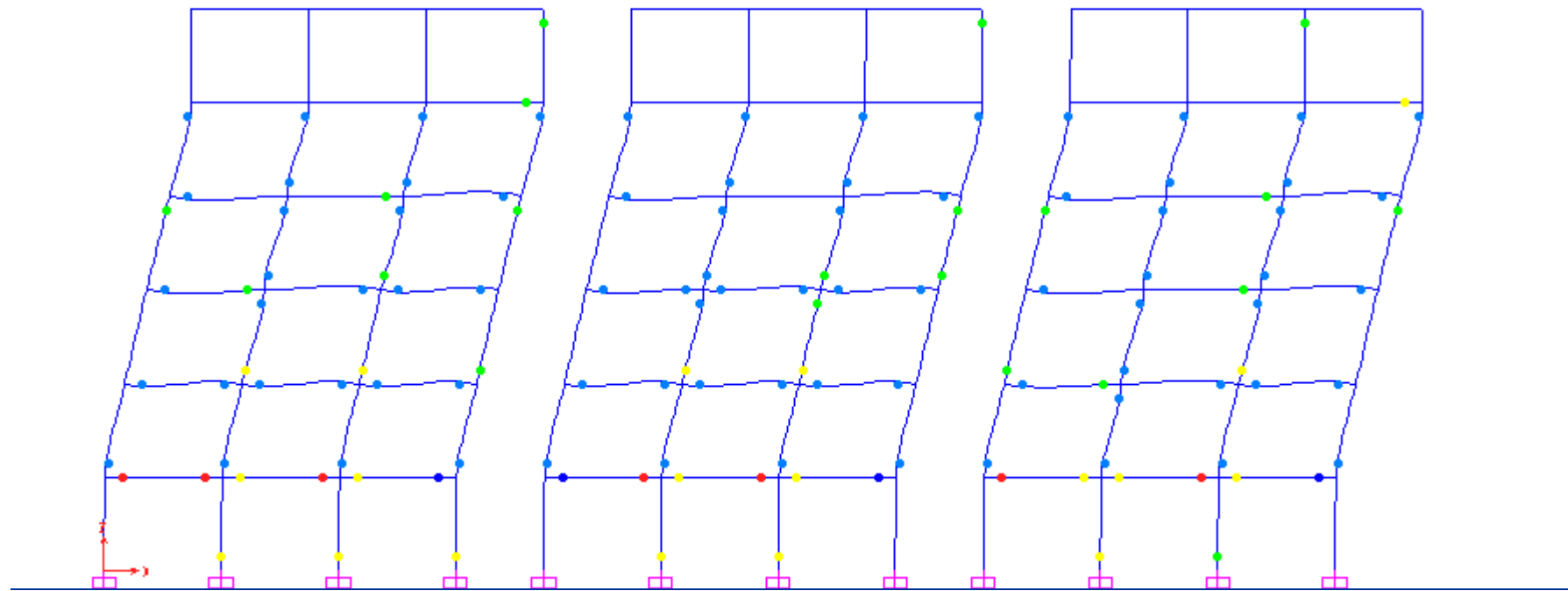
- Analisi lineare e pushover con corrispondenza tra punti e  $a_g$



File Pushover-y.xls - foglio Graf Vb-Dt

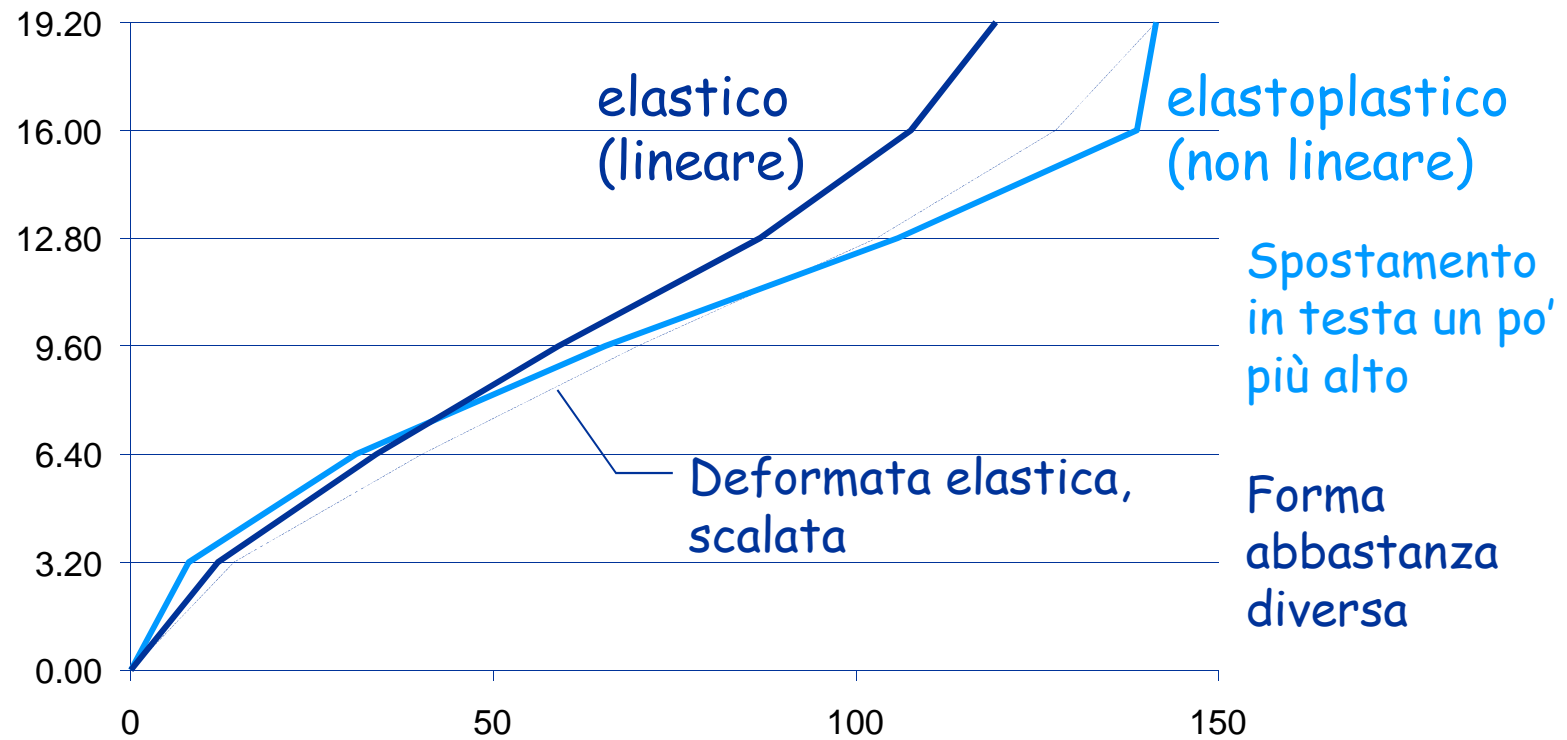
# Direzione X

## travi plasticizzate



Il meccanismo di collasso è sostanzialmente globale

# Deformata per $a_g=0.25\text{ g}$ - dir.x con comportamento elastico e plastico



## Verifica per $a_g=0.25\text{ g}$ - dir.x

Per ciascun interpiano:

- Calcolare la rotazione alla corda  $\theta_u$  e gli spostamenti limite corrispondenti
  - $\theta_u$  dipende anche dallo sforzo normale, che varia in maniera non lineare ed è diverso da quello fornito dall'analisi lineare (ma in genere il  $\Delta N$  da sisma è minore con analisi non lineare)
- Determinare lo spostamento limite minimo
- Confrontarlo con il valore fornito dal calcolo



## Verifica per $a_g=0.25$ g - dir.x

spostamenti relativi		spostamenti disponibili			
ag =	0.25	ag =	0.25		
piano	Dr	piano	Dr	rapporto	
6	2.67	6	50.37	18.884	
5	32.95	5	42.09	1.277	
4	40.35	4	33.38	0.827	
3	34.35	3	26.28	0.765	
2	23.06	2	23.67	1.026	
1	7.99	1	21.68	2.713	
					verifica
				min	0.765
					no

La verifica non è soddisfatta

Nota: per semplicità ho usato gli spostamenti limite calcolati con N da analisi lineare, ma questo non è corretto

# Verifica per $a_g=0.205\text{ g}$ - dir.x

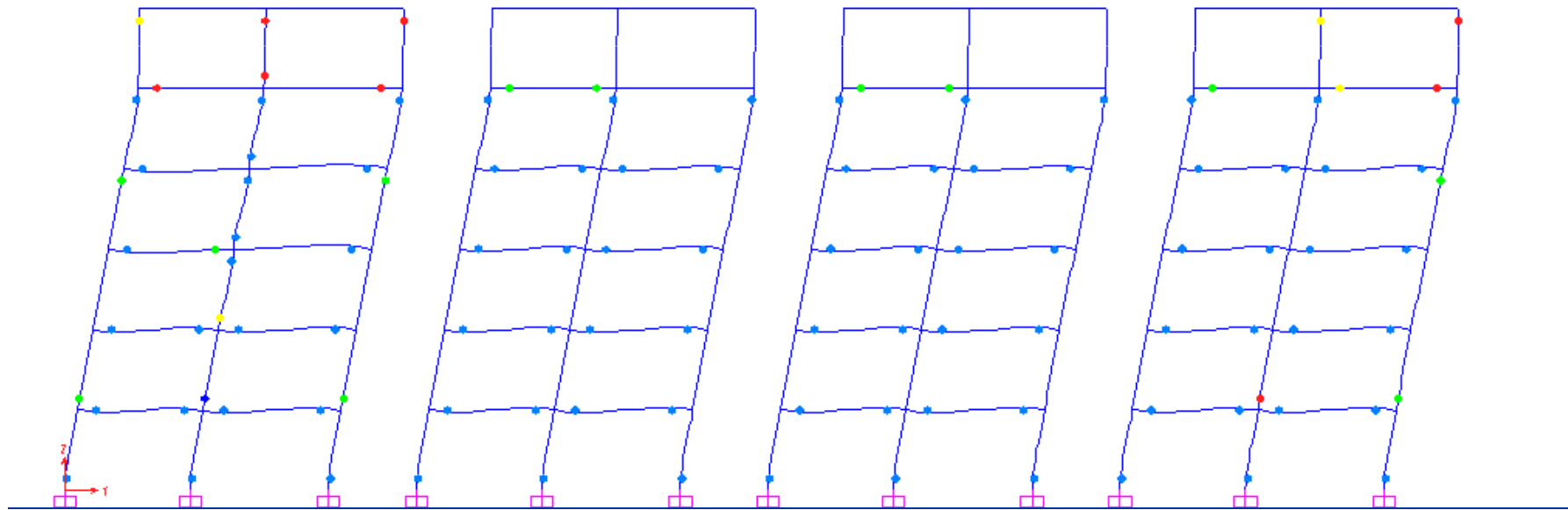
spostamenti relativi		spostamenti disponibili					
ag =	0.205		ag =	0.205			
piano	Dr		piano	Dr		rapporto	
6	2.65		6	50.52		19.066	
5	25.03		5	42.94		1.716	
4	32.97		4	34.78		1.055	
3	28.07		3	28.10		1.001	
2	18.52		2	25.84		1.395	
1	6.51		1	23.30		3.581	
							verifica
					min	1.001	ok

La verifica è soddisfatta

Nota: per semplicità ho usato gli spostamenti limite calcolati con N da analisi lineare, ma questo non è corretto

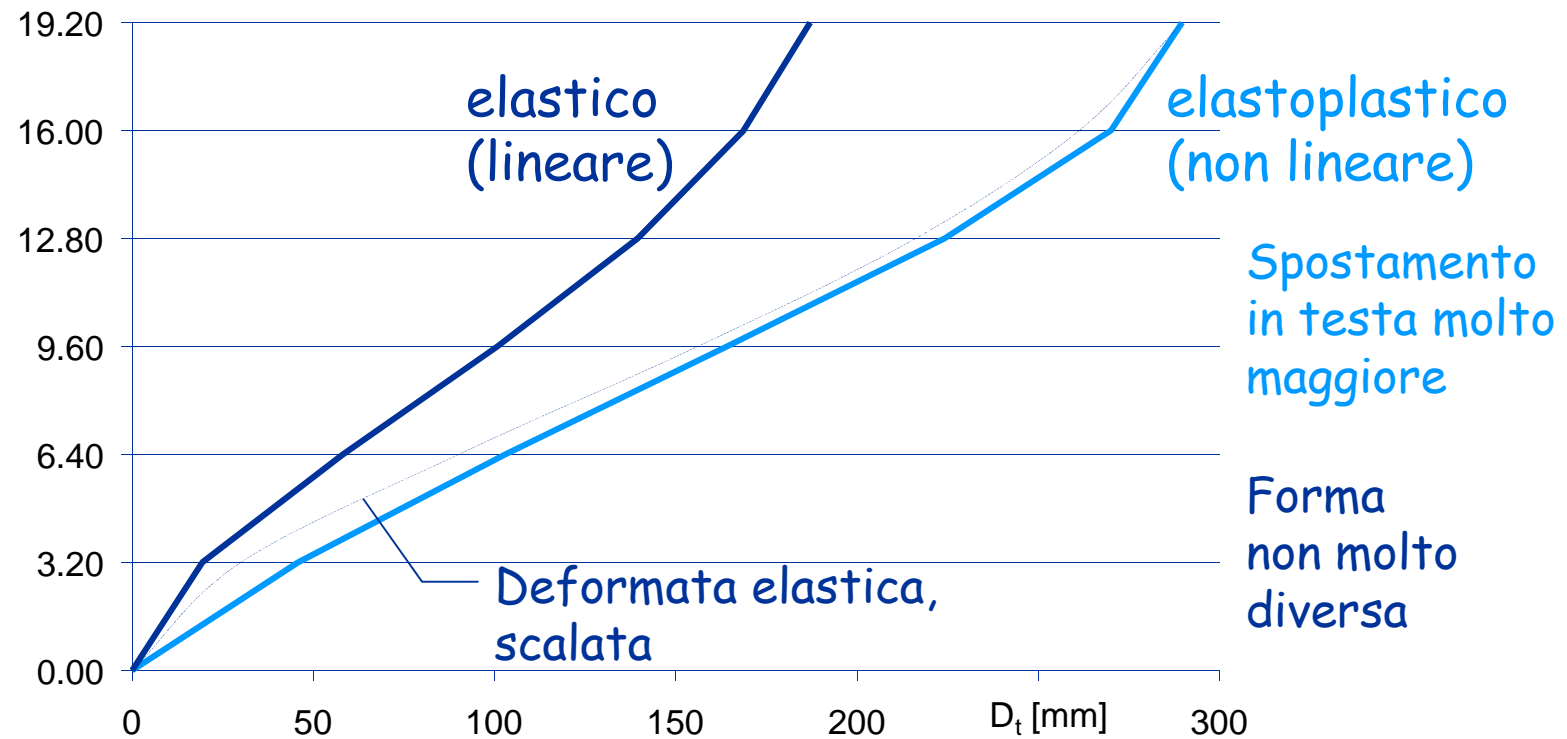
# Direzione $Y$

## travi e travetti plasticizzati



Il meccanismo di collasso è sostanzialmente globale

# Deformata per $a_g=0.25\text{ g}$ - dir.y con comportamento elastico e plastico



# Verifica per $a_g=0.25 \text{ g}$ - dir.y

spostamenti relativi		spostamenti disponibili					
ag =	0.25		ag =	0.25			
piano	Dr		piano	Dr		rapporto	
6	19.65		6	49.20		2.504	
5	45.85		5	39.66		0.865	
4	59.97		4	31.20		0.520	
3	61.30		3	26.61		0.434	
2	57.17		2	20.32		0.355	
1	45.68		1	19.77		0.433	
							verifica
					min	0.355	no

La verifica non è soddisfatta

Nota: per semplicità ho usato gli spostamenti limite calcolati con N da analisi lineare, ma questo non è corretto

# Verifica per $a_g=0.116 \text{ g}$ - dir.y

spostamenti relativi		spostamenti disponibili					
ag =	0.116		ag =	0.116			
piano	Dr		piano	Dr		rapporto	
6	12.97		6	50.28		3.876	
5	21.74		5	42.62		1.961	
4	29.65		4	35.73		1.205	
3	31.54		3	31.55		1.000	
2	25.59		2	28.44		1.111	
1	11.18		1	26.55		2.374	
							verifica
					min	1.000	ok

La verifica è soddisfatta

Nota: per semplicità ho usato gli spostamenti limite calcolati con N da analisi lineare, ma questo non è corretto

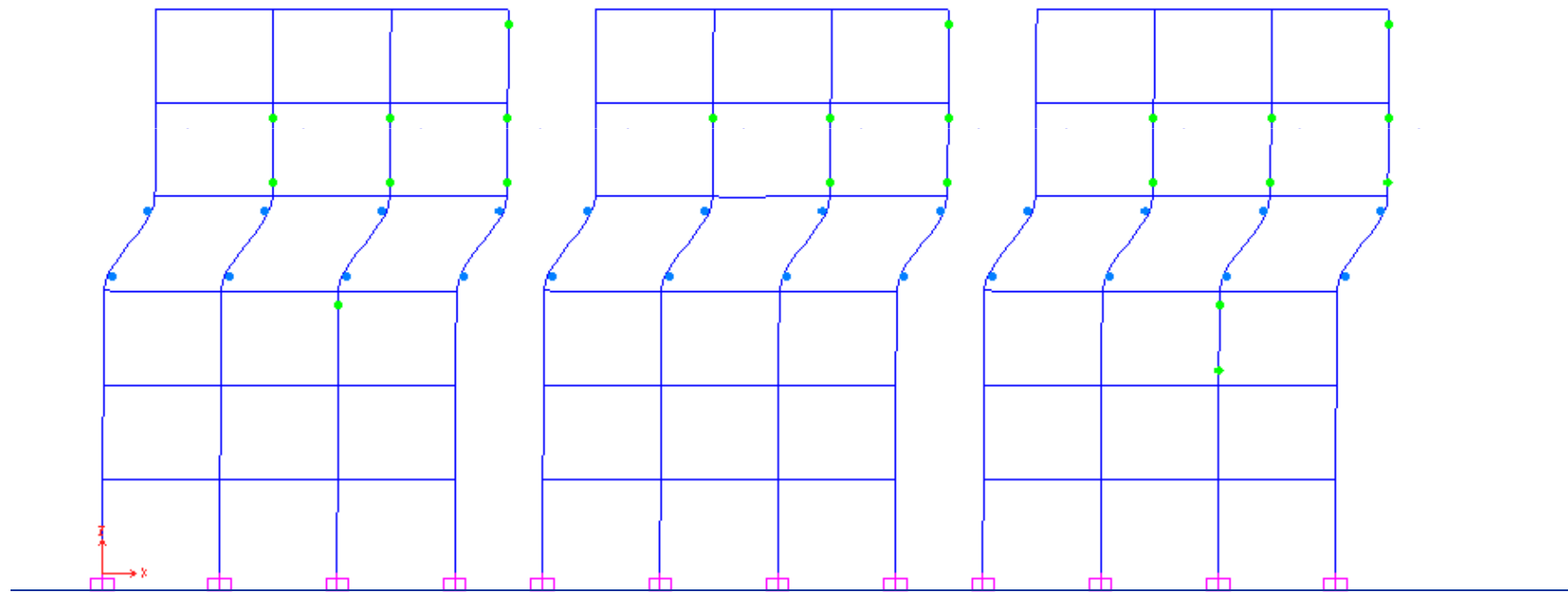
# Conclusioni

- L'analisi statica non lineare mostra che lo spostamento limite è raggiunto
  - In direzione x: per  $a_g = 0.205 g$
  - In direzione y: per  $a_g = 0.116 g$
- Questi valori sono minori di quelli stimati con l'analisi lineare, pari rispettivamente a  $0.256 g$  e  $0.163 g$
- In effetti gli spostamenti relativi valutati con analisi non lineare sono abbastanza maggiori di quelli stimati con analisi lineare, specie in direzione y

# Direzione X

travi infinitamente resistenti

E se il modello cambia ?

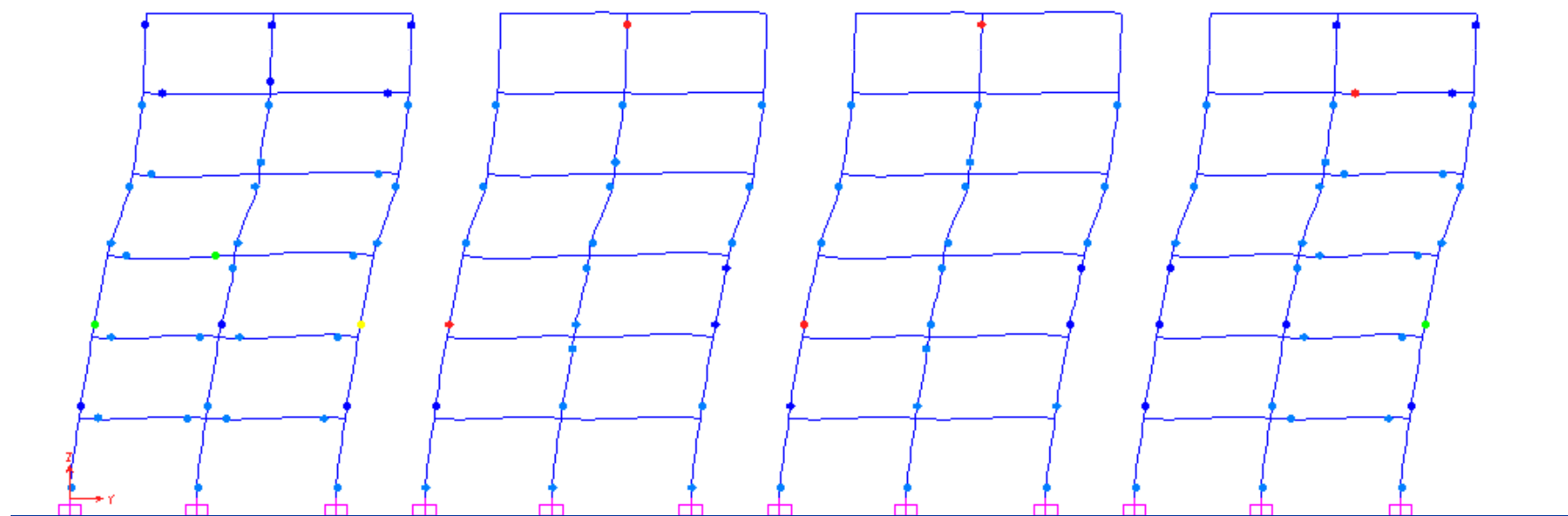


Meccanismo di piano



# Direzione Y

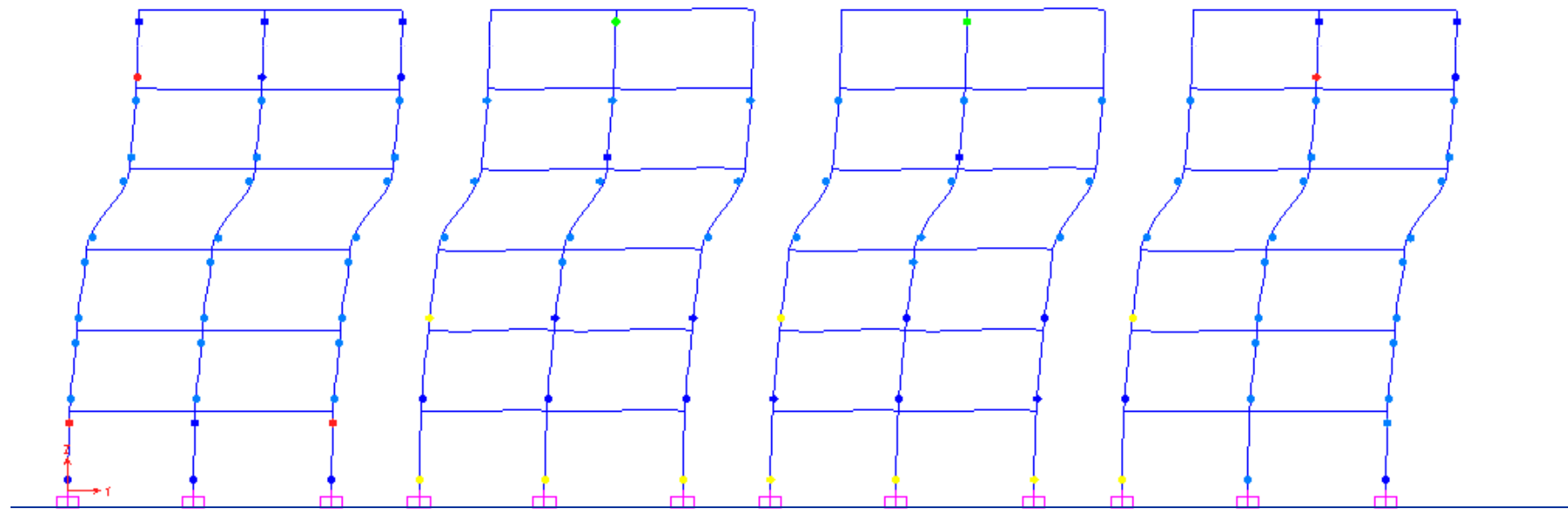
travi plasticizzate, travetti no



Minime variazioni

# Direzione $Y$

travi e travetti infinitamente resistenti



Meccanismo di piano

# Validazione (considerazioni)

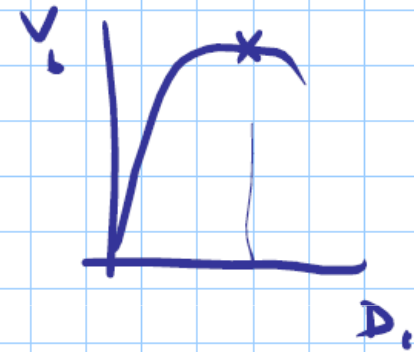
## ANALISI NON LINEARE

massimo  $q_s = \infty$   
CHIARIMENTI SU A.N.L.

1) confronto

spost. con. ad  $q_s$  - capacità di spost.

2) come si calcolano le capacità di spost.



rotazioni  
plastiche?

VALIDAZ. CON A.L.

3) spostamenti per  $q_s$  con A.L.

4) distribuz. cerniere A.N.L. cfr. con dista. cerniere A.L.  
per  $q_s$  ( $P > \dots$ )