

# Lezione

Riflessioni sull'analisi  
incrementale nonlineare

# Procedura di verifica strutturale con analisi incrementale nonlineare

È un approccio relativamente recente:

1. Si calcola la risposta inelastica della struttura soggetta a forze orizzontali crescenti (analisi incrementale nonlineare)
2. Si valutano gli spostamenti della struttura (richieste di spostamento) in corrispondenza di livelli di carico sismico predefiniti.

Infine

si verifica che le richieste di spostamento siano inferiori agli spostamenti che, valutati secondo analisi pushover, corrispondono al raggiungimento dei livelli prestazionali di riferimento

# Procedura di verifica strutturale con analisi incrementale nonlineare

L'idea è ottima ....

ma

- Quanto è affidabile la valutazione della risposta con analisi incrementale nonlineare ?
- Quanto è affidabile la previsione degli spostamenti che la struttura subirà durante un terremoto?

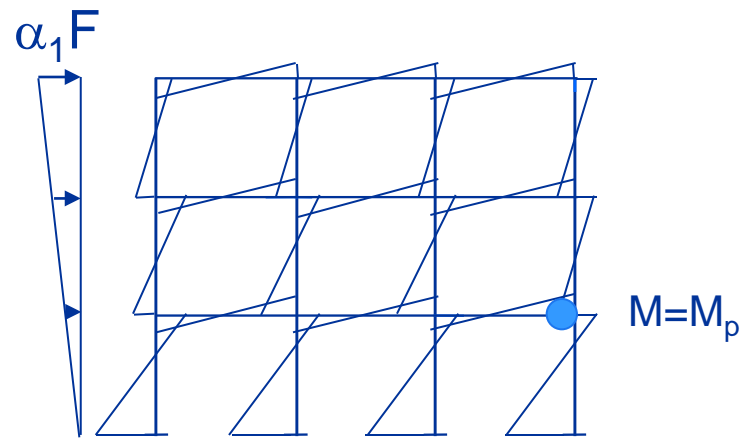
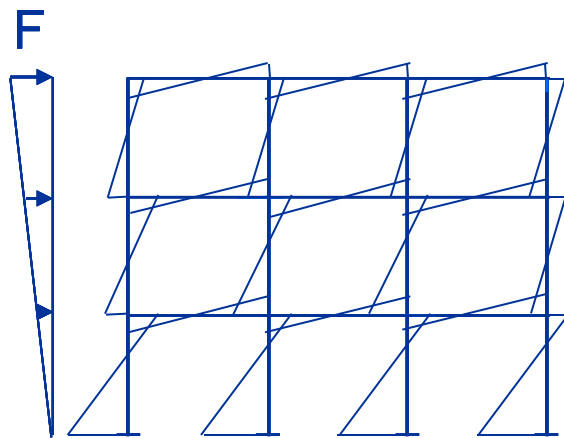
# Analisi incrementale nonlineare

(tradizionalmente...)

E' un'analisi nonlineare, costituita da una sequenza di risposte lineari ad incrementi (passi) di carico.

## 1° PASSO

La struttura è sottoposta ai carichi gravitazionali e all'azione di forze sismiche equivalenti di predeterminata distribuzione. Il primo passo di carico avrà termine in corrispondenza del moltiplicatore delle forze orizzontali corrispondente alla prima plasticizzazione.

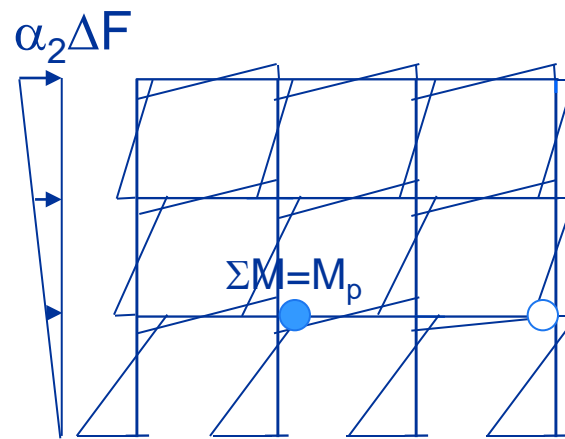
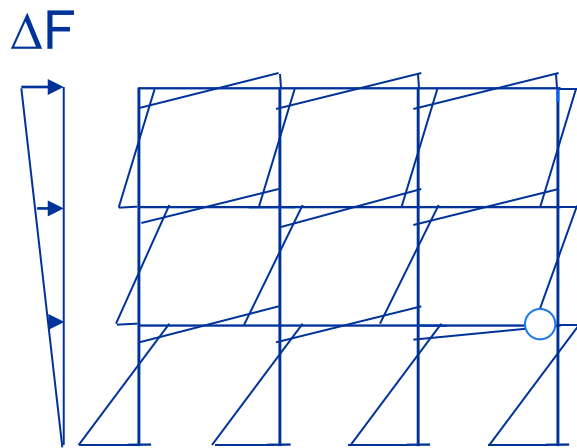


# Analisi incrementale nonlineare

(tradizionalmente...)

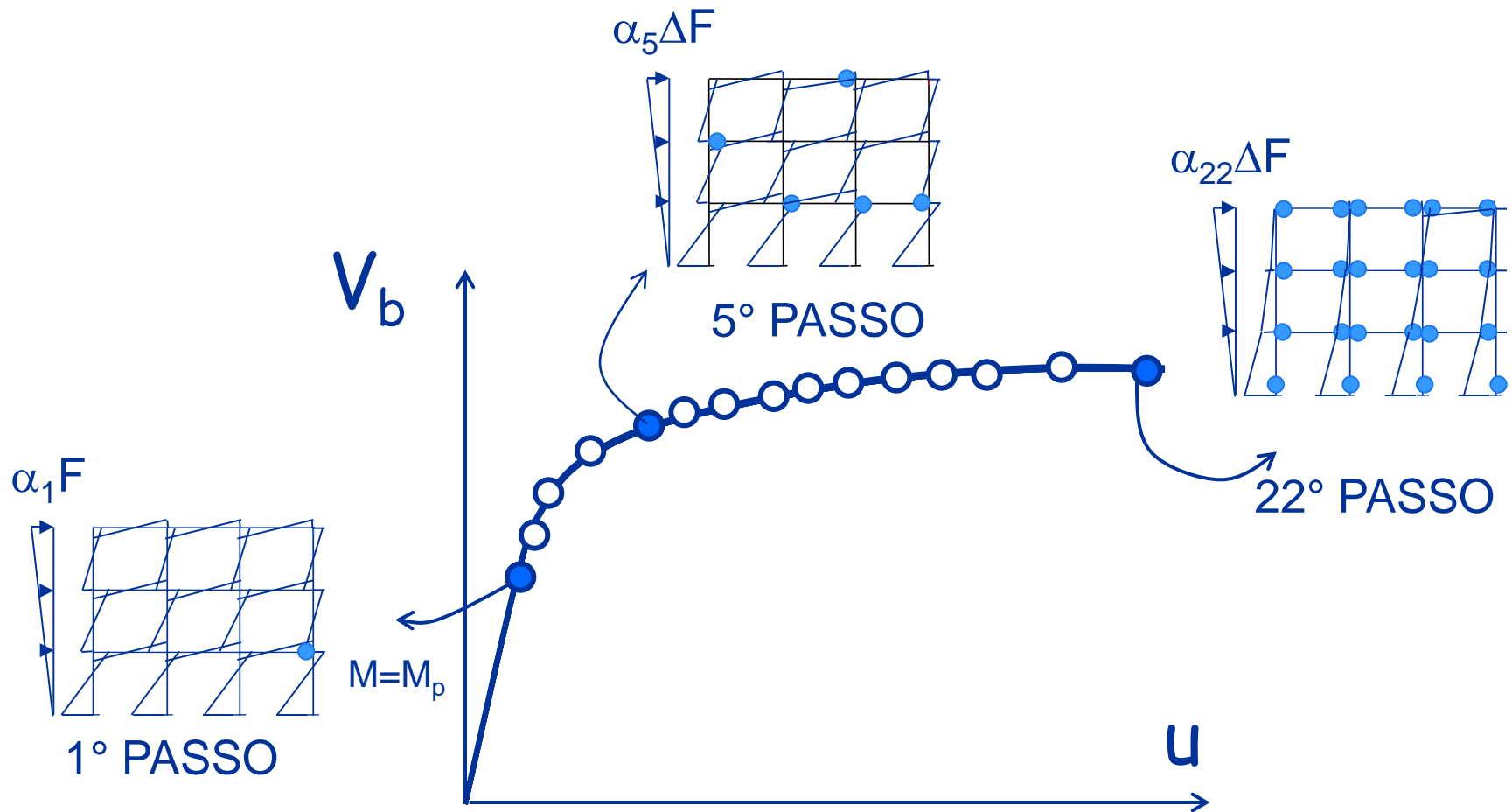
## iesimo PASSO

La struttura si presenta geometricamente modificata rispetto alla sua configurazione iniziale per la presenza di alcune cerniere plastiche. Tale struttura è sottoposta all'azione di nuove forze sismiche. Il passo di carico avrà termine alla formazione di una nuova plasticizzazione (o ad un ritorno in campo elastico di una cerniera plastica).



# Analisi incrementale nonlineare

(tradizionalmente...)



# Analisi incrementale nonlineare

## PROBLEMATICHE

1. MODELLAZIONE DELL'AZIONE SISMICA
2. CALCOLO DELLA RISPOSTA STRUTTURALE

# Modellazione dell'azione sismica

Il modello di carico deve simulare le azioni di inerzia che si manifestano, in occorrenza di eventi sismici

IN:

- STRUTTURE INTEGRE (a comportamento elastico)
- STRUTTURE DANNEGGIATE (a comportamento inelastico)



# Modellazione dell'azione sismica

## MODELLI DI CARICO INVARIANTI

Ovvero con distribuzione  
spaziale immutata al variare  
dello spostamento del punto di  
riferimento

ad es.  
modello di forze costanti

## MODELLI DI CARICO EVOLUTIVI

Ovvero con distribuzione  
spaziale che muta al variare  
dello spostamento del punto di  
riferimento

ad es.  
modello evolutivo di forze  
proporzionali al primo modo di  
vibrazione

# Calcolo della risposta strutturale

L'analisi incrementale puo' essere condotta valutando la risposta strutturale al generico passo di carico tramite:

- ANALISI STATICA
- ANALISI MODALE  
(ad es. Gupta e Kunnath; 2000)

# Calcolo della risposta strutturale

## ANALISI STATICA

### MODELLI INVARIANTI

- MODELLI "SEMI-EMPIRICI"

PER I QUALI NON ESISTE UNA DIPENDENZA DIRETTA O ANALITICAMENTE FORMULATA DALLE CARATTERISTICHE DINAMICHE DELLA STRUTTURA (ad es. triangolari o costanti)

- MODELLI TEORICI

DIPENDENTI DALLE CARATTERISTICHE DINAMICHE DELLA STRUTTURA E/O DEL SISMA

### MODELLI EVOLUTIVI

- MODELLI TEORICI

DIPENDENTI DALLE CARATTERISTICHE DINAMICHE DELLA STRUTTURA E/O DEL SISMA

# Calcolo della risposta strutturale

## ANALISI MODALE

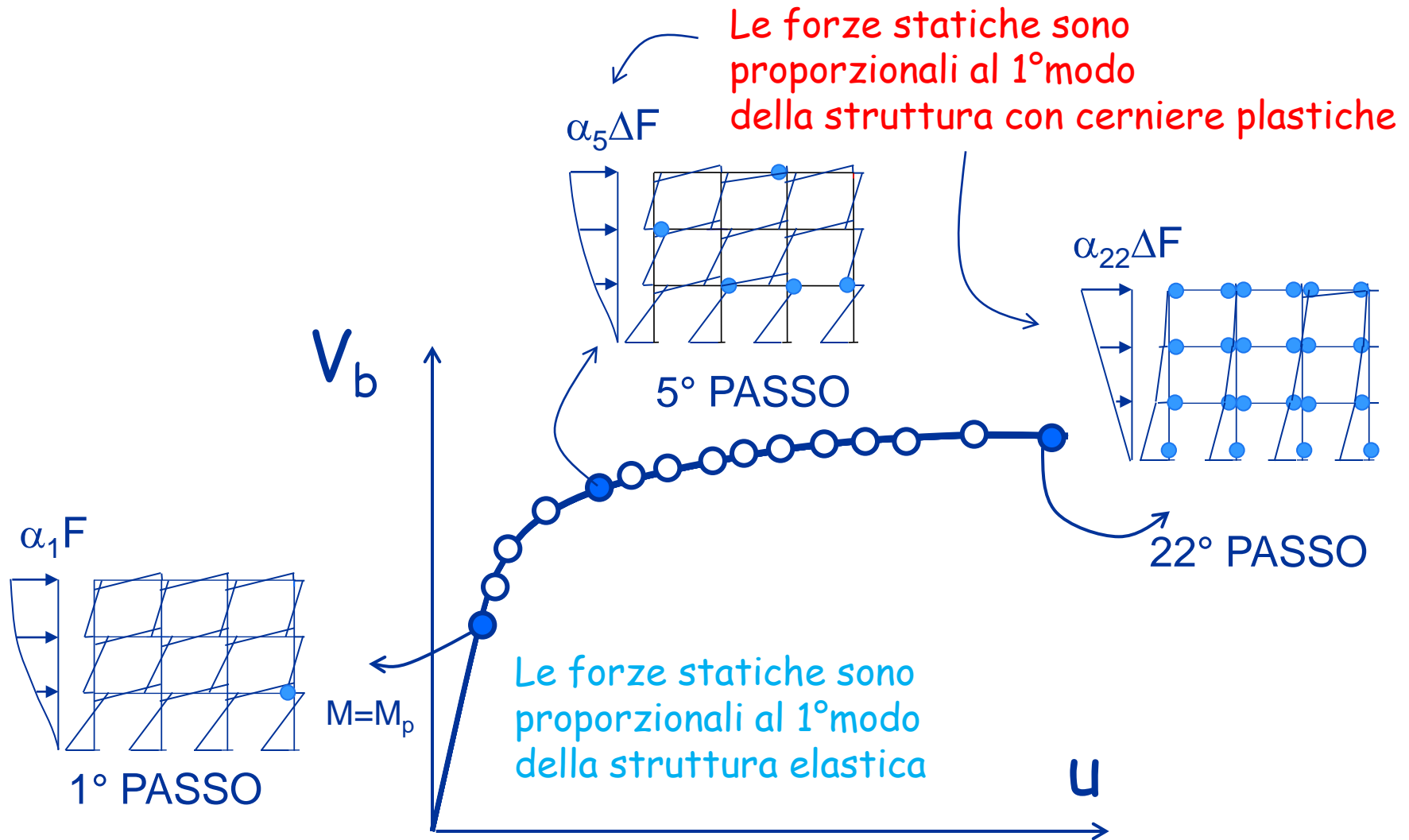
MODELLI  
INVARIANTI

MODELLI  
EVOLUTIVI



# Analisi incrementale nonlineare

## Modelli di carico evolutivi



# Analisi statica non lineare

----- Alcune applicazioni -----

# Modello delle azioni sismiche

## Analisi statica nonlineare

### Modelli semiempirici !

#### - Modello di carico A1

Le forze statiche equivalenti sono proporzionali alle masse

$$F_i = \frac{m_i}{\sum_{j=1}^N m_j} V_b$$

#### - Modello di carico A2

Le forze statiche equivalenti sono proporzionali alle masse ed alle quote delle stes

$$F_i = \frac{m_i h_i}{\sum_{j=1}^N m_j h_j} V_b$$

# Modello delle azioni sismiche

## Analisi statica nonlineare

Modelli teorici ... che tengono conto di più modi di vibrazione !

### - Modello di carico B1

Le forze statiche  
equivalenti  
sono proporzionali alla  
deformata del modo  
equivalente  
(Requena e Ayala, 2000):

$$F_i = \frac{m_i \phi_{i,eq}}{\sum_{j=1}^N m_j \phi_{j,eq}} V_b$$

dove:

$$\phi_{i,eq} = \sqrt{\sum_{j=1}^M (\Gamma_{ij} \phi_j)^2}$$



# Modello delle azioni sismiche

## Analisi statica nonlineare

### - Modello di carico B2

Le forze orizzontali (Freeman et al., 1998) sono ottenute dalla combinazione delle forze statiche equivalenti corrispondenti ai vari modi.

$$F_i = \sqrt{\sum_{j=1}^M F_{ij}^2}$$

# Modello delle azioni sismiche

## Analisi statica nonlineare

### - Modello di carico B3

Le forze statiche  
equivalenti sono ricavate  
come differenza dei tagli  
modali di piano

(Yang e Wang; 2000):

determinati mediante  
combinazione dei tagli  
associati ai singoli modi di  
vibrazione:

$$F_i = v_i - v_{i+1}$$

dove:

$$v_i = \sqrt{\sum_{j=1}^M v_{ij}^2}$$

# Modello delle azioni sismiche

## Analisi statica nonlineare

### - Modello di carico B4

Le forze statiche equivalenti sono ricavate come differenza dei momenti ribaltanti modali di piano (Rossi et al.; 2000): determinati mediante combinazione dei momenti associati ai singoli modi di vibrazione:

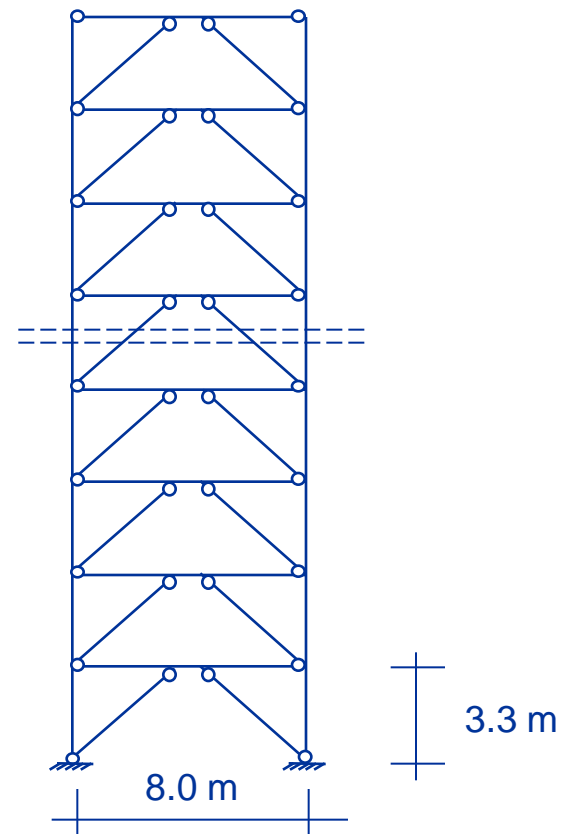
$$F_i = \frac{m_i - m_{i+1}}{h}$$

dove:

$$m_i = \sqrt{\sum_{j=1}^M m_{ij}^2}$$

# Sistemi con controventi eccentrici

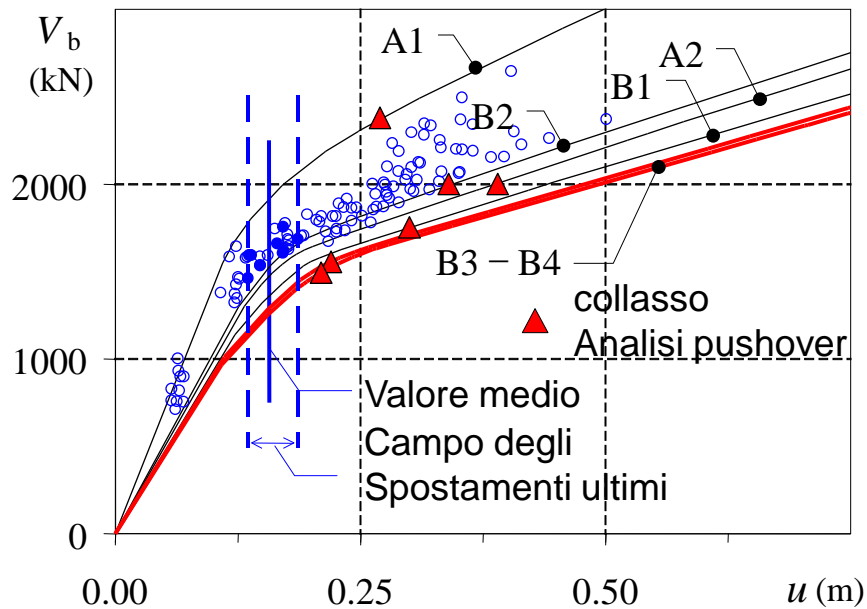
- 12 piani
- Massa di piano=146.8 t
- Link corti
- Collegamenti incernierati tra travi e colonne, colonne e fondazioni e agli estremi delle diagonali
- $T_1=1.83$  s



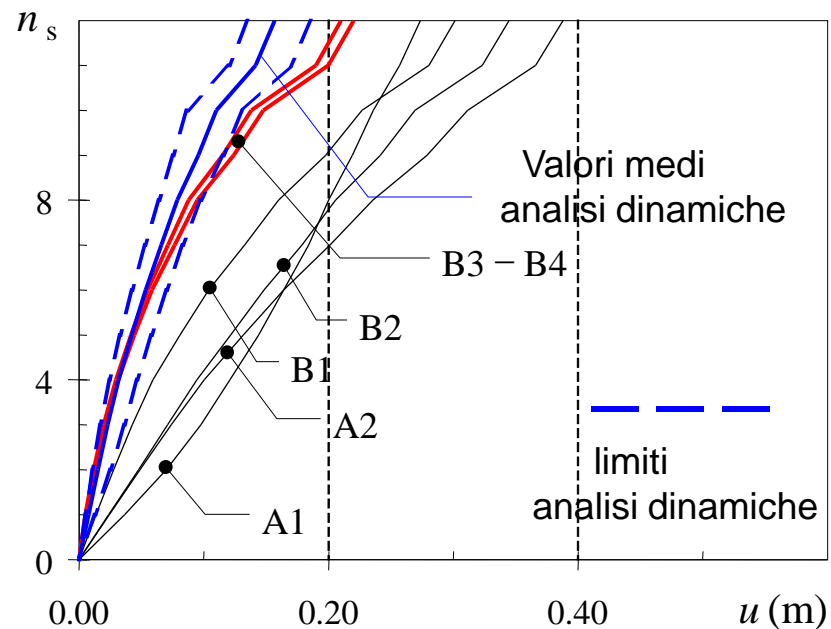
# Sistemi con controventi eccentrici

- Le curve di capacità corrispondenti ai modelli semi-empirici (A1-A2) includono i risultati dell'analisi dinamica incrementale. Malgrado ciò, entrambi i modelli sovrastimano gli spostamenti di collasso.
- I modelli B3-B4 sembrano essere i più affidabili nella previsione della risposta sismica a collasso.

Curve di capacità'



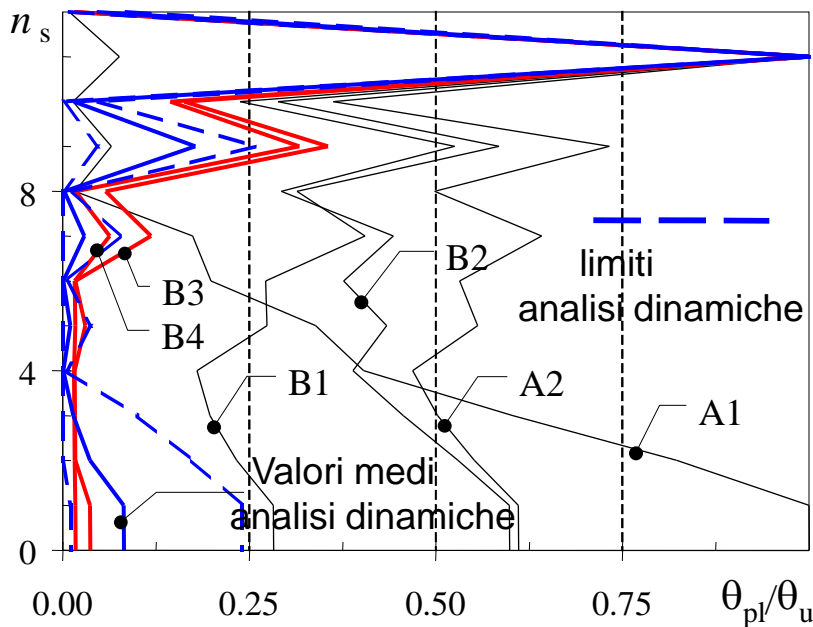
Spostamenti laterali a collasso



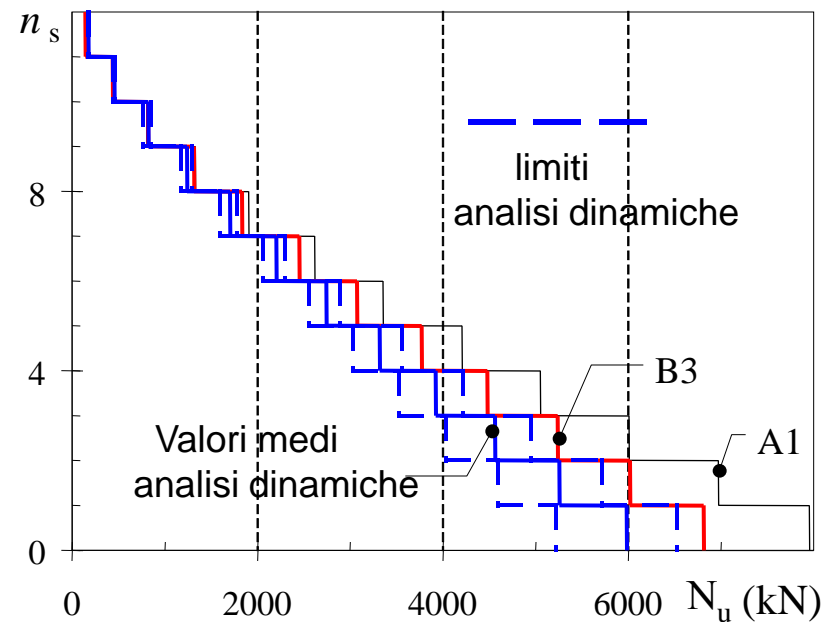
# Sistemi con controventi eccentrici

- I modelli di carico B3-B4 sembrano essere anche i più affidabili nella previsione delle massime rotazioni plastiche dei link (elementi dissipativi) e nella stima degli sforzi assiali delle colonne (elementi non-dissipativi).

Deformazioni plastiche dei link a collasso

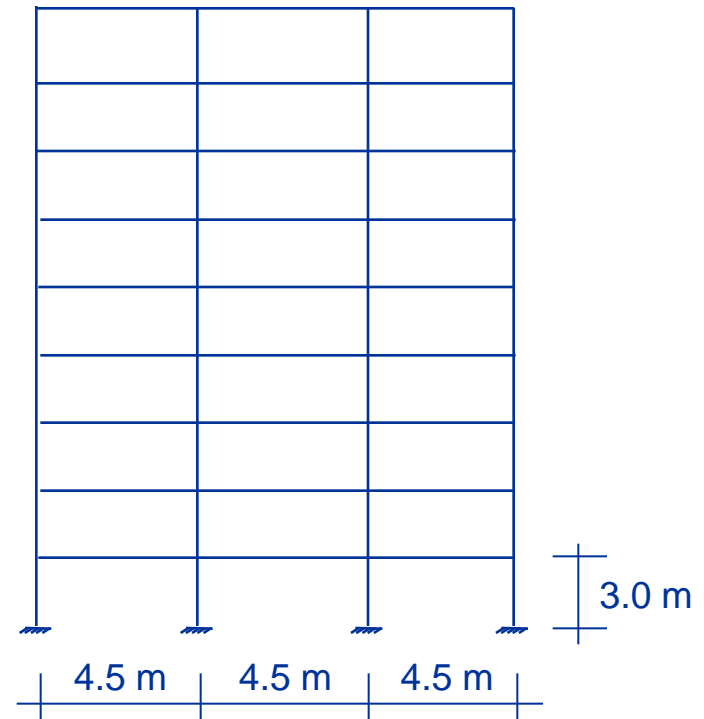


Sforzi normali nelle colonne



# Sistemi non controventati

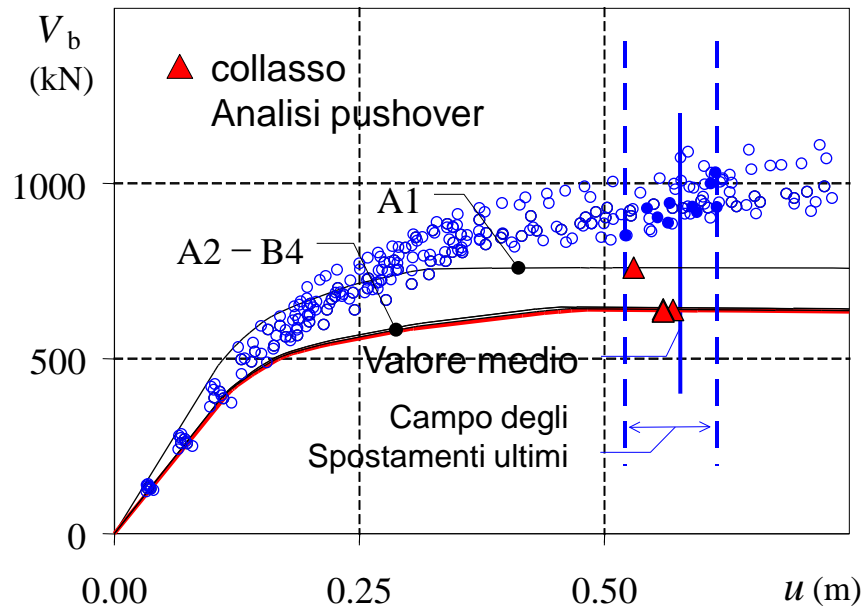
- 9 piani
- Massa di piano=22.8 t
- Collegamenti rigidi
- $T_1=1.18$  s



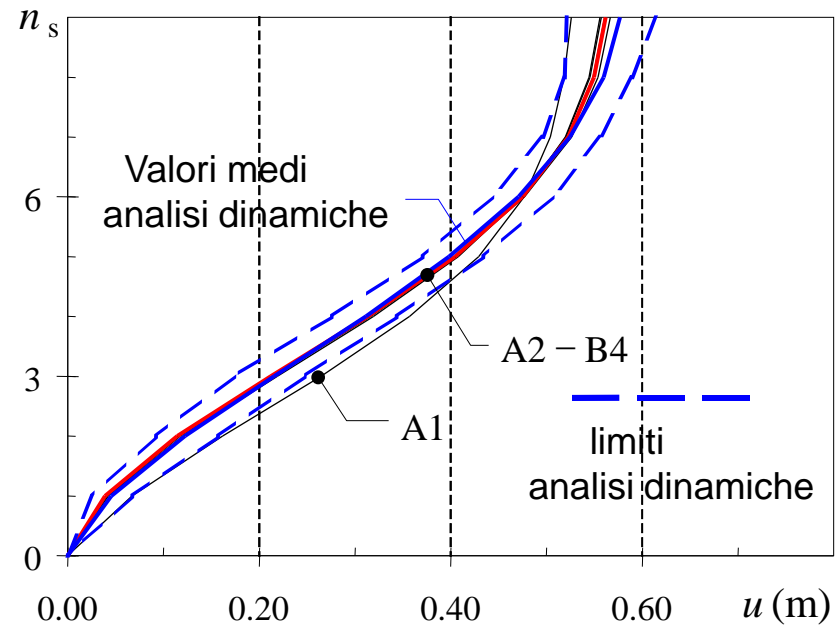
# Sistemi non controventati

- Ad eccezione del modello A1, tutti i modelli di carico valutano esattamente gli spostamenti laterali a collasso. Ciò malgrado, essi sottostimano i tagli di base nel campo inelastico del comportamento strutturale.

Curve di capacità



Spostamenti orizzontali

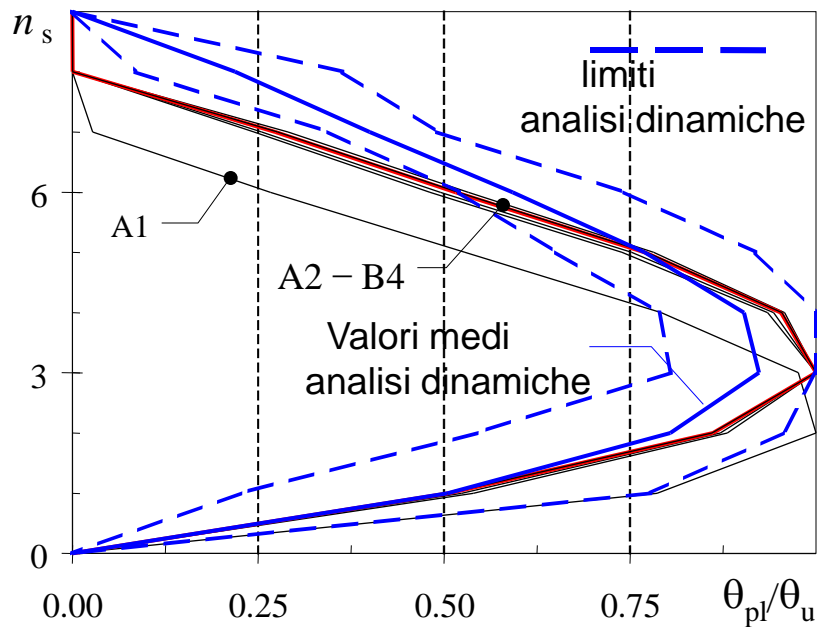




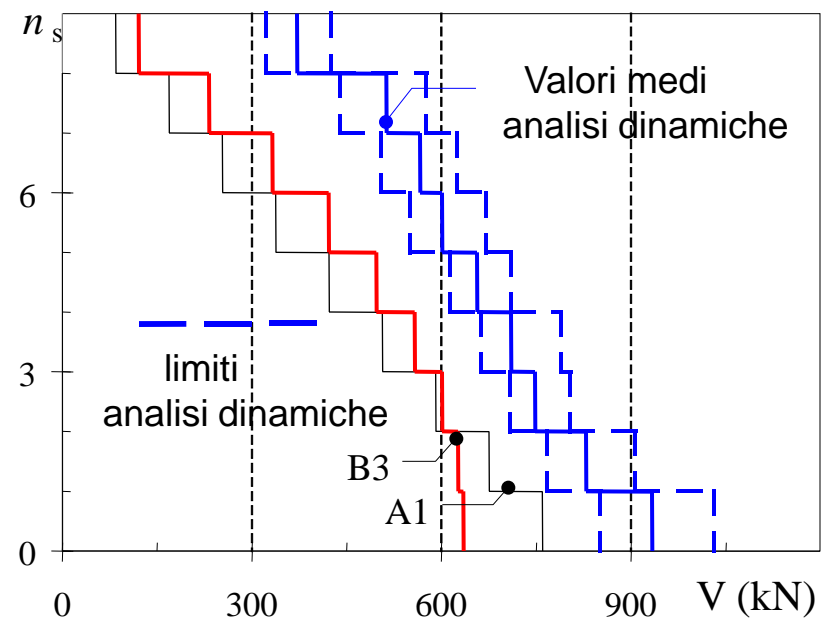
# Sistemi non controventati

- Tutti i modelli di carico sottostimano gli sforzi assiali delle colonne (elementi non dissipativi) e, ad eccezione di A1, forniscono valori delle massime rotazioni plastiche delle travi molto prossimi a quelli sperimentali.

Rotazioni plastiche delle travi a collasso

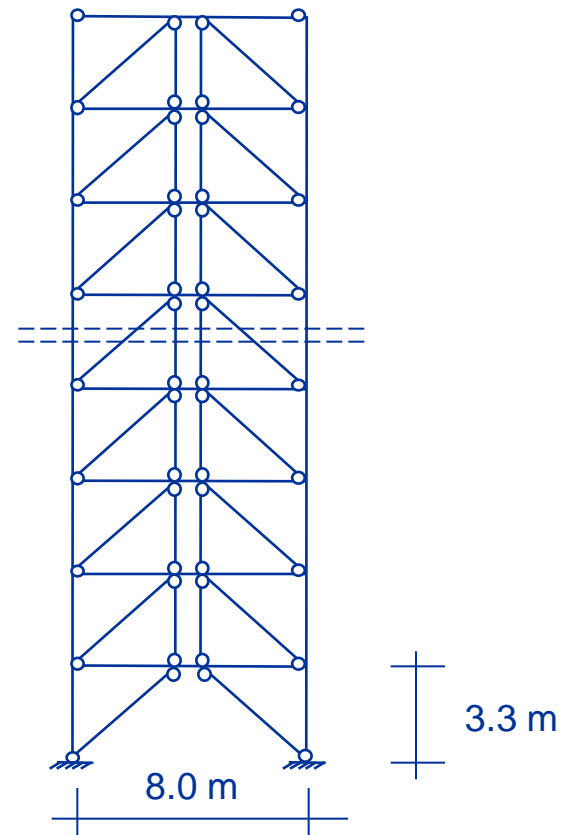


Tagli di piano a collasso



# Sistemi con controventi e pendoli

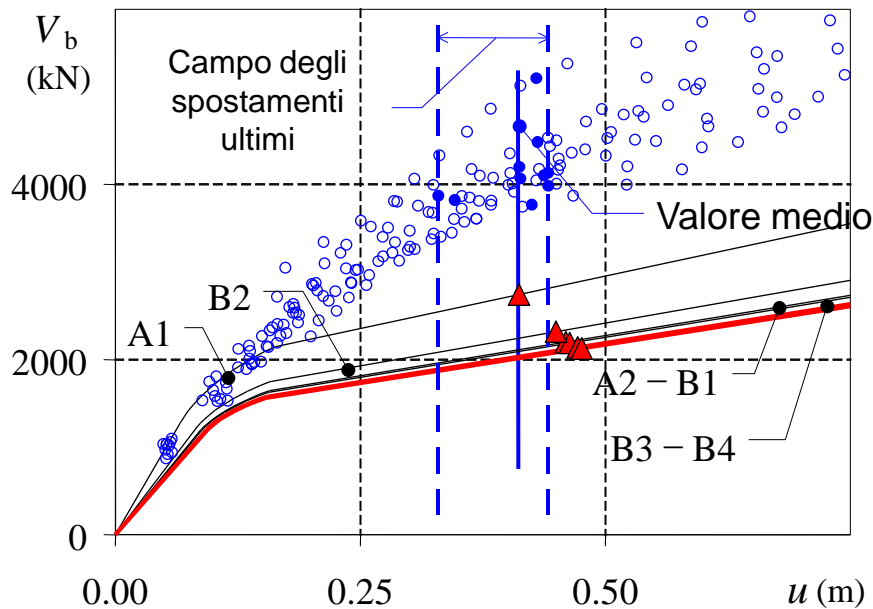
- 12 piani
- Massa di piano=146.8 t
- Link corti
- Collegamenti incernierati tra travi e colonne, colonne e fondazioni e agli estremi delle diagonali
- $T_1=1.59\text{ s}$



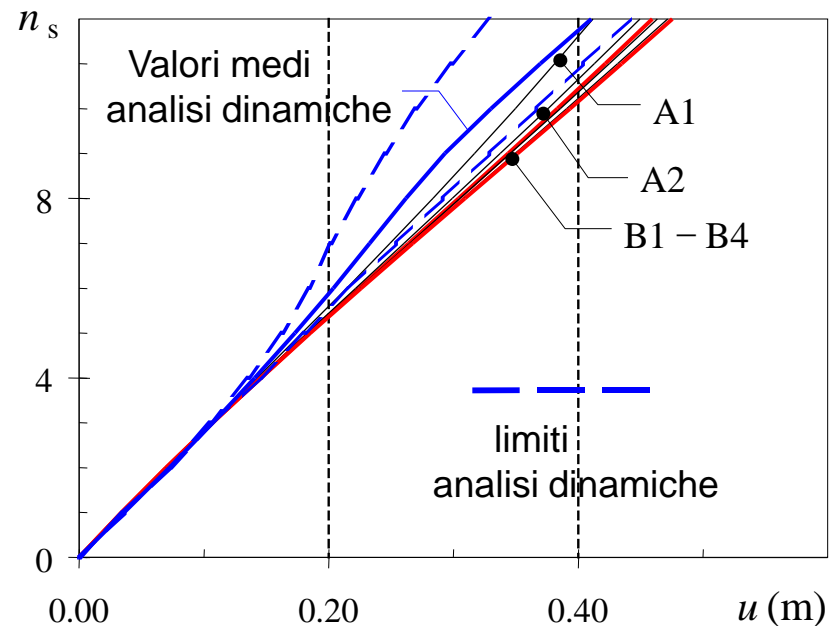
# Sistemi con controventi e pendoli

- Tutti i modelli di carico sembrano essere piuttosto affidabili nella valutazione dei massimi spostamenti laterali di collasso.
- Come per i sistemi non controventati, tutti i modelli di carico sottostimano il taglio di base in campo inelastico.

Curve di capacità



Spostamenti orizzontali a collasso



# Sistemi con controventi e pendoli

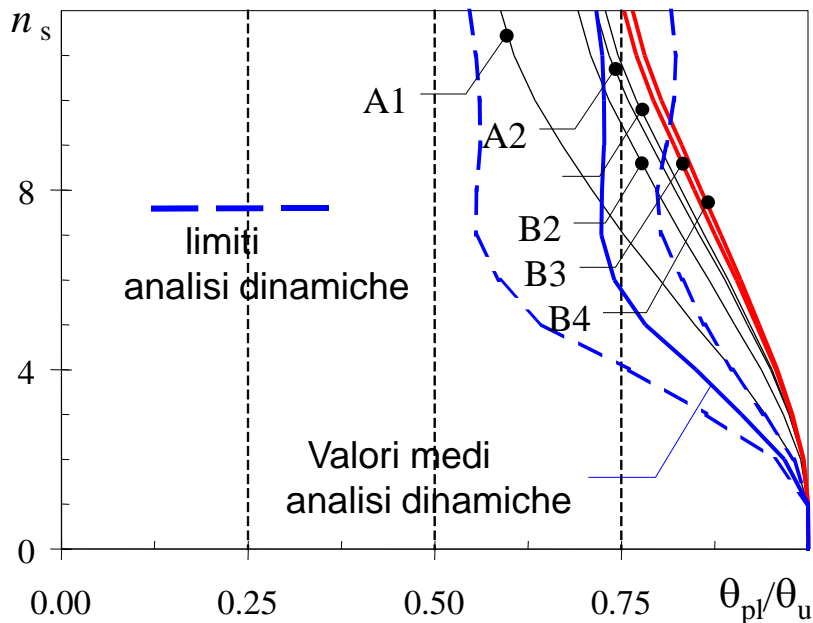
$$\begin{array}{c}
 F_R^{(1)} \quad F^{(2)} \quad \Delta F^{(1)} \quad F^{SD} \\
 \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Diagram 2} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Diagram 3} \end{array} = \begin{array}{c} \text{Diagram 4} \\ \text{Diagram 4} \end{array} \\
 \mathcal{M}_R^{(1)} \quad S_a^{(2)} \mathcal{M}_B^{(2)} \quad -\Delta S_a^{(1)} \mathcal{M}_B^{(1)} \quad \mathcal{M}_R^{(1)}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Diagram 2} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Diagram 3} \end{array} = \begin{array}{c} \text{Diagram 4} \\ \text{Diagram 4} \end{array} \\
 \mathcal{M}_R^{(1)} \quad -S_a^{(2)} \mathcal{M}_B^{(2)} \quad \Delta S_a^{(1)} \mathcal{M}_B^{(1)} \quad \mathcal{M}_R^{(1)}
 \end{array}$$

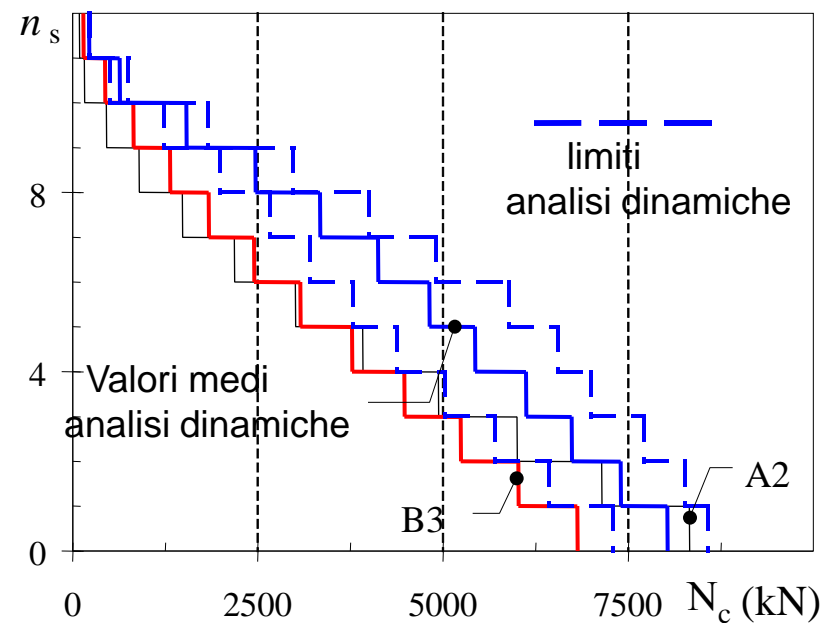
# Sistemi con controventi e pendoli

- Tutti i modelli di carico risultano poco affidabili nella valutazione degli sforzi assiali delle colonne e delle rotazioni plastiche.
- Le analisi pushover conducono ad un meccanismo globale non coerente con quello evidenziato dalla sperimentazione.

## Deformazioni plastiche dei link



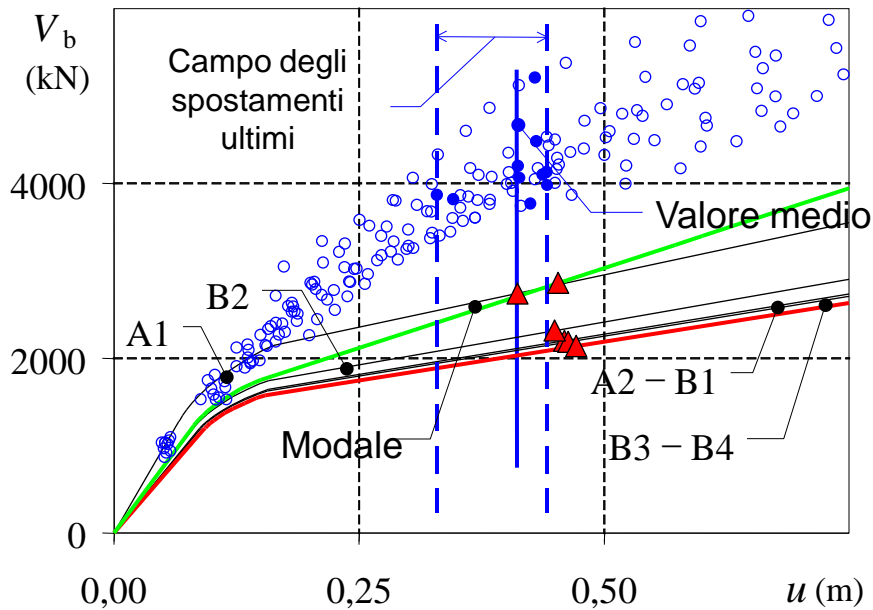
## Sforzi normali nelle colonne



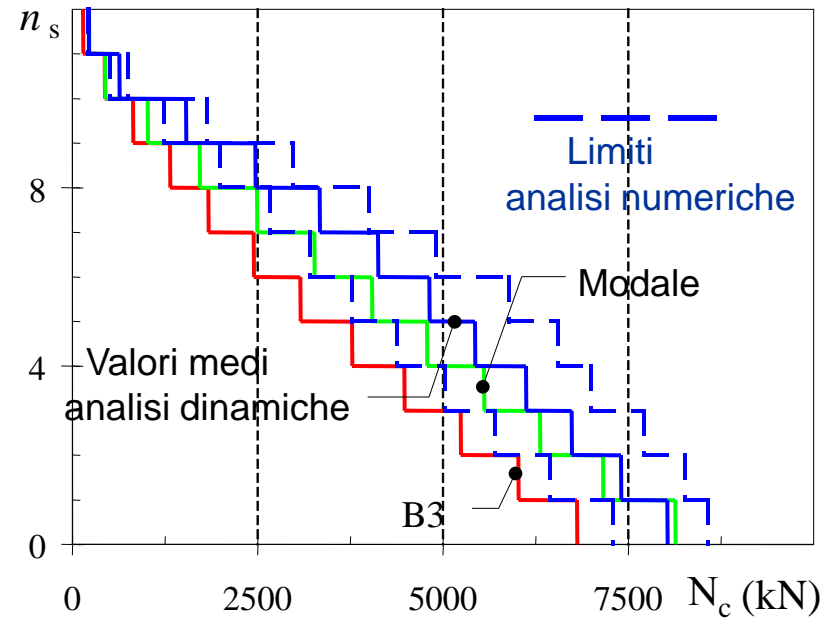
# Sistemi con controventi e pendoli

- L'utilizzo dell'analisi modale migliora sensibilmente la previsione del taglio di base e delle sollecitazioni degli elementi.
- Malgrado ciò, la plasticizzazione delle colonne dei piani superiori non è colta per la lieve sottostima degli sforzi assiali delle stesse.

Curve di capacità



Sforzi normali nelle colonne



# Analisi multimodale nonlineare

# Analisi multimodale

Analisi multimodale per :

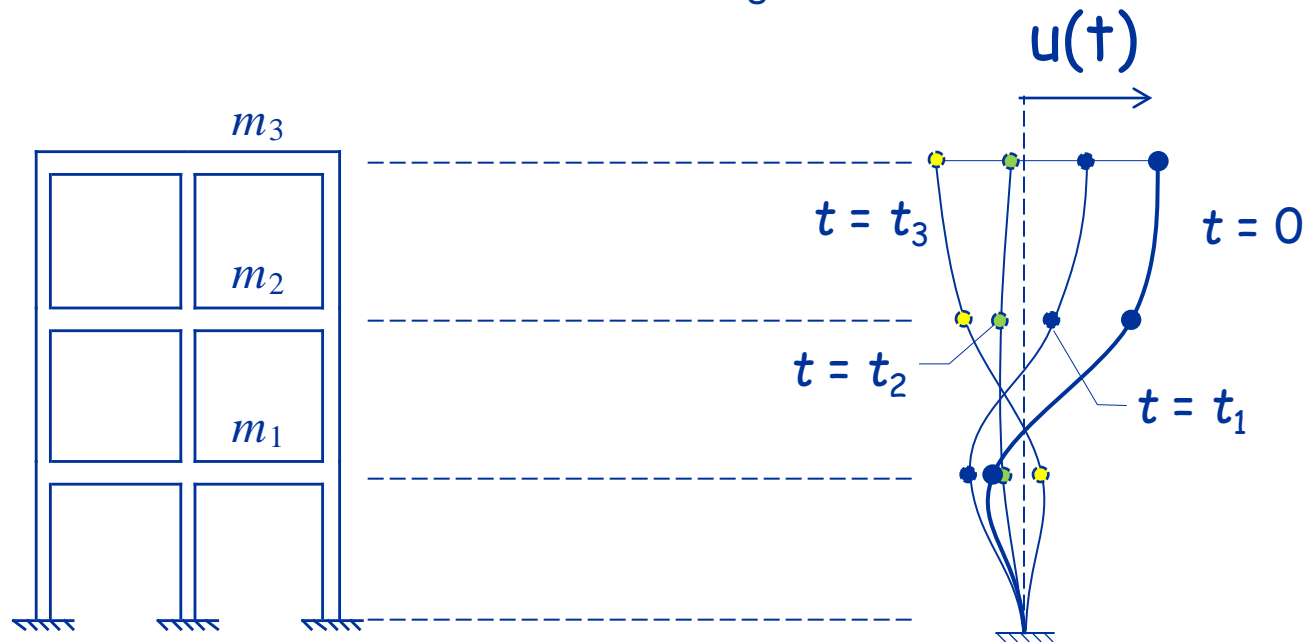
1. sistemi elastici
2. sistemi inelastici



# Analisi multimodale della risposta

## Sistemi elastici

Sia dato un sistema ad  $N$  gradi di libertà dinamici  
soggetto ad un'azione sismica  $\ddot{u}_g(t)$



... la distribuzione degli  
spostamenti varia nel tempo

# Analisi multimodale della risposta

## Sistemi elastici

La risposta di un sistema MDOF soggetto ad azione sismica  $\ddot{u}_g(t)$  è definita da equazioni differenziali

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = -\mathbf{m}\mathbf{i}\ddot{u}_g(t)$$

dove

- $\mathbf{m}$  matrice di massa
- $\mathbf{c}$  matrice di smorzamento
- $\mathbf{k}$  matrice di rigidezza
- $\mathbf{u}$  vettore degli spostamenti
- $\mathbf{i}$  vettore di influenza

**Nota:** La risposta è descritta mediante un sistema di N equazioni (ovvero N equazioni accoppiate)

# Analisi multimodale della risposta

Sistemi elastici

Equazione differenziale della risposta di un sistema MDOF soggetto ad azione sismica  $\ddot{u}_g(t)$

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \underbrace{-\mathbf{m}\mathbf{l}\ddot{u}_g(t)}_{\text{Forze sismiche efficaci}}$$



Forze sismiche efficaci

$$\mathbf{p}_{eff}(t)$$

# Analisi multimodale della risposta

## Sistemi elastici

La distribuzione spaziale delle forze sismiche efficaci lungo l'altezza dell'edificio è definita

- dal vettore  $\mathbf{s} = \mathbf{m}_1$
- dalla loro variazione temporale secondo  $\ddot{u}_g(t)$

# Analisi multimodale della risposta

## Sistemi elastici

La distribuzione spaziale  $\mathbf{s}$  può essere considerata come la somma di distribuzioni di forza d'inerzia modali  $\mathbf{s}_n$

$$\mathbf{m}\mathbf{u} = \sum_{n=1}^N \mathbf{s}_n = \sum_{n=1}^N \Gamma_n \mathbf{m} \boldsymbol{\phi}_n$$

dove  $\Gamma_n = \frac{\boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{m} \mathbf{u}}{\boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{m} \boldsymbol{\phi}_n}$  è il coefficiente di partecipazione modale del modo n-esimo

$\boldsymbol{\phi}_n$  è l'n-esimo modo di vibrazione della struttura

# Analisi multimodale della risposta

## Sistemi elastici

Le forze sismiche efficaci possono pertanto essere espresse come

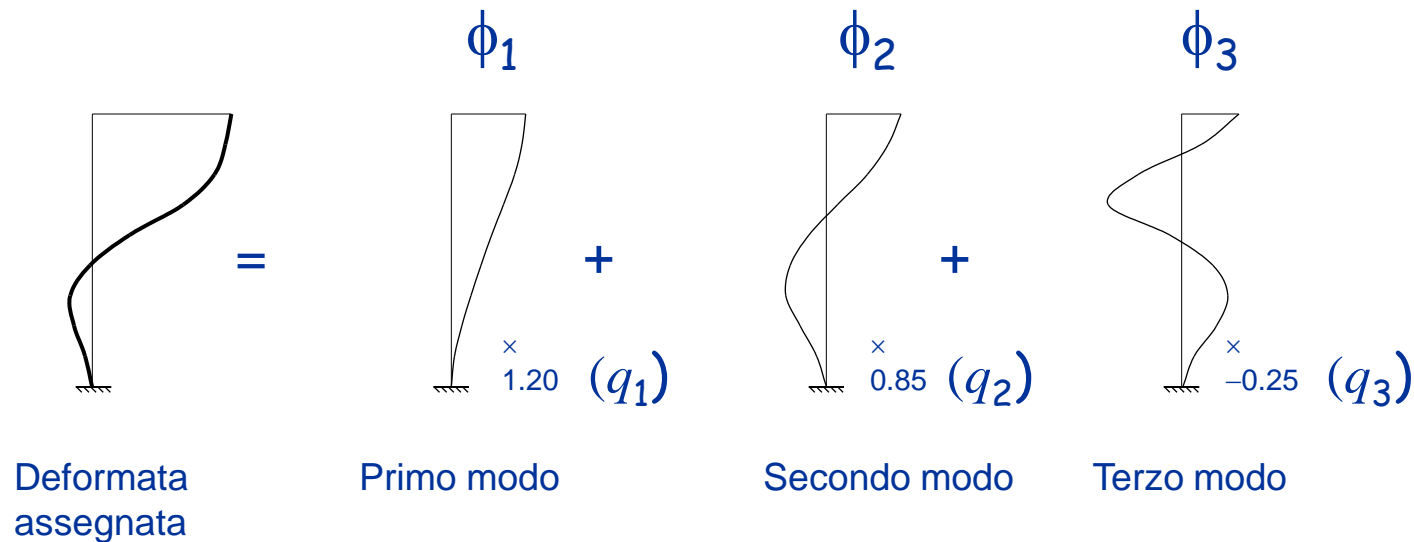
$$\mathbf{p}_{eff}(t) = \sum_{n=1}^N \mathbf{p}_{eff,n}(t) = - \sum_{n=1}^N \mathbf{s}_n \ddot{u}_g(t)$$

dove  $\mathbf{s}_n = \Gamma_n \mathbf{m} \boldsymbol{\phi}_n$

# Equazioni del moto

## Coordinate modali

Una qualsiasi deformata può essere espressa come combinazione delle deformate modali



$$u = \Phi q$$

# Equazioni del moto

Coordinate modali

Con questa posizione, l'equazione del moto

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{k} \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

diventa

$$\underbrace{\Phi^T \mathbf{m} \Phi}_{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{q}} + \underbrace{\Phi^T \mathbf{k} \Phi}_{\mathbf{K}} \mathbf{q} = \mathbf{0}$$

ovvero

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{0}$$



# Equazioni del moto

## Coordinate modali

Nell'equazione del moto (in forma matriciale)

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{0}$$

le matrici  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{K}$  sono diagonali, ovvero solo i termini della diagonale principale sono diversi da zero

Infatti:

$$\mathbf{M}_{jn} = \phi_j^T \mathbf{m} \phi_n = \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq n \\ \mathbf{M}_n & \text{se } j = n \end{cases} \quad \mathbf{K}_{jn} = \phi_j^T \mathbf{k} \phi_n = \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq n \\ \mathbf{K}_n & \text{se } j = n \end{cases}$$

# Equazioni del moto

Coordinate modali

Il sistema di equazioni

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{0}$$

è quindi costituito da equazioni disaccoppiate

$$M_n \ddot{q}_n + K_n q_n = 0$$

ciascuna contenente una sola incognita



Si può valutare il contributo di ciascun modo separatamente

# Equazioni del moto smorzato

Coordinate modali

Con la stessa posizione ( $u = \Phi q$ ),  
l'equazione del moto in presenza di smorzamento

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0$$

diventa

$$M \ddot{q} + C \dot{q} + K q = 0$$

**Nota:** In molti casi, oltre a  $M$  e  $K$ , anche la matrice  $C$  è diagonale e le equazioni

$$M_n \ddot{q}_n + C_n \dot{q}_n + K_n q_n = 0$$

sono disaccoppiate (sistemi classicamente smorzati)

# Equazioni del moto smorzato

(risposta ad un accelerogramma)

Il sistema di equazioni del moto

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = -\mathbf{m}\boldsymbol{\iota}\ddot{u}_g(t)$$

diventa un insieme di equazioni indipendenti

$$\mathbf{M}_n \ddot{\mathbf{q}}_n + \mathbf{C}_n \dot{\mathbf{q}}_n + \mathbf{K}_n \mathbf{q}_n = -\boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{m} \boldsymbol{\iota} \ddot{u}_g(t)$$

ovvero

$$\ddot{q}_n + 2\xi_n \omega_n \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = -\Gamma_n \ddot{u}_g(t)$$

# Equazioni del moto smorzato

(risposta ad un accelerogramma)

Nella singola equazione

$$\ddot{q}_n + 2\xi_n \omega_n \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = -\Gamma_n \ddot{u}_g(t)$$

$$\Gamma_n = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \phi_{i,n}}{\sum_{i=1}^N m_i \phi_{i,n}^2}$$

Coefficiente di partecipazione modale:  
indica se il contributo del modo al moto totale  
del sistema è più, o meno, rilevante

**Nota:** Nell'equazione del moto in coordinate principali  
l'accelerazione del terreno è moltiplicata per  $\Gamma_n$

# Analisi multimodale della risposta

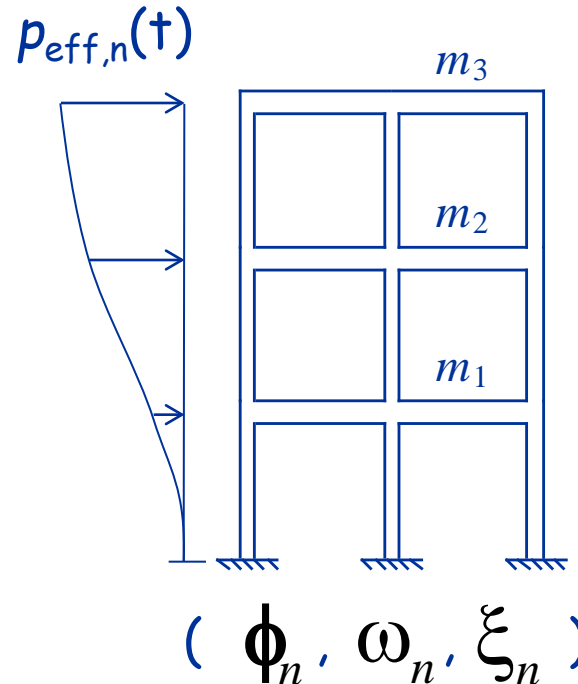
## Sistemi elastici

$$\mathbf{p}_{eff}(t) = \sum_{n=1}^N \mathbf{p}_{eff,n}(t) = - \sum_{n=1}^N \mathbf{s}_n \ddot{u}_g(t)$$

La risposta del sistema MDOF alle forze sismiche efficaci  $p_{eff,n}$  è secondo il modo n-esimo, con nessun contributo da parte degli altri modi di vibrazione.

La risposta del sistema MDOF è descritta dalla relazione:

$$\mathbf{u}_n(t) = \boldsymbol{\phi}_n q_n(t)$$



dove la coordinata modale è governata dalla relazione

$$\ddot{q}_n + 2\xi_n \omega_n \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = -\Gamma_n \ddot{u}_g(t)$$

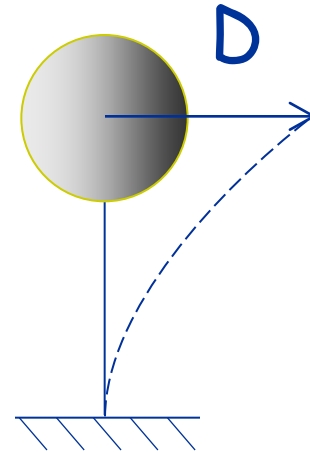
# Analisi multimodale della risposta

## Sistemi elastici

La soluzione  $q_n$  è data da

$$q_n(t) = \Gamma_n D_n(t)$$

dove  $D_n$  è lo spostamento di un oscillatore semplice che vibra secondo il modo n-esimo della struttura multipiano e che è caratterizzato dal rapporto di smorzamento  $\xi_n$  del modo n-esimo del sistema multipiano.



$$(\omega_n, \xi_n)$$

$$\ddot{D}_n + 2\xi_n \omega_n \dot{D}_n + \omega_n^2 D_n = \ddot{u}_g(t)$$

# Analisi multimodale della risposta

## Sistemi elastici

Il vettore spostamento del sistema multipiano che vibra secondo il modo n-esimo e che è caratterizzato dal rapporto di smorzamento  $\xi_n$  è

$$\mathbf{u}_n(t) = \boldsymbol{\phi}_n q_n(t) = \Gamma_n \boldsymbol{\phi}_n D_n(t)$$

Coordinata principale  
(sistema MDOF)



Spostamento  
(sistema SDOF)



# Analisi multimodale della risposta

## Sistemi elastici

Ogni quantità di risposta può essere espressa come

$$r_n(t) = r_n^{st} A_n$$

Risposta statica  
dovuta alle azioni  $\mathbf{s}_n$



dove

$$A_n(t) = \omega_n^2 D_n(t)$$

La risposta del sistema alle forze sismiche efficaci  $p_{eff}$   
può essere espressa come

$$r(t) = \sum_{n=1}^N r_n^{st} A_n(t)$$

# Analisi multimodale della risposta

Sistemi inelastici

E per i sistemi inelastici ... ???

# Analisi multimodale della risposta

Sistemi inelastici

Equazione differenziale della risposta inelastica  
di un sistema MDOF soggetto ad azione sismica  $\ddot{u}_g(t)$

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{f}_s(\mathbf{u}, \text{sgn } \dot{\mathbf{u}}) = -\mathbf{m}\mathbf{i}\ddot{u}_g(t)$$

dove

- $\mathbf{m}$  matrice di massa
- $\mathbf{c}$  matrice di smorzamento
- $\mathbf{f}_s$  vettore delle forze di richiamo
- $\mathbf{u}$  vettore degli spostamenti
- $\mathbf{i}$  vettore di influenza

# Analisi multimodale della risposta

## Sistemi inelastici

Esprimiamo gli spostamenti in funzione delle coordinate modali

$$\mathbf{u}_n(t) = \boldsymbol{\phi}_n q_n(t)$$

e sostituiamo tale relazione nell'equazione del moto, ottenendo

$$\ddot{q}_n + 2\xi_n \omega_n \dot{q}_n + \frac{F_{sn}}{M_n} = -\Gamma_n \ddot{u}_g(t)$$

dove

$$F_{sn} = F_{sn}(\mathbf{q}, \text{sgn} \dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{f}_s(\mathbf{u}, \text{sgn} \dot{\mathbf{u}})$$

$$M_n = \boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{m} \boldsymbol{\phi}_n$$

# Analisi multimodale della risposta

## Sistemi inelastici

Esprimiamo gli spostamenti in funzione delle coordinate modali

$$\mathbf{u}_n(t) = \boldsymbol{\phi}_n q_n(t)$$

e sostituiamo tale relazione nell'equazione del moto, ottenendo

$$\ddot{q}_n + 2\xi_n \omega_n \dot{q}_n + \frac{F_{sn}}{M_n} = -\Gamma_n \ddot{u}_g(t)$$

**Nota:** La risposta è descritta mediante un sistema di N equazioni (in virtù delle plasticizzazioni le equazioni non sono indipendenti !!)

# Analisi multimodale della risposta

## Sistemi inelastici

Trascurare l'accoppiamento tra le  $N$  equazioni nelle coordinate modali porta alla procedura di analisi della risposta modale disaccoppiata (UMRHA)

Ancora una volta, espandendo la distribuzione spaziale delle forze sismiche efficaci nei contributi modali si ottiene

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{f}_s(\mathbf{u}, \text{sgn } \dot{\mathbf{u}}) = -\mathbf{s}_n \ddot{u}_g(t)$$

**Nota:** I modi diversi dall' $n$ -esimo contribuiscono alla soluzione. Tuttavia, è ragionevole che la risposta sia dominata dal modo  $n$ -esimo.

# Analisi multimodale della risposta

## Sistemi inelastici

Se si ipotizza che la risposta della struttura all'eccitazione  $p_{\text{eff},n}(t)$  possa essere rappresentata come

$$\mathbf{u}_n(t) = \boldsymbol{\phi}_n q_n(t)$$

ovvero,

se si assume che sotto l'azione delle forze  $p_{\text{eff},n}(t)$

la struttura si muova (anche in campo inelastico)

secondo il modo n-esimo di vibrazione della struttura elastica

allora vale la seguente relazione

$$F_{\text{sn}} = F_{\text{sn}}(\mathbf{q}, \text{sgn} \dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{f}_s(q_n, \text{sgn} \dot{q}_n)$$

# Analisi multimodale della risposta

## Sistemi inelastici

Con questa approssimazione la soluzione dell'equazione del moto del sistema MDOF in coordinate modali

$$\ddot{q}_n + 2\xi_n \omega_n \dot{q}_n + \frac{F_{sn}}{M_n} = -\Gamma_n \ddot{u}_g(t)$$

può essere espressa tramite  $q_n(t) = \Gamma_n D_n(t)$

dove la variabile  $D$  è governata dalla relazione

$$\ddot{D}_n + 2\xi_n \omega_n \dot{D}_n + \frac{F_{sn}}{L_n} = -\ddot{u}_g(t)$$

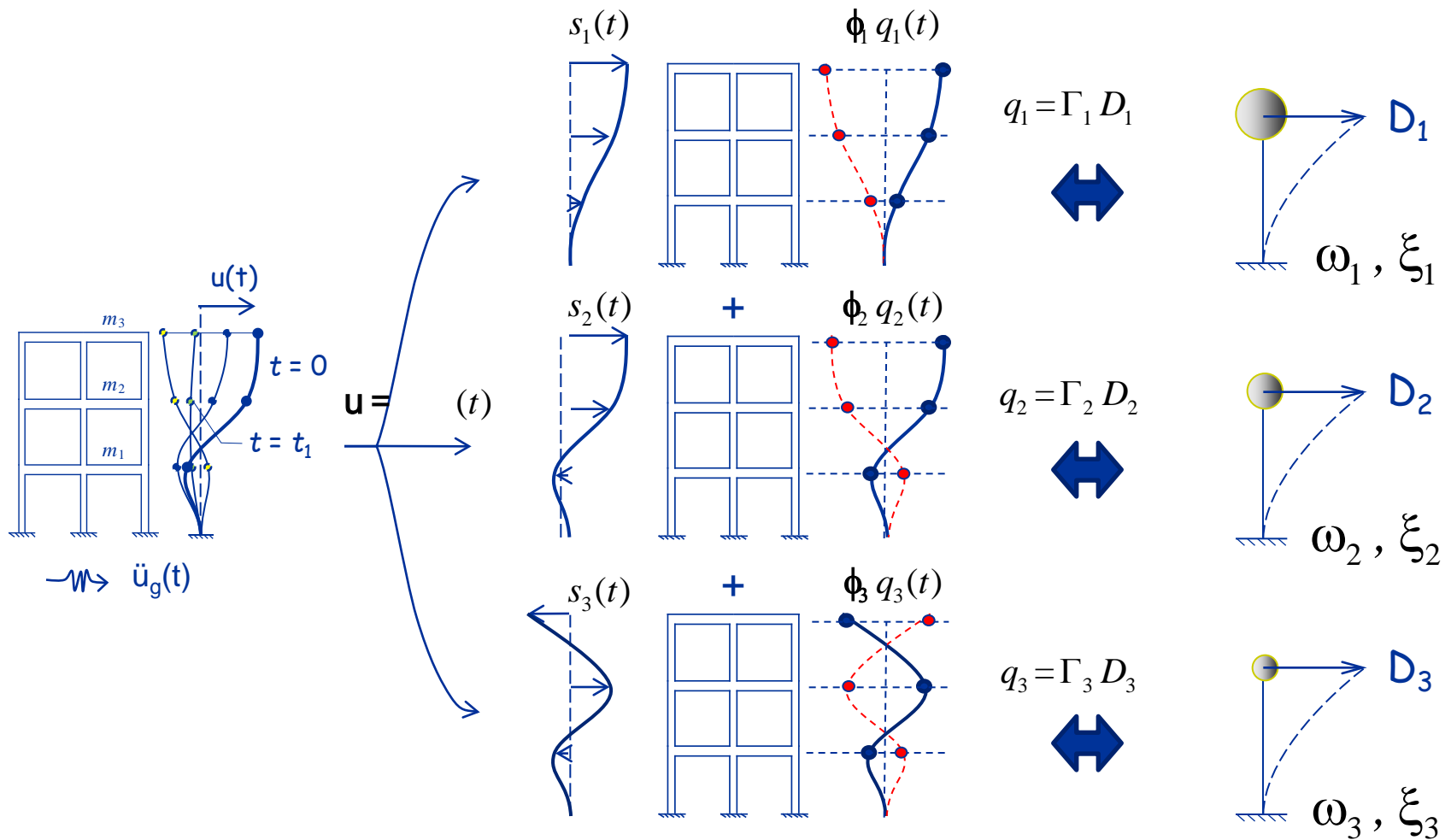
e

$$F_{sn} = F_{sn}(D_n, \text{sgn} \dot{D}_n) = \phi_n^T \mathbf{f}_s(D_n, \text{sgn} \dot{D}_n)$$



# Analisi multimodale della risposta

## Sistemi inelastici



# Analisi multimodale della risposta

Proprietà del sistema SDOF inelastico

Ma quale è il legame  $F_{sn}/L_n$ -D  
del sistema SDOF inelastico  
che vibra secondo l'n-esimo modo ??

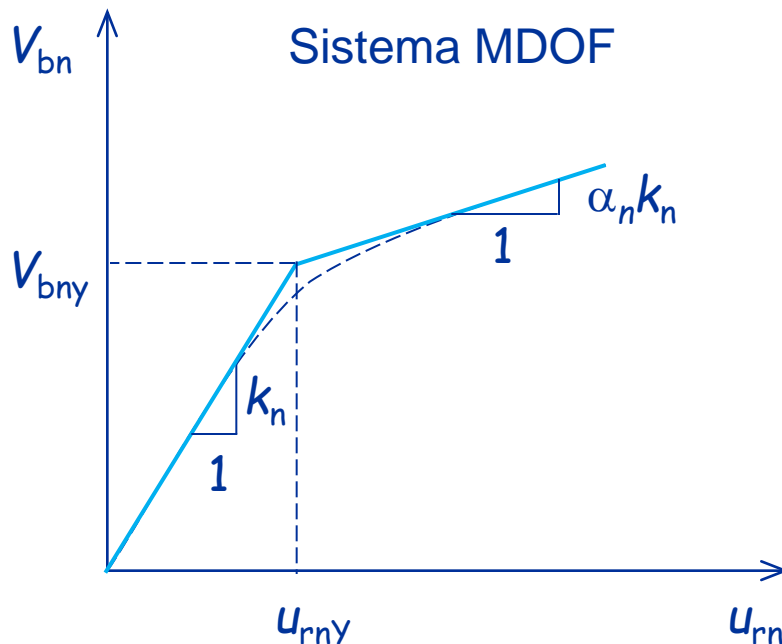
Il legame  $F_{sn}/L_n$ -D può essere ricavato eseguendo  
un'analisi statica incrementale del sistema MDOF con  
modello di carico

$$s^* = m \phi$$

invariante e proporzionale al prodotto delle masse per  
il modo n-esimo del sistema elastico.

# Analisi multimodale della risposta

## Proprietà del sistema SDOF inelastico



$$f_{sn}(t) = \alpha m \phi_n$$

$$F_{sn} = \phi_n^T f_{sn} = \alpha \phi_n^T m \phi_n = \alpha M_n$$

$$V_{bn} = 1^T f_{sn} = 1^T \alpha m \phi_n = \alpha L_n$$



$$\frac{F_{sn}}{M_n} = \frac{V_{bn}}{L_n}$$

$$\frac{F_{sn}}{L_n} = \frac{V_{bn}}{L_n \Gamma_n}$$

Massa modale efficace  
 $M_n^*$

$$u_n(t) = \phi_n q_n(t)$$

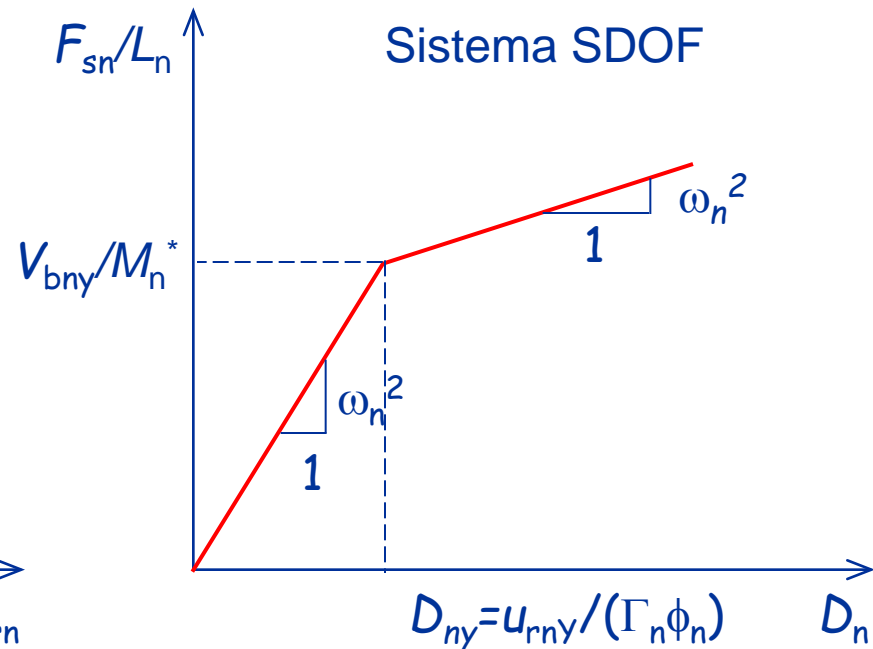
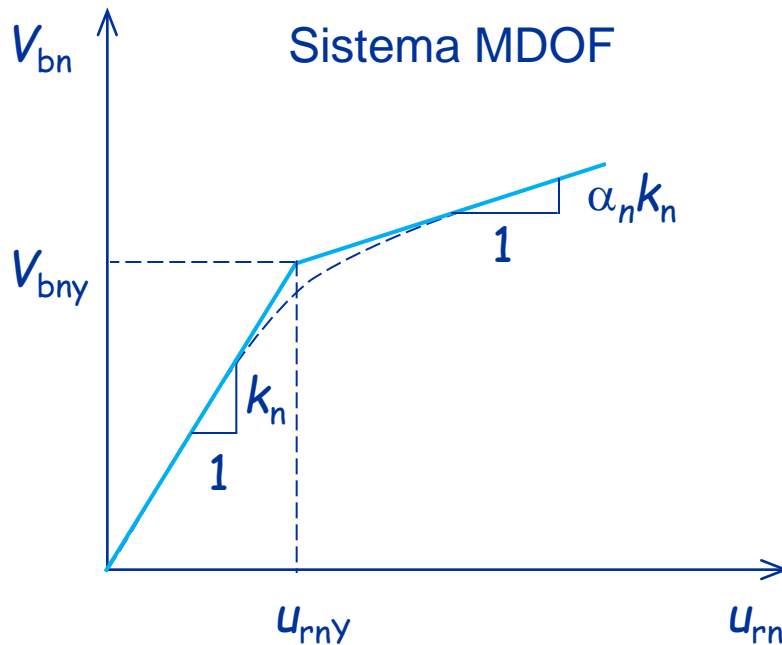
$$q_n(t) = \Gamma_n D_n(t)$$



$$D_n = \frac{u_{rn}}{\Gamma_n \phi_{rn}}$$

# Analisi multimodale della risposta

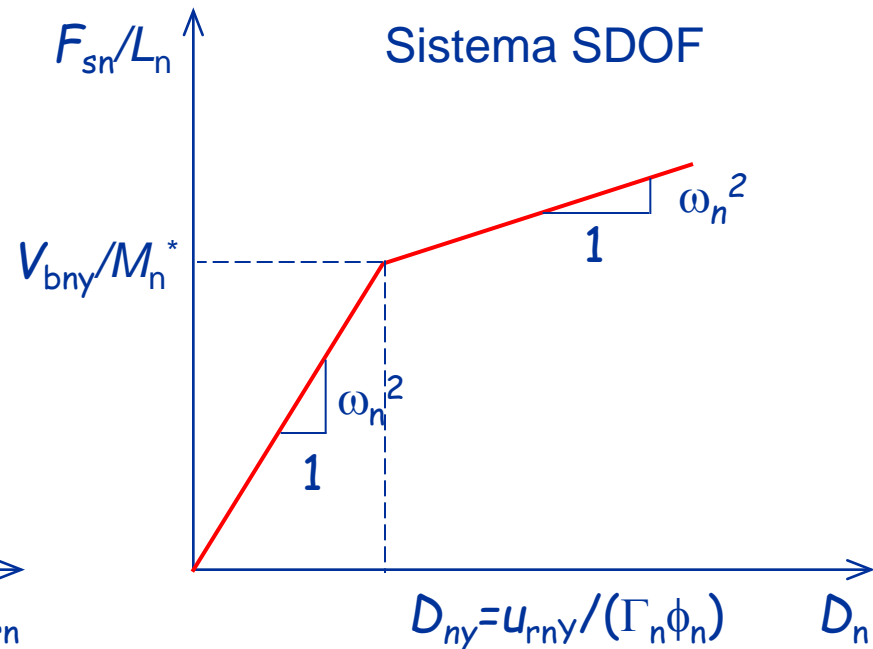
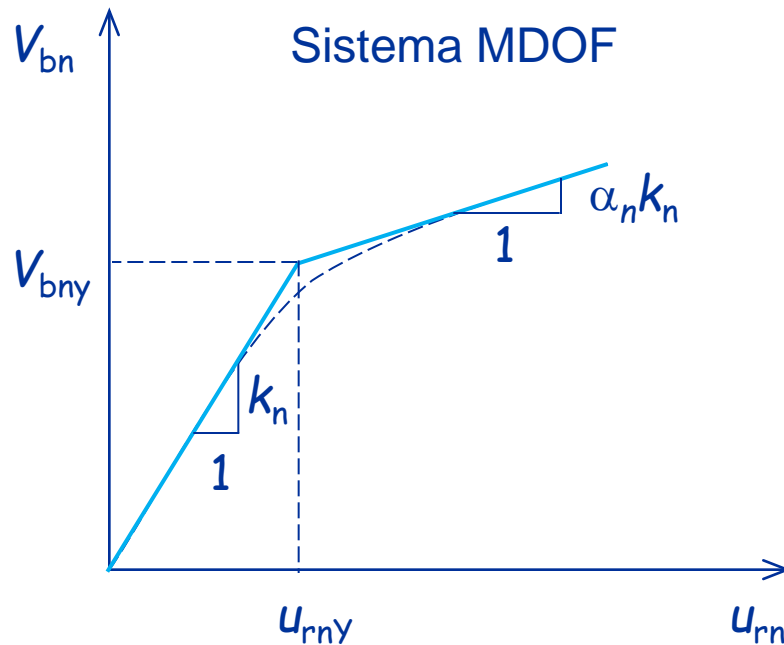
## Proprietà del sistema SDOF inelastico



$$\left( D_n = \frac{u_{rn}}{\Gamma_n \phi_{rn}} \quad ; \quad \frac{F_{sn}}{L_n} = \frac{V_{bn}}{M_n^*} \right)$$

# Analisi multimodale della risposta

## Proprietà del sistema SDOF inelastico



$$\frac{F_{sny}}{L_n} = \omega_n^2 D_{ny} \quad \Rightarrow \quad T_n = 2\pi \left( \frac{L_n D_{ny}}{F_{sny}} \right)^{1/2}$$

# Analisi multimodale inelastica

## Assunzioni ed accuratezza

La lieve inaccuratezza dell'analisi multimodale inelastica è dovuta alle seguenti assunzioni:

1. L'accoppiamento tra coordinate modali  $q_n(t)$  dopo la plasticizzazione delle sezioni è trascurato
2. La sovrapposizione delle risposte alle distribuzioni di forze  $p_{eff,n}$  è valida solo in campo elastico
3. La legge  $F_{sn}/L_n$ -D dell'oscillatore inelastico è approssimata mediante una bilatera

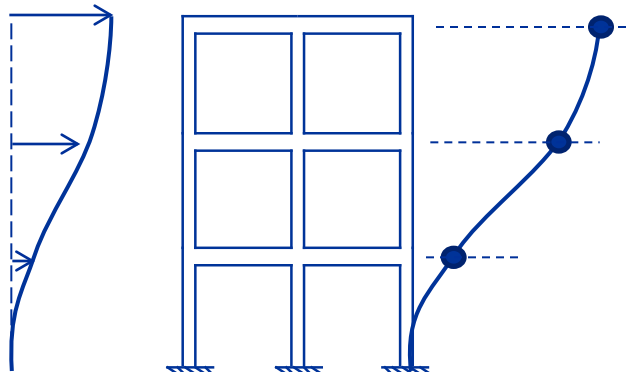
# Analisi pushover multimodale

Sviluppo analitico per sistemi inelastici

Risposta di picco di un sistema  
a forza sismiche efficaci

$$\mathbf{p}_{\text{eff},n}(t) = -\Gamma_n \mathbf{m} \boldsymbol{\phi}_n \ddot{u}_g(t)$$

$$\mathbf{s}_n^*(t) = \mathbf{m} \boldsymbol{\phi}_n$$



$$u_{rno} = \phi_{rn} q_n = \Gamma_n \phi_{rn} D_n$$

dove  $D_n$  è calcolato

- risolvendo l'equazione

$$\ddot{D}_n + 2\xi_n \omega_n \dot{D}_n + \frac{F_{sn}}{L_n} = -\ddot{u}_g(t)$$

- oppure tramite spettro inelastico di risposta (o progetto)

(prefissata un'acc. al suolo)

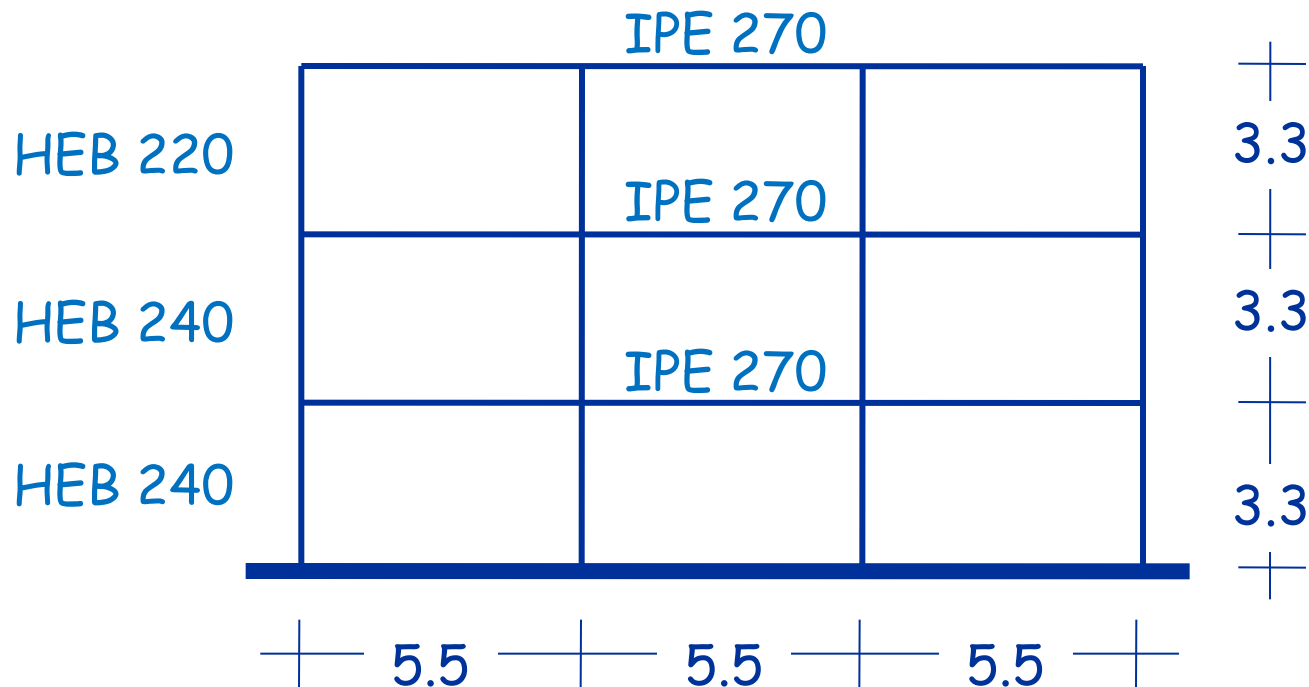
# Applicazione dell'analisi pushover multimodale



# Caso studio analizzato

Telaio in acciaio S275

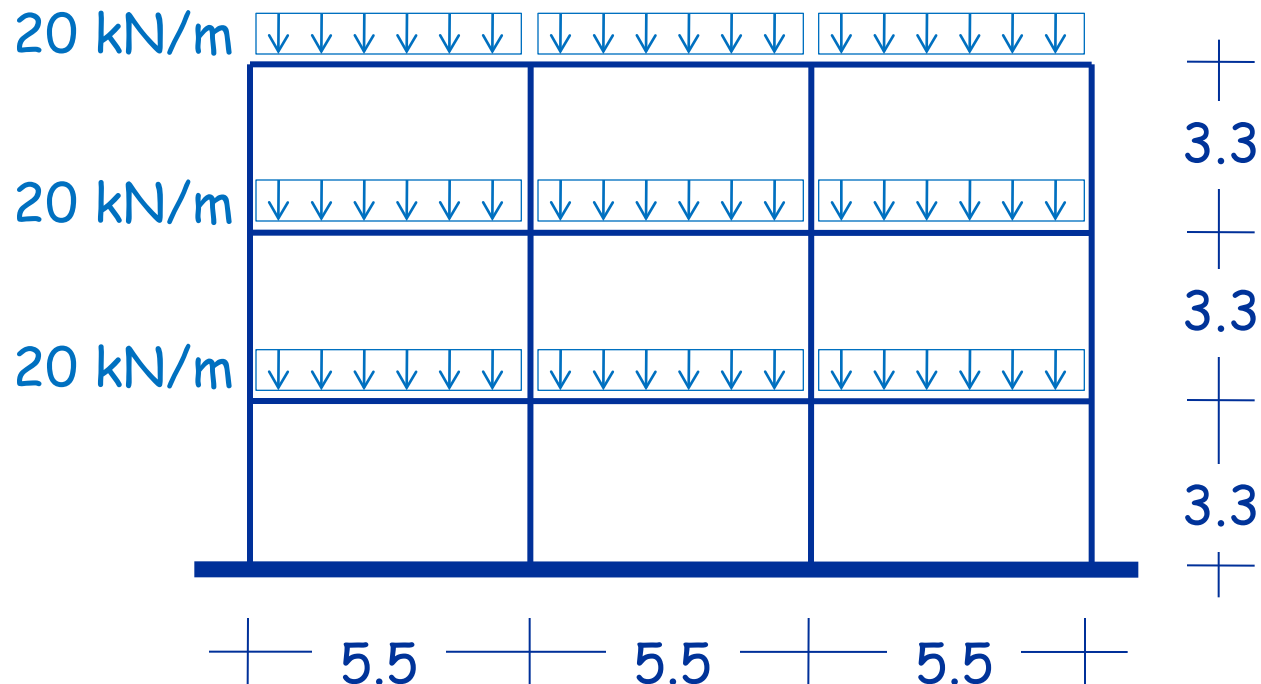
- Travi uguali a tutti i piani
- Colonne uguali per ciascun piano



# Caso studio analizzato

## Carichi e masse

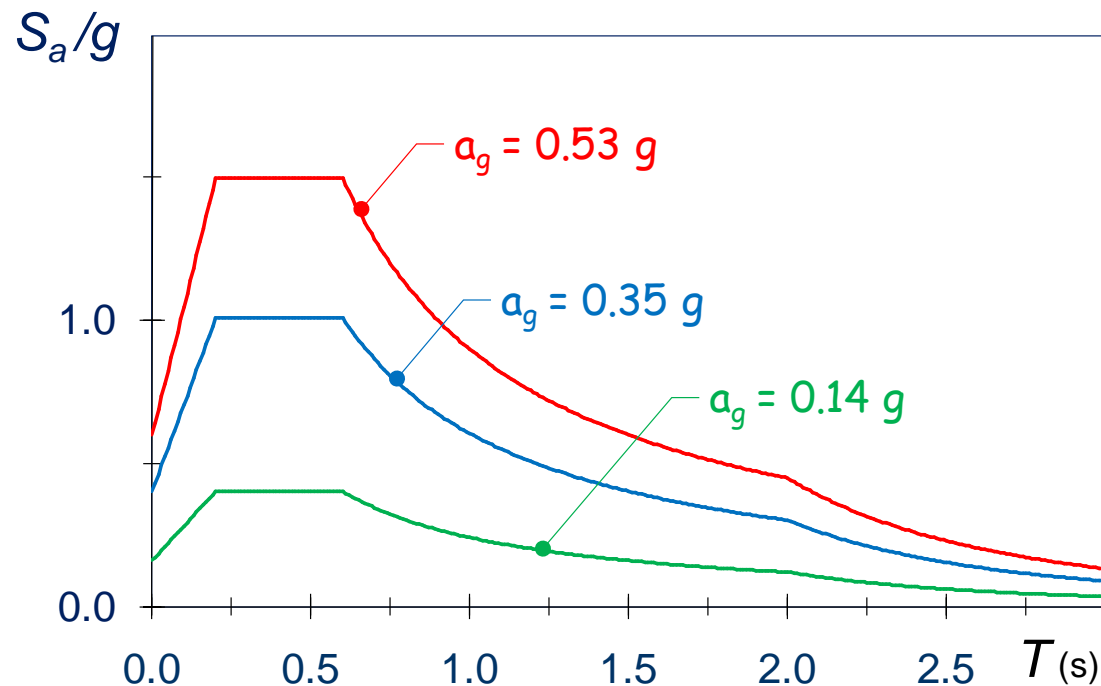
- Carico travi ( $G_k + \psi_2 Q_k$ )
- Massa sismica di piano pari a 33.6 ton



# Caso studio analizzato

## Azione sismica

- Spettro EC8, suolo C
- Tre accelerazioni di picco



# Cerniere rigido-plastiche delle travi

Travi IPE 270

$$M_{pl} = \frac{W_{pl} f_{ym}}{FC} = \frac{484 \times 275}{1 \times 10^3} = 133.1 \text{ kNm}$$

$$f_{ym} \approx f_{yk} = 275 \text{ MPa}$$

Assumo conoscenza adeguata (LC3)   $FC = 1.0$

$$W_{pl} = 484 \text{ cm}^3$$

# Cerniere plastiche delle colonne

Si è assunto il momento plastico corrispondente allo sforzo normale per carichi verticali  $N = N_G$

Piano	$M_{pl}$ (kNm)			
	1	2	3	4
3	227.4	227.4	227.4	227.4
2	289.6	289.6	289.6	289.6
1	289.6	289.6	289.6	289.6

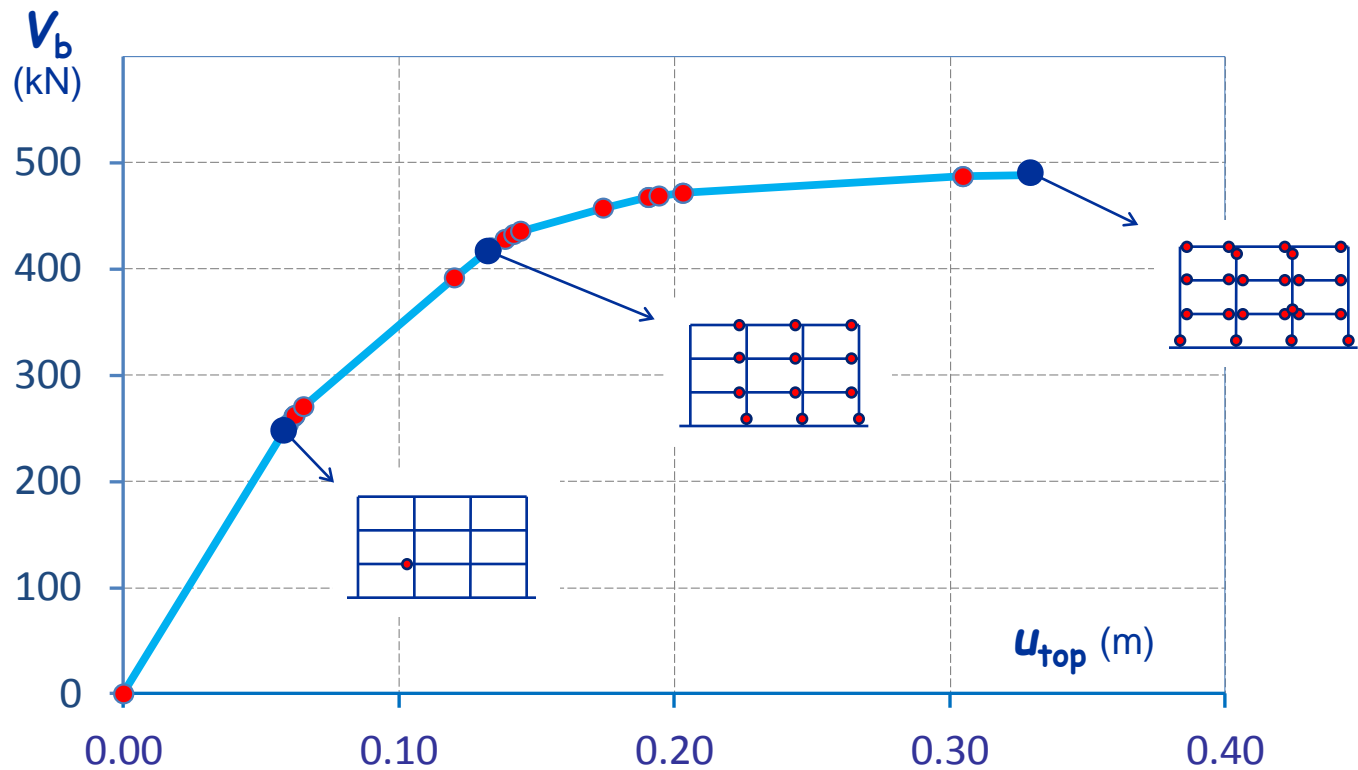
# Analisi modale

## Risultati

Periodo (s)	Modo 1	Modo 2	Modo 3
	0.7811	0.2888	0.1168
Componenti	Modo 1	Modo 2	Modo 3
3	0.139003	-0.09556	0.035804
2	0.094867	0.098715	-0.104837
1	0.037610	0.104206	0.132146
Massa Part.	Modo 1	Modo 2	Modo 3
	0.8261	0.1292	0.0447

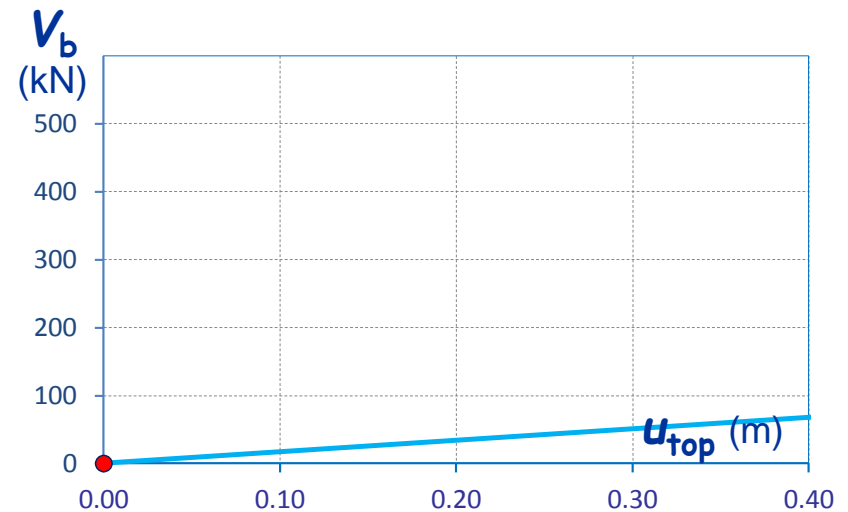
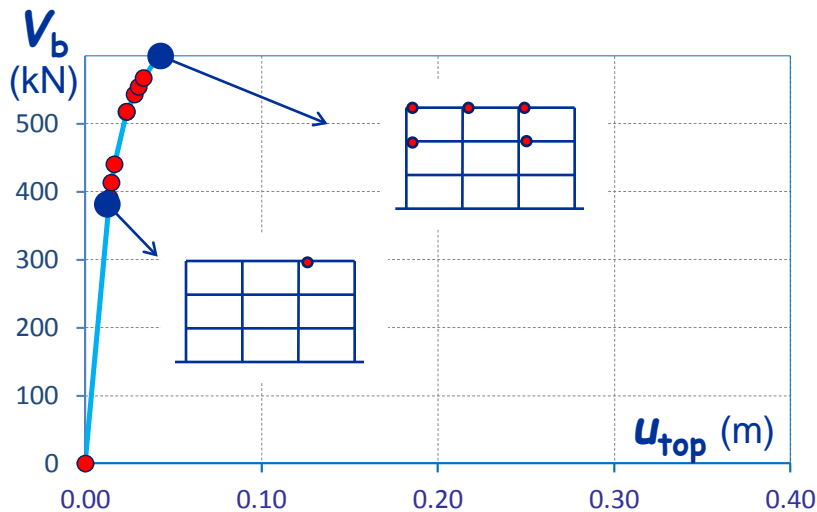
# Analisi pushover multimodale

Curva di capacità – 1° modo



# Analisi pushover multimodale

Curva di capacità – 2°-3° modo



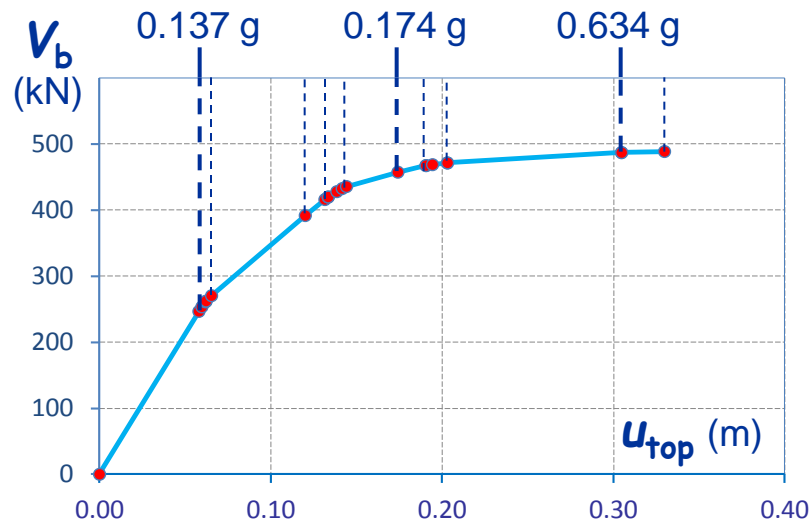
Perché tali differenze  
nelle curve di capacità ??



# Analisi pushover multimodale

Spostamenti di sommità - accelerazioni alla base

Scala delle accelerazioni alla base



Si è proceduto a valutare la relazione tra gli spostamenti di sommità e le accelerazioni alla base che li hanno provocati.

Prima

si determinano le accelerazioni alla base in corrispondenza degli spostamenti che individuano una plasticizzazione.

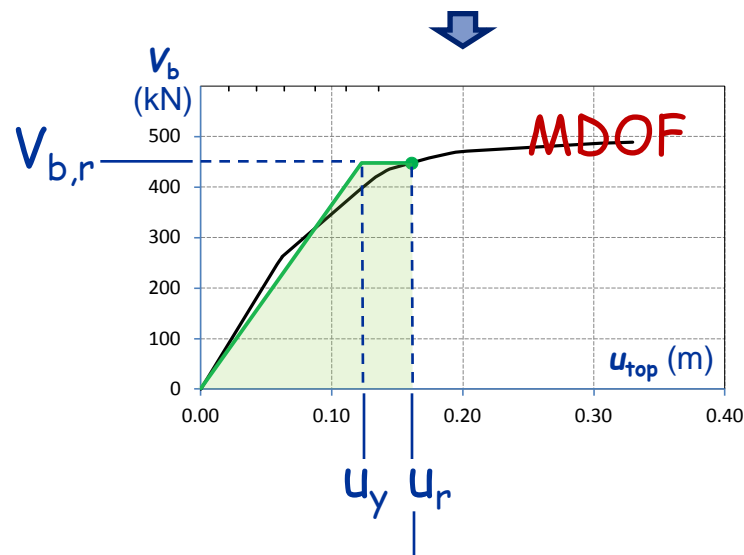
Scala degli spostamenti di sommità

Quindi, nei tratti intermedi si ipotizza una variazione lineare delle accelerazioni alla base con gli spostamenti

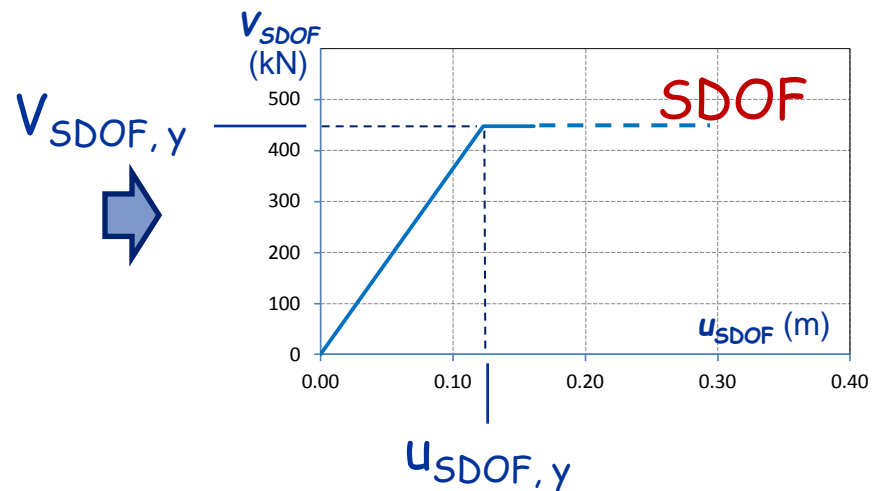
# Analisi pushover multimodale

Spostamenti di sommità - accelerazioni alla base

Bilinearizzazione



fissato

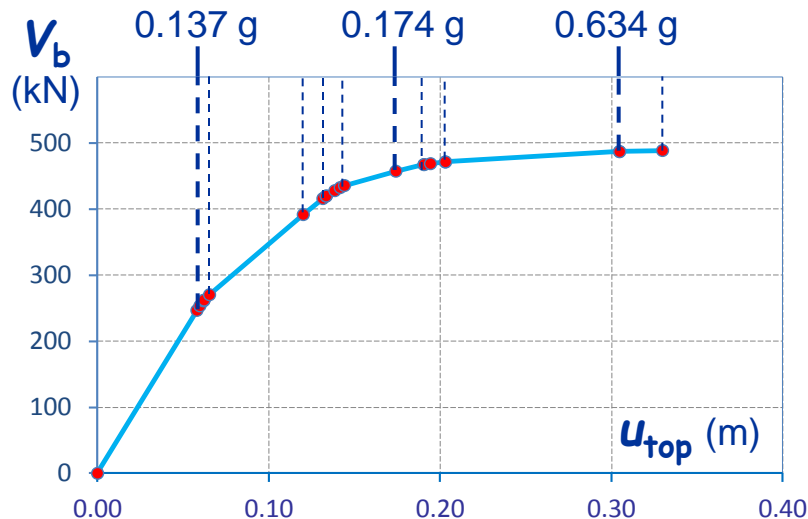


Si determina l'accelerazione alla base che produce nell'oscillatore semplice lo spostamento richiesto.

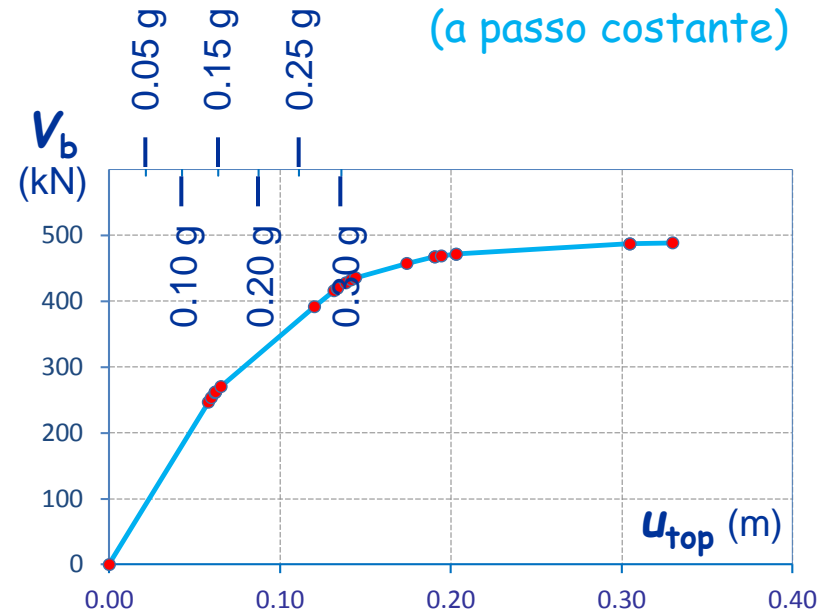
# Analisi pushover multimodale

Spostamenti di sommità - accelerazioni alla base

Scala delle accelerazioni alla base



(a passo costante)



Scala degli spostamenti di sommità

**Nota:** nel complesso, la relazione tra accelerazioni alla base e spostamenti di sommità non è lineare

# Analisi pushover multimodale

## Bilinearizzazione

1° modo

2° modo

3° modo

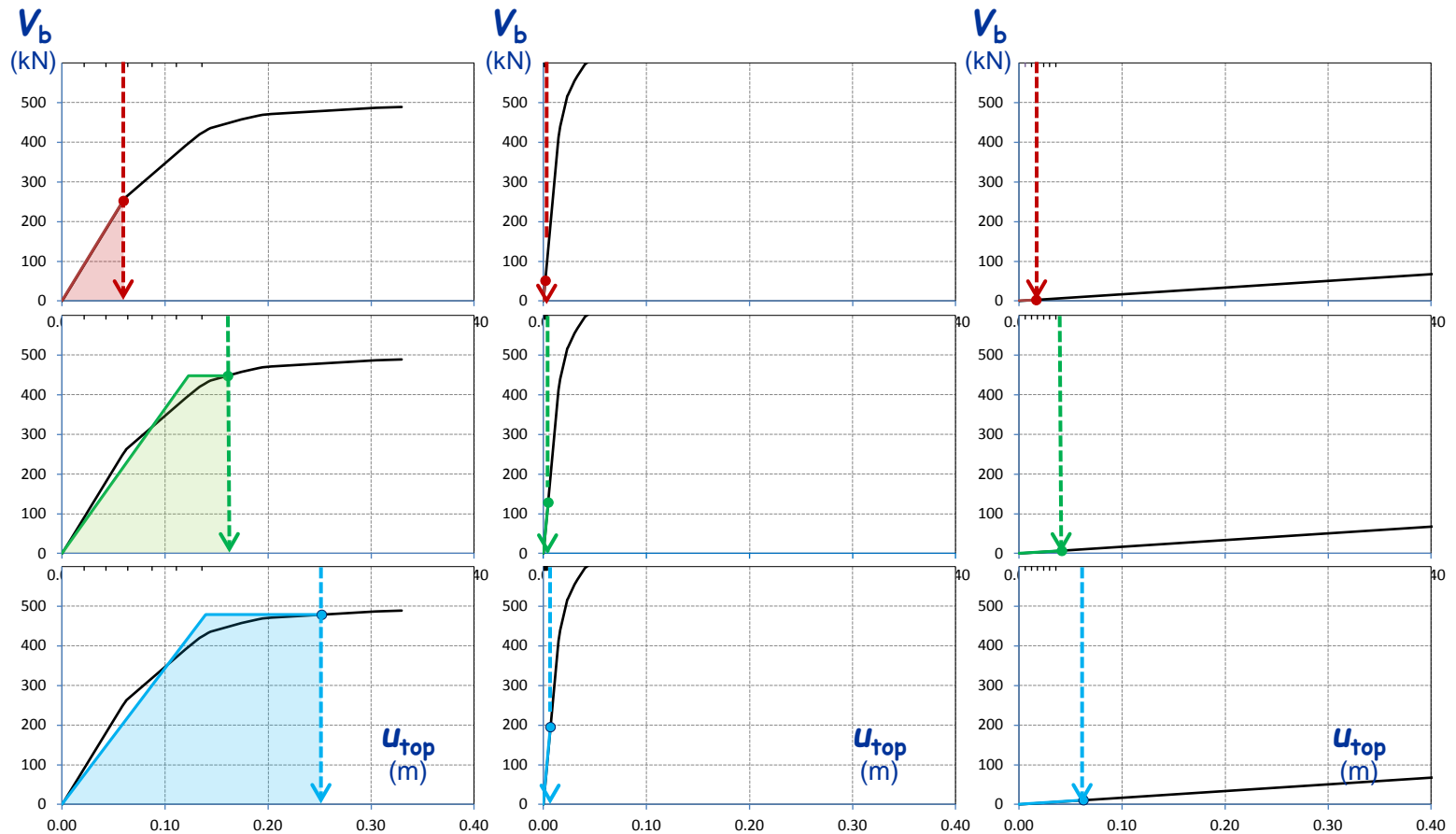
0.14 g



0.35 g



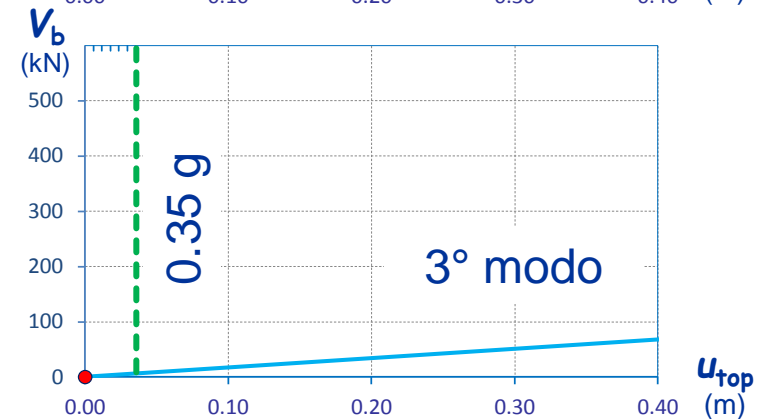
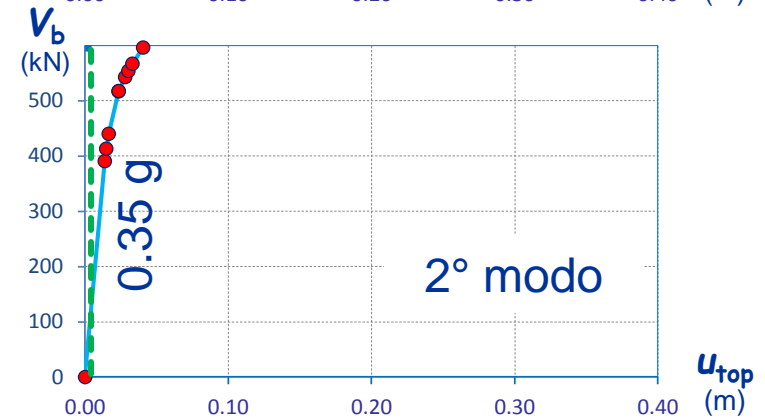
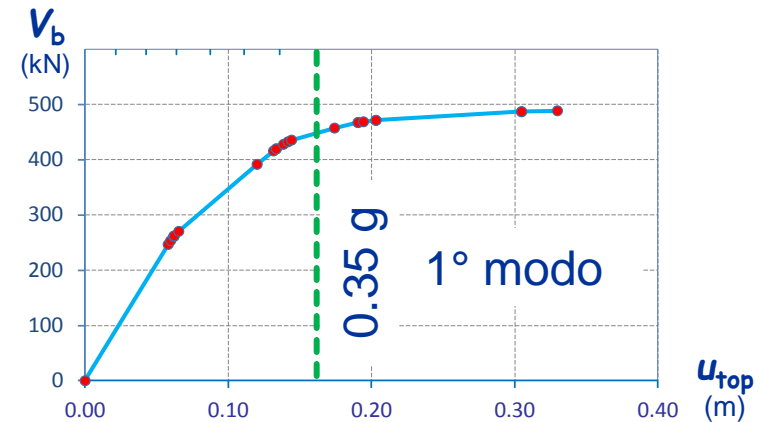
0.53 g



# Analisi pushover multimodale

Tagli alla base

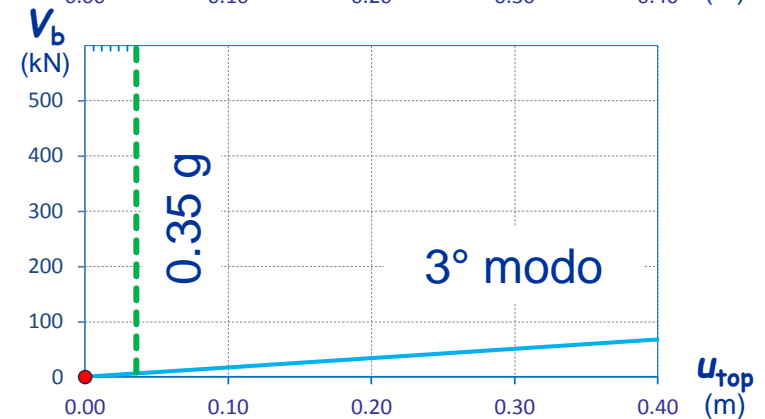
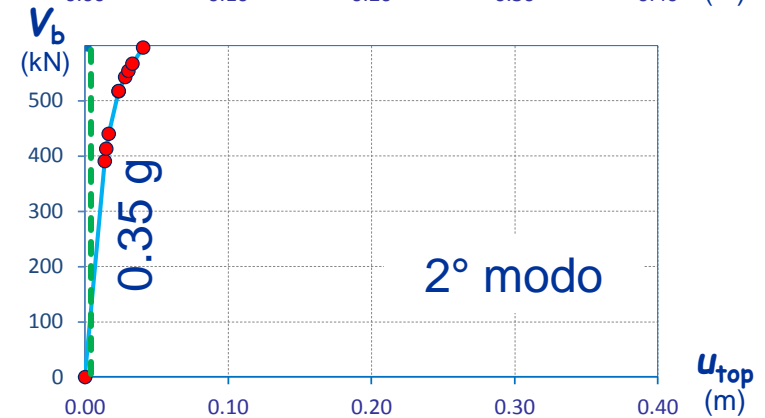
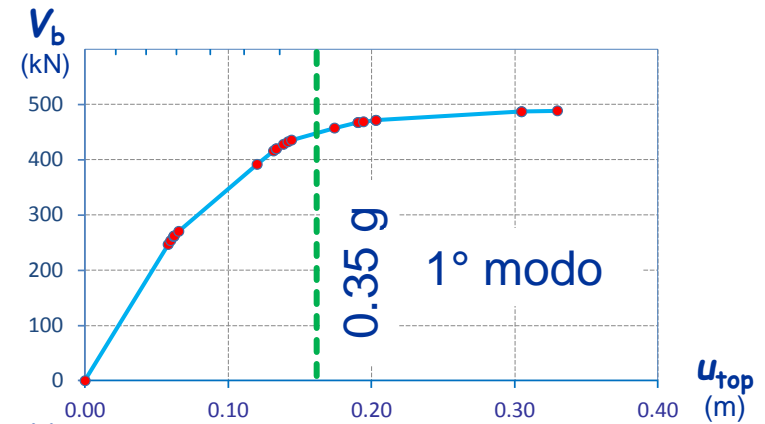
(kN)	Modo			
ag	1	2	3	SRSS
0.14 g	252.41	51.47	2.79	257.62
0.35 g	447.30	128.68	6.98	465.49
0.53 g	478.48	194.86	10.56	516.74



# Analisi pushover multimodale

Spostamenti in sommità

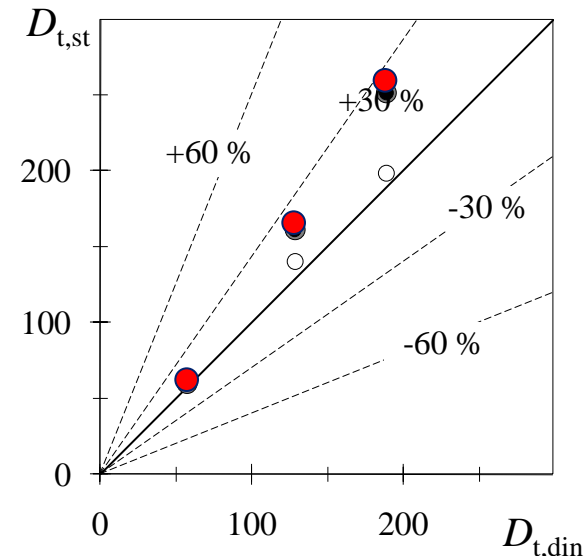
(mm)	Modo			
ag	1	2	3	SRSS
0.14 g	0.0595	0.0018	0.0165	0.0618
0.35 g	0.1608	0.0045	0.0413	0.1661
0.53 g	0.2519	0.0068	0.0626	0.2597



# Analisi pushover multimodale

Spostamenti in sommità

(mm)	Modo			
ag	1	2	3	SRSS
0.14 g	0.0595	0.0018	0.0165	0.0618
0.35 g	0.1608	0.0045	0.0413	0.1661
0.53 g	0.2519	0.0068	0.0626	0.2597



- Metodo N1
- Metodo N2
- Spettro di Capacità
- Multimodale

Fine