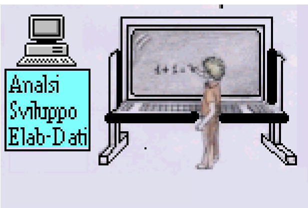


ANALISI E CALCOLO
DEL PROBLEMA STANDARD AUTOVALORI-AUTOVETTORI
METODO – HOUSEHOLDER –

APPLICAZIONE NUMERICA
APPLICATA AL TELAIO SHEAR TYPE A DUE LIVELLI

CALCOLO NUMERICO:
Domenico Pagnozzi
ingegnere

Premessa

Nel proporre al lettore un esempio numerico applicativo dedicato all'Analisi Modale attraverso la ricerca degli autovalori-autovettori, mi sono reso conto che non è sufficiente solamente conoscere bene l'argomento, ma, è di notevole importanza riuscire a far capire ciò che si scrive, tenuto conto che gli attuali programmi software di analisi strutturale tendono ad apparire agli utenti come" scatole nere" con gli INPUT che entrano da una lato e OUTPUT che escono dall'altro, per cui, il presente lavoro, cerca di evitare queste difficoltà usando un calcolo manuale che è alla base di un algoritmo di calcolo da sviluppare al computer.

Tale metodologia dovrebbe far in modo che chi legge, anche se non possiede una preparazione specifica per la tematica proposta, non abbia nessun "disorientamento o senso di noia" alla tematica in discorso, per cui, ho cercato di proporre l'intero tema, equilibrando il giusto contenuto descrittivo ed analitico senza rinunciare a quel formalismo matematico a cui si è abituati.

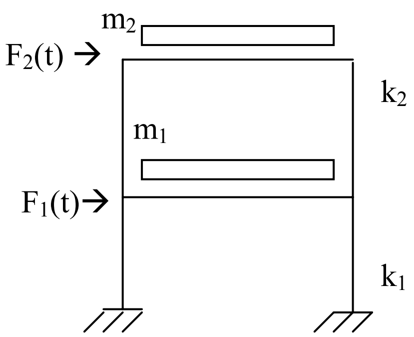
Pertanto, qualora la tematica sviluppata, troverà valido riscontro da parte del prof. Aurelio Ghersi, con sommo piacere desidero che lo stesso lavoro, unitamente al programma software, già sviluppato in Visual Basic con la valida collaborazione dell'inf. Pasquale Morgillo ed in fase di definizione ai fini della sua interattività con l'utenza, venga messo a disposizione degli altri in modo che tali tematiche non rimangono "confinate" solo in testi specialistici ma, che le stesse problematiche trattate, possano suscitare nel lettore curiosità ed interesse per ulteriori approfondimenti per conto e nell'interesse della ricerca scientifica.

Domenico Pagnozzi

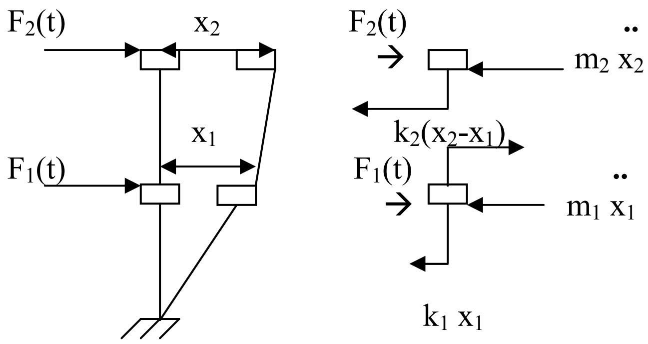
ANALISI E CALCOLO DEL PROBLEMA STANDARD AUTOVALORI-AUTOVETTORI

-METODO HOUSEHOLDER-

Consideriamo un telaio shear-type (cioè con traversi infinitamente rigidi) caricato a taglio da un sistema di forze così come rappresentato in figura:



Lo schema in figura può essere idealizzato anche come un unico pilastro avente le masse concentrate a livello di ogni piano con l'intesa che sia possibile soltanto lo spostamento orizzontale di tali masse, per cui si avrà lo schema che segue:



Conseguentemente a quanto graficamente sopra rappresentato, le **equazioni del moto** (in assenza di smorzamento) che si otterranno uguagliando a zero la somma delle forze applicate che agiscono su ogni massa, saranno:

$$m_1\, \ddot{x}_1 + k_1\, x_1 - k_2\, (x_2 - x_1) - F_1(t) = 0$$

$$m_2\, \ddot{x}_2 + k_2\, (x_2 - x_1) - F_2(t) = 0$$

Le equazioni sopra formulate possono essere scritte in forma matriciale:

$$\mathbf{[M]} \{\ddot{x}\} + \mathbf{[K]} \{x\} = \mathbf{[F]}$$

dove [M] e [K] sono rispettivamente le matrici di massa e di rigidezza date da:

$$\mathbf{[M]} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{[K]} = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

e $\{\ddot{x}\}$, $\{x\}$ **ed [F]** sono rispettivamente i **vettori accelerazione, spostamento e forza dati da:**

$$\{\ddot{x}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} \qquad \{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \qquad [F] = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{bmatrix}$$

Da notare che la **matrice della massa** è una matrice diagonale, mentre i coefficienti della **matrice di rigidezza** k_{ij} sono definiti come la forza alla coordinata i quando a j è impressa uno spostamento unitario, fermo restante che, tutte le altre coordinate rimangono fisse. Nel caso di telai shear-type la matrice di rigidezza è tridiagonale, cioè i termini non nulli sono posti solo nella diagonale principale e nelle due diagonali adiacenti.

Nel caso in cui l'**azione forzante F(t)=0** l'equazione del moto diventerà:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = 0$$ **sempre nelle condizioni di smorzamento nullo**

La soluzione è del tipo : $x = \phi \sin \omega t$ in cui **ϕ è un vettore indipendente dal tempo per cui**

$$\ddot{x} = -\omega^2 \phi \sin \omega t$$ sostituendo si avrà:

$$M(-\omega^2 \phi \sin \omega t) + K \phi \sin \omega t = 0$$

$$-M \omega^2 \phi \sin \omega t + K \phi \sin \omega t = 0$$

$$(K - \omega^2 M) \phi \sin \omega t = 0$$ **che risulta soddisfatta solo se**

$$(K - \omega^2 M) \phi = 0 \qquad \textbf{(A)}$$

la ricerca delle coppie di valori (**ω^2, ϕ)** va sotto il nome di **problema di autovalori-autovettori**

Affinchè esistano **i vettori ϕ diversi da zero** è necessario che**:**

$$\det \left| K - \omega^2 M \right| = 0$$

quest'ultima ammette n (ordine delle matrici **K** e **M**) soluzioni reali positive che possono essere ordinate come segue:

$$(\omega_1)^2 \le (\omega_2)^2 \le \ldots \le (\omega_n)^2$$

le radici quadrate di quest'ultime sono chiamate **frequenze naturali di vibrazione del sistema.**

In corrispondenza di ogni frequenza ω_i la (A) può essere risolta definendo **un vettore (ϕ_i) come autovettore corrispondente all'autovalore (ω_i) oppure come modo di vibrare corrispondente alla frequenza ω_i.**

Invece il **problema in forma standard** si presenta quando il termine **ω^2** è moltiplicato per la matrice d'identità I che ha tutti gli elementi nulli tranne quelli sulla diagonale principale che sono pari ad 1, nel nostro caso :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Diversi sono i metodi per la risoluzione del problema di autovalori-autovettori tra i tanti il

Metodo di HouseHolder

Per tale metodo il problema si pone nella forma:

(C - ω^2 I) ϕ = 0 (B)

dove C = K n-1 matrice del tipo tridiagonale e nel nostro caso per edificio a due piani assumerà la forma che segue:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 & a_2 \\ a_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

dove gli elementi della matrice (c_i) ed (a_i) sono uguali ad :

$c_i = \dfrac{k_{i,i}}{m_i}$ dove (i = 1, 2, …, n) e $a_i = \dfrac{k_{i-1,i}}{\sqrt{m_{i-1}\ m_i}}$ dove (i = 2, …, n)

Allora per arrivare a definire **il problema degli autovalori-autovettori con tale metodologia** si procederà prima a definire **i minori principale della matrice (C - ω^2 I)** che si possono calcolare come appresso rappresentato:

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_0 = 1 \\ Q_1 = c_1\text{-}\omega\text{^}2 \\ Q_r = (c_1\text{-}\omega\text{^}2)\ Q_{r-1} - (a_r)\text{^}2\ Q_{r-2} \qquad \text{con} \quad (\ r = 2,\ldots\ldots\ldots,n) \end{array} \right\}$$

Si determinerà la **successione**

$$\left\{ \mathbf{(Q_1/Q_0)\ ,\ (Q_2/Q_1)\ ,\ldots\ldots\ldots\ldots,\ (Q_n/Q_{n-1})} \right\}$$

Procedura di calcolo :

Supponiamo di voler determinare la prima frequenza ω_r del nostro sistema, vediamo come ci si organizza.

1. Partiremo con una frequenza di tentativo **(ω1^2)** ad esempio **(ω1^2) = 50 (rad/sec)^2;**
2. Calcoliamo i minori principali Q_i ed i relativi rapporti $R_i = Q_{i-1} / Q_i$ con (i = 1,2);
3. Avremo dei valori di R_i ed andremo a vedere quanti valori negativi si presenteranno;
4. Supponiamo che si presenterà un solo valore negativo, allora potremo dire che esiste una sola frequenza naturale del sistema minore di quella di tentativo di partenza, e pertanto la frequenza ω di tentativo è un limite superiore di ω_r ed è lecito porre $\omega_{r,inf} = \omega$.
   Nelle condizioni inverse avremmo posto $\omega_{r,sup} = \omega$.
5. Individuati i due limiti sup ed inf si procede per bisezione assumendo la nuova frequenza di tentativo pari ad $\omega = (\omega_{r,inf} + \omega_{r,sup}) / 2$
6. Il procedimento si arresterà quando $(\omega_{r,inf} - \omega_{r,sup}) / \omega$ è < di una tolleranza prefissata;
7. Determinata la $\omega_r = \omega_1$, la stessa, la si sostituisce nella (B) e **risolvendo e normalizzando,** si otterrà **il modo n.° 1 corrispondente all'autovettore (ϕ_{11r}) e (ϕ_{12r})**, dove il primo indice (1) si riferisce al modo n.1 ed il secondo (1) si riferisce al piano in esame.
8. Passeremo poi a calcolare il **2° modo** partendo con lo stesso procedimento di cui innanzi e determinando cosi' ω_2 **che subirà lo stesso processo innanzi descritto, per arrivare a definire corrispondentemente al modo n.2, l'autovettore (ϕ_{21r}) e (ϕ_{22r}),.**

Per cui riepilogando avremo le Tabelle che seguono:

Modo n.1 per ω_1

Piano	Pulsazione naturale **ω(rad/sec)**	**Modo n.1 ϕ_1**
1	ω_1	ϕ_{11}
2	ω_1	ϕ_{12}

Modo n.2 per ω_2

Piano	Pulsazione naturale **ω(rad/sec)**	**Modo n.2 ϕ_2**
1	ω_2	ϕ_{21}
2	ω_2	ϕ_{22}

Adesso conosciuti sia ω che i corrispondenti ϕ **non solo, posso graficizzare la deformata relativa al 1° e 2° Modo di vibrare, ma, posso calcolare pure la Forza che agisce a livello di ogni Piano in corrispondenza di ogni massa per effetto dell'oscillazione in gioco.**

Sapendo che:

$$\mathbf{x = \phi \sin \omega t} \quad \mathbf{(C)}$$

relativamente ad ogni modo, avremo che la **(C)** assumerà la forma :

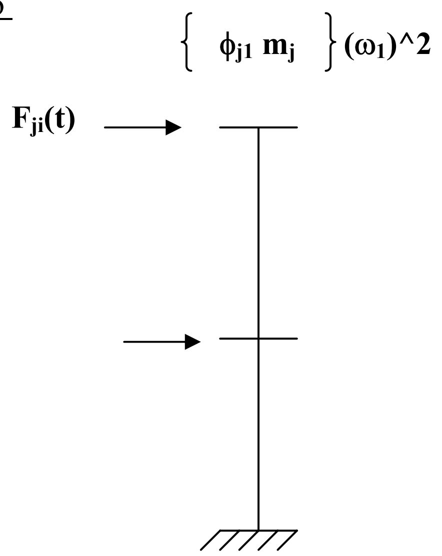
$\mathbf{x_i(t) = \phi_i \sin (\omega_i) t}$ dove i è il modo iesimo di vibrare

La forza in corrispondenza di ogni massa vale:

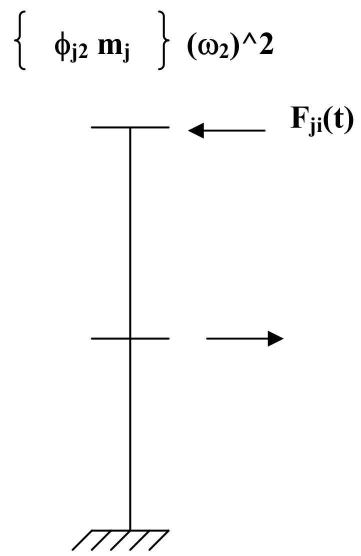
$$\mathbf{F_{ji}(t)= m_j \ddot{x}_{ji}(t) = - (\omega_i)^2 m_j \phi_{ji} \sin (\omega_i) t}$$

Dove **j** si riferisce alla massa di piano
ed **i** il modo di vibrare

<u>1° Modo</u>



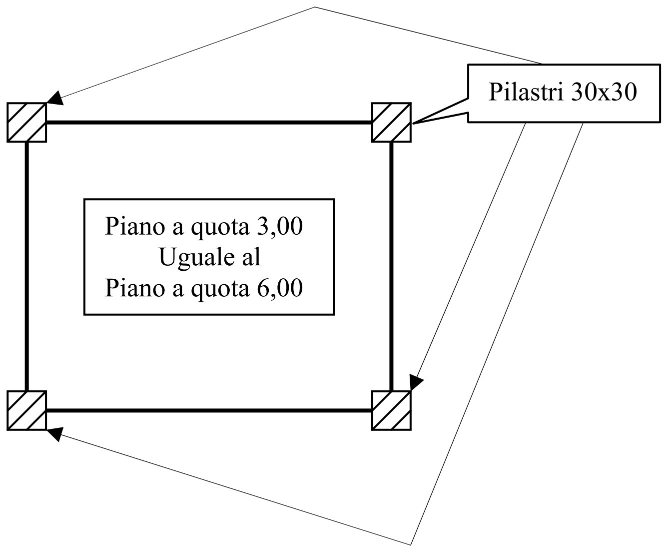
<u>2° Modo</u>

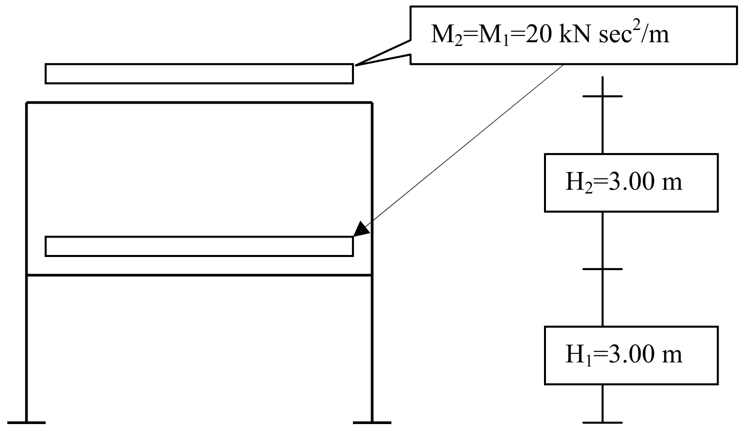


APPLICAZIONE NUMERICA APPLICATA AL TELAIO "SHEAR TYPE" A DUE LIVELLI
RISOLUZIONE DEL PROBLEMA STANDARD AUTOVALORI-AUTOVETTORI

-METODO HOUSEHOLDER-

La struttura, per semplificare i calcoli, si considera simmetrica.





Il problema standard Autovalori-Autovettori nel caso in esame si pone con le seguenti matrici sotto riportate:

<u>Costruzione della Matrice C inerente il Problema standard</u>

$$C = \begin{pmatrix} c1 & a2 \\ a2 & c2 \end{pmatrix}$$

dove $c1 = kii / mi = k1+k2 / m1$

$a2 = k12 / sqr(m1 \times m2)$

<u>Matrice identità</u>

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Matrice delle Masse</u>

$$M = \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} \quad \left(kN \times sec\hat{}2 / m \right)$$

Calcolo dei momenti d'Inerzia

$$\mathbf{MI\ (i,j)} = \frac{\mathbf{b\quad h\ \hat{}3}}{\mathbf{12}} \quad \left[\ \mathbf{m\hat{}4}\right] \qquad \left\{\mathbf{dove\ i\ e\ j = 1,2\ldots\ldots\ldots,n}\right\}$$

Piano 1

MI (1,1) = 0,000675
MI (1,2) = 0,000675
MI (1,3) = 0,000675
MI (1,4) = 0,000675

[m^4]

Piano 2

MI (2,1) = 0,000675
MI (2,2) = 0,000675
MI (2,3) = 0,000675
MI (2,4) = 0,000675

[m^4]

Calcolo della Rigidezza dei Pilastri

$$\mathbf{RP\ (i,j)} = \frac{\mathbf{12\ E\ \ MI(i,j)}}{\mathbf{h\ \hat{}\ 3}} \quad \left[\ \mathbf{kN\ /\ m}\right]$$

Piano 1

RP (1,1) = 3000
RP (1,2) = 3000
RP (1,3) = 3000
RP (1,4) = 3000

[kN/m]

Piano 2

RP (2,1) = 3000
RP (2,2) = 3000
RP (2,3) = 3000
RP (2,4) = 3000

[kN/m]

Calcolo del Vettore Rigidezze di Piano

VR(i) = VR(i) + RP(i,j)

Piano 1

VR(1) = 3000
VR(1) = 6000
VR(1) = 9000
VR(1) = 12000

[kN/m]

Piano 2

VR(2) = 3000
VR(2) = 6000
VR(2) = 9000
VR(2) = 12000

[kN/m]

Costruzione della Matrice di Rigidezza

VR(1) = 12.000 VR(1+1) = 12.000

K (1,1) = 24.000 K (1,2) = -12.000 K (2,1) = 12.000

$$K = \begin{pmatrix} k11 & k12 \\ k21 & k22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k1+k2 & k2 \\ -k2 & k2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24.000 & -12.000 \\ -12.000 & 12.000 \end{pmatrix}$$

Costruzione della Matrice inerente il Problema Standard Autovalori-Autovettori

c1 = KS(1,1) = 24.000 / 20 = 1.200

Ricorda che

$$\begin{cases} c1 = KS(1,1) = k1+k2 / m1 = 24.000 / 20 = 1200 \\ c2 = c1 \end{cases}$$

dove k1+k2 = 24.000 kN/m ed m1 =20 kN x sec^2 / m

$$\begin{cases} a2 = ks(1,2) = k12 / sqr (m1 \text{ x } m2) = -12.000 / sqr (20)^{\wedge}2 = - 600 \\ ks(2,1)= k(i,1) / m(i) = 600 \end{cases}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c1 & a2 \\ a2 & c2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1200 & -600 \\ 600 & 1200 \end{pmatrix}$$

CALCOLO DEGLI AUTOVALORI

1° Modo

Calcolo dei minori principali della Matrice **(C-ω^2 I)** e Ricerca dei limiti sup ed inf di ω

Assegno come valore di tentativo ωt^2=50 rad/sec

1° giro

Q(1) = c1 - ωt^2 = 1200-50 = 1150

K(2,1) = 600 ωt^2 = 50 rad /sec

K(1,2) = - 600 Q(0) = 1

Q(2)= (KS(2,1) - ωt^2) x Q(1) – ks(1,2) ^ 2 x Q(0) =

= (600 – 50) x 1150 – (-600)^2 x 1 =

= 550 x 1150 –(-600)^2 x 1 =

= 632500 – 360000 = 272500 OK!!!!!!!

Calcolati i minori principali vado a calcolare i rapporti della serie $\{ r1, r2 \}$
che appresso si riportano:

$$\begin{cases} R1 = Q1/Qo = 1150/1 = 1150 \\ R2 = Q2/Q1 = 272500/1150 = 236{,}95 \end{cases}$$

Per quanto espresso al punto 4 della Pocedura di calcolo a pag.4, non essendoci valori di R negativi, assegnerò:

$$\begin{cases} \omega inf = \omega t = 50 \text{ rad / sec} \\ \omega sup = 0 \end{cases}$$

Pertanto essendo ωinf > ωsup nel prosieguo, assegnerò ad ωt un nuovo valore di tentativo pari a:
ωt = 2 x ωinf = 2 x 50 = 100 rad / sec
e riparto per il

Ricalcolo della successione di Q(i)

2° giro

Valore di **ωt = 100 rad / sec**

Riparto

Q(1) = Ks(1,1) - ωt = 1200 – 100 = 1100

KS(2,1) = 600 Ks(1,2) = - 600

Q(2)= 500 x 1100 – (-600) ^2 x 1 = 550000-36000=190000

Calcolerò di nuovo le R1 e R2 con la stessa procedura innanzi descritta, ed i cui valori vengono indicati in prosieguo:

$$\begin{cases} R1 = 1100 \\ R2 = 172{,}72 \end{cases}$$

Anche in questo 2° giro non esistendo valori di R negativi valgono le stesse considerazioni già fatte precedentemente al 1° giro, per cui assegnerò ad **ωt = 2 x ωinf = 2 x 100 = 200 rad / sec** e riparto per il

Ricalcolo della successione di Q(i)

3° giro

Valore di **ωt = 200 rad / sec**

Si passano a dare solamente i risultati di calcolo:

Q(1) = Ks(1,1) - ωt = 1200 – 200 = 1000

KS(2,1) = 600 Ks(1,2) = - 600
Q(2)= 40000

$$\begin{cases} R1=1000 \\ R2=40 \end{cases}$$

Si omettono le considerazioni, in quanto sono le stesse di quelle precedentemente descritte.

Ricalcolo della successione di Q(i)

4° giro

Valore di **ωt = 400 rad / sec**

Q(1) = Ks(1,1) - ωt = 1200 – 400 = 800

KS(2,1) = 600 Ks(1,2) = - 600
KS(2,1) - ωt = 200 Q(0)=1
Q(2) = -200.000

$$\begin{cases} R1=800 \text{ e } R2= -250 \\ R2= -250 \end{cases}$$

Adesso **essendo R2 uguale ad un valore negativo** vuol dire che esiste un valore di frequenza naturale del sistema minore di quello di tentativo prefissato con ωt, pertanto tenuto conto di quanto esposto alla procedura di calcolo a pag.4, assegnerò alle **ω i valori appresso descritti:**
ωsup = ωt = 400 rad / sec **ωinf = 200 rad / sec**

Resta individuato cosi', il limite superiore ed inferiore della pulsazione, per cui si procederà per **bisezione** al calcolo della nuova frequenza di tentativo **ωt dato da:**

$$\omega t = \frac{\omega inf + \omega sup}{2} = 300 \quad \left(rad / sec \right)$$

Successivamente si opererà **una verifica del rapporto rispetto al Grado di precisione scelto e pari a GP= 0,001**

$$\left(\frac{\omega sup - \omega inf}{\omega t} \right) \text{se è > oppure è < del } \mathbf{GP}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Se tale rapporto è maggiore del } \textbf{GP allora si riparte per un altro giro;} \\ \text{Se tale rapporto è minore del } \textbf{GP allora il procedimento di calcolo si arresterà ed il valore di} \\ \textbf{tentativo ωt, è proprio la frequenza del sistema relativa al modo in esame.} \end{array} \right\}$$

Nel caso in esame avremo:

$$\left(\frac{\omega sup \ - \ \omega inf}{\omega t} \right) = \left(400\text{-}200 / 300 \right) \ = \ 0,66666 \text{ che è } > 0,001$$

per cui si riparte per il
Ricalcolo della successione di Q(i)

5° giro

Valore di **ωt = 300 rad / sec**

Q(1) = 900

KS(2,1) = 600 Ks(1,2) = - 600
KS(2,1) - ωt = 300 Q(0)=1
Q(2) = -90.000

$$\begin{cases} R1=900 \\ R2= -100 \end{cases}$$

Al fine di non tediare il lettore di calcoli e considerazioni ripetitive, si omettono i successivi giri di calcolo, ad eccezione del 13° e 14°giro, dove, il procedimento si arresterà in quanto si avrà che:

(ωsup - ωrinf) / ωt è inferiore a GP (grado di precisione)

Vediamo:

Ricalcolo della successione di Q(i)

13° giro

Valore di **ωt = 229,2969 rad / sec**

Q(1) = 970,7031

KS(2,1) = 600 Ks(1,2) = - 600
KS(2,1) - ωt = 370,7031 Q(0)=1
Q(2) = -90.000

$$\begin{cases} R1=970,7031 \\ R2= - 0,1620603621 \end{cases}$$

Ricalcolo della successione di Q(i)

14° giro

Valore di ω**t = 229,1992 rad / sec**

Q(1) = 970,8984

KS(2,1) = 600 Ks(1,2) = - 600
KS(2,1) - ωt = 370,8984 Q(0)=1
Q(2) = -90.000

$$\begin{cases} R1=970{,}8984 \\ R2= - 0{,}1078575739 \end{cases}$$

Per cui verificandosi che :

$$(\omega sup - \omega rinf) / \omega t < 0.001$$

il procedimento si arresta per **ωt = 229,1992 (rad / sec) ^2**
conseguentemente,per calcolare **la frequenza naturale del sistema relativa al 1° Modo di vibrare,** basta operare, la radice quadrata di ω**t come appresso descritto:**

$$\omega = SQR (\omega t) = 15.139 \quad \left[\text{ rad / sec } \right]$$

<u>Calcolo del periodo proprio del sistema T</u> [sec]

$$T = 2\pi / \omega = 2 \times 3.14 / 15.139 = 0.4150 \left[\text{ sec } \right]$$

<u>Relativamente al 2° Modo di vibrare</u>

1. Riparto con un valore di **ωt = 2 x 229.1992 = 458,3984 (rad/sec)^2;**
2. **andrò ricercare il limite superiore ed inferiore e i conseguenti elementi della serie Q(i) e R(i) con le stesse procedure sopra descritte;**
3. **arriverò a definire i risultati della Frequenza e Periodo naturale del sistema , con valori numerici che appresso vengon riportati:**

$$\omega = SQR (\omega t) = 39{,}633 \quad \left[\text{ rad / sec } \right]$$

<u>Calcolo del periodo proprio del sistema T</u> [sec]

$$T = 2\pi / \omega = 2 \times 3.14 / 39{,}633 = 0.1585 \left[\text{ sec } \right]$$

RIEPILOGO TABELLARE DEGLI AUTOVALORI CALCOLATI

Modo N°	Autovalore (Rad / sec)^2	Pulsazione Naturale (Rad / sec)	Periodo Naturale (sec)
1	**229,1992**	**15.139**	**0.4150**
2	**458,3984**	**39,633**	**0.1585**

Dall'esame della tabella riepilogativa, si osserva che le soluzioni reali positive sono ordinate come seguono:

$$(\omega 1)^2 <= (\omega 2)^2 <= \ldots\ldots\ldots <= (\omega n)^2$$

ciò, coincide, con quanto già precedentemente detto a pag.2.

CALCOLO DEGLI AUTOVETTORI

Entro nel ciclo per il calcolo e la scrittura della matrice **KM** pari a :

$$KM = (K - \omega^2 M)$$

Conoscendo i valori :

K(1,1) = 24.000 kN / m

ω1 = 229,1992 (rad / sec) ^2

M(1) = 20 kNxsec^2/m

K(1,2) = - 12.000 kN / m

KM (1,1) = 19.416,02 kN / m

KM (1,2) = -12.000 kN / m

K(2,1) = 12.000 kN / m

ω1 = 1.570,82 (rad / sec) ^2

M(1) = 20 kNxsec^2/m

K(2,2) = 0 kN / m

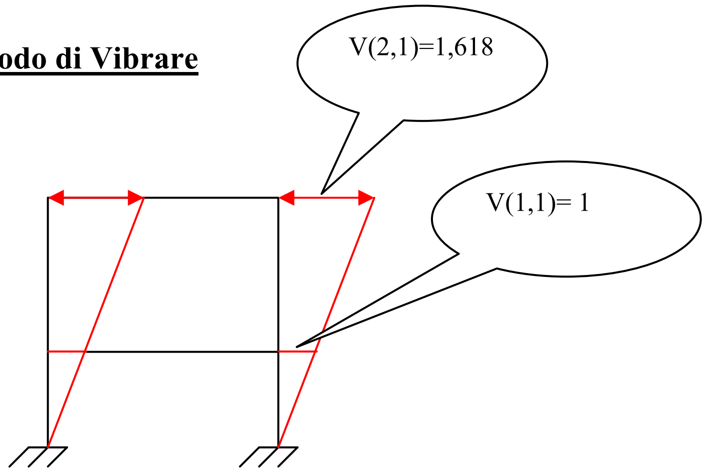
KM (2,1) = 7.416,016 kN / m

KM (2,2) = 0 kN / m

Calcolo degli Autovettori relativi al 1° Modo di vibrare

$$\left(\begin{array}{l} V(1,1) = 1 \\ V(2,1) = -1 \times (KM\,(1,1) / KM\,(1,2)) = -1 \times (19.416 / -12.000) = 1{,}618 \end{array} \right)$$

1° Modo di Vibrare



Dove :

E

$$\left\{ \begin{array}{l} KM\,(1,1) = (k1+k2\,) - \omega\,\text{^}2\ M \\ KM(1,2) = k2 - \omega\,\text{^}2\ M \end{array} \right\}$$

NORMALIZZAZIONE DEGLI AUTOVETTORI

$$\left\{ V(1,1) = 1\ /\ V(2,1) = 1 / 1{,}618 = 0{,}618 \quad e \quad V(2,1) = 1 \right\}$$

Si riferisce al Modo

V(1,1) quindi Piano 1 - Modo 1

Si riferisce al Piano

Stesso ed identico lavoro,si fa per il calcolo del **2° Modo di vibrare,** i cui risultati numerici vengono per completezza appresso riportati :

K(1,1) = 24.000 kN / m

ω2 = 229,1992 (rad / sec) ^2

M(2) = 20 kNxsec^2/m

K(1,2) = - 12.000 kN / m

KM (1,1) = - 7416 kN / m

KM (1,2) = -12.000 kN / m

K(2,1) = 12.000 kN / m

ω2 = 1.570,82 (rad / sec) ^2

M(2) = 20 kNxsec^2/m

K(2,2) = 0 kN / m

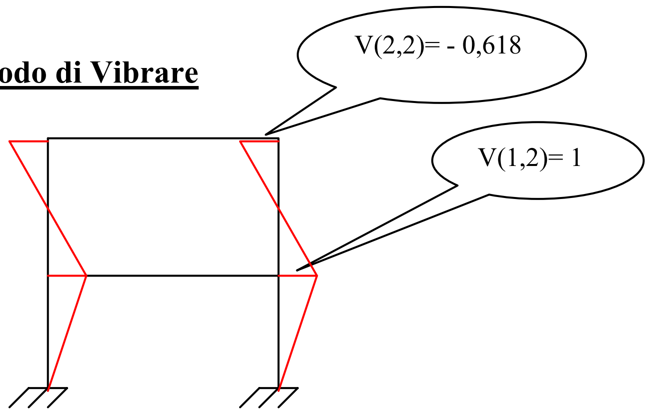
KM (2,1) = -19.416,41 kN / m

KM (2,2) = 0 kN / m

Calcolo degli Autovettori relativi al 2° Modo di vibrare

$$\left\{ \begin{array}{l} V(1,2) = 1 \\ V(2,2) = -0{,}618 \end{array} \right\}$$

2° Modo di Vibrare



Per concludere sulla tematica in questione si evidenzia che la

STRUTTURA DEGLI AUTOVALORI ED AUTOVETTORI

è :

$$\left\{ \begin{pmatrix} k1+k2 & -k2 \\ -k2 & k2 \end{pmatrix} \quad \omega^2 \ M \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} x1 \\ x\,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'EQUAZIONE DELLE FREQUENZE

è :

$$\text{DET} \begin{pmatrix} (k1+k2) - \omega^2 \ M & - k2 \\ -k2 & k2 - \omega^2 \ M \end{pmatrix} = \quad 0$$

ovvero

$$\left[(k1+k2) - \omega^2 \ M \right] \quad (k2 - \omega^2 \ M) \quad - k2^2 = 0$$

Fonte di ricerca e studio:

Bibliografia:

1. Fisica - Parte Prima – Meccanica-Acustica-Termodinamica-
   Robert Resnick e David Halliday
   Casa Editrice Ambrosiana-Milano-

2. Primi elementi di Dinamica delle Strutture
   Prof. G.Oliveto
   -Rivista Ordine Ingegneri Provincia di Catania-

3. Dinamica Strutturale Teoria & Calcolo
   Mario Paz prof.di ingegneria civile Università di Louisville
   Casa Editrice Dario Flaccovio-Palermo-