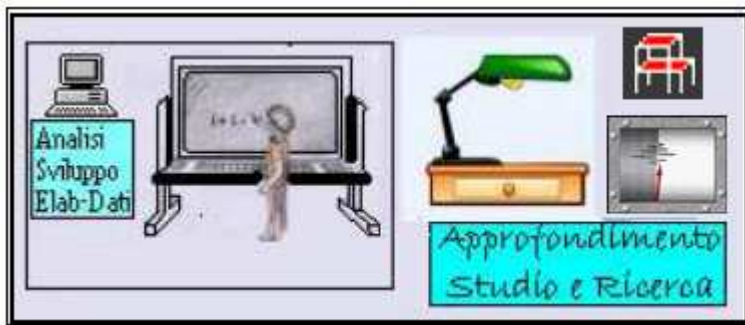


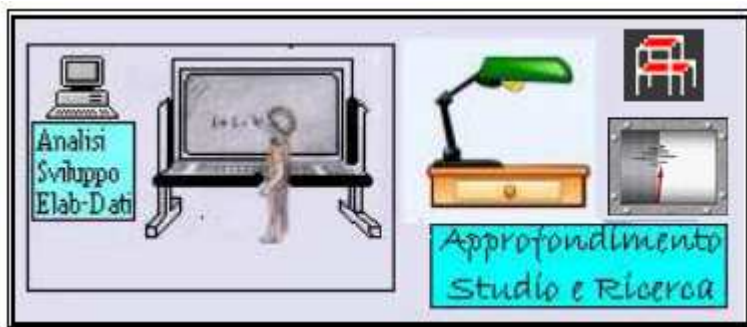


**RISPOSTA DI UN SISTEMA SDOF
ECCITATO DA UNA FORZANTE
IMPULSIVA.**

**STUDIO ED APPROFONDIMENTO A
MEZZO INTEGRALE DI DUHAMEL
CON RELATIVO CALCOLO DEI
PARAMETRI:**

**SPOSTAMENTO, VELOCITA',
ACCELERAZIONE,
FORZA APPLICATA AL SISTEMA**

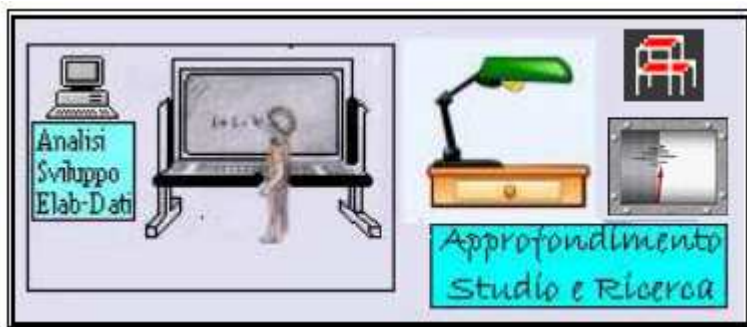
ing. Domenico Pagnozzi



PREMESSA

Partendo dai miei lavori inerenti sia la “Rappresentazione Spettrale della Forza Eccitante $F(t)$, a mezzo della serie di FOURIER”, che L'Analisi di Fourier nel campo della frequenza per carico impulsivo, *entrambi validati e pubblicati rispettivamente nell'anno 2015 e 2020 dal prof. Aurelio Gherzi sul sito: <http://www.dica.unict.it/users/agherzi/Software>*, e, tenuto conto che gli stessi, hanno evidenziato e descritto con una prima interpretazione fisico-matematico il modello e l'approccio allo studio generale dell'onda sismica, con la presente ricerca, che sarà comunque sottoposta alla validazione del prof. Aurelio Gherzi, si è passato a descrivere ed a illustrare lo studio del segnale ondulatorio per un sistema modello SDOF (single degree of freedom), *affrontato con il metodo dell'Integrale di sovrapposizione o di "Duhamel", che avendo un ruolo fondamentale nella teoria dei sistemi lineari, permette, attraverso l'operazione matematica di tale integrazione, di considerare il segnale di uscita di un sistema lineare e stazionario come la convoluzione di due funzioni: l'eccitazione e la risposta all'impulso, il che, per la problematica legata alla complessità dell'insieme delle onde sismiche*, risulta essere di grande utilità l'approfondimento, l'approccio e lo studio dello stesso integrale, tenuto conto, che per effetto della complessa vibrazione percepita dalla struttura sovrastante, la stessa, per dimensione, geometria e tipologia strutturale assume un comportamento dinamico diverso, e pertanto, tale studio di approfondimento e ricerca, diventa di grande aiuto per la conoscenza più approfondita del segnale stesso.

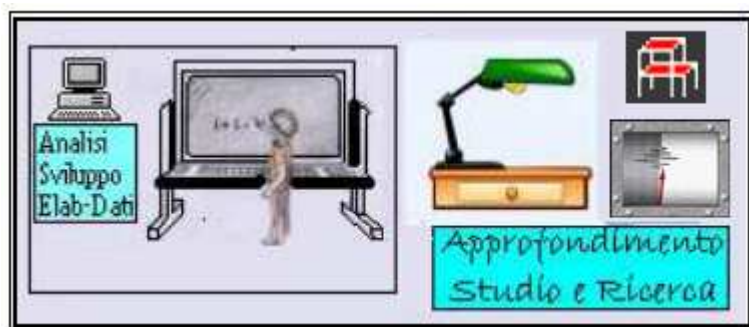
Ci si domanda perché l'integrale di Duhamel ? Bene a tale domanda, si evidenzia che, il metodo di Duhamel è una tecnica per la risoluzione di equazioni differenziali che si basa sul dominio del tempo, ed oltretutto può essere utilizzato in alternativa alla Trasformata di Fourier per trovare, nel dominio del tempo, la risposta del segnale applicato ad un sistema lineare eccitato da una forzante di tipo transitorio.



Rimane doveroso evidenziare, che a base del mio lavoro di ricerca, ho continuato a studiare sul libro “Dinamica Strutturale Teoria & Calcolo del prof. Mario Paz pubblicato dalla casa editrice Libreria DF Dario Flaccovio Editrice”, a cui, doverosamente va il mio personale riconoscimento e ringraziamento, tenuto conto oltretutto, *che lo studio e l'approfondimento esperito sullo stesso libro ben organizzato ed illustrato, mi ha permesso di completare ulteriori approfondimenti e concetti fisici-analitici-matematici inerente il modello strutturale del sistema massa-molla modellato ad un solo grado di libertà (SDOF), anche e soprattutto per onorare il pensiero del (prof. Mario Paz) meglio descritto e riportato nella prefazione alla prima edizione (Dicembre 1979) che appresso in modo stralcio si riporta ”omissis.....* **Nella stesura di questo libro l'autore ha pure tenuto presente la possibilità di questo testo come fonte per la ricerca di argomenti di dinamica strutturale.....omissis”**

Si precisa altresì, che solo dopo lo studio e gli approfondimenti fatti sugli algoritmi e formulazioni esposte con chiarezza nel libro sopradescritto, lo scrivente, ad integrazione della sua ricerca inerente lo studio del segnale a mezzo dell'integrale di Duhamel, ha provveduto ad elaborare una esercitazione numerica che appresso viene riportata e descritta, utilizzando per tale applicazione, le formulazioni matematiche secondo la teoria dell'integrale di Duhamel, meglio riportate e descritte nella stessa pubblicazione a cura del prof. Mario Paz, il tutto, al fine di una conoscenza più approfondita e dettagliata della problematica inerenti i segnali impulsivi, applicati alla base della struttura sismo-resistente.

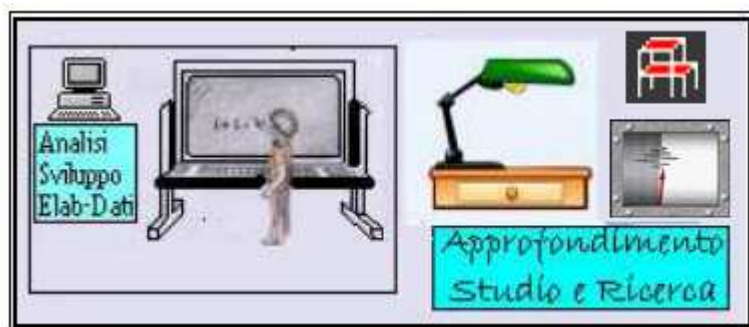
Si evidenzia che, seppure la descrizione della problematica viene fatta a mezzo di formulazioni matematiche a cui l'ingegnere non può rinunciare, con un po' di attenzione, il lettore, attraverso l'esempio svolto da amanuense con metodo step by step, potrà apprezzare e chiarire le problematiche connesse al modello SDOF, il tutto, in considerazione del fatto che



la problematica legata alla complessità dell'insieme delle onde sismiche, provoca una complessa vibrazione del suolo.

Si precisa altresì, che solo dopo lo studio e gli approfondimenti fatti sugli algoritmi e formulazioni esposte con chiarezza nel libro del prof. Mario Paz, lo scrivente, ad integrazione delle sue ricerche fatte nel campo dello studio dei segnali sismici, con la presente, ed attraverso un esempio Semplice, Sintetico, Lineare ed Efficace, ha cercato di raccontare ciò che ha imparato dallo studio e l'approfondimento della materia in esame, il tutto, al fine **sia** di una conoscenza più approfondita della problematica, **che** del processo analitico-fisico-matematico correlato con la stessa problematica, ed anche e soprattutto stimolato ad organizzare e tradurre attraverso un esempio numerico, la complessità del calcolo numerico racchiusa in delle formule di analisi matematica (derivate ed Integrali), con un esempio povero ma semplice e spero efficace, nella sua stesura numerica.

Un doveroso ringraziamento a tutti i colleghi che per il passato mi hanno contattato telefonicamente ringraziandomi di tutte le ricerche fatte, pubblicate e messe a disposizione gratuitamente sul sito del prof. ing. Aurelio Gherzi docente di Tecnica delle Costruzioni presso l'Università di Catania, ai quali ho dato sempre la mia disponibilità alle loro richieste ed oltretutto li ho invitati e sollecitati alla materia molto delicata quale la dinamica delle strutture che, non deve essere utilizzata e rimandata ai consueti software che girano sul mercato, ma che gli stessi seppure utilizzati per ragioni professionali e di velocità di calcolo, è buona norma usarli non come scatole nere cioè essere a conoscenza dei soli Dati di (input) e poi, trovarsi smarrito per i dati di (output), ma, specialmente per la normativa sismica che attualmente è vasta e complessa, incominciare ad usare anche attraverso un'arte povera (pennino-inchiostro), l'approccio e lo studio della modellazione sismica, perché ciò, conseguentemente, porta a capire le vere e misteriose problematiche afferenti la struttura, per la risoluzione delle problematiche sismo-resistenti. Un Grazie di cuore a tutti.



Un doveroso e ringraziamento particolare, va al **Prof. Pietro Antonio De Paola**, che, oltre ad essere stato:

-Presidente dell'Ordine Nazionale dei Geologi;

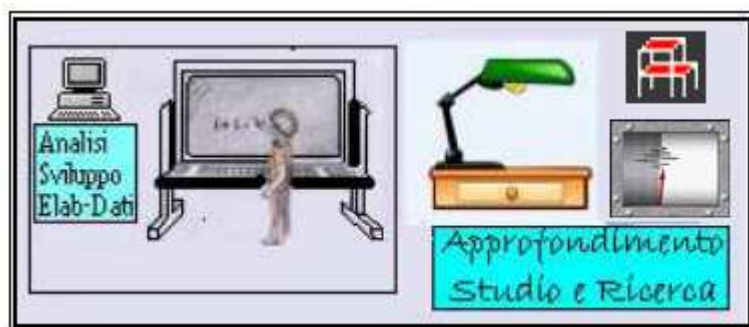
-Membro esperto del Consiglio Superiore dei LL.PP dal 1992;

-Docente di "Geologia Applicata alla Pianificazione Territoriale" presso la Facoltà di Scienze MM.FF.NN. dell'Università degli Studi di Benevento;

allo stato attuale, è direttore dell'Osservatorio Sismico del -Nucleo di Protezione Civile" Luigi Palmieri" di Pesco Sannita(BN), e nel merito, ha sempre incoraggiato e sostenuto, il mio senso di ricerca scientifica, riconoscendone i meriti del mio lavoro solitario, della mia perseveranza, intelligenza e capacità intuitiva, anzi a tal uopo, mi ha continuamente invitato e formulato, l'invito a perseguire le mie idee con la fede degli umili e dei forti, evidenziando infine, che il mio atteggiamento scientifico, è sempre stato la qualità che ha sempre contraddistinto la mia personalità in materia di ricerca, anche se la stessa, non è sostenuta da nessuna risorsa finanziaria pubblica, ma solamente dotata di una grande energia e forza di volontà, dettata dal "mettere a disposizione degli altri le proprie conoscenze e capacità professionali". Grazie Pietro.

Un pensiero va ai miei figli e a mia moglie Imma che, con grandissima pazienza, oltre a starmi molto vicino durante la stesura della presente ricerca, mi hanno dato continuamente tanto incoraggiamento per portarlo a termine, tenuto conto dei notevoli ostacoli che inevitabilmente si presentano nel percorso della ricerca scientifica. Grazie di cuore.

Infine concludo, che come sempre, il presente lavoro, con testo e formule curate sotto l'aspetto editoriale, viene trasmesso al prof. Aurelio Gherzi, affinché lo stesso, attraverso la sua validazione altamente professionale, possa metterlo a disposizione sul suo sito gratuitamente, il tutto, al fine di poter ulteriormente suscitare e stimolare ancora di più l'interesse e l'approfondimento per la ricerca scientifica di tutti i ricercatori, studiosi e professionisti, tutti appassionati della materia, e predisposti con vero amore, all'approfondimento della fisica-matematica, che per me è stata e sempre sarà un'avventura straordinaria, che, se vissuta con tenacità, amore e dedizione, porta sempre ad avere soddisfacenti risultati a nome e per conto



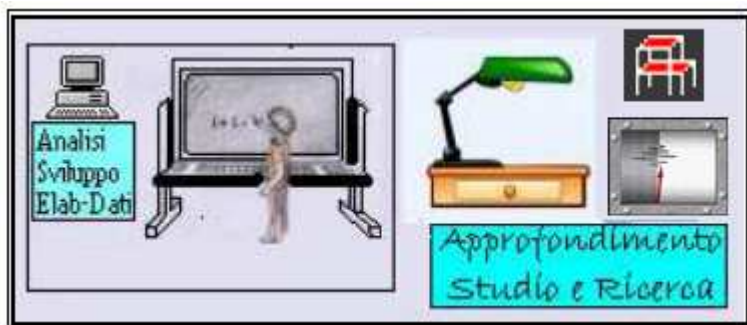
e nell'interesse della scienza, specialmente se, durante il proprio percorso di ricerca e studi, si è avuto la fortuna di conoscere studiosi e professionisti della materia quale il prof. Aurelio Gherzi ed anche altri collaboratori, tecnici e ricercatori, che con le loro esperienze, maestranze e gran senso d'umiltà, hanno contribuito a darmi un grandissimo insegnamento per affrontare le varie problematiche scientifiche di grande spessore matematico.

In particolare, evidenzio che il prof. Aurelio Gherzi oltre a trasmettermi un grandissimo entusiasmo e stimolante interesse per la materia strutturale, mi ha infuso soprattutto un'enorme passione per fare INGEGNERIA, tutto, ispirato allo studio e ricerca, attraverso il linguaggio dell'Analisi Matriciale dedicata alle strutture, che ad avviso del sottoscritto, rappresenta la vera analisi per affrontare le problematiche inerenti lo stato-dinamico-sismo strutturale degli Edifici.

Lì Marzo 2024

Approfondimento, Studio e Ricerca elaborata da:

Domenico Pagnozzi



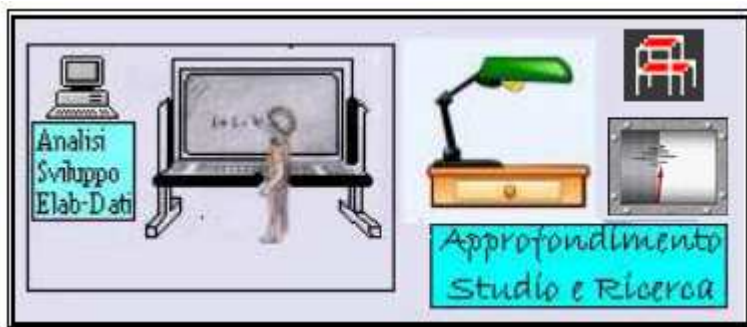
ANALISI DELL'INTEGRALE DI DUHAMEL

Con i miei precedenti studi e ricerche, meglio rappresentati e descritti nella premessa del presente lavoro, si evidenzia che: **sia** la “Rappresentazione Spettrale della Forza Eccitante $F(t)$, a mezzo della serie di FOURIER”, **che**, “L'Analisi di Fourier nel campo della frequenza per carico impulsivo”, hanno evidenziato e descritto un primo approccio, dedicato allo studio generale dell'onda sismica, attraverso una prima interpretazione Numerico Funzionale legata ad un modello fisico-matematico del tipo SDOF.

Con la presente ricerca, che sarà comunque sottoposta alla validazione del prof. Aurelio Gherzi, si è passato a descrivere ed a illustrare lo studio del segnale ondulatorio per un sistema modello SDOF (single degree of freedom), affrontato con il metodo dell'Integrale di sovrapposizione o di "Duhamel", che avendo un ruolo fondamentale nella teoria dei sistemi lineari, permette, attraverso l'operazione matematica di tale integrazione, di considerare il segnale di uscita di un sistema lineare e stazionario come la convoluzione di due funzioni: l'eccitazione e la risposta all'impulso.

Inoltre si evidenzia altresì che un ulteriore vantaggio del metodo di Duhamel, è oltretutto rappresentato dal fatto che le sue operazioni numeriche usano una tecnica per la risoluzione di equazioni differenziali che si basa sul dominio del tempo, ed oltretutto può essere utilizzato in alternativa alla Trasformata di Fourier per trovare, nel dominio del tempo, la risposta del segnale applicato ad un sistema lineare eccitato da una forzante di tipo transitorio.

Ai fini della esattezza di calcolo numerico, ad avviso dello scrivente e di molte letterature scientifiche, si evidenzia che tale metodologia di calcolo, non innesca grandi

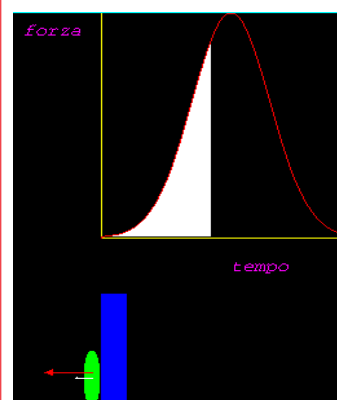
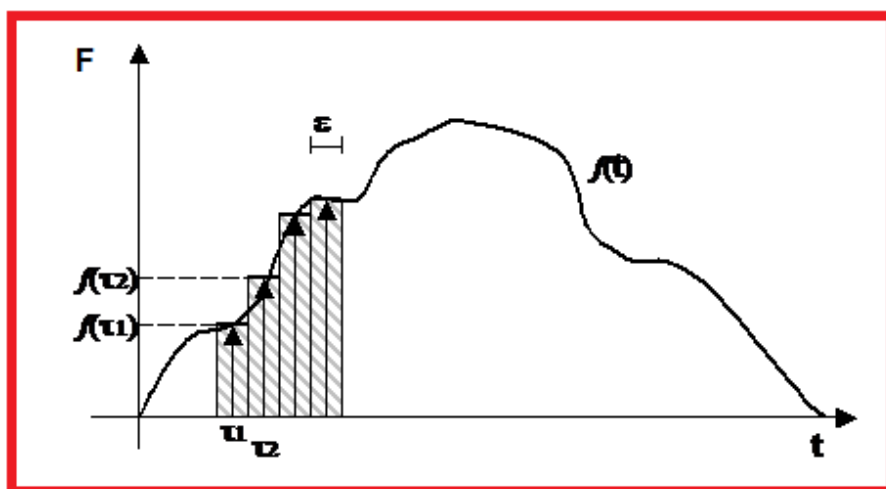


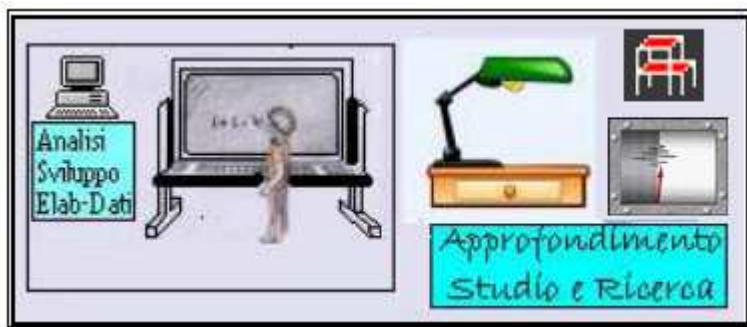
approssimazioni numeriche relative all'operazione di integrazione, e pertanto lo stesso, può ritenersi appartenente alla categoria di calcolo esatto.

Prima di passare ai dettagli del tipo matematico, si evidenzia che trattandosi di onde del tipo impulsive, resta confermato quanto meglio descritto e riportato da pagina 7/50 a pagina 8/50 appartenenti alla (Ricerca Analisi di Fourier nel campo della frequenza per carico impulsivo) ed inerente la problematica della **Funzione di Risposta all'Impulso** che in prosieguo viene riportata integralmente al fine di rendere lo studio e la lettura della presente, agevolmente comprensibile e rapidamente consultabile.

Omissis..... Segue quanto già descritto da pag. 7/50 a pag. 8/50

In pratica ed ai fini di un maggiore dettaglio, si evidenzia, che **la Funzione di Risposta all'Impulso** all'istante generico $t=\tau$ ($h(t-\tau)$) risulta traslata di τ secondi rispetto alla Funzione di Risposta all'Impulso all'istante $t=0$, generalmente indicata con $h(t)$, pertanto, passando ad analizzare la generica forzante di tipo transitorio, è facile comprendere come questa possa essere approssimata tramite una sommatoria di forze 'quasi impulsive' di ampiezza $f(\tau)$ e di durata ϵ , il tutto come meglio illustrato al grafico che appresso si riporta:





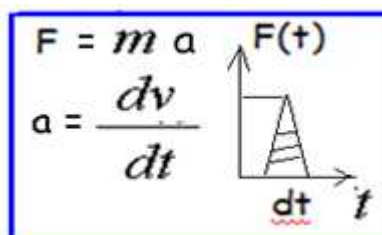
Nel dettaglio scientifico, si chiarisce che la funzione in grafico, descrive l'andamento della forza $F(t)$ che si esercita su di un corpo di massa (m) durante un'urto e, supponendo che tale forza abbia direzione costante, possiamo dire che la $F(t)$ è nulla prima e dopo l'urto nella fase d'interazione, tenuto conto che l'urto inizia all'istante t_1 e finisce in t_2 . Infine, analizzando il fenomeno dal punto di vista della quantità di moto si può fare la seguente considerazione e cioè che la variazione della quantità di moto dp di un corpo dovuto ad una forza F che agisce su di esso per un tempo Δt vale:

$$dp = F \times dt$$

per cui la variazione della quantità di moto di un corpo durante l'urto vale:

$$p_f - p_i = \int_{p_i}^{p_f} dp = \int_{t_i}^{t_f} F \times dt$$

L'integrale della $F(t)$ sull'intervallo di tempo dt viene detto Impulso per cui la Δp (Variazione della quantità di moto) di un corpo su cui agisce F (impulso) è uguale all'impulso della Forza, così come rappresentato alla figura che segue:



L'impulso innanzidetto applicato su di un corpo di massa m produce un cambiamento di velocità che in base alla legge del moto di Newton vale:

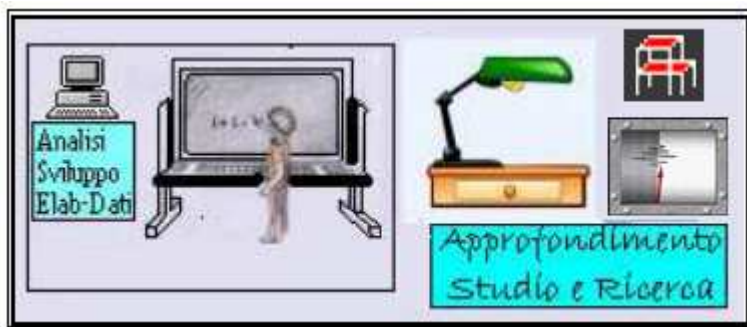
$$ma = F(t)$$

dove essendo

$$a = \frac{dv}{dt}$$

si ha

$$m \times \frac{dv}{dt} = F(t)$$



da cui la variazione di velocità dv vale $\rightarrow$

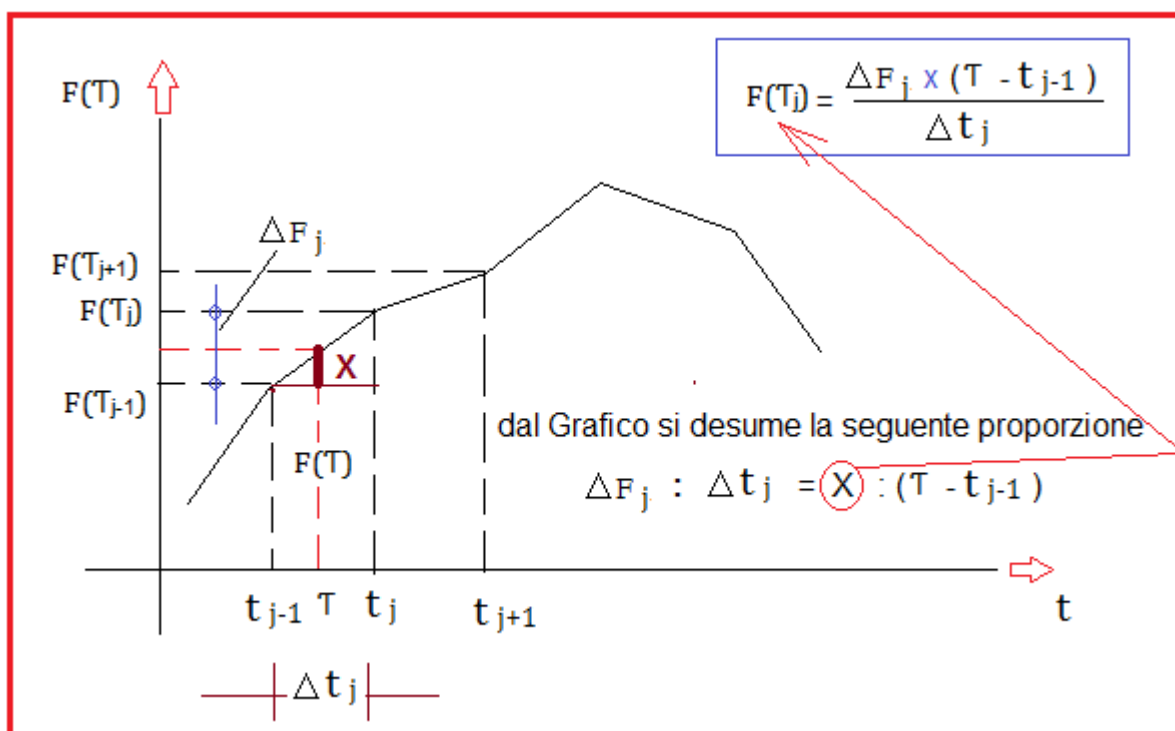
$$dv = \frac{F(t)}{m} dt$$

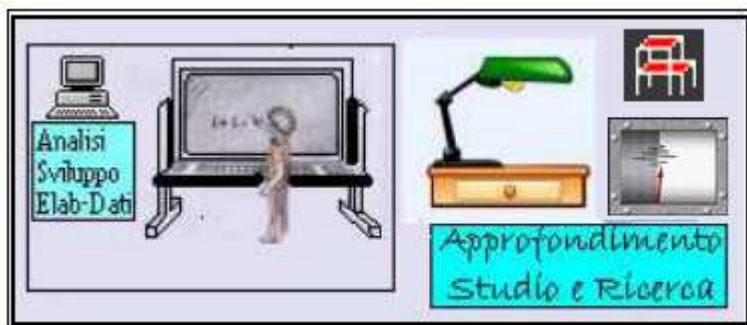
dove $\mathbf{F(t) dt}$ è l'impulso e $d\mathbf{v}$ è l'incremento della velocità.

Chiarito cosa c'è alla base del discorso sulle Forze Impulsive, adesso passiamo a trattare l'argomento relativo ad una forzante $F(t)$, rappresentata a mezzo di una successione di segmenti a tratti lineari.

Doverosamente tengo a precisare che anche per questa ricerca che mi appronto a presentare, le formule, appresso riportate, sono alla base della mia ricerca scientifica, e le stesse, sono state ricavate dalla consultazione ed approfondimento del Cap.5 riportato nel volume "Dinamica Strutturale Teoria e Calcolo" a cura del prof. Mario Paz professore di ingegneria civile Università di Louisville-Libreria DF Dario Flaccovio Editrice-

Nel nostro caso, supposto che la **forzante sia a tratti lineari** come da grafico che segue:





Dal grafico si ricava il valore $F(\tau)$ dato::

$$F(\tau) = F(T_{j-1}) + F(T_j) = F(T_{j-1}) + \frac{\Delta F_j}{\Delta t_j} \times (\tau - t_{j-1}) \quad \text{con} \quad t_{j-1} \leq \tau \leq t_j$$

Adesso, al fine di spiegare bene l'utilità delle Forzante $F(T)$ appena sopra descritta, bisogna rifarsi al sistema Massa-Molla in termini di Dinamica Strutturale, il tutto, così come meglio descritto e rappresentato nella mia ricerca dell'Analisi di Fourier nel campo delle frequenze per carico impulsivo, che, per comodità di lettura e comprensione, viene appresso riportata integralmente da pagina 12/50 appartenente alla ricerca stessa.

Entrando nel vivo della problematica, e volendo trattare l'argomento secondo la **DINAMICA DELLE STRUTTURE**, il tutto, viene rappresentato attraverso la descrizione di un modello matematico con sistema massa-molla SDOF (sistema ad un solo grado di libertà), partendo dallo schema che appresso si riporta:

MODELLO MASSA-MOLLA SDOF

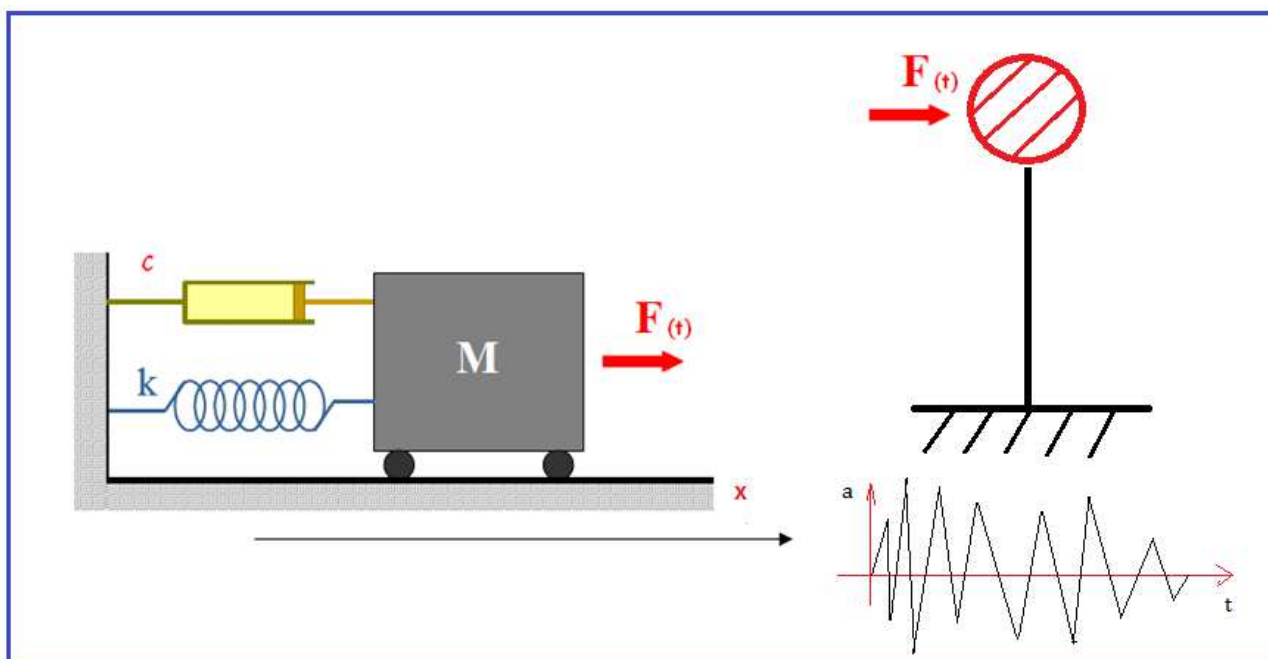
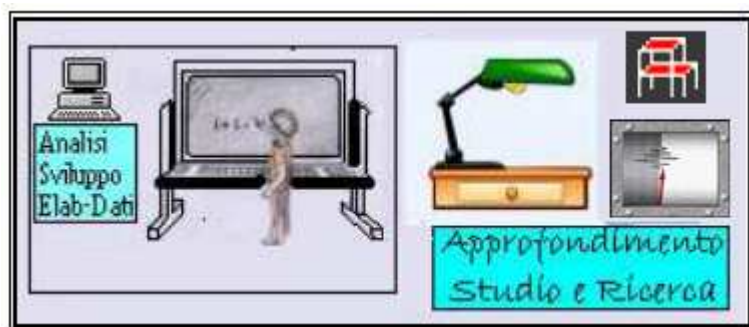
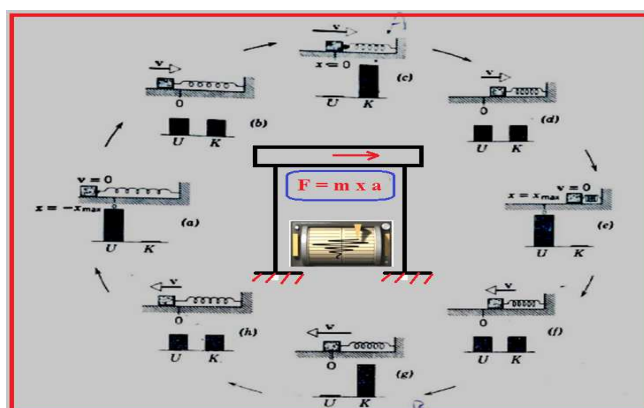


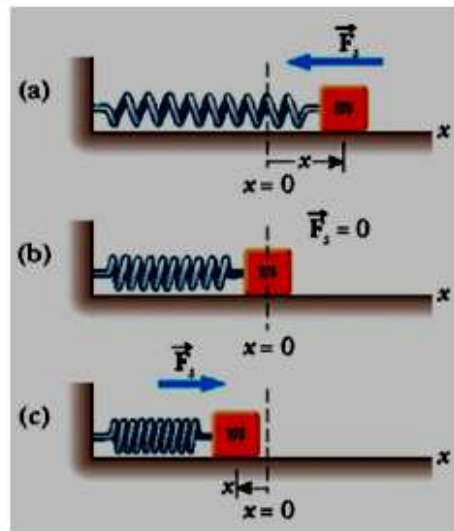
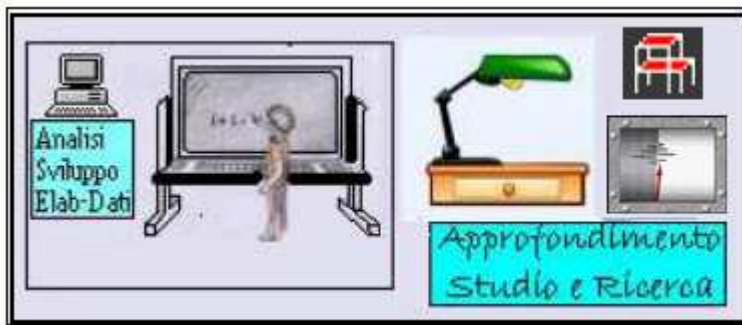
Fig.A



Al fine di chiarire cosa succede nel **processo dinamico trasmesso sul Telaio**, per effetto dell'onda sismica al terreno, appresso si riporta lo schema tipo massa-molla che descrive la distribuzione di ENERGIA durante il processo di un giro di 360°



Nel dettaglio, tutto il processo, può essere riassunto nel concentrare il nostro sguardo sul movimento della trave appartenente al Telaio. La trave di massa (**m**), comprendendo sia i carichi peso strutturale proprio (**G_{1k}**) che il peso non strutturale (**G_{2k}**), per effetto dell'azione sollecitante al suolo ha uno spostamento (**x**) sia a destra che a sinistra, però appena viene meno la forzante (**F**), e nell'ipotesi di assenza di attrito, la trave continua ad essere in movimento, iniziando una serie di oscillazioni orizzontali intorno alla sua posizione di riposo $x=0$, il tutto ancora meglio descritto e riportato graficamente alla figura sottostante:



Richiamo della Massa
da parte dei pilastri
alla sua posizione di
riposo

La Trave parte da
ferma e si mette in
movimento

Per effetto della trave
in compressione, i
pilastri spingono l
stessa in direzione
opposta

Infine dal Grafico che segue, si rappresenta **il fenomeno fisico sotto l'aspetto ENERGETICO**, dal quale si evince che nel caso di oscillazione senza attrito, l'energia totale rimane costante

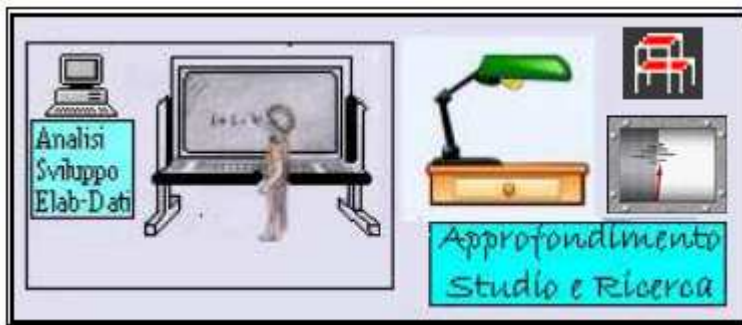
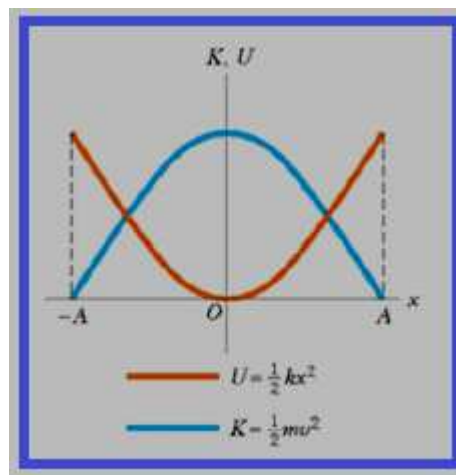
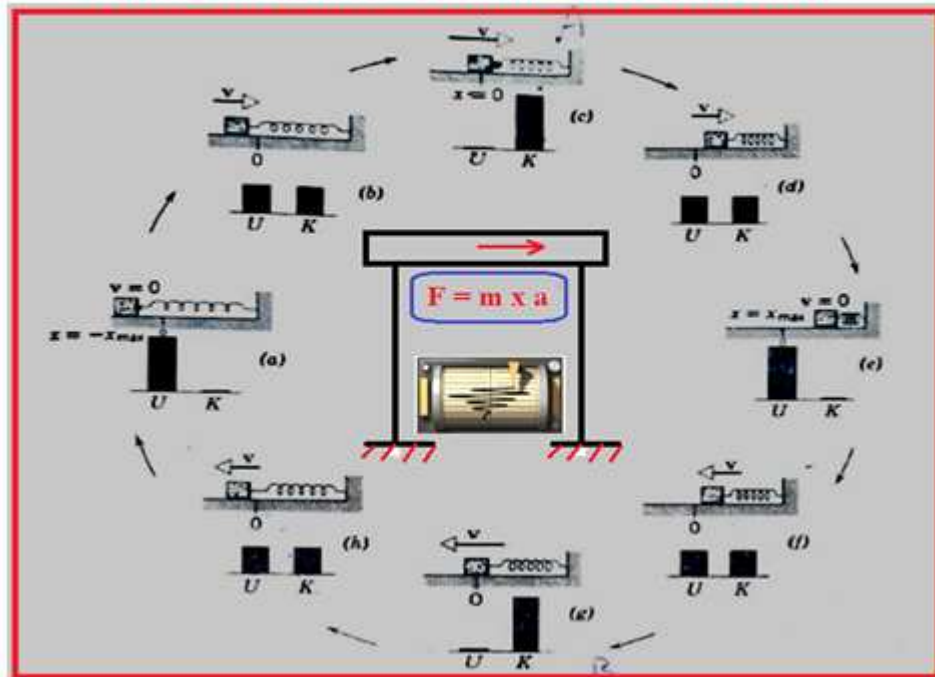
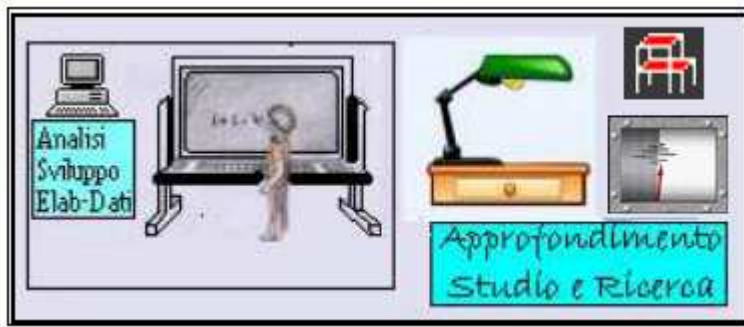


GRAFICO RAPPRESENTANTE SCAMBIO DI ENERGIA DA CINETICA (K) A POTENZIALE (U) E VICEVERSA



IN GENERALE nel sistema di riferimento come modellato in Fig.A e cioè in presenza di attrito $(c) > 0$, siamo in grado di impostare un'equazione differenziale tenendo conto dell'attrito (c) appresso descritta:



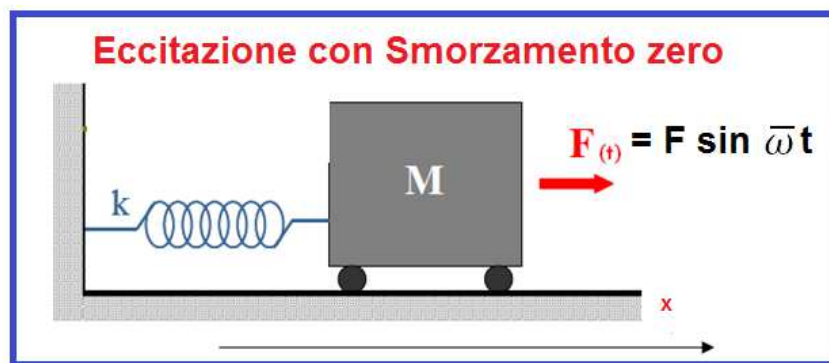
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$$

dalla quale si ricavano:

1. $\ddot{x}$ *accelerazione*
2. $\dot{x}$ *velocità*
3. x *spostamento*

$$\text{con } \ddot{x} = \frac{dx}{dt} \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

Invece, passando ad esaminare il modello con smorzamento zero ($c=0$) appresso riportato, passeremo a **CALCOLARE RISPOSTA GLOBALE DEL SISTEMA**:



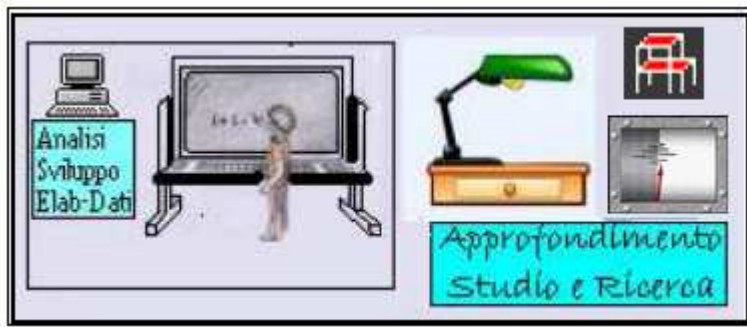
L'**equazione differenziale** alla base di tale modello con F ampiezza max al picco ed ωt frequenza della forzante in rad/sec è:

$$m\ddot{x} + kx = F(t) \quad (A)$$

Pertanto la soluzione a tale equazione è data dalla somma dell'integrale dell'omogenea associata più il termine dell'integrale particolare:

$$x(t) = x_o(t) + x_p(t)$$

Calcoliamo $x_o(t)$:



la soluzione è :

$$x_0(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

dove

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Adesso, nel merito dello studio dell'integrale di Duhamel, riprendendo l'equazione differenziale del moto dell'oscillatore pari a :

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$$

Dove x_0 e v_0 sono spostamento e velocità iniziale del moto e conoscendo

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \rightarrow \text{che è la frequenza naturale del sistema.}$$

Nelle condizioni iniziali quando agisce l'impulso $F(t) dt$ sul sistema, il sistema stesso, avrà

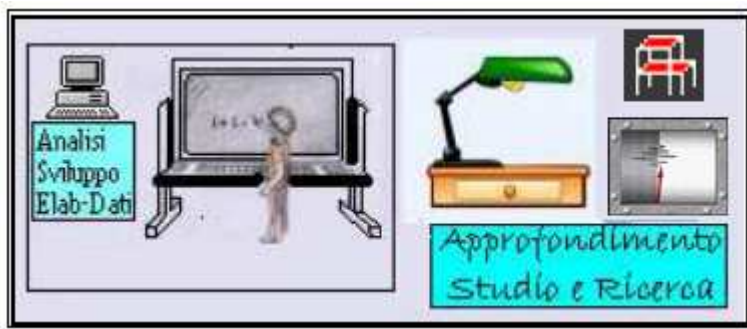
un cambio di velocità pari a $\rightarrow dv = \frac{F(t)}{m} dt$

Questa variazione di velocità introdotta nell'equazione differenziale del moto come velocità iniziale v_0 unitamente allo spostamento $x_0 = 0$ al tempo t , produce uno spostamento al tempo τ pari a :

$$x = x_0 \cancel{\cos \omega t} + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$$

Per cui passando all'operazione di derivata si ha $\rightarrow$

$$\frac{dx}{dt} = d\left(\frac{v_0}{\omega} \sin \omega t\right)$$



$$dx(t) = \frac{F(t)dt}{m\omega} \text{sen}(\omega t - \tau)$$

Integrando si ha che lo spostamento totale al tempo t dovuto all'accelerazione $F(t)$ è dato da :

$$x(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t F(\tau) \text{sen} \omega(t - \tau) d\tau$$

che è l'integrale di Duhamel.

Adesso dalla trigonometria sappiamo che $\rightarrow$

$$\text{sen} \omega(t - \tau) = \text{sen} \omega t \cos \omega \tau - \cos \omega t \text{sen} \omega \tau$$

Per cui

$$x(t) = \text{sen} \omega t \frac{1}{m\omega} \int_0^t F(\tau) \cos \omega \tau d\tau - \cos \omega t \frac{1}{m\omega} \int_0^t F(\tau) \text{sen} \omega \tau d\tau$$

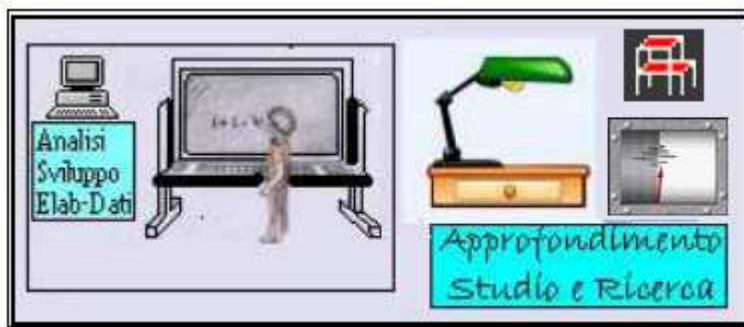
$$x(t) = \text{sen} \omega t \underbrace{\frac{1}{m\omega} \int_0^t F(\tau) \cos \omega \tau d\tau}_{A(t)} - \cos \omega t \underbrace{\frac{1}{m\omega} \int_0^t F(\tau) \text{sen} \omega \tau d\tau}_{B(t)}$$

Posto $\rightarrow$

$$A(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t F(\tau) \cos \omega \tau d\tau$$

$$B(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t F(\tau) \text{sen} \omega \tau d\tau$$

la precedente relazione diventa $\rightarrow$

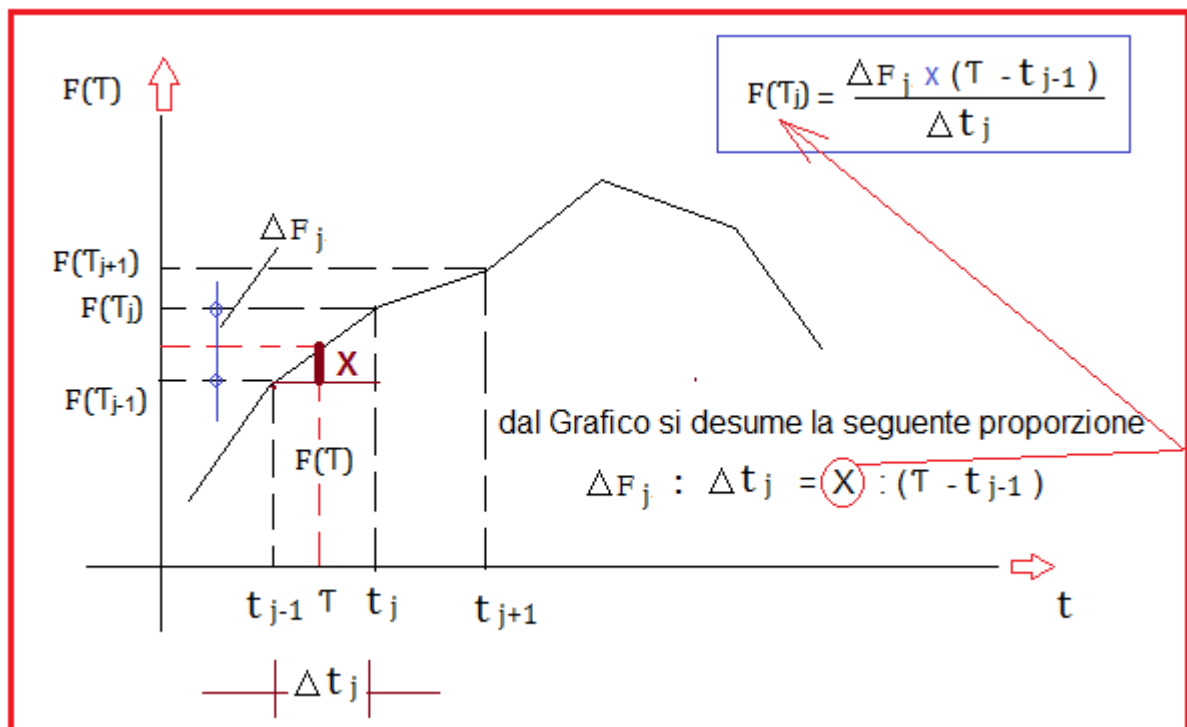


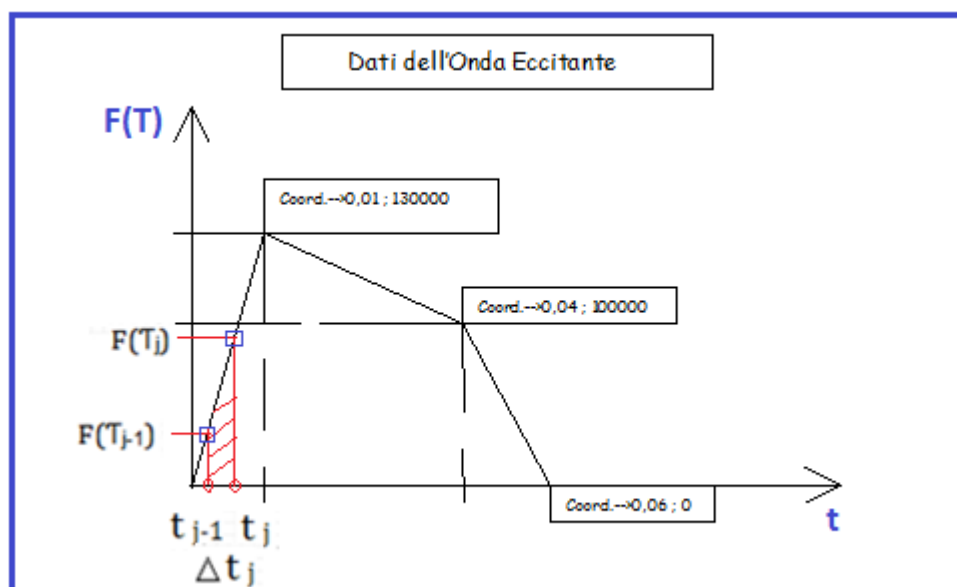
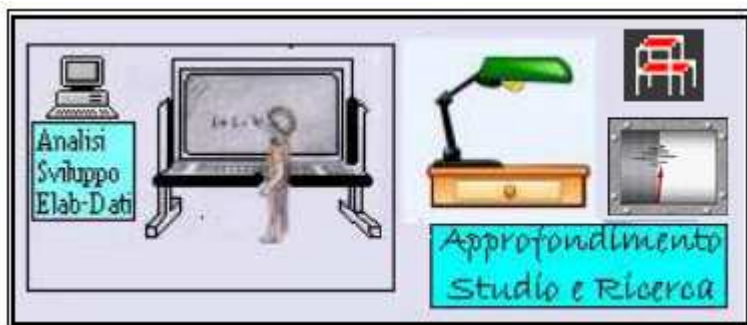
$$x(t) = \frac{A(t) \sin \omega t - B(t) \cos \omega t}{m \omega}$$

Dove $\rightarrow$ **A(t)** rappresenta l'integrale in termini di **cos(t)**

B(t) rappresenta l'integrale in termini di **sen(t)**

E gli stessi **A(t)** e **B(t)** possono essere risolti con la regola di Simpson oppure posso considerare la **F(t)** applicata come tanti tratti lineari su cui faccio le operazioni numeriche di integrazioni, così come è stato illustrato sopra (**Forzante a tratti lineari**) e che appresso si riporta di nuovo per prontezza e comodità di lettura dell'argomento.





Per cui, in funzione di quanto innanzi rappresentato, l'andamento globale della $F(t)$ la posso esprimere comodamente come appresso rappresentato:

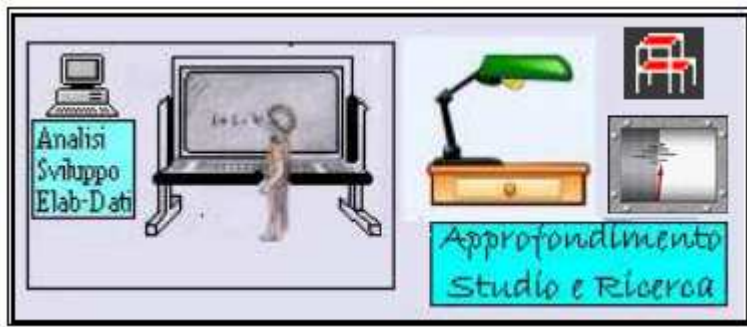
$$A(t_i) = A(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} F(\tau) \cos \omega \tau d\tau$$

$$A(t_i) = A(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} F(\tau) \sin \omega \tau d\tau$$

Nel merito se guardo la $F(t)$ come una funzione a tratti lineari, conseguentemente, e così come meglio si può ricavare dal grafico stesso, si ricava il valore $F(\zeta)$ dato:

$$F(\zeta) = F(T_{j-1}) + F(T_j) = F(T_{j-1}) + \frac{\Delta F_j}{\Delta t_j} \times (\zeta - t_{j-1}) \quad \text{con} \quad t_{j-1} \leq \tau \leq t_j$$

Per cui $\Delta F_i = F(t_i) - F(t_{i-1})$ e $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$



Se il sistema è smorzato allora basta inserire all'equazione del differenziale innanzi calcolata il parametro di smorzamento pari a $\rightarrow$

$$e^{-\xi\omega(t-\tau)}$$

Ed avremo il nuovo differenziale pari a :

$$dx(t) = e^{-\xi\omega(t-\tau)} \frac{F(\tau)d\tau}{m\omega_d} \text{sen}\omega_d(t-\tau)$$

Che rappresenta la risposta del sistema nelle condizioni di smorzamento per cui l'integrale di Duhamel diventerà :

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t F(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \text{sen}\omega_d(t-\tau) d\tau$$

Sviluppando il

$$\text{sen}\omega_d(t-\tau)$$

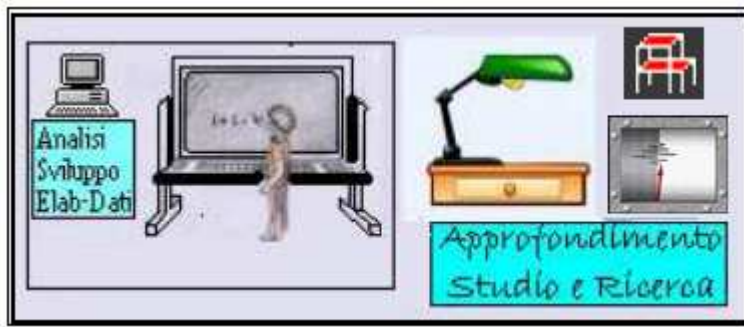
Dal punto di vista trigonometrico, anche in questo caso avremo le stesse formule di prima, con la differenza che stavolta comparirà il termine esponenziale come appresso descritto:

$$x(t) = [A_d(t) \text{sen}\omega_d t - A_d(t) \cos \omega_d t] \frac{e^{-\xi\omega t}}{m\omega_d}$$

Dove ω_d è la frequenza smorzata del sistema ed è pari a

$$\omega_d = \omega \sqrt{1 - \xi^2}$$

$$\text{dove } \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad \text{e} \quad \xi = \frac{c}{c_{crit}}$$



Dove $c_{crit} = 2 m \times \omega$ è lo smorzamento critico ovvero quel valore tale per cui se $c \geq c_{crit}$ e $\xi \geq 1$ la struttura eccitata, torna al suo stato di equilibrio iniziale senza oscillazioni ;

Se $c \leq c_{crit}$ e $\xi < 1$ la struttura oscilla con ampiezze decrescenti avendo

$$\omega_d = \omega \sqrt{1 - \xi^2}$$

ed il periodo proprio sarà pari a $\rightarrow$

$$Td = \frac{T}{\sqrt{1 - \xi^2}}$$

Ed $Ad(t_i)$ ed $Bd(t_i)$ valgono:

$$Ad(t_i) = Ad(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} F(\tau) e^{\xi \omega \tau} \cos \omega_d \tau d\tau$$

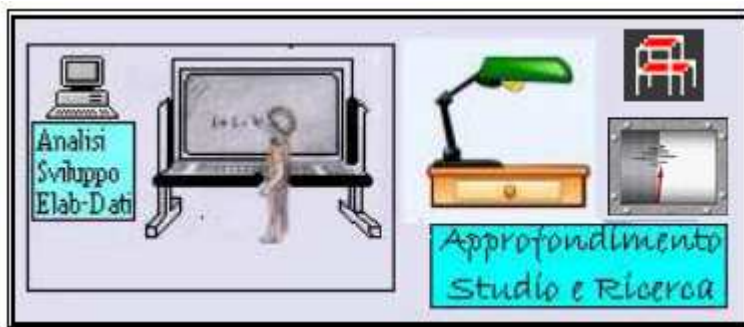
$$Bd(t_i) = Bd(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} F(\tau) e^{\xi \omega \tau} \sin \omega_d \tau d\tau$$

Adesso sostituendo $\rightarrow F(\tau) = F(t_{i-1}) + \frac{\Delta F_i}{\Delta t_i} (\tau - t_{i-1})$

Si otterrà:

$$Ad(t_i) = Ad(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left[F(t_{i-1}) + \frac{\Delta F_i}{\Delta t_i} (\tau - t_{i-1}) \right] e^{\xi \omega \tau} \cos \omega_d \tau d\tau$$

$$Bd(t_i) = Bd(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left[F(t_{i-1}) + \frac{\Delta F_i}{\Delta t_i} (\tau - t_{i-1}) \right] e^{\xi \omega \tau} \sin \omega_d \tau d\tau$$



Adesso, sviluppando i predetti integrali **Ad(ti) e Bd(ti)** per la funzione a tratti lineari, meglio ancora descritti e riportati nel libro del prof. Mario Paz, a pagina 79 formule (4.26 e 4.27), ed inoltre, **sostituendo il valore calcolato di $F(\tau)$ nelle relazioni innanzi descritte** si richiederà la valutazione dei seguenti integrali **I_1, I_2, I_3 ed I_4** , così come meglio appresso riportati ed ancora di più, **commentati e descritti a pag. 79 Formule (4.28, 4.29, 4.30, 4.31) della pubblicazione del libro di Dinamica Strutturale del prof. Mario Paz professore di ingegneria civile Università di Louisville-Casa Editrice Dario Flaccovio.**

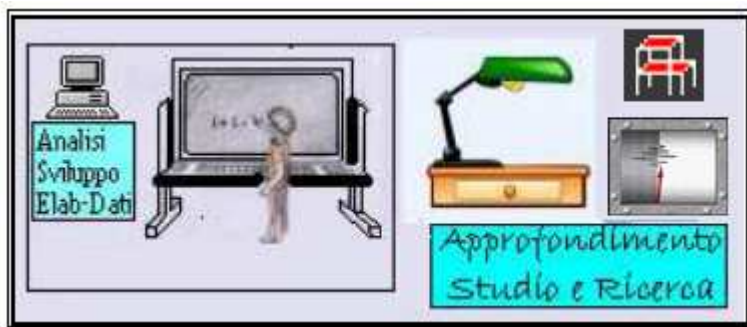
Segue il Riporto dei Valori $\rightarrow I_1, I_2, I_3, I_4$

$$I_1 = \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{\xi\omega\tau} \cos \omega_d \tau d\tau = \left[\frac{e^{\xi\omega\tau}}{(\xi\omega)^2 + \omega_d^2} (\xi\omega \cos \omega_d \tau + \omega_d \sin \omega_d \tau) \right]_{t_{i-1}}^{t_i}$$

$$I_2 = \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{\xi\omega\tau} \sin \omega_d \tau d\tau = \left[\frac{e^{\xi\omega\tau}}{(\xi\omega)^2 + \omega_d^2} (\xi\omega \sin \omega_d \tau - \omega_d \cos \omega_d \tau) \right]_{t_{i-1}}^{t_i}$$

$$I_3 = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \tau e^{\xi\omega\tau} \sin \omega_d \tau d\tau = \left[\tau - \frac{\xi\omega}{(\xi\omega)^2 + \omega_d^2} (I_2) + \frac{\omega_d}{(\xi\omega)^2 + \omega_d^2} (I_1) \right]_{t_{i-1}}^{t_i}$$

$$I_4 = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \tau e^{\xi\omega\tau} \cos \omega_d \tau d\tau = \left[\tau - \frac{\xi\omega}{(\xi\omega)^2 + \omega_d^2} (I_1) - \frac{\omega_d}{(\xi\omega)^2 + \omega_d^2} (I_2) \right]_{t_{i-1}}^{t_i}$$



Sviluppando il tutto alla fine avremo che i termini **Aa(ti)** ed **Ba(ti)** saranno pari a →

$$A d (ti) = A d (ti - 1) + \left[F (ti-1) - ti - 1 \frac{\Delta Fi}{\Delta ti} \right] I_1 + \frac{\Delta Fi}{\Delta ti} I_4$$

$$B d (ti) = B d (ti - 1) + \left[F (ti-1) - ti - 1 \frac{\Delta Fi}{\Delta ti} \right] I_2 + \frac{\Delta Fi}{\Delta ti} I_3$$

Per cui x(ti) sarà →

$$x(ti) = \frac{e^{-\xi \omega ti}}{m \omega d} \left[A d (ti) \sin \omega ti - B d (ti) \cos \omega ti \right]$$

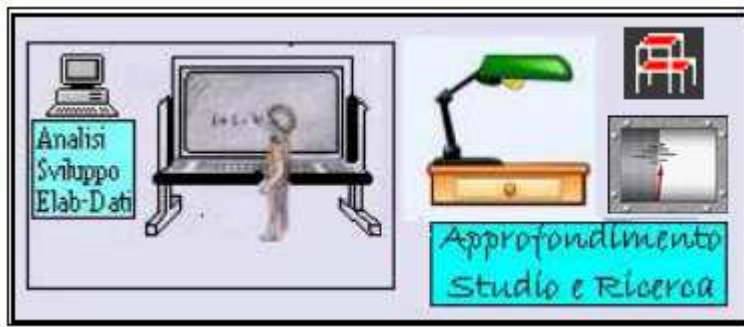
che ci permette di calcolare lo spostamento del sistema istante per istante oltre al calcolo della velocità ed accelerazione del sistema, operando con derivata prima e seconda.

N.B. → (Per le formule sopra descritte e riportate, si è fatto riferimento al libro *Dinamica Strutturale Teoria & Calcolo* a cura di Mario Paz *Dinamica Strutturale Teoria* a cura della casa editrice Libreria DF Dario Flaccovio.

Nel merito, e procedendo sulla scorta di quanto sopra espresso, passo al calcolo della velocità del sistema operando a mezzo la derivata dello spostamento x(t) appresso meglio descritta e riportata:

Calcolo della Velocità

$$\dot{x} = \frac{dx(t)}{dt}$$



Tenuto conto che $Adc(ti)$ e $Ads(ti)$ sono stati già calcolati precedentemente, si passa al calcolo della velocità del sistema che, può essere risolta con la regola della derivata composta appresso rappresentata:

$$\dot{x} = \frac{d(f(t)*g(t))}{dt} = f(t) * \frac{dg(t)}{dt} + g(t) * \frac{df(t)}{dt}$$

$$f(t) = k * \sin(\omega_d * t) - w * \cos(\omega_d * t) \quad \text{e} \quad g(t) = e^{-\xi \omega_d * t}$$

dove $k = I \cos$ e $w = I \sin \rightarrow$ per la funzione in esame sono stati già calcolati.

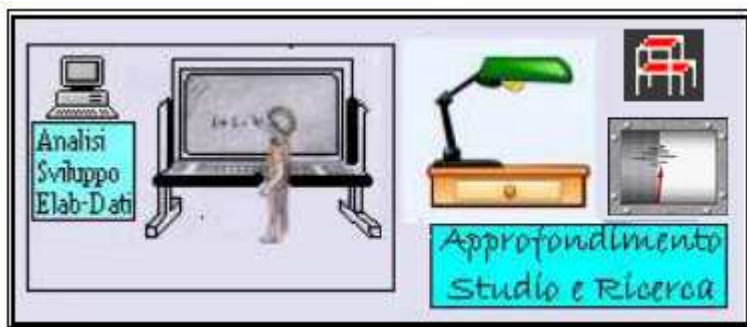
Facendo lo sviluppo del calcolo numerico e poi sommando i termini simili in seno e coseno si ottiene che la formula finale della velocità è pari a:

$$v = \frac{e^{-\xi \omega_d t}}{m \omega_d} \left[(\omega_d * w - \xi \omega_d k) \sin \omega_d t + (\omega_d * k + \xi \omega_d w) \cos \omega_d t \right]$$

$$v = \frac{e^{-\xi \omega_d t}}{m \omega_d} \left[\begin{array}{l} \text{1° termine in seno} \\ (\omega_d * w - \xi \omega_d k) \sin \omega_d t \end{array} + \begin{array}{l} \text{2° termine in coseno} \\ (\omega_d * k + \xi \omega_d w) \cos \omega_d t \end{array} \right]$$

Ovviamente i valori numerici di $k = I \cos$ e $w = I \sin$ sono ciclati all'interno dei vari giri di calcolo relativi alla funzione $F(t)$ in esame. Essi, infatti, ad ogni giro di calcolo relativo all'incremento j -iesimo di tempo sul dominio, vanno depositati numericamente e poi sommati al valore nuovo che si ottiene dal nuovo incremento di tempo successivo, il tutto, così come meglio descritto e rappresentato nello sviluppo di calcolo numerico, appresso riportato. *Insomma i valori k e w tengono conto della storia prima e dopo della funzione $f(t)$ (before and after history of the mathematical function)* e cioè $k_{(i+1)} = k_{(i-1)} + k_{(i)}$ dove :

$k_{(i+1)}$ valore ciclo successivo ; $k_{(i-1)}$ valore ciclo precedente ; $k_{(i)}$ valore ciclo in esame.



Calcolo Accelerazione

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$$

$$a = [F(t) - c * v - k * x(t)] / M$$

dove :

$F(t)$ = forzamento della funzione ; $c = c_{crit} * \xi$ -> smorzamento ; v = velocità del sistema

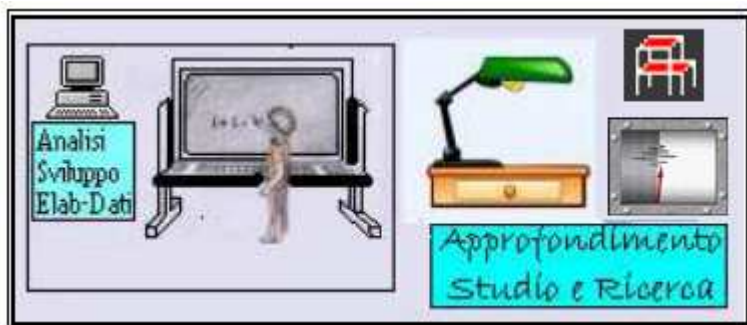
k = rigidezza; $x(t)$ spostamento; M = massa

Adesso sulla scorta di quanto innanzi rappresentato, ed anche al fine di dare a lavoro un senso numerico a quanto matematicamente descritto ed a cui l'ingegnere non può sottrarsi, alla presente, viene allegato **un calcolo esemplificativo da amanuense svolto su un'onda sismica a tratti lineari proposta dallo scrivente, al solo scopo di valutare con il metodo numerico dell'integrale di Duhamel, lo spostamento, la velocità, l'accelerazione e la forza applicata al sistema SDOF, in funzione della forza impulsiva eccitante.** Si precisa che essendo un esempio numerico, nel calcolo, vengono omesse le unità di misura delle grandezze in gioco, cosa fattibile tenuto conto, che qualora si voglia tener conto delle rispettive unità di misura, le stesse, possono essere comunque inserite.

Infine è doveroso precisare che durante la stesura della mia elaborazione numerica a mano, è stato di notevole aiuto e di grande riferimento, l'algoritmo di calcolo riportato nel programma software scritto in linguaggio Basic-Apple-Soft per macchina Apple II Plus, meglio descritto e riportato nel "(Programma. n.01 a pagina 522)", contenuto nello stesso testo di "Dinamica Strutturale" del prof. Mario Paz Libreria DF Dario Flaccovio Editrice.



SEGUE ESEMPIO NUMERICO



ESEMPIO DI

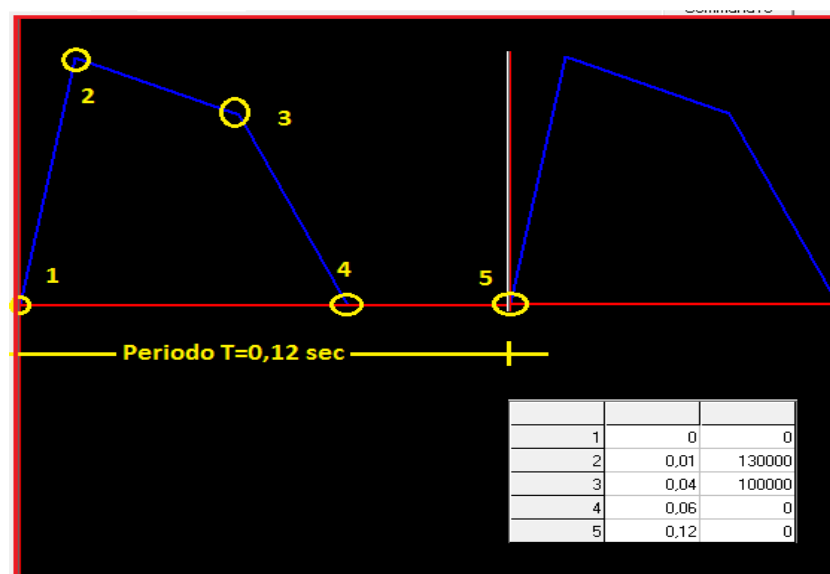
ANALISI, SVILUPPO E CALCOLO NUMERICO DI UN'ONDA SISMICA APPLICATA ALLA BASE
DI UN SISTEMA SDOF CON RESTITUZIONE DEI RISULTATI DI CALCOLO INERENTI:

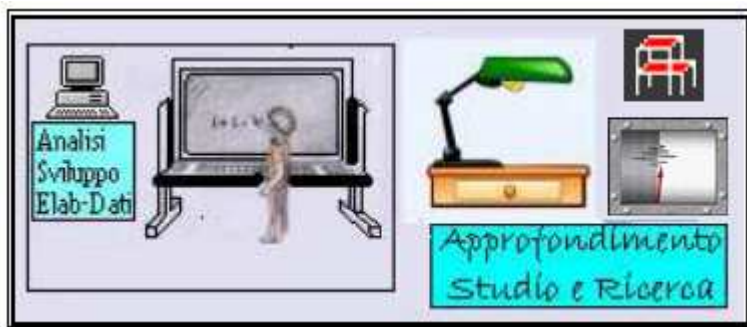
→PARAMETRI NUMERICI SPOSTAMENTO, VELOCITA , ACCELERAZIONE E
FORZA APPLICATA AL SISTEMA.

ONDA SISMICA APPLICATA ALLA BASE



COORDINATE DEI PUNTI DI ECCITAZIONE SISMICA





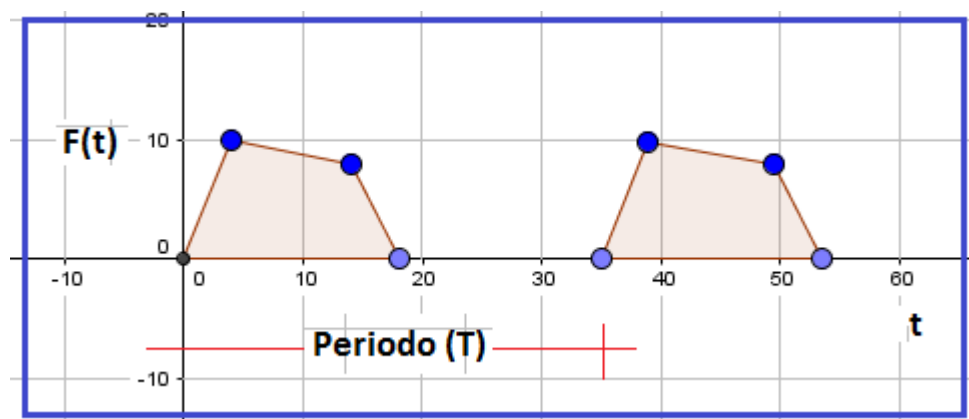
DATI DEL PROBLEMA:

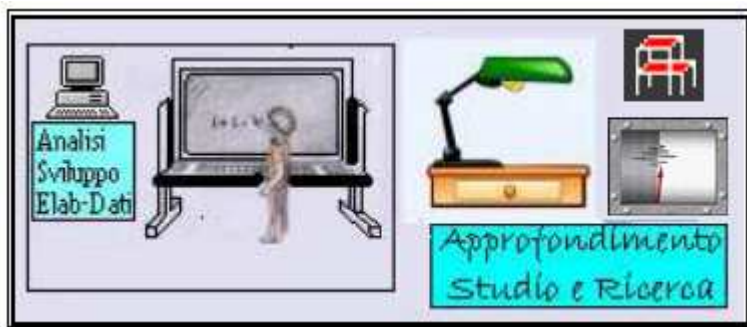
PUNTI DI ECCITAZIONE DELL'ONDA $\rightarrow 5$ PERIODO DI ECCITAZIONE $\rightarrow 0,12$

INTERVALLO INCREMENTALE $\rightarrow 0,005$

MASSA $\rightarrow 100$ COSTANTE K DELLA MOLLA $\rightarrow 100000$ SMORZAMENTO $\rightarrow 0,05$

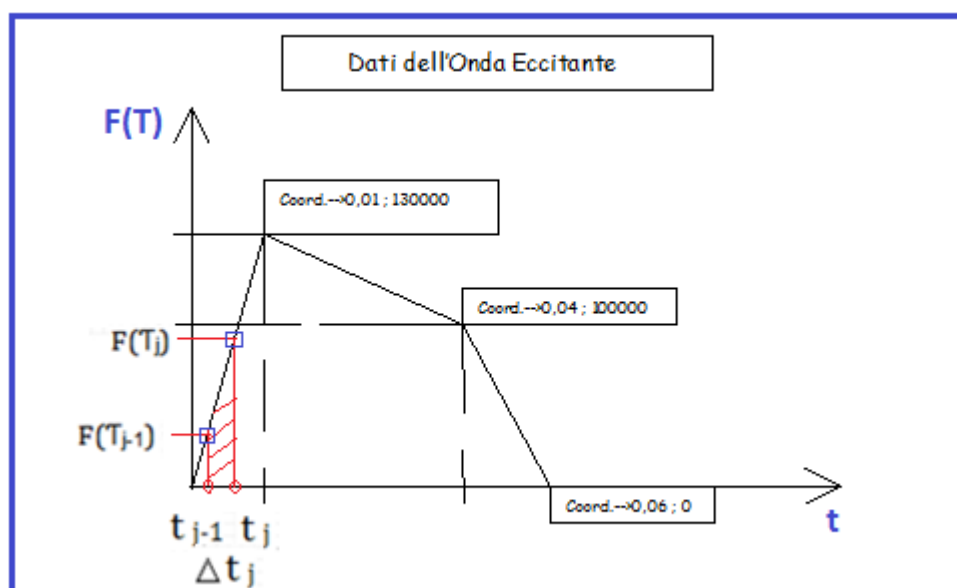
STUDIO DEL DOMINIO DELLA FUNZIONE



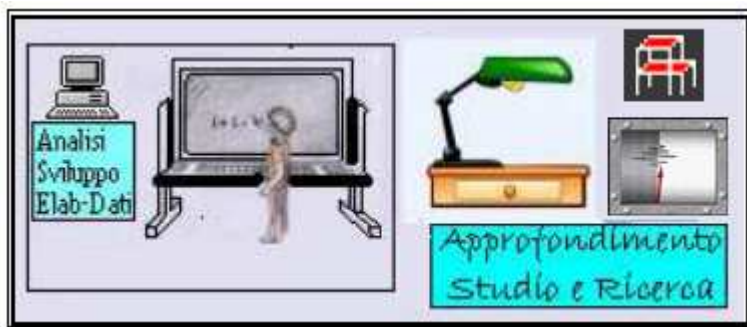


Adesso mi propongo di calcolare all'istante $t=0,005$, primo passo incrementale della funzione impulsiva, la storia dinamica del sistema individuata nel punto P di coordinate(0,005,65000) che provvedo a calcolare.

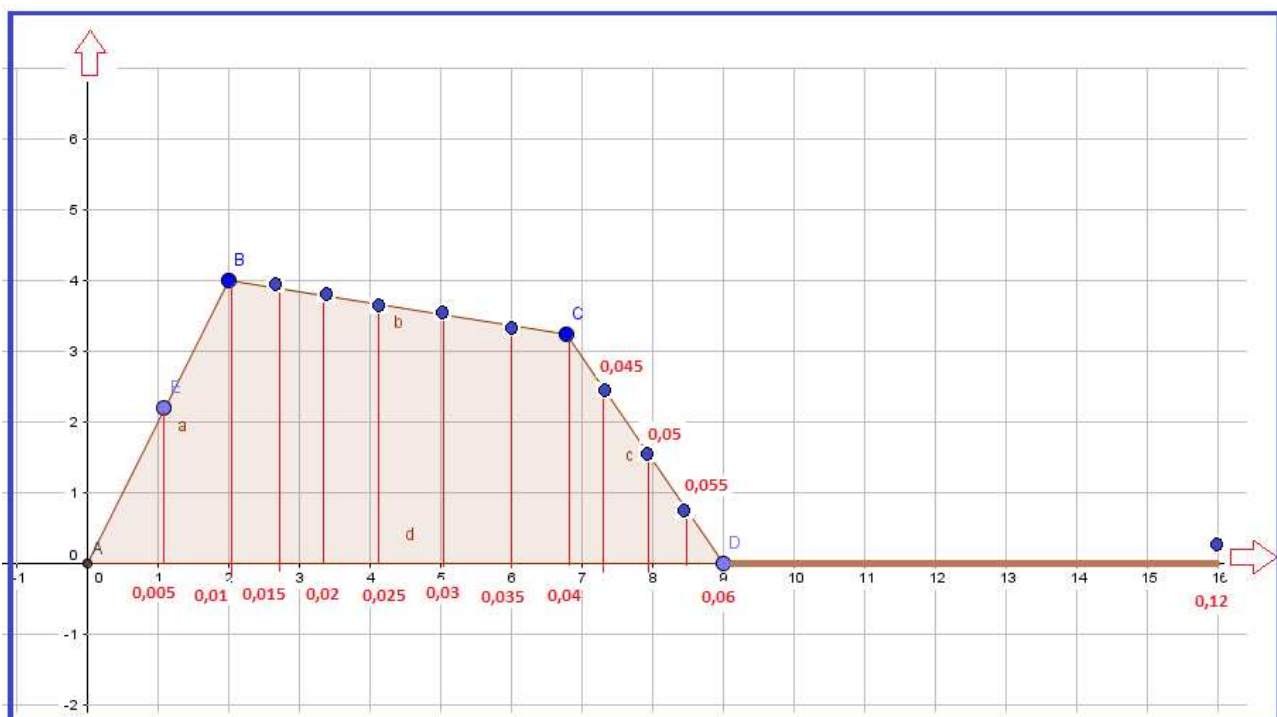
Va da sé che per tutti gli altri punti che si susseguono funzionalmente con passo incrementale pari a 0,005, le operazioni numeriche sono identiche e pertanto, al fine di eliminare trascrizioni ripetitive, tranne per la prima e seconda operazione trascritte a titolo dimostrativo, le restanti, vengono appresso riportate sinteticamente con i rispettivi valori numerici ricavati e descritti come risultati finali.



$$F(\tau) = F(t_{j-1}) + F(t_j) = F(t_{j-1}) + \frac{\Delta F_j}{\Delta t_j} \times (\tau - t_{j-1}) \quad \text{con} \quad t_{j-1} \leq \tau \leq t_j$$



COORDINATE DELLA FUNZIONE

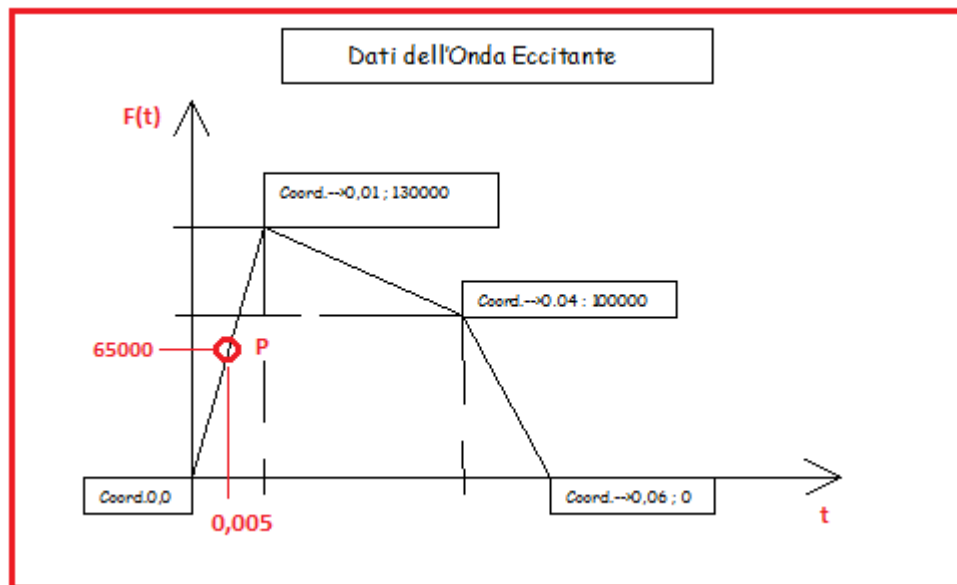
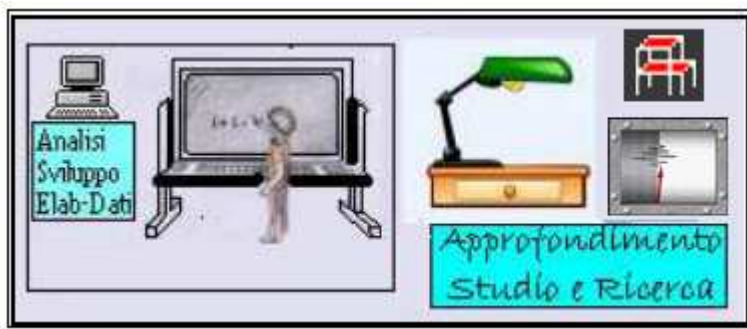


Incominciamo a fare il calcolo numerico partendo dalla soluzione banale e cioè mettendoci nel punto origine di coordinate (0,0), dal quale avremo:

➔ Soluzione banale

$$T(1)=0$$

$$F(1)=0$$



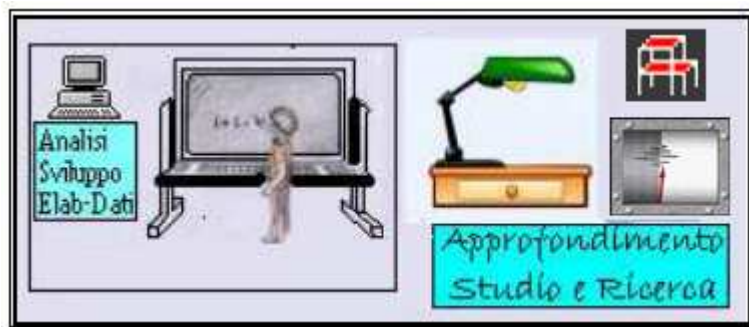
Poi, passiamo a calcolo numerico del punto **P**, e ricaveremo il valore di $F(\tau)$, in corrispondenza dell'incremento temporale pari a **0,005**, il tutto, calcolato a mezzo della formula già ricavata dal diagramma funzionale a tratti lineari sopra indicata, e che appresso viene di nuovo indicata per comodità di lettura:

$$X(T)=F(\tau)=F(T_{j-1})+F(T_j)=F(T_{j-1})+\frac{\Delta F_j}{\Delta t_j} \times (\tau - t_{j-1}) \quad \text{con} \quad t_{j-1} \leq \tau \leq t_j$$

Nel merito del 1° calcolo avremo i seguenti dati:

$T_2 = 0,01$ $F(T_2) = 130000$ **→ Punto sul Grafico di Coordinate (0,01;130000)**
 (Passo Incremento Tempo)=0,005
 $T_{2-1} = 0$ $F(T_{2-1}) = 0$
 $X(T)=F(\tau) = (0) + ((130000-0) \times 0,005)/0,01 = 6500 / 0,01 = 65000$ **Ok!!!!!!**

Nel merito del 2° calcolo avremo i seguenti dati:



Trattazione dei punti in diagramma innanzi rappresentato come B e C le cui coordinate sono:

$F(B) = 130000 \rightarrow$ Valore di calcolo iniziale

$F(C) = 100000 \rightarrow$ Valore di calcolo finale

Passo Incremento Tempo = 0,005

$T(B) = 0,01 \rightarrow$ Valore di calcolo iniziale

$T(C) \rightarrow 0,04 \rightarrow$ Valore di calcolo finale

$$F(C) = F(T_{j-1}) + F(T_j) = F(T_{j-1}) + \frac{\Delta F_j}{\Delta t_j} \times (C - t_{j-1})$$

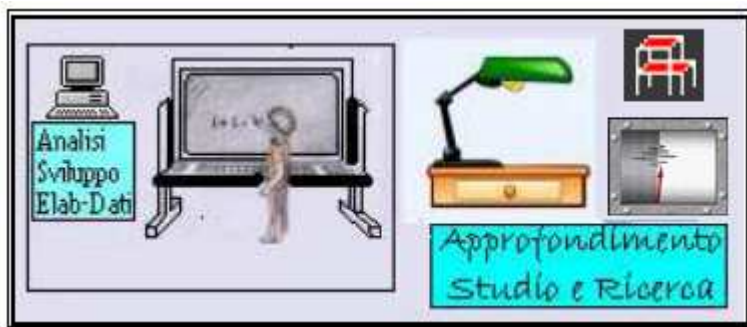
$$X(T) = F(C) = (130000) + ((100000 - 130000) \times 0.005) / (0.03) = 130000 - 5000 = 125000 \text{ Ok!!!!!!}$$

Così come innanzi premesso, appresso, e per tutti gli altri punti che si susseguono funzionalmente con passo incrementale pari a 0,005, le operazioni numeriche essendo identiche, vengono appresso riportate sinteticamente con i rispettivi valori numerici ricavati e descritti come risultati finali, il tutto al fine di evitare trascrizioni ripetitive.

Risultati finali relativi alle Forze impulsive del sistema

$F(5) = 120000$	$T(5) = 0,02$	$F(6) = 115000$	$T(6) = 0,025$	$F(7) = 110000$	$T(7) = 0,03$
$F(8) = 105000$	$T(8) = 0,035$	$F(9) = 100000$	$T(9) = 0,04$	$F(10) = 75000$	$T(10) = 0,045$
$F(11) = 50000$	$T(11) = 0,05$	$F(12) = 25000$	$T(12) = 0,055$	$F(13) = -1,455E-11$	$T(13) = 0,06$
$F(14) = 0$	$T(14) = 0,065$	$F(15) = 0$	$T(15) = 0,070$	$F(16) = 0$	$T(16) = 0,075$
$F(17) = 0$	$T(17) = 0,08$	$F(18) = 0$	$T(18) = 0,085$	$F(19) = 0$	$T(19) = 0,09$
$F(20) = 0$	$T(20) = 0,095$	$F(21) = 0$	$T(21) = 0,1$	$F(22) = 0$	$T(22) = 0,105$
$F(23) = 0$	$T(23) = 0,11$	$F(24) = 0$	$T(24) = 0,115$	$F(25) = 0$	$T(25) = 0,12$

Nel merito, al fine di dare un calcolo numerico come esempio semplice, lineare ed efficace alla problematica in esame, basta risolvere l'integrale appresso descritto, sostituendo all'interno



della variabile (τ) i rispettivi valori di (T_i) e (T_{i-1}), e di conseguenza, calcolando l'intera espressione integranda pezzo per pezzo, si vanno a ricavare i rispettivi valori numerici relativi agli Integrali $I_j(T_i)$ e $I_j(T_1)$, così come appresso rappresentato e riportato:

1° punto di Eccitazione Punto P(0,005 ; 65000):

Algoritmo operativo relativo all'Integrale I_1

$$I_1 = \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{\xi\omega\tau} \cos \omega\tau d\tau = \left[\frac{e^{\xi\omega\tau}}{(\xi\omega)^2 + \omega d^2} (\xi\omega \cos \omega\tau + \omega \sin \omega\tau) \right]_{t_{i-1}}^{t_i}$$



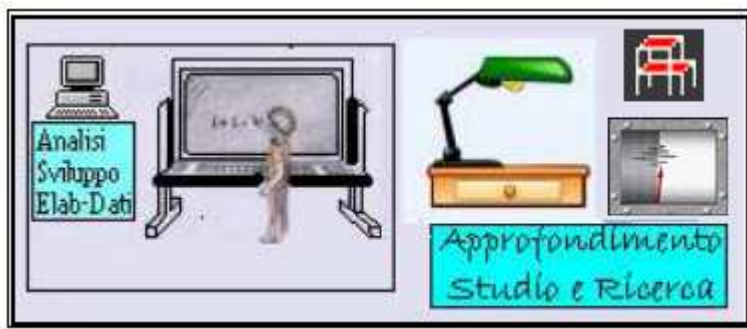
$$I_1(T_i) = \frac{e^{\xi\omega T_i} (\xi\omega \cos(\omega T_i) + \omega \sin(\omega T_i))}{(\xi\omega)^2 + \omega d^2}$$



$$I_1(T_1) = \frac{e^{\xi\omega T_1} (\xi\omega \cos(\omega T_1) + \omega \sin(\omega T_1))}{(\xi\omega)^2 + \omega d^2}$$



$$\Delta I_1 = I_1(T_i) - I_1(T_1)$$



Calcolo Numerico step by step and piece by piece dell'espressione Integranda $\rightarrow I_1(T_i)$ e $I_1(T_1) \rightarrow$

Ricordandoci che $\rightarrow$

ω_d è la frequenza smorzata del sistema ed è pari a

$$\omega_d = \omega \sqrt{1 - \xi^2}$$

$$\text{dove } \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad \text{e} \quad \xi = \frac{c}{c_{crit}}$$

Dove $c_{crit} = 2 m \times \omega$ è lo smorzamento critico ovvero quel valore tale per cui se

$c \geq c_{crit}$ e $\xi \geq 1$ la struttura eccitata, torna al suo stato di equilibrio iniziale senza oscillazioni ;

Se $c \leq c_{crit}$ e $\xi < 1$ la struttura oscilla con ampiezze decrescenti avendo

$$\omega_d = \omega \sqrt{1 - \xi^2}$$

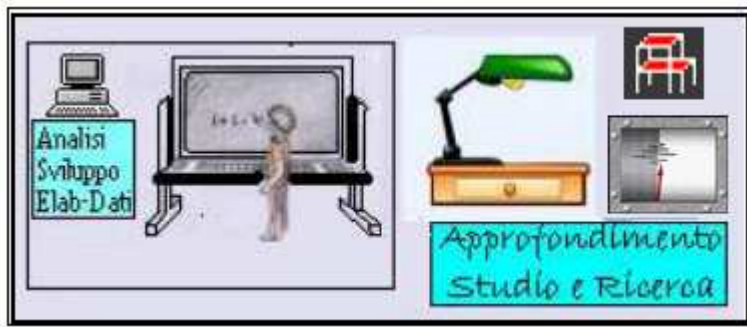
ed il periodo proprio sarà pari a $\rightarrow$

$$Td = \frac{T}{\sqrt{1 - \xi^2}}$$

Procediamo nel calcolo Numerico che appresso viene descritto:



Calcolo dell'Integrale $I_1(T_i) \rightarrow$



Nel punto O Origine degli assi il valore della Forza in funzione del tempo è pari a:

$$F(0) = 0$$

$$T(0) = 0$$

Nel punto P il valore della Forza in funzione del tempo è pari a:

$$F(P) = 65000$$

$$T(P) = 0,005 \text{ passo incrementale}$$

I rispettivi salti sono:

$$\Delta F = 65000 \text{ e } \Delta T = 0,005$$

$\xi = 0,05$ $\omega_d = 31,5832233947075$ per cui il prodotto

$$\rightarrow (\xi * \omega) = 1,58113883008419$$

$$T(P) = T_I = 0,005 \text{ avremo } \rightarrow (\xi * \omega_d * T_I) = 7,90569415042095E-03$$

$$e^{(\xi * \omega_d * T_I)} = 1,00793702666442$$

$$\cos(\omega_d * T_I) = 0,987557140091648$$

$$((\xi * \omega_d) * \cos(\omega_d * T_I)) = 1,5614649411258$$

$$\omega_d * \sin(\omega_d * T_I) = 4,96679653462579$$

$$(\xi * \omega)^2 + (\omega_d)^2 = 1000$$

$$\rightarrow I_1(T_i) = 6,58007646115693E-03$$

Calcolo dell'Integrale $I_1(T_1)$ -->

Valori di Calcolo di $I_1(T_1)$ -->

$\xi = 0,05$ $\omega_d = 31,5832233947075$ per cui il prodotto

$$\rightarrow (\xi * \omega) = 1,58113883008419$$

Essendo $T_1 = 0$ si avrà

$$T(0) = T_1 = 0 \text{ avremo } \rightarrow (\xi * \omega_d * T_1) = 0$$

$$e^{(\xi * \omega_d * T_1)} = 1,00$$

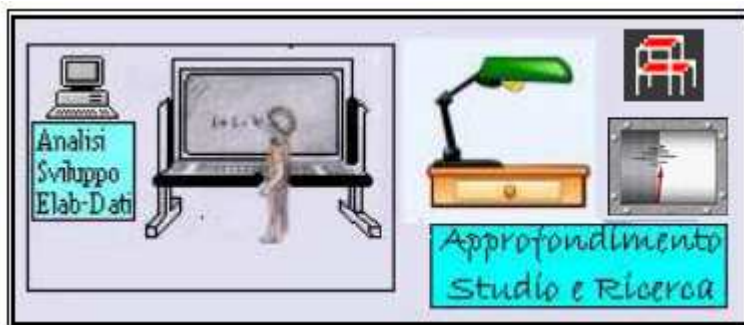
$$((\xi * \omega_d) * \cos(\omega_d * T_1)) = 1,58113883008419$$

$$\omega_d * \sin(\omega_d * T_1) = 0,00$$

$$(\xi * \omega)^2 + (\omega_d)^2 = 1000$$

$$\rightarrow I_1(T_1) = 1,58113883008419E-03$$

$$\rightarrow \Delta I_1 = I_1(T_I) - I_1(T_1) \rightarrow 4,99893763107274E-03$$



Algoritmo operativo relativo all'Integrale I_2

$$I_2 = \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{\xi\omega\tau} \sin\omega_d\tau d\tau = \left[\frac{e^{\xi\omega\tau}}{(\xi\omega)^2 + \omega_d^2} (\xi\omega \sin\omega_d\tau - \omega_d \cos\omega_d\tau) \right]_{t_{i-1}}^{t_i}$$



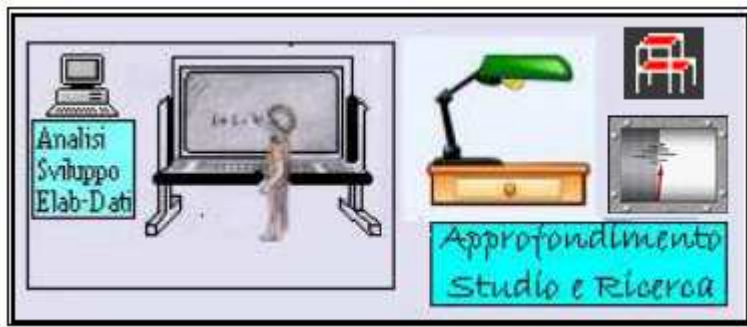
$$I_2(T_i) = \frac{e^{\xi\omega T_i} (\xi\omega \sin(\omega_d T_i) - \omega_d \cos(\omega_d T_i))}{(\xi\omega)^2 + \omega_d^2}$$



$$I_2(T_1) = \frac{e^{\xi\omega T_1} (\xi\omega \sin(\omega_d T_1) - \omega_d \cos(\omega_d T_1))}{(\xi\omega)^2 + \omega_d^2}$$



$$\Delta I_2 = I_2(T_i) - I_2(T_1)$$



**Calcolo Numerico step by step and piece by piece
dell'espressione Integranda $\rightarrow I_2(T_i)$ e $I_2(T_1) \rightarrow$**

Calcolo dell'Integrale $I_2(T_i) \rightarrow$

$\xi = 0,05$ $\omega_d = 31,5832233947075$ per cui il prodotto
 $\rightarrow (\xi * \omega) = 1,58113883008419$
 $T(P) = T_i = 0,005$ avremo $\rightarrow (\xi * \omega_d * T_i) = 7,90569415042095E-03$
 $e^{(\xi * \omega_d * T_i)} = 1,00793702666442$
 $\sin(\omega_d * T_i) = 0,157260595999143$
 $((\xi * \omega_d) * \sin(\omega_d * T_i)) = 0,248650834776428$
 $\omega_d * \cos(\omega_d * T_i) = 31,190237770553$
 $(\xi * \omega)^2 + (\omega_d)^2 = 1000$

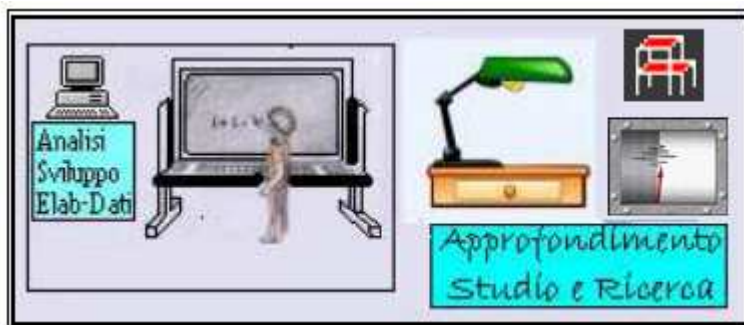
$\rightarrow I_2(T_i) = -3,11871711363253E-02$

Calcolo dell'Integrale $I_2(T_1) \rightarrow$

$\xi = 0,05$ $\omega_d = 31,5832233947075$ per cui il prodotto
 $\rightarrow (\xi * \omega) = 1,58113883008419$
 Essendo $T_1 = 0$ si avrà
 $T(0) = T_1 = 0$ avremo $\rightarrow (\xi * \omega_d * T_1) = 0$
 $e^{(\xi * \omega_d * T_i)} = 1,00$
 $((\xi * \omega_d) * \sin(\omega_d * T_1)) = 0,00$
 $\omega_d * \cos(\omega_d * T_1) = 31,5832233947075$
 $(\xi * \omega)^2 + (\omega_d)^2 = 1000$

$\rightarrow I_2(T_1) = -3,15832233947075E-02$

$\rightarrow \Delta I_2 = I_2(T_i) - I_2(T_1) \rightarrow 3,9605225838224E-04$



Algoritmo operativo relativo all'Integrale I_3

$$I_3 = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \tau e^{\xi\omega\tau} \sin\omega\tau d\tau = \left[\tau - \frac{\xi\omega}{(\xi\omega)^2 + \omega d^2} (I_2) + \frac{\omega d}{(\xi\omega)^2 + \omega d^2} (I_1) \right]_{t_{i-1}}^{t_i}$$



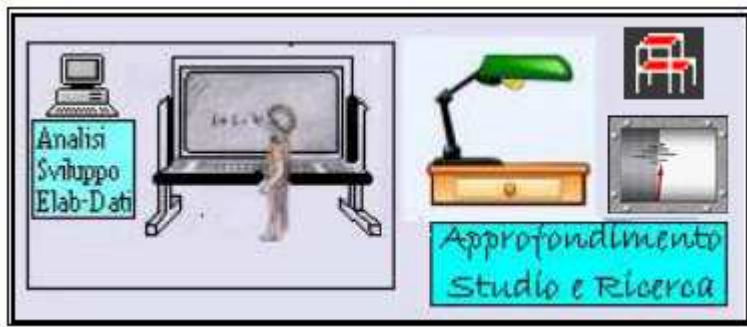
$$I_3(T_i) = \frac{(T_i) \times I_2(T_i) - \xi\omega \times I_2(T_i)}{(\xi\omega)^2 + \omega d^2} + \frac{\omega d}{(\xi\omega)^2 + \omega d^2} I_1(T_i)$$



$$I_3(T_1) = \frac{(T_1) \times I_2(T_1) - \xi\omega \times I_2(T_1)}{(\xi\omega)^2 + \omega d^2} + \frac{\omega d}{(\xi\omega)^2 + \omega d^2} I_1(T_1)$$



$$\Delta I_3 = I_3(T_i) - I_3(T_1)$$



Calcolo Numerico step by step and piece by piece dell'espressione Integranda $\rightarrow I_3(T_i)$ e $I_3(T_1) \rightarrow$

$$T_i = 0,005$$

$$I_2(T_i) = -3,15832233947075E-02$$

$$T_i * I_2(T_i) = -1,57916116973538E-04$$

$$\xi = 0,05 \quad \omega_d = 31,5832233947075 \text{ per cui il prodotto}$$

$$(\xi * \omega_d) * I_2(T_i) = -4,99374608885954E-02$$

$$(\xi * \omega)^2 + (\omega_d)^2 = 1000$$

$$I_1(T_i) = 1,58113883008419E-03$$

$$\omega_d * I_1(T_i) / ((\xi * \omega)^2 + (\omega_d)^2) = 4,99374608885954E-05$$

$$\rightarrow I_3(T_i) = -5,80411951963467E-05$$

Essendo $T_1 = 0$ si avrà

$$T(0) = T_1 = 0 \text{ avremo } \rightarrow (\xi * \omega_d * T_1) = 0$$

$$e^{(\xi * \omega_d * T_i)} = 1,00$$

$$I_2(T_1) = -3,15832233947075E-02$$

$$T_1 * I_2(T_1) = 0$$

$$\xi * \omega_d = 1,58113883008419$$

$$\xi * \omega_d * I_2(T_1) = -4,99374608885954E-02$$

$$T_1 * I_2(T_1) - \xi * \omega_d * I_2(T_1) = 4,99374608885954E-02$$

$$(\xi * \omega)^2 + (\omega_d)^2 = 1000$$

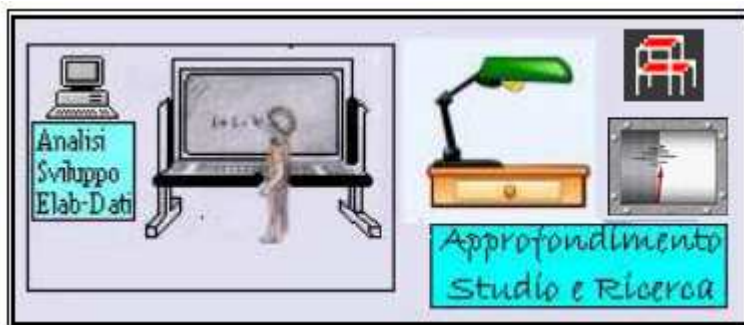
$$\omega_d = 31,5832233947075$$

$$I_1(T_1) = 1,58113883008419E-03 : ((\xi * \omega)^2 + (\omega_d)^2) = 1000$$

$$\omega_d * I_1(T_1) / ((\xi * \omega)^2 + (\omega_d)^2) = 4,99374608885954E-05$$

$$\rightarrow I_3(T_1) = 9,98749217771909E-05$$

$$\rightarrow \Delta I_3 = I_3(T_i) - I_3(T_1) \rightarrow -1,57916116973538E-04$$



Algoritmo operativo relativo all'Integrale I_4

$$I_4 = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \tau e^{\xi\omega\tau} \cos \omega d\tau = \left[\tau - \frac{\xi\omega}{(\xi\omega)^2 + \omega d^2} (I_1) - \frac{\omega d}{(\xi\omega)^2 + \omega d^2} (I_2) \right]_{t_{i-1}}^{t_i}$$



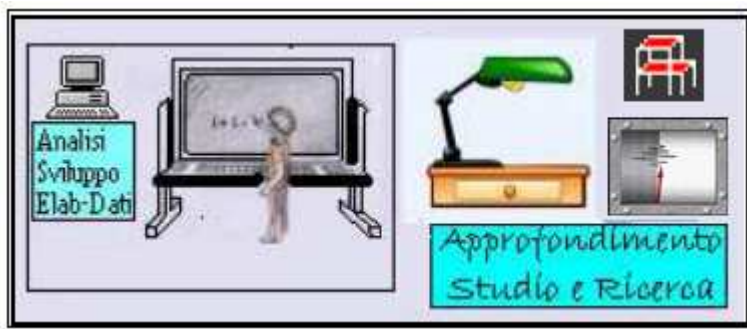
$$I_4(T_i) = \frac{(T_i) \times I_1(T_i) - \xi\omega \times I_1(T_i)}{(\xi\omega)^2 + \omega d^2} + \frac{\omega d}{(\xi\omega)^2 + \omega d^2} I_2(T_i)$$



$$I_4(T_1) = \frac{(T_1) \times I_1(T_1) - \xi\omega \times I_1(T_1)}{(\xi\omega)^2 + \omega d^2} + \frac{\omega d}{(\xi\omega)^2 + \omega d^2} I_2(T_1)$$



$$\Delta I_4 = I_4(T_i) - I_4(T_1)$$



**Calcolo Numerico step by step and piece by piece
dell'espressione Integranda $\rightarrow I_4(T_i)$ e $I_4(T_1) \rightarrow$**

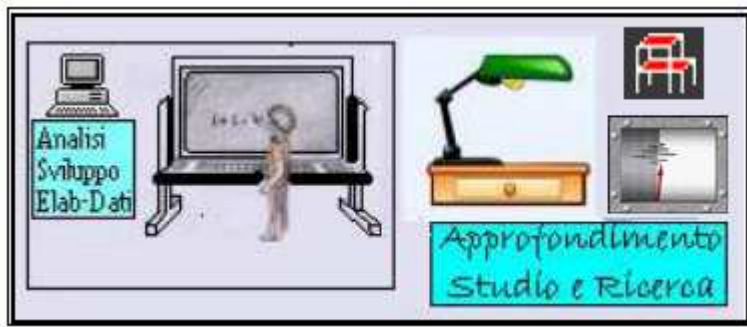
$T_i = 0,005$
 $I_1(T_i) = 1,58113883008419E-03$
 $T_i * I_1(T_i) = 7,90569415042095E-06$
 $\xi = 0,05 \quad \omega_d = 31,5832233947075$ per cui il prodotto
 $(\xi * \omega_d) * I_1(T_i) = 0,0025$
 $T_i * I_1(T_i) - (\xi * \omega_d) * I_1(T_i) = -2,49209430584958E-03$
 $(\xi * \omega)^2 + (\omega_d)^2 = 1000$
 $I_2(T_i) = -3,15832233947075E-02$
 $\omega_d * I_2(T_i) / ((\xi * \omega)^2 + (\omega_d)^2) = -0,0009975$

$$\rightarrow I_4(T_i) = 1,00290569415042E-03$$

Essendo $T_1 = 0$ si avrà
 $T(0) = T_1 = 0$ avremo $\rightarrow (\xi * \omega_d) = 1,58113883008419$
 $I_1(T_1) = 1,58113883008419E-03$
 $\omega_d * I_2(T_1) = -0,9975$
 $T_1 * I_1(T_1) - (\xi * \omega_d) * I_1(T_1) = -0,0025$
 $(\xi * \omega)^2 + (\omega_d)^2 = 1000$
 $\omega_d = 31,5832233947075$
 $I_2(T_1) = -3,15832233947075E-02$
 $\omega_d * I_2(T_1) / ((\xi * \omega)^2 + (\omega_d)^2) = -0,0009975$

$$\rightarrow I_4(T_1) = 0,000995$$

$$\rightarrow \Delta I_4 = I_4(T_i) - I_4(T_1) \rightarrow 7,90569415042085E-06$$



Calcolo Numerico dello Spostamento $x(t)$

$$x(t_i) = \frac{e^{-\xi \omega t_i}}{\omega d} [A d(t_i) \sin \omega t_i - B d(t_i) \cos \omega t_i]$$

Prima di addentrarci nel calcolo numerico, provvedo a fare una ricognizione dei dati preparatori per il calcolo dello spostamento $x(t)$ come appresso riportati:

Nel punto O Origine degli assi il valore della Forza in funzione del tempo è pari a:

$$F(0) = 0$$

$$T(0) = 0$$

Nel punto P il valore della Forza in funzione del tempo è pari a:

$$F(P) = 65000$$

$$T(P) = 0,005 \text{ passo incrementale}$$

I rispettivi salti sono:

$$\Delta F = 65000 \text{ e } \Delta T = 0,005$$

$$\text{Per cui il rapporto } (\Delta F / \Delta T) = 13000000$$

e di conseguenza in funzione della formula già sopra- descritta e che appresso si riporta per comodità di lettura :

$$A d(t_i) = A d(t_{i-1}) + \left[F(t_{i-1}) - t_{i-1} \frac{\Delta F_i}{\Delta t_i} \right] I_1 + \frac{\Delta F_i}{\Delta t_i} I_4$$

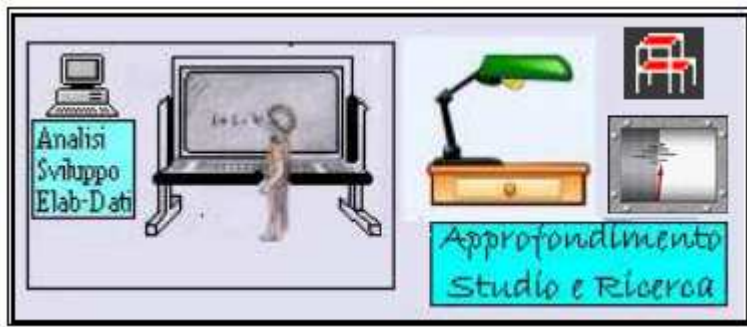
Ai fini del calcolo numerico del **1° Step** avremo:

$$\Delta I1_{(1^\circ \text{ Step})} = \Delta I1_{(1^\circ \text{ Step})} + (\Delta F / \Delta T) * \Delta I4$$

e sapendo il valore di $\Delta I4 = 7,90569415042085E-06$

avremo che $\rightarrow$

$$\Delta I1_{(1^\circ \text{ Step})} = 0,0000(\text{soluzione banale}) + 13000000 * 7,90569415042085E-06 = 102,774023955471 \quad \text{Ok!!!}$$



Mentre per effetto della formula

$$Bd(t_i) = Bd(t_{i-1}) + \left[F(t_{i-1}) - t_{i-1} \frac{\Delta F_i}{\Delta t_i} \right] I_2 + \frac{\Delta F_i}{\Delta t_i} I_3$$

$$\Delta I2_{(1^\circ \text{ Step})} = \Delta I2_{(1^\circ \text{ Step})} + (\Delta F / \Delta T) * \Delta I3$$

e sapendo il valore di $\Delta I3 = -1,57916116973538E-04$

avremo che $\rightarrow$

$$\Delta I2_{(1^\circ \text{ Step})} = 0,0000(\text{soluzione banale}) + 13000000 * -1,57916116973538E-04 = -2052,90952065599 \text{ Ok!!!}$$

Adesso al fine di tener conto della storia prima e dopo della funzione $f(t)$ (before and after history of the mathematical function), passeremo al calcolo numerico di $Ad(t_{i-1})$ e $Bd(t_{i-1})$ come appresso si riporta:

$$Ad(t_{i-1})_{(1^\circ \text{ Step})} = Ad(t_{i-1})_{(\text{Soluzione Banale})} + \Delta I1_{(1^\circ \text{ Step})}$$

$$Bd(t_{i-1})_{(1^\circ \text{ Step})} = Bd(t_{i-1})_{(\text{Soluzione Banale})} + \Delta I2_{(1^\circ \text{ Step})}$$

E tenuto conto che relativamente alla soluzione banale (calcolo nel Punto Origine Assi) $Ad(t_{i-1})$ e $Bd(t_{i-1})$ sono entrambi pari a zero, in definitiva si ha :

$$Ad(t_{i-1})_{(1^\circ \text{ Step})} = 102,774023955471$$

$$Bd(t_{i-1})_{(1^\circ \text{ Step})} = -2052,90952065599$$

Per cui, alla luce del calcolo numerico relativo a tutti i parametri contenuti nella formula dello spostamento che sopra è stata rappresentata, in definitiva passiamo al

Calcolo dello spostamento $x(t_i)$ che numericamente è pari a :

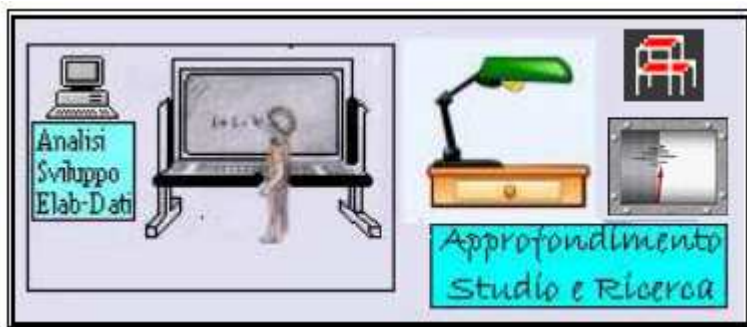
$$x(t_i) = 0,6419$$

ottenuto dai dati che seguono:

$$\text{Dati: } \xi = 0,05 ; \omega = 31,6227766016838 ; \omega_d = 31,583223394 ; T_i = 0,005 ; M = 100$$

$$(\xi * \omega_d) = 1,58113883008419 ; e^{-(\xi * \omega_d) * T_i} = e^{-(1,5811388 * 0,005)} = 0,992125$$

$$Ad(t_{i-1})_{(1^\circ \text{ Step})} = 102,774023955471 ; Bd(t_{i-1})_{(1^\circ \text{ Step})} = -2052,90952065599$$



In definitiva sostituendo nella relazione che di nuovo di riporta, ed eseguendo l'operazione numerica si ha:

$$x(t_i) = \frac{e^{-\xi \omega_d t_i}}{m \omega_d} [Ad(t_i) \sin \omega_d t_i - Bd(t_i) \cos \omega_d t_i]$$

$$\begin{aligned} x(t_i) &= (0,992125 / 100 * 31,58322) * [102,774 * \sin(31,58322 * 0,005) - (-2052,909 * \cos(31,58322 * 0,005))] = \\ &= (0,992125 / 3158,322) * (16,160 + 2027,350) = \\ &= (0,992125 / 3158,322) * (2043,51) = 0,6419 \text{ Ok Verificato!!!} \end{aligned}$$

$$x(t_i) = 0,6419$$

Calcolo della Velocità che numericamente è pari a :

$$v = 3,211$$

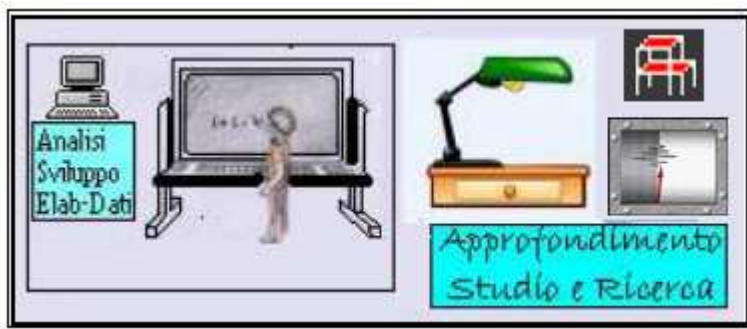
ottenuto dai dati che seguono:

Dati: $\xi = 0,05$; $\omega = 31,6227766016838$; $\omega_d = 31,583223394$; $T_i = 0,005$; $M = 100$
 $(\xi * \omega_d) = 1,58113883008419$; $e^{-(\xi * \omega_d) * T_i} = e^{(-1,5811388 * 0,005)} = 0,992125$
 $Ad(t_i-1)_{(1^\circ \text{ Step})} = 102,774023955471$; $Bd(t_i-1)_{(1^\circ \text{ Step})} = -2052,90952065599$

Anche in questo caso, sostituendo nelle relazioni che di nuovo si riportano per controllo di rapidità di calcolo, ed eseguendo le operazioni numeriche si ha:

$$v = \frac{e^{-\xi \omega_d t_i}}{m \omega_d} \left[\overset{\text{1° termine in seno}}{(\omega_d * w - \xi \omega_d k) \sin \omega_d t_i} + \overset{\text{2° termine in coseno}}{(\omega_d * k + \xi \omega_d w) \cos \omega_d t_i} \right]$$





$$v = \frac{e^{-\xi \omega_d t}}{m \omega_d} \left[\underbrace{(\omega_d * w - \xi \omega_d k)}_{\text{1° termine in seno}} \sin \omega_d t + \underbrace{(\omega_d * k + \xi \omega_d w)}_{\text{2° termine in coseno}} \cos \omega_d t \right]$$

$\uparrow$
Isen
 $\downarrow$
 $\uparrow$
Icos

$$v = \frac{e^{-\xi \omega_d t}}{m \omega_d} [\text{Isen} + \text{Icos}]$$

$$\text{Isen} = [(\omega_d * \text{Bd}(\text{ti}-1)_{(1^\circ \text{Step})}) - ((\xi * \omega_d) * \text{Ad}(\text{ti}-1)_{(1^\circ \text{Step})})] * \sin(\omega_d * \text{Ti})$$

$$\text{Isen} = [(31,58322 * -(2052,909)) - ((0,05 * 31,58322) * 102,774)] * \sin(0,005 * 31,58322) \rightarrow$$

$$\text{Isen} = (-64837,47658) - ((1,579161) * (102,774)) * \sin(0,1579161) = (-64837,47658 - 162,296692) * 0,157260 = -64.999,766 * 0,157260 = -10221,9387399443$$

$$\text{Isen} = -10221,9387399443$$

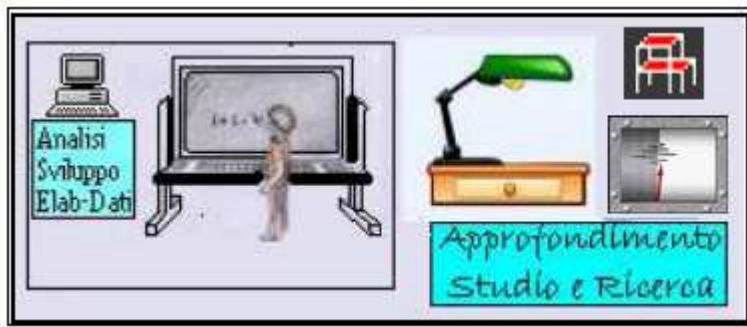
$$\text{Icos} = [(\omega_d * \text{Ad}(\text{ti}-1)_{(1^\circ \text{Step})}) + ((\xi * \omega_d) * \text{Bd}(\text{ti}-1)_{(1^\circ \text{Step})})] * \cos(\omega_d * \text{Ti})$$

$$\text{Icos} = [(31,58322 * 102,774) + ((0,05 * 31,58322) * -(2052,909))] * \cos(0,005 * 31,58322) \rightarrow$$

$$\text{Icos} = [(3245,933) + ((1,579161) * -(2052,909))] * \cos(0,1579161) =$$

$$\text{Icos} = [(3245,933) + (-3241,873)] * \cos(0,1579161) = -4,00$$

$$\text{Icos} = -4,17652763774291\text{E}-11$$



Calcolo dell'Accelerazione che numericamente è pari a :

a = -2,08860665755477

Derivate dalle formule che si ripropongono per controllo di rapidità di calcolo:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$$



$$a = [F(t) - c * v - k * x(t)] / M$$

dove :

F(t) = forzamento della funzione ; c = c_{crit} * ξ -> smorzamento ; v= velocità del sistema

k= rigidezza; x(t) spostamento; M= massa

F(t) = 65000

C=316,227766016838

V=3,2110230445324

K=100000

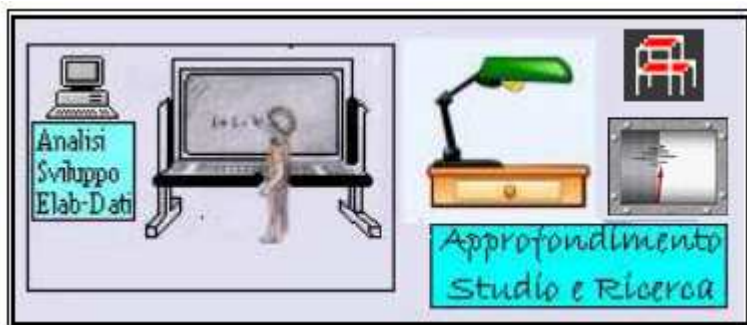
M=100

Calcolo Reazione del Supporto

Sapendo :

x(ti) = 0,641934460217544; K = 100000

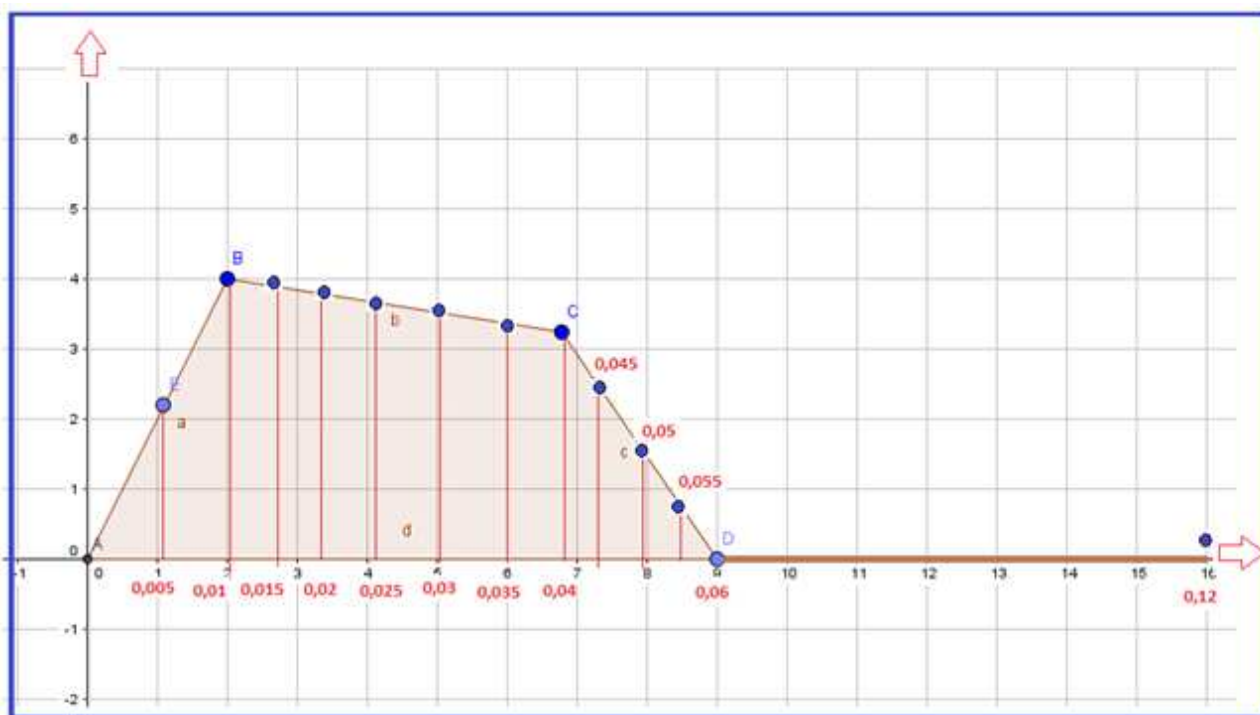
Forza nel Supporto = k * x(ti) = 64193,4460217544

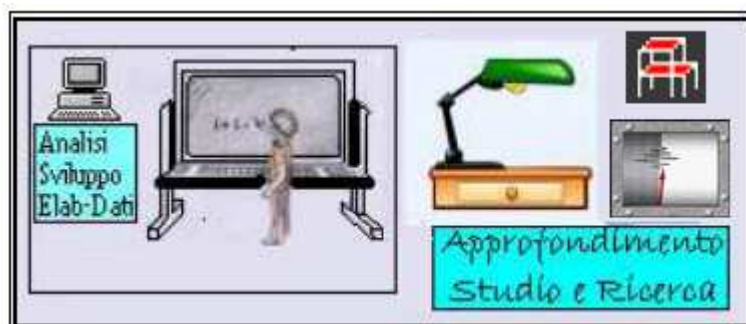


Continueranno le operazioni di iterazioni con l'Inizio del 3° punto di eccitazione e fino ad arrivare al 25° punto di eccitazione, calcolando lo Spostamento, Velocità, Accelerazione del sistema e Calcolo Reazione al Supporto, il tutto, così come meglio descritto e innanzi rappresentato.

Al fine di evitare pagine voluminose che allo stato, devo ancora dattiloscivere, lo scrivente doverosamente **EVIDENZIA** che i successivi step vengono omessi, tenuto conto che le operazioni inerenti le calcolazioni numeriche sono sempre le stesse, e pertanto, per chiunque volesse addentrarsi in tali operazioni ed entrare nel vivo del calcolo numerico operativo, provvede a riportare i risultati finali che appresso si allegano.

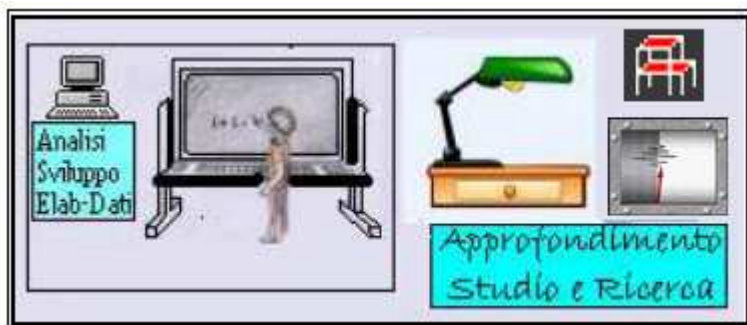
GRAFICO DEI PUNTI CALCOLATI





RISULTATI DEI VALORI DI → SPOSTAMENTO, VELOCITA' ED ACCELERAZIONE E FORZA APPLICATA AL SUPPORTO

N°Punto	Delta (ti)	F(ti)	X(ti)	Velocità(ti)	Accelerazione(ti)	Forza supp
1	0	0	0	0	0	0
2	0,005	65000	0,642	3,211	-2,09	64201,48
→ 3	0,01	130000	1,26	9,503	9,91	126039,92
4	0,015	125000	1,165	8,298	58,31	116574,72
5	0,02	120000	1,078	6,66	100,95	107819,37
6	0,025	115000	1	4,636	135,64	99981,02
7	0,03	110000	0,932	2,281	160,4	93241,76
8	0,035	105000	0,878	-0,34	173,53	87754,35
9	0,04	100000	0,836	-3,158	173,66	83638,38
10	0,045	75000	0,632	-14,993	165,54	63365,18
11	0,05	50000	0,488	-27,507	98,55	49611,45
12	0,055	25000	0,409	-40,378	-30,89	42806,71
13	0,06	0	0,393	-53,283	-224,81	42787,86
14	0,065	0	0,652	-49,846	-494,02	67043,77
15	0,07	0	0,89	-45,23	-746,77	90122,28
16	0,075	0	1,102	-39,566	-977,08	110927,59
17	0,08	0	1,284	-33,013	-1179,59	128821,69
18	0,085	0	1,431	-25,744	-1349,72	143344,43
19	0,09	0	1,541	-17,953	-1483,78	154159,57
20	0,095	0	1,61	-9,839	-1579,01	161042,21
21	0,1	0	1,639	-1,609	-1633,66	163875,62
22	0,105	0	1,626	6,531	-1647,02	162649,53
23	0,11	0	1,574	14,382	-1619,4	157457,58
24	0,115	0	1,483	21,755	-1552,13	148493,34
25	0,12	0	1,357	28,472	-1447,5	136044,75



Consultazione e Fonte di Ricerca Bibliografica:

1. Appunti di Complementi di Matematica – Teoria del Prof. Maceri Franco - Edizione CUEN.
2. Esercitazione di Complementi di Matematica del Prof. Gentile Giuseppe e prof. Mellone Laura – Edizione CUEN.
3. Teoria ed applicazione dei Circuiti Elettrici di Joseph A. Edminister – Collana SCHAUUM ETAS/KOMPASS.
4. Dinamica Strutturale Teoria & Calcolo a cura di Mario Paz professore di ingegneria civile Università di Louisville-Libreria DF Dario Flaccovio Editrice.
5. Fisica - Parte Prima – Meccanica-Acustica-Termodinamica- Robert Resnick e David Halliday. Casa Editrice Ambrosiana -Milano-
6. Rappresentazione Spettrale di una funzione $y=f(t)$ a mezzo della Serie di Fourier validata e pubblicata dal prof.ing.Aurelio Gherzi docente di Tecnica delle Costruzioni presso l'Università di Catania.

Autori: ing. Pagnozzi Domenico - ing. De Gennaro Antonio- Collaboratore Pagnozzi Filippo studente Universitario.
7. Risposta di un sistema SDOF eccitato da una forzante rappresentata dalla serie di Fourier e relativo calcolo dei parametri: Spostamento, Velocita' ed Accelerazione

Autori: ing. Pagnozzi Domenico - Collaboratore Todino Florinda studentessa Universitaria.