RAPPRESENTAZIONE SPETTRALE DI UNA FUNZIONE y=f(t) A MEZZO DELLA SERIE DI FOURIER

ing. Domenico Pagnozzi

ing. Antonio De Gennaro

COLLABORATORE
Filippo Pagnozzi
Studente universitario
Facoltà di Ingegneria

PREMESSA

L'eccitazione di una costruzione edile con una sollecitazione dinamica complessa in conseguenza di un sisma viene interpretata con **l'analisi di Fourier** e delle armoniche.

In pratica la sollecitazione vibrante connessa al sisma si può interpretare come la sovrapposizione di una molteplicità di onde superficiali, di intensità e frequenza variabili che si accumulano.

Nella sostanza l'insieme delle onde sismiche provoca una complessa vibrazione del suolo che viene percepita da ogni struttura in modo diverso.

La struttura, in genere, è sensibile alla componente armonica che la mette in risonanza, per cui si potrebbe dire in modo molto semplicistico che ciascuna costruzione enuclea dalle vibrazioni sismiche l'armonica che la mette in risonanza, di periodo proprio uguale o multiplo del periodo proprio della costruzione in oggetto.

Da notare che ad esempio, una costruzione in legno ha un periodo proprio relativamente elevato, con azioni sismiche spettrali spesso contenute e quindi cimento sismico relativamente ridotto.

Pertanto, quando il sisma sollecita una struttura, vi sono varie possibilità per ottenere la risonanza dell'edificio.

La risonanza con oscillazione più evidente è quella connessa alla sollecitazione della struttura con un'onda sinusoidale di periodo uguale al primo modo di vibrare, anche se si hanno altre risonanze, che si verificano ogni volta che accade un'eccitazione di tipo sismico. A tal uopo, si evidenzia che, tra le armoniche che compongono la vibrazione sismica, vi è un'onda di periodo uguale al secondo, al terzo, al quarto ecc. periodo proprio di vibrazione della struttura, che può mettere in crisi la struttura oggetto di studio.

In genere, dalla letteratura scientifica di testi specialistici della materia sismica emerge che i contributi sono importanti nei primi modi e scemano rapidamente al crescere del numero del periodo proprio.

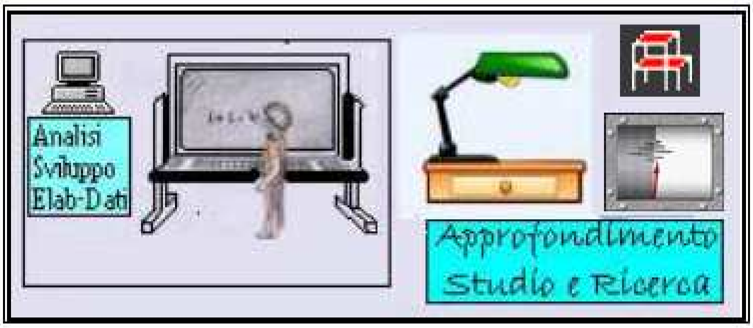
Bene, con tale ricerca ed approfondimento, abbiamo inteso dare allo studente, al professionista, al ricercatore, l'ABC che, a nostro avviso, è propedeutico e di base di una prima interpretazione matematico – numerico - scientifico afferente lo studio dell'onda in generale.

Partendo dal lavoro svolto, come prima interfaccia alla conoscenza matematica dell'onda e, approfondendo ancor di più la materia specialmente nel campo ondulatorio del tipo sismico, probabilmente e/o quasi certamente si riuscirà a coglierne ancora di più il significato cinematico e dinamico legato al processo sismico - strutturale.

Questi motivi evidenziano che nonostante siano tante le teorie che approcciano a tale problematica, **nel lavoro svolto abbiamo pensato di fare solo un primo approccio** al problema a mezzo della serie di **FOURIER** che ci porta alla **rappresentazione spettrale della forza eccitante F(t)**. Anche se la descrizione della problematica viene fatta a mezzo di formulazioni matematiche a cui l'ingegnere non può rinunciare, con un po' di attenzione il lettore potrà apprezzare e dire che le stesse portano con chiarezza alla soluzione del problema legata all'Analisi Spettrale.

Il presente lavoro, con testo e formule curate sotto l'aspetto editoriale, è ritrasmesso al prof. Aurelio Ghersi, affinché lo stesso, avendolo già validato come ”lavoro interessante e molto chiaro”, possa metterlo a disposizione sul suo sito, ciò al fine di poter ulteriormente suscitare e stimolare ancora di più l'interesse e l'approfondimento per la ricerca scientifica.

GLI AUTORI



SERIE DI FOURIER

Si consideri la seguente espressione:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) + b_n \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) \right\} \quad (1)$$

Essa è una SERIE TRIGONOMETRICA.

Il primo problema è ricercare la convergenza della serie; ciò non è facile, però si possono fare delle semplici considerazioni.

Se la serie CONVERGE in t_1 sicuramente convergerà in un intervallo $t_1 + KT$ perché quella serie, in tutti questi punti, assume lo stesso valore in quanto $\left(\cos \frac{2\pi}{T} t\right)$ è periodico di T; ciò è vero $\forall\, n \in numeri\ interi$; lo stesso discorso vale anche per $\left(\sin \frac{2\pi}{T} t\right)$. In definitiva possiamo dire che la serie converge in t_1.

Ora se la quantità sotto riportate:

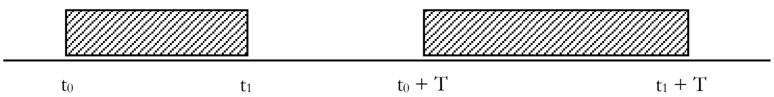
a) $\frac{2\pi}{T} = \omega\ (pulsazione)$ e

b) $\frac{1}{T} = f\ (frequenza)$

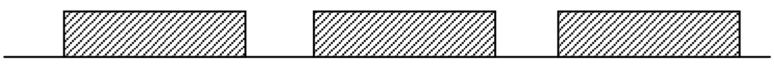
la (1) si può scrivere:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos\ (n\, \omega\, t) + b_n \sin\ (n\, \omega\, t)\}$$

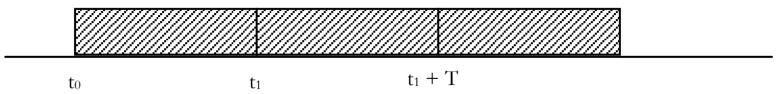
Se siamo in presenza di FENOMENI VARIABILI nel tempo, allora t = s (secondi), f = s^{-1} e $\omega = \frac{rad}{s}$ e pertanto SE LA SERIE CONVERGE in un intervallo t_0-t_1 convergerà anche nell'intervallo $t_0 + T$ e $t_1 + T$



La stessa cosa si ripete in qualunque altro intervallo e la CONVERGENZA è del tipo

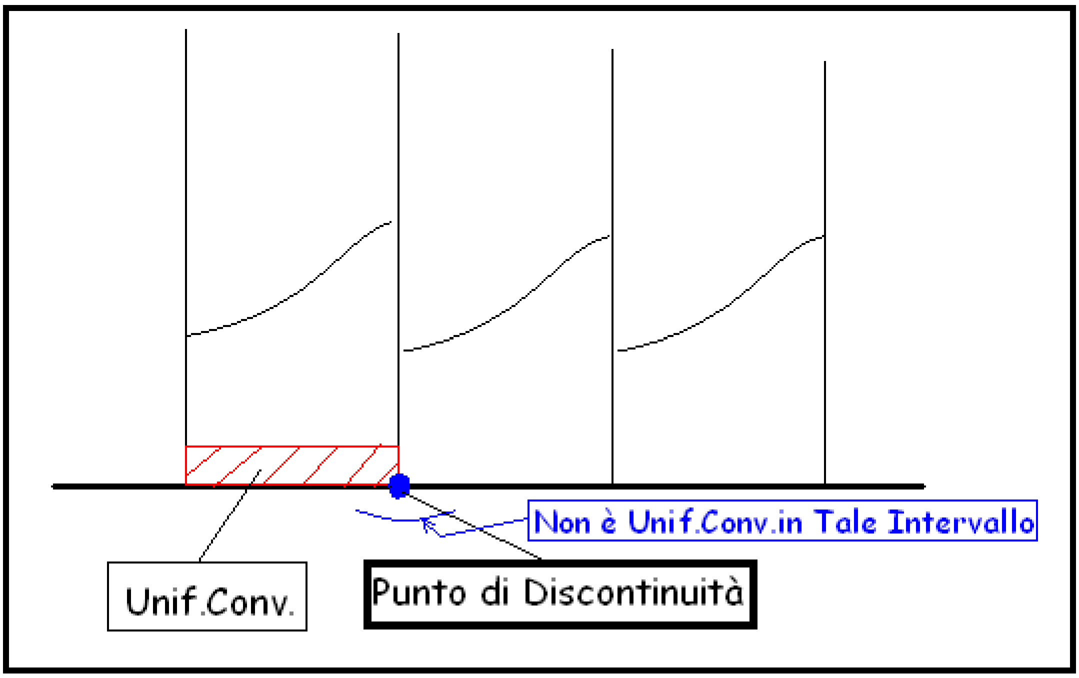


quindi la serie convergerà in tutto il campo REALE quando l'ampiezza tot_1 è proprio T in quanto gli intervalli verrebbero ad essere contigui $t_0 - t_1 = T$



Se la serie è UNIFORME CONVERGENTE su tutto l'asse reale $|S_n(t) - l| < \varepsilon$, si ha che la somma della serie è una $f(t)$ continua e PERIODICA di T.

N.B. che L'UNIFORME CONVERGENZA può avvenire anche su un solo intervallo e quindi È CONTINUA in quell'intervallo.

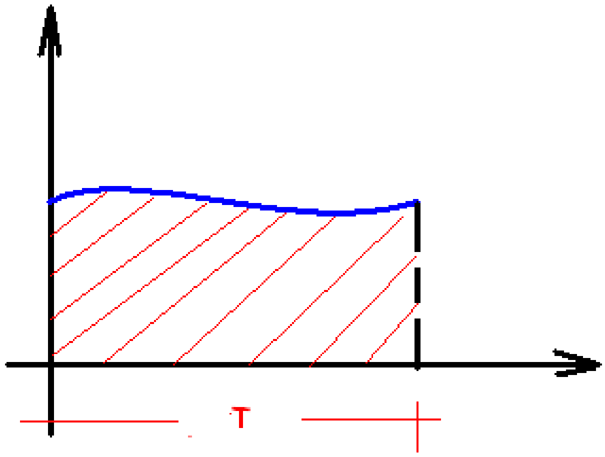


Allora chiamando $f(t)$ la somma della SERIE (1) ed integrando e moltiplicando per $\frac{2}{T}$ si ha:

$$\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)dt = \frac{a_0}{\cancel{2}}\,\frac{\cancel{2}}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} dt + \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\,\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\cos n\omega t\; dt + \; b_n\,\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\sin n\omega t\; dt\right)$$

Ma

$$\left(\frac{2}{T}\int_{to}^{to+T} f(t)dt = ao\right) \qquad \text{e} \qquad \frac{ao}{2} = \frac{1}{T}\int_{to}^{to+T} f(t)dt = Area\;\; sottesa\;\; alla\; f(t)$$



Adesso moltiplichiamo 1° e 2° termine della (1) per $\cos K\omega t$ ed integriamo e moltiplichiamo per $\frac{2}{T}$ si ottiene:

$f(t)\cos K\omega t = \frac{a_0}{2}\cos K\omega t + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\,\omega t \cos K\omega t + b_n \sin n\,\omega t\;\; \cos K\omega t) =$

$$= \frac{2}{T}\int_{to}^{to+T} \mathrm{f(t)}\cos K\omega t\;\mathrm{dt} \;=\frac{2}{T}\int_{to}^{to+T}\frac{a_0}{2}\cos K\omega t + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{2}{T}\int \cos\,(n\,\omega t)\cos K\omega t + b_n\int \sin\,(n\,\omega t)\;\cos K\omega t\right)$$

Vediamo quanto vale l'integrale in parentesi quando poniamo $n = K$:

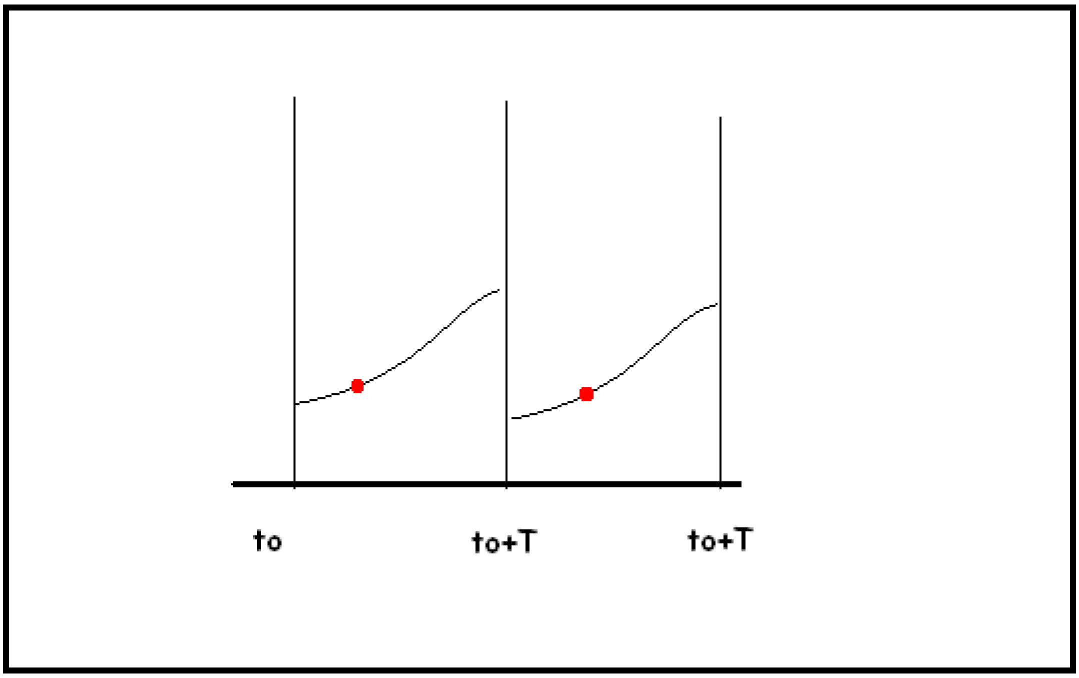
$$\int_{to}^{to+T}\cos^2\; K\omega t\;\mathrm{dt} = \int_{to}^{to+T}\frac{1+\cos 2K\omega t}{2}\;\;\mathrm{dt} = \frac{T}{2}$$

Poniamo

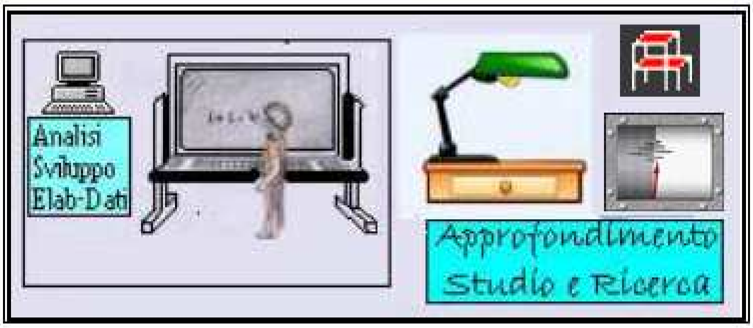
$$\frac{2}{T}\int_{to}^{to+T} f(t)\,\cos K\omega t\ \mathrm{dt} = \ a_k$$

$$\frac{2}{T}\int_{to}^{to+T} f(t)\sin K\omega t\ \mathrm{dt} = \ b_k$$

Detto ciò, il problema che si pone è L'INVERSO cioè, data una $f(t)$ ∀ assegnata in (t_0, t_0+T), se costruisco una serie come innanzi mettendo al posto di a_n, b_n *e* $\frac{a_0}{2}$ *i corrispondenti* a_k, b_k *e* $\frac{a_0}{2}$, allora la serie può CONVERGERE ad una funzione diversa o NON CONVERGERE oppure CONVERGERE e CONVERGERE → alla $f(t)|_{t0,\ t0+T}$ e al di fuori di questo intervallo quella SERIE CONVERGE ad una funzione periodica cioè periodando $f(t)$ avremo il seguente diagramma



Quando si verifica che la SERIE di FOURIER e la $f(t)$ converge alla $f(t)$ stessa, allora si dice che la funzione è SVILUPPABILE in SERIE di FOURIER e l'espressione



$$f(t) = \frac{ao}{2} + \sum_{1\,n}^{\infty} (a_n \cos n\,\omega t + b_n \sin n\,\omega t\,)$$

si dice SERIE DI FOURIER e le condizioni sufficienti a cui la $f(t)$ deve SODDISFARE affinché sia SVILUPPABILE sono:

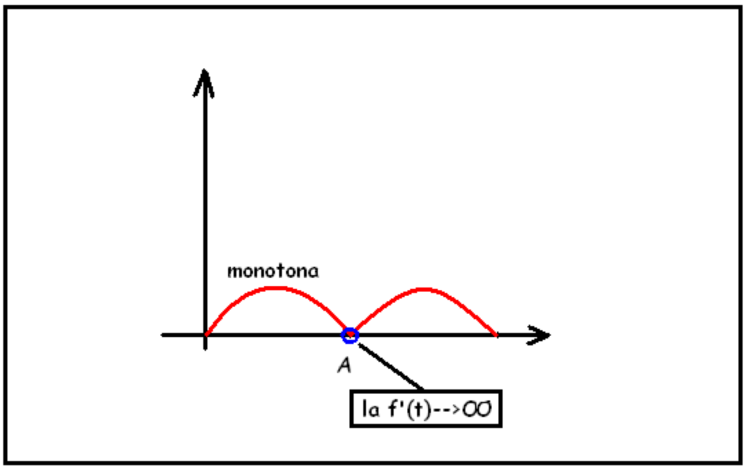
1ª CONDIZIONE DI DIRICHLET

La funzione deve essere generalmente continua e derivabile; la sua derivata prima deve avere al più punti di discontinuità di 1ª specie; in questo caso la SERIE $f(t)$ CONVERGE alla $f(t)$ stessa in ogni punto dell'intervallo in cui la $f(t)$ è continua e, in eventuali punti di discontinuità, CONVERGE alla SEMISOMMA del lim d_x e lim s_n e cioè al valore $\frac{f(t_{0_+})+f(t_{0_-})}{2}$.

2ª CONDIZIONE DI DIRICHLET

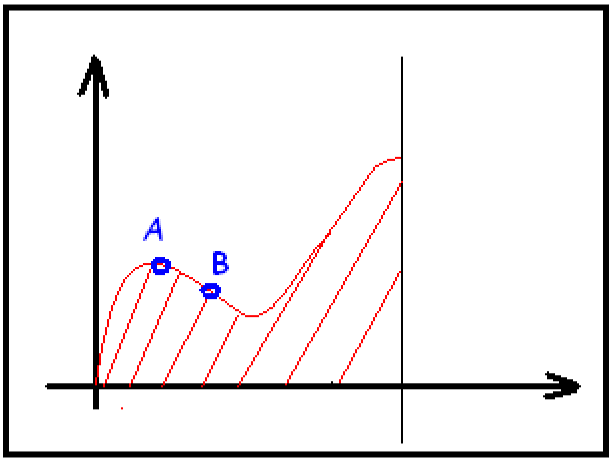
La $f(t)$ deve essere limitata e poi l'intervallo di definizione di $f(t)$ deve essere decomponibile in un numero finito di intervalli in cui la $f(t)$ è MONOTONA.

ATTENZIONE che la 1ª e 2ª CONDIZIONE non sono equivalenti cioè si possono VERIFICARE la 2ª e non la 1ª; infatti nel punto A la $f'(t) \rightarrow \infty$ e quindi in $A \rightarrow punto\ di\ DISCONTINUITA'$; in A invece la 2ª è verificata!



3ª CONDIZIONE DI DIRICHLET

È la meno restrittiva di tutte le altre in quanto una $f(t)$ per essere sviluppata in Serier di FOURIER basta cha sia a variazione LIMITATA.



Considerando il tratto AB e facendo la DIFFERENZA:

$|f(x_0) - f(x_1)| + |f(x_1) - f(x_2)| + |f(x_2) - f(x_3)| + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + |f(x_{n-1}) - f(x_n)| =$ variazione della $f(t)$ alle posizioni di intervallo e si chiama variazione limitata se esiste l'estremo SUPERIORE.

Abbiamo visto la forma della sviluppo in SERIE di FOURIER

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

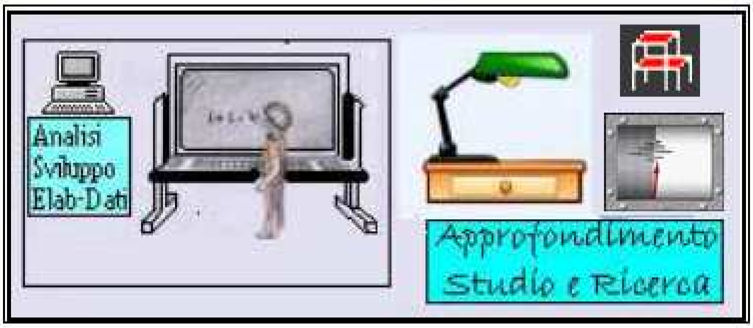
dove

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos n\omega t \, dt$$

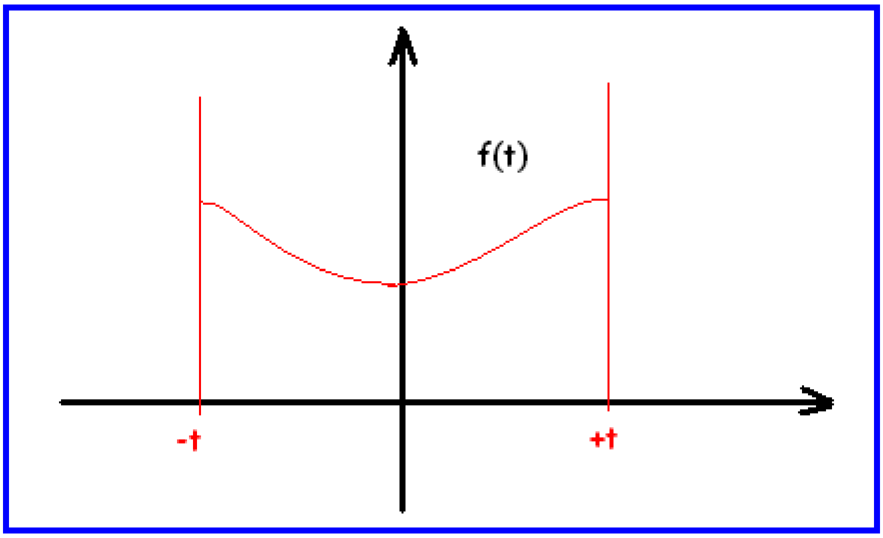
$$b_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\sin n\omega t \, dt$$

Si noti bene che, se non vincoliamo T, di serie di Fourier ne $\exists\ \infty$.

I valori degli integrali sono indipendenti da t_0, quando, invece di scrivere da t_0 a t_0+T possiamo scrivere da $-\frac{T}{2}$ a $+\frac{T}{2}$.



Consideriamo una $f(t)$ PARI cioè $f(t) = f(-t)$

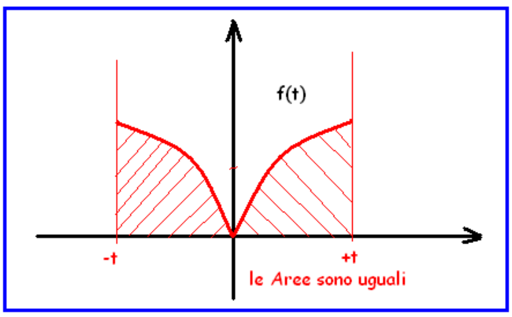


Calcoliamo gli integrali:

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\ \cos n\omega t\ dt$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\ \sin n\omega t\ dt$$

ammettendo che $f(t)$ è PARI

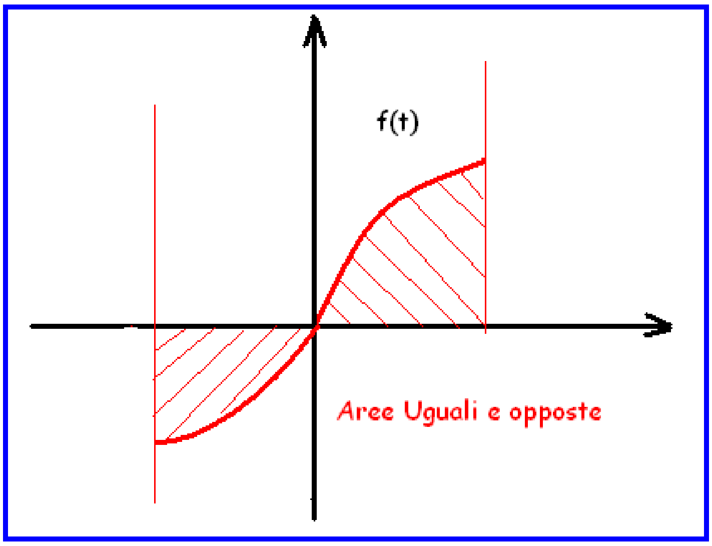


$$f(t) \;=>\; \frac{\cos(t) = \cos(-t)}{\text{è } PARI}$$

e se $f(t)$ è **PARI**

$$\int_{-T/2}^{T/2} diventa = 2\int_{0}^{T/2} a_n = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\cos\, n\omega t\; dt.$$

Se la $f(t)$ è **DISPARI** $\frac{\sin n\omega t(t)}{\text{è } DISPARI}$



$$\int = 0$$

e la $f(t)$ diventa:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\; \cos n\omega t\; dt$$

quindi viene fuori lo **SVILUPPO IN SERIE, DI SOLI COSENI.**

Per una $f(t)$ => DISPARI ammette a_n=0 e $b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\; \sin n\omega t\; dt$ e quindi la

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\; \sin n\omega t\; dt$$

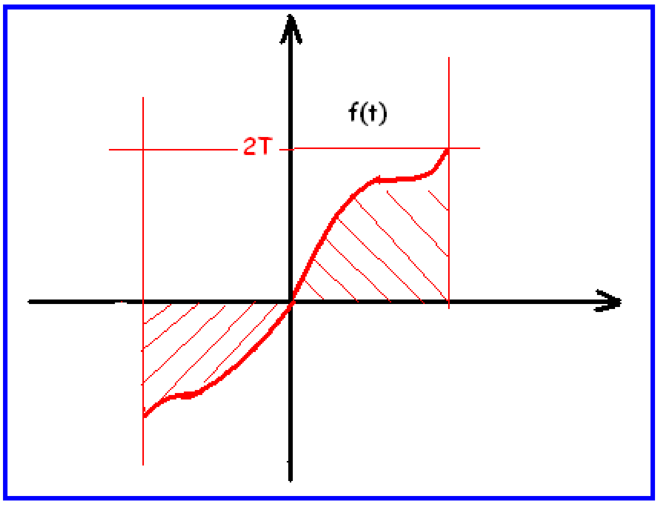
viene fuori lo **SVILUPPO IN SERIE DI SOLI SENI.**

Si ricorda che a_n = 0 in quanto è il prodotto tra una funzione DISPARI * PARI = DISPARI per cui

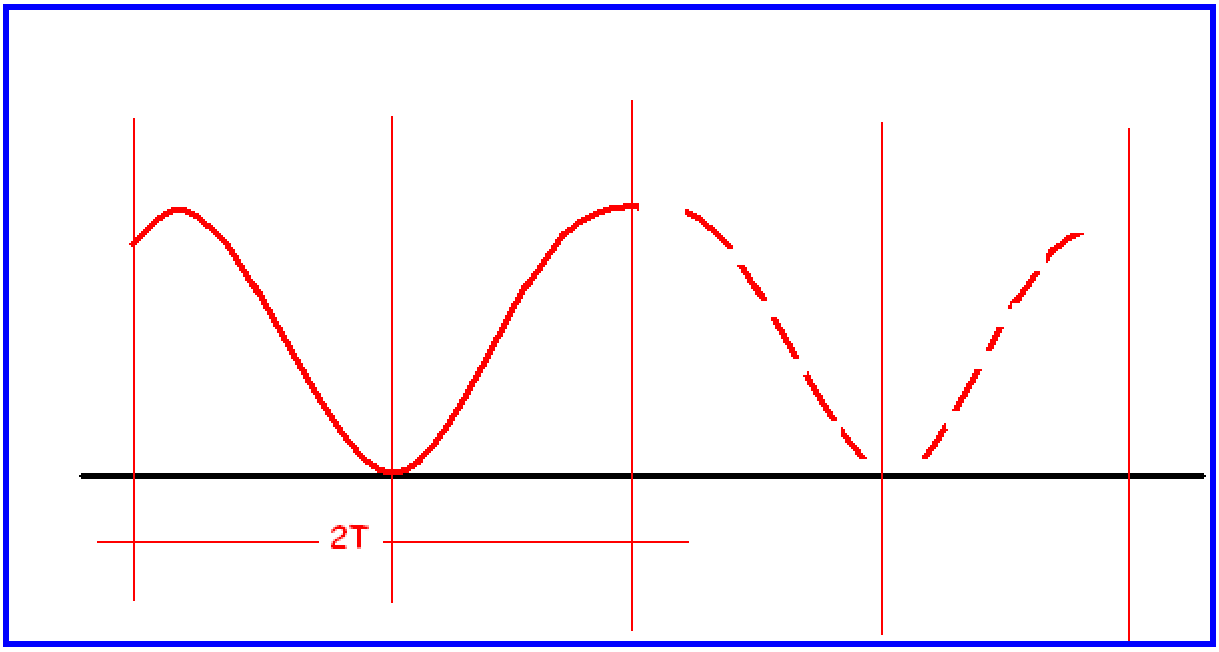
$$\int = 0$$

Se la $f(t)$ non è né pari né dispari nell'intervallo T, esistono sempre una serie di soli seni e una serie di soli coseni che la rappresentano.

N.B. che se opero con uno sviluppo in serie di soli seni viene fuori una $f(t)$ prolungata in maniera dispari di periodo $2T$ che si dice **STUDIO SERIE FOURIER di soli seni.**



Se faccio lo **STUDIO della SERIE di FOURIER dei soli coseni** viene fuori una $f(t)$ => **PARI**



quindi la serie assume la forma

$$\boldsymbol{\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n\ \cos n\omega t}{\grave{e}\ PARI}+\frac{b_n\ \sin n\omega t}{\grave{e}\ DISPARI}\right)}$$

A questo punto entriamo nel VIVO dell'ARGOMENTO e vediamo come si costruisce una $f_p\,(t)\ \ => PARI$ e una $f_d\,(t)\ \ => DISPARI$.

$$(\boldsymbol{a}) \qquad \boldsymbol{f(t) = f_p\,(t) + f_d\,(t)}$$

la $\boldsymbol{f_p\,(t) = f_p\,(-t)}$ e $\boldsymbol{f_d\,(t) = -f_d\,(-t)}$**.**

Calcoliamo l'espressione:

$$(\boldsymbol{b}) \qquad \boldsymbol{f\,(-t) = f_p\,(t) - f_d\,(t)}$$

Aquesto punto mi posso calcolare f_p e f_d con il sistema tra la (a) e la (b)

$$f_p = \frac{f(t) + f(-t)}{2} \qquad\qquad f_d = \frac{f(t) - f(-t)}{2}$$

Ricordiamo che:

$$\cos n\omega t = \frac{e^{in\omega t}}{2} + \frac{e^{-in\omega t}}{2}$$

$$\sin n\omega t = \frac{e^{in\omega t}}{2} + \frac{e^{-in\omega t}}{2i}$$

ed applicando la formula di EULERO si ha:

$$\frac{\mathrm{a}_0}{2} + \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \mathrm{a_n} \cos \mathrm{n}\omega\mathrm{t} + \mathrm{b_n} \sin \mathrm{n}\omega\mathrm{t} =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2} e^{in\omega t} + \frac{a_n}{2} e^{-in\omega t} - i\frac{b_n}{2} e^{in\omega t} + \quad i\frac{b_n}{2} e^{-in\omega t} =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum e^{in\omega t}\left(\frac{a_n - ib_n}{2}\right) + \sum e^{-in\omega t}\left(\frac{a_n + ib_n}{2}\right) =$$

$$= \mathrm{c}_0 + \sum \mathrm{c_n}\, \mathrm{e}^{\mathrm{in}\omega\mathrm{t}} + \sum \mathrm{c_n}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{in}\omega\mathrm{t}} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{c_n}\, \mathrm{e}^{\mathrm{in}\omega\mathrm{t}}$$

detta anche **FORMA ESPONENZIALE COMPLESSA DELLA SERIE DI FOURIER**.

Vediamo che espressione assume c_n.

Abbiamo detto che

$$c_n = \frac{a_n + ib_n}{2} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\,[\cos n\omega t - \sin n\omega t]\,dt =$$

$$= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\; e^{-jn\omega t}\,dt \qquad (A)$$

dove c_n non è altro che il complesso coniugato di a_n => $\overline{c_n}$ in quanto uno è $\frac{a_n - ib_n}{2}$ e l'altro è $\frac{a_n + ib_n}{2}$; la (A) è in forma generale cioè mi rappresenta per n(+) e n(-) lo STUDIO della SERIE di FOURIER sotto forma esponenziale: $\sum c_n\, e^{jn\omega t}$ dove $c_n = \int \dots\dots\dots\dots$.

Un ultima FORMA della SERIE di FOURIER nella pratica avviene quando si parla di ARMONICHE:

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, e^{jn\omega t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\, e^{-jn\omega t}$$

Si ricorda che la somma di due numeri complessi coniugati è:

$2 \begin{bmatrix} PARTE\ REALE \\ C_N \end{bmatrix}$ quindi

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\, R_e\, \left[c_n\, e^{jn\omega t}\right] = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\, R_e\, \left[|c_n|\, e^{j(n\omega t - \varphi_n}\right]$$

dove c_n (numero complesso) e lo possiamo scrivere: $c_n = |c_n|\, e^{-i\,\varphi_n}$; il segno meno è dovuto al fatto che φ_n *è* $\tan \varphi_n = -\frac{b_n}{a_n}$.

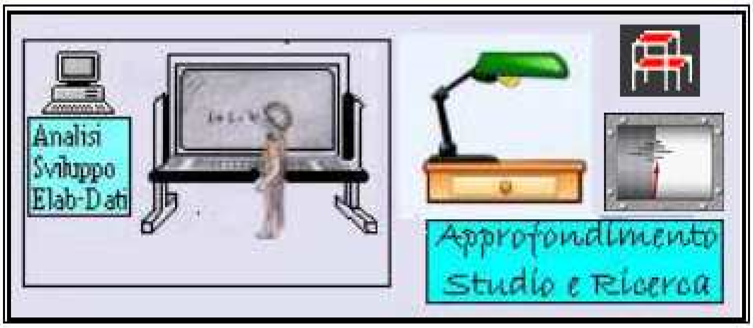
Poniamo ora $A_n = 2\,|c_n|$; quindi la parte reale è cos $(\omega t - \varphi_n)$ per cui

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\ \cos(n\omega t - \varphi_n) \qquad (3)$$

La (3) ci dice che la $f(t)$ può essere espressa in questa forma ed in particolare ci dice che ciascuno di questi termini A_n cos $(n\omega t - \varphi_n)$ rappresenta un'ARMONICA e lo STUDIO della SERIE di FOURIER è espresso come una sommatoria di infinite armoniche, dove:

$$A_n = Ampiezza;\ \varphi_n = Fase \qquad e \qquad \omega = Pulsazione$$

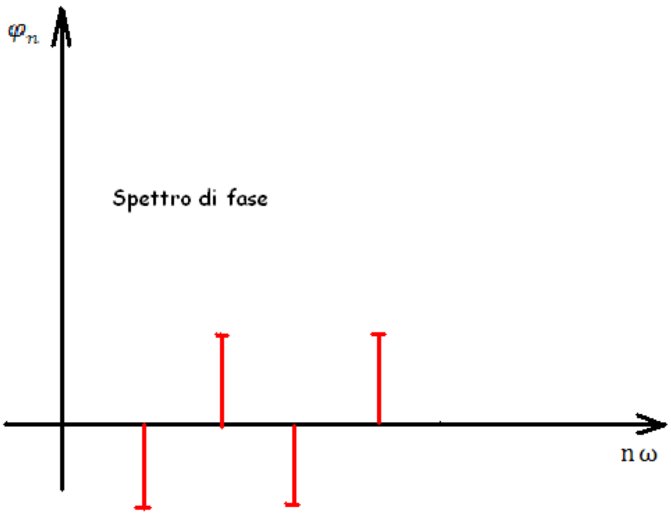
ricordando che $A_n = 2\,|c_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $\varphi_n = arctg\ c_n\ con\ c_n = |c_n|\, e^{-j\varphi_n}$ e che $arctg\ c_n = arctg\ \frac{b_n}{a_n}$.



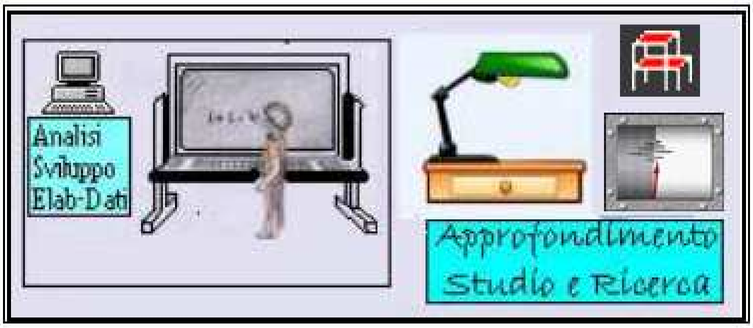
RIFLESSIONE!!!!

Da tutto ciò si evince che basta conoscere il contenuto armonico per ricostruire la $f(t)$ e cioè $\boldsymbol{\varphi_n}$ $\boldsymbol{A_n}$ $\boldsymbol{C_0}$; saputo ciò si può costruire un diagramma a linee definito **SPETTRO D'AMPIEZZA**

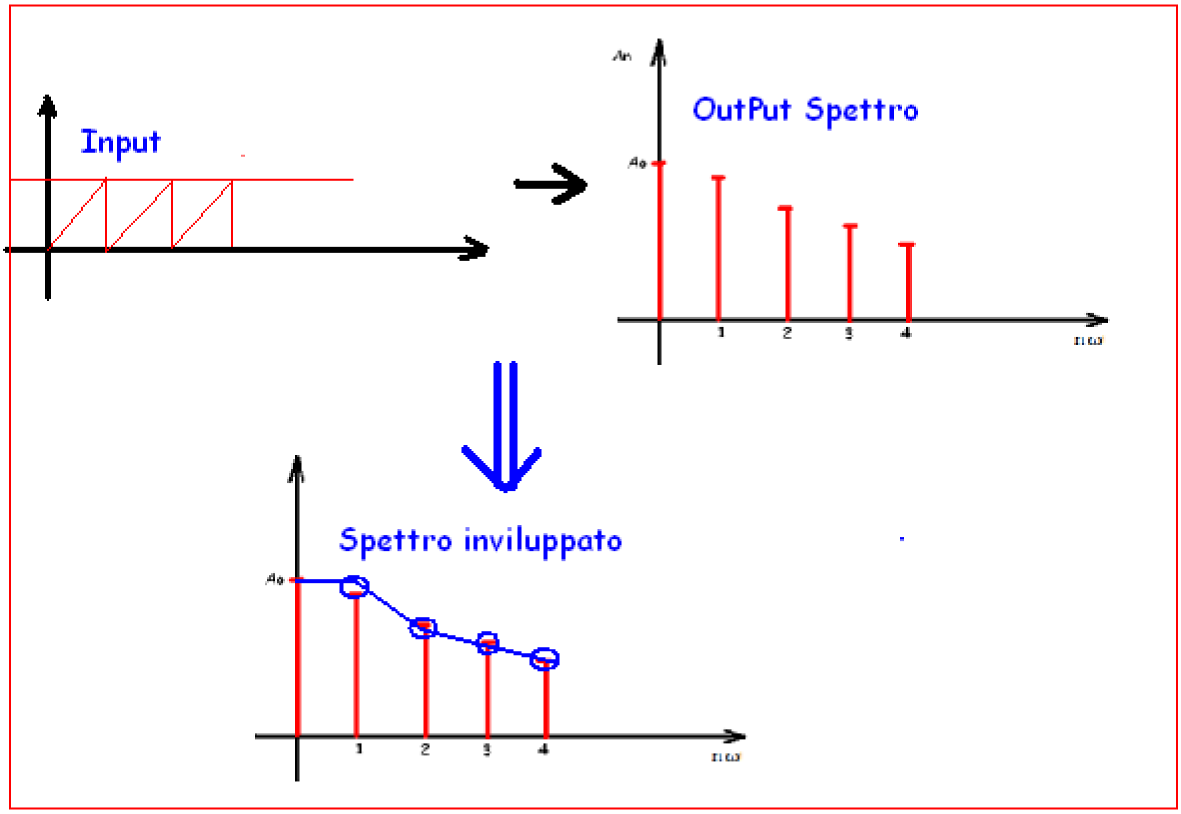
ed anche lo **SPETTRO DI FASE**



L'insieme dello spettro di A_n e dello spettro di φ_n caratterizzano la $f(t)$ e l'insieme si chiamerà **RAPPRESENTAZIONE SPETTRALE molto usata per lo studio e l'ANALISI DELLE FORME D'ONDE.**

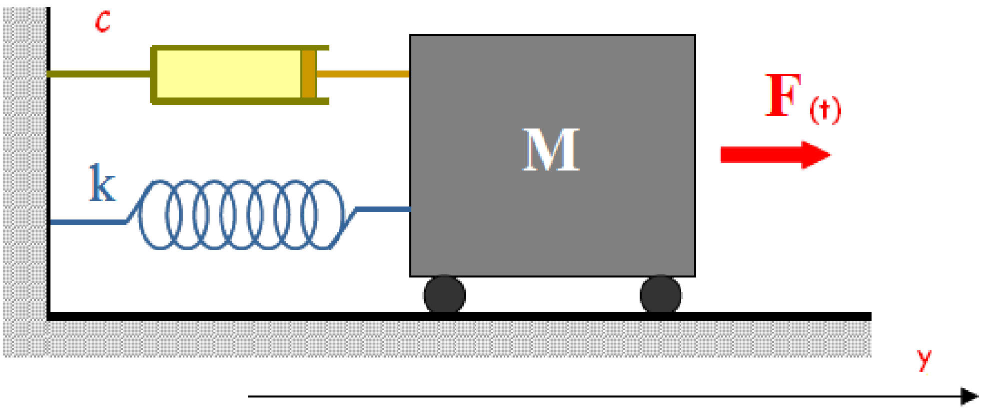


ESEMPIO: per un segnale d'ingresso o d'input (quale il terreno alla sovrastruttura in c.a.) si ottiene lo spettro inviluppato meglio chiaro nel disegno che segue:



Come già detto, il presente lavoro è frutto di attività, di approfondimento, studio e ricerca riguardante la fenomenologia delle **ONDE SISMICHE.**

In particolare giova ricordare che nella **DINAMICA DELLE STRUTTURE**, le stesse vengono schematizzate con un modello matematico massa-molla, il tutto al fine di ridurre i gradi di libertà ad un numero discreto o addirittura ad un solo grado detto **sistema SDOF**



In questo sistema di riferimento come sopra modellato, siamo in grado di impostare un'equazione differenziale

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = F(t)$$

dalla quale si ricavano

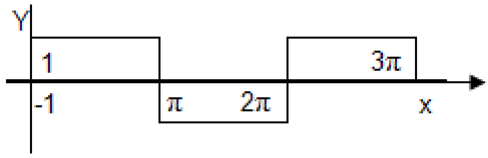
1. $\ddot{y}$ *accelerazione*
2. $\dot{y}$ *velocità*
3. y *spostamento*

con $\ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dt} \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt}$

ESERCITAZIONE

ANALISI, SVILUPPO E CALCOLO NUMERICO DI UNA SERIE DI FOURIER.

Consideriamo una $y = f(t)$ del tipo ad ONDA QUADRA:



Facciamo delle considerazioni sul DOMINIO della $f(t)$.

Per $\quad 0 < \omega t < \pi \quad => \quad f(t) = F$

Per $\quad \pi < \omega t < 2\pi \quad => f(t) = -F$

Calcolando il valore medio della $f(t)$, esso sarà pari a ZERO per cui si avrà che $\frac{a_0}{2} = 0$.

CALCOLO DEI COEFFICIENTI DEI TERMINI IN COSENO.

Ricordiamoci della $y = f(t)$ in forma trigonometrica

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\omega t + a_2 \cos 2\omega t + \cdots \dots\dots\dots\dots\dots + b_1 \sin\omega t + b_2 \sin 2\omega t + \cdots \dots\dots$$

dove i coefficienti a_n e b_n sono:

$$a_n = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{2\pi/\omega} f(t)\ \cos n\omega t\ dt = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega t\ dt$$

e

$$b_n = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{2\pi/\omega} f(t)\ \sin n\omega t\ dt = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega t\ dt$$

Se $T = 2\pi$ avremo:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\ \cos n\omega t\ d(\omega t)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\ \sin n\omega t\ d(\omega t)$$

Sulla scorta di quanto innanzi detto, nel caso dell'onda quadra avremo:

=> TERMINI IN COSENO – CALCOLO

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} F\ \cos n\omega t\ d(\omega t) + \int_0^{2\pi}(-F)\cos n\omega t\ d(\omega t)\right] =$$

$$= \frac{F}{\pi}\left\{\left[\frac{1}{n}\sin n\omega t\right]_0^{\pi} - \left[\frac{1}{n}\sin n\omega t\right]_{\pi}^{2\pi}\right\} = 0 \qquad \forall\, n\ \in numeri\ interi$$

Pertanto la **SERIE NON CONTIENE TERMINI IN COSENO!!!!!**

=> TERMINI IN SENO – CALCOLO

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} F\ \sin n\omega t\ d(\omega t) + \int_0^{2\pi}(-F)\sin n\omega t\ d(\omega t)\right] =$$

$$= \frac{F}{\pi}\left\{\left[-\frac{1}{n}\cos n\omega t\right]_0^{\pi} + \left[\frac{1}{n}\cos n\omega t\right]_{\pi}^{2\pi}\right\} =$$

$$= \frac{F}{n\pi}(-\cos n\pi) + \cos 0 + \cos n2\pi - \cos n\pi = \frac{2F}{n\pi}(1 - \cos n\pi)$$

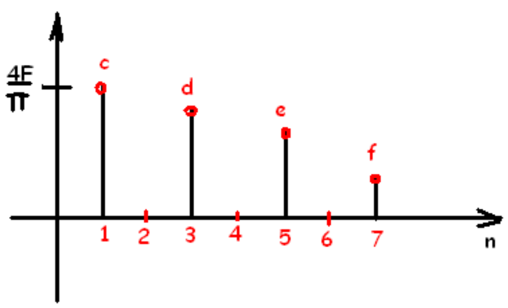
dove per $n = 1; n = 3; n = 5; etc \quad => \ b_n \neq 0 \quad => \ b_n = \frac{4F}{n\pi}$

Invece per $n = 2; n = 4; n = 6; etc \quad => \ b_n = 0$.

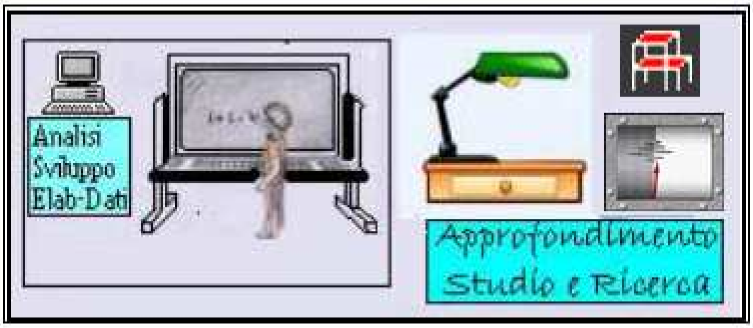
Lo sviluppo in serie diventa:

$$f(t) = \frac{4F}{\pi}\sin\omega t + \frac{4F}{3\pi}\sin 3\omega t + \frac{4F}{5\pi}\sin 5\omega t + \ \ldots\ldots..$$

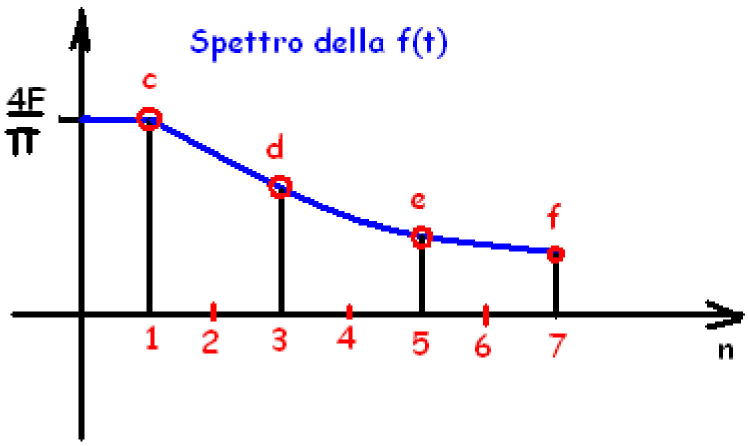
per cui passando alla **RAPPRESENTAZIONE SPETTRALE** avremo che la serie comprende solo armoniche **DISPARI** in seno.



Tale rappresentazione mette in risalto l'ampiezza $\left(\frac{4F}{\pi}\right)_{n=1}$ delle armoniche n=1, 3, 5 ……..

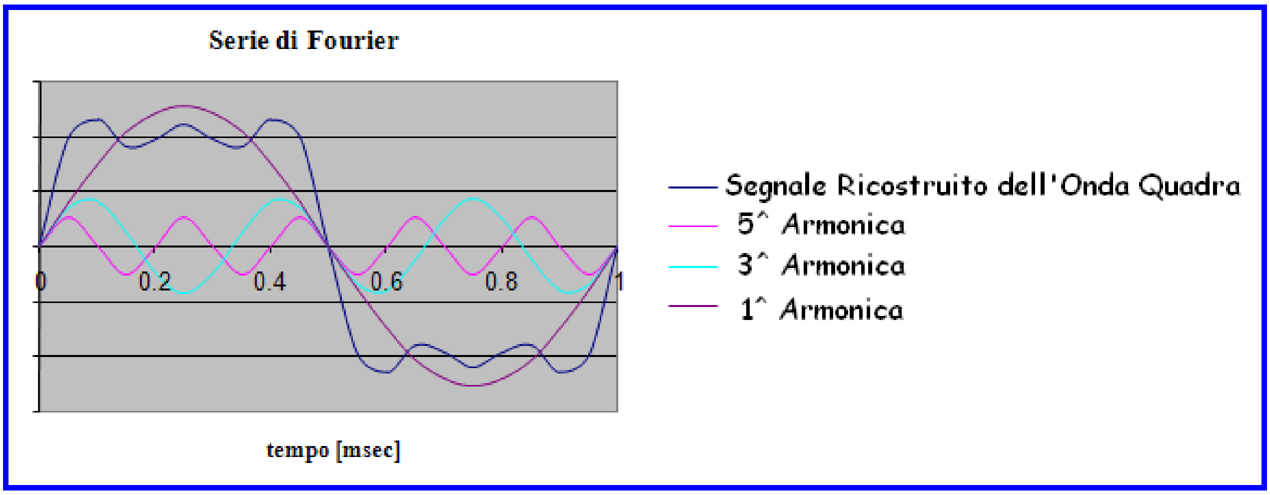


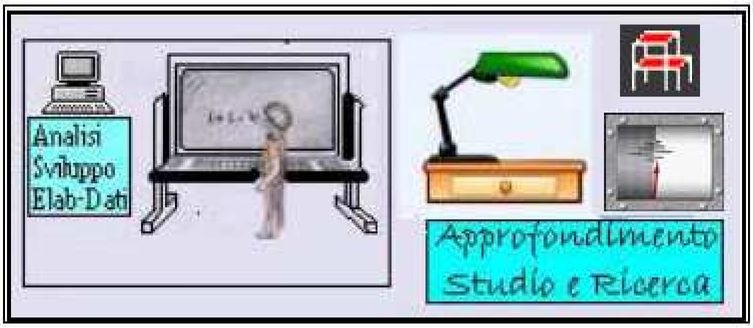
Inviluppando i punti c, d, e, f avremo:



che è lo SPETTRO della f(t).

SINTESI E RICOSTRUZIONE DEL SEGNALE





Bibliografia:

1. Appunti di Complementi di Matematica – Teoria del Prof. Maceri Franco - Edizione CUEN.
2. Esercitazione di Complementi di Matematica del Prof. Gantile Giuseppe e prof. Mellone Laura – Edizione CUEN.
3. Teoria ed applicazione dei Circuiti Elettrici di Joseph A. Edminister – Collana SCHAUM ETAS/KOMPASS.