

# Un approccio analitico per la valutazione del grado di irregolarità planimetrica di edifici reali

Melina Bosco, Edoardo Michele Marino, Pier Paolo Rossi

*Dipartimento di Ingegneria Civile ed Ambientale, Università di Catania, V.le A. Doria, 6, 95125 Catania*

*Keywords: edifici planimetricamente irregolari, eccentricità strutturale, rigidità torsionale*

## ABSTRACT:

Il grado di irregolarità in pianta di un edificio può essere valutato rigorosamente solo per edifici ad un solo piano (sistema monopiano) e per quelli a più piani in cui l'irregolarità si mantiene identica ad ogni piano (sistema multipiano regolarmente asimmetrico). Per questi sistemi, il grado di irregolarità in pianta è caratterizzato da due soli parametri, valutabili mediante metodi ben noti in letteratura: l'eccentricità strutturale  $e_s$  ed il rapporto  $\Omega_0$  tra le pulsazioni rotazionali e traslazionali del corrispondente sistema bilanciato. Purtroppo, gli edifici reali raramente appartengono alle categorie prima menzionate. Pertanto i parametri  $e_s$  ed  $\Omega_0$  non possono essere calcolati per gli edifici reali con i metodi validi per i sistemi monopiano e per quelli regolarmente asimmetrici. Il grado di irregolarità degli edifici reali può essere valutato mediante metodi analitici presenti in letteratura che tuttavia richiedono l'esecuzione di specifiche analisi strutturali. Nel presente articolo è invece proposto un metodo analitico che supera tale inconveniente. Il metodo fornisce i valori di  $e_s$  ed  $\Omega_0$  in funzione degli spostamenti delle estremità dell'impalcato causati da assegnate distribuzioni di forze orizzontali e coppie agenti sugli impalcati. Nell'articolo l'efficacia del metodo proposto è mostrata attraverso esempi numerici relativi ad edifici regolarmente asimmetrici e reali caratterizzati da diversi gradi di irregolarità planimetrica.

## 1 INTRODUZIONE

Gli edifici rispondono sempre alle azioni sismiche con contemporanee traslazioni e rotazioni degli impalcati. Tuttavia, tali rotazioni risultano rilevanti e dunque aggravano significativamente lo stato di sollecitazione e di danneggiamento degli edifici solo in presenza di particolari caratteristiche dinamiche e meccaniche degli stessi. Come dimostrato da numerosi studi (ad es. Hejal e Chopra, 1987), la propensione degli edifici planimetricamente irregolari a produrre in campo elastico spostamenti da rotazione importanti rispetto a quelli da traslazione (tale proprietà è denominata nel seguito 'grado di irregolarità planimetrica') è funzione dell'eccentricità strutturale  $e_s$  e del rapporto  $\Omega_0$  tra le pulsazioni rotazionali e traslazionali del sistema torsionalmente bilanciato corrispondente (ovvero del sistema ottenuto spostando il centro di massa in corrispondenza del centro di rigidità). I parametri  $e_s$  ed  $\Omega_0$  sono determinabili in modo rigoroso solo per sistemi monopiano e per particolari sistemi multipiano. Infatti, nei primi l'eccentricità strutturale è definita come la distanza tra il centro di massa e quello di rigidità. Inoltre, negli stessi sistemi il parametro  $\Omega_0$  può essere calco-

lato come rapporto tra il raggio d'inerzia delle rigidità degli elementi resistenti rispetto al baricentro delle rigidità ed il raggio d'inerzia delle masse rispetto al baricentro delle masse. Nei sistemi multipiano i summenzionati parametri possono essere calcolati rigorosamente solo se il grado di irregolarità si ripete identicamente ad ogni piano (sistemi regolarmente asimmetrici). In tali sistemi (Hejal e Chopra, 1987) i centri di massa e di rigidità dei vari piani appartengono a due assi verticali e dunque l'eccentricità strutturale è eguale a tutti i piani. Inoltre, stante la costanza dei raggi d'inerzia delle masse e delle rigidità a tutti i piani, il parametro  $\Omega_0$  può essere ancora calcolato come rapporto tra il raggio d'inerzia delle rigidità degli elementi resistenti rispetto al baricentro delle rigidità ed il raggio d'inerzia delle masse rispetto al baricentro delle masse.

Purtroppo, gli edifici reali raramente appartengono alle categorie descritte. Pertanto, i parametri  $e_s$  ed  $\Omega_0$  non possono essere calcolati per gli edifici reali con i metodi validi per i sistemi monopiano o regolarmente asimmetrici. Ciò stante, negli ultimi anni sono stati proposti metodi analitici per la valutazione dell'eccentricità strutturale e del parametro  $\Omega_0$  degli edifici reali (Makarios e Anastassiadis, 1998; Calderoni *et al.*, 2002; Marino e Rossi, 2004). Tali metodi,

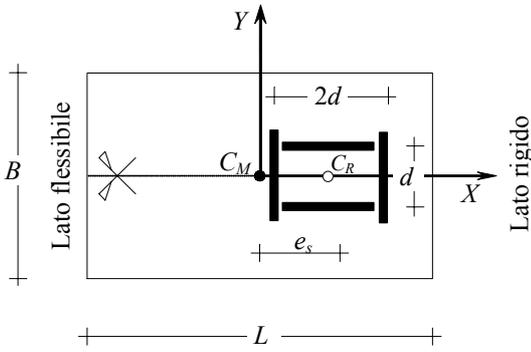


Figura 1: Schema planimetrico del generico sistema monopiano analizzato.

tuttavia, possiedono un limite non trascurabile, ovvero richiedono la valutazione della risposta strutturale a particolari sistemi di forze, e dunque l'esecuzione di analisi sismiche non altrimenti necessarie.

Al fine di superare tale inconveniente, nel presente articolo è formulato un nuovo metodo analitico per la determinazione dell'eccentricità strutturale  $e_s$  e del parametro  $\Omega_\theta$ . Esso è applicabile ai sistemi reali e fornisce i valori dei precedenti parametri in funzione degli spostamenti delle estremità dell'impalcato causati da distribuzioni arbitrarie di forze orizzontali e coppie. A differenza dei metodi analitici precedentemente citati, il metodo proposto consente di determinare i parametri  $e_s$  ed  $\Omega_\theta$  utilizzando esclusivamente i risultati dell'analisi sismica eseguita nell'ambito della normale procedura di verifica strutturale. La sua efficacia è mostrata attraverso esempi numerici relativi ad edifici regolarmente e non regolarmente asimmetrici.

## 2 SISTEMI MONOPIANO

Il sistema monopiano è costituito da un impalcato rigido nel proprio piano e sorretto da elementi resistenti inestensibili e dotati di rigidezza solo nel proprio piano. La massa del sistema è concentrata in corrispondenza dell'impalcato poiché si ipotizza che gli elementi resistenti abbiano massa nulla.

Il grado di irregolarità in pianta del sistema è caratterizzato dall'eccentricità strutturale  $e_s$  e dal rapporto  $\Omega_\theta$  tra le pulsazioni rotazionali e traslazionali del sistema bilanciato corrispondente. In particolare, il parametro  $\Omega_\theta$  associato al generico sistema asimmetrico è definito come il rapporto tra la pulsazione del modo di vibrazione rotazionale ( $\omega_\theta$ ) e quella del modo di vibrazione traslazionale nella direzione dell'eccitazione sismica ( $\omega_x$  o  $\omega_y$ ) del corrispondente sistema torsionalmente bilanciato. Qualora  $\omega_x$  ed  $\omega_y$  siano diversi,  $\Omega_\theta$  assume due valori diversi a seconda della direzione considerata ( $\Omega_{\theta x}$  e  $\Omega_{\theta y}$ ). Nel sistema monopiano tale parametro può essere anche calcolato come il rapporto tra il raggio d'inerzia delle rigidezze degli elementi resistenti  $r_k$  rispetto al centro di

rigidezza  $C_R$  ed il raggio d'inerzia delle massa  $r_m$  rispetto al centro di massa  $C_M$ . A tal proposito si ricorda che valgono le seguenti relazioni:

$$r_{kx} = \sqrt{K_\theta / K_y} \quad (1)$$

$$r_{ky} = \sqrt{K_\theta / K_x} \quad (2)$$

dove  $K_\theta$  è la rigidezza torsionale del sistema rispetto a  $C_R$  mentre  $K_x$  e  $K_y$  sono le rigidezze laterali in direzione  $X$  ed  $Y$ . Inoltre:

$$r_m = \sqrt{I_m / m} \quad (3)$$

dove  $I_m$  è il momento d'inerzia polare della massa dell'impalcato rispetto a  $C_M$  ed  $m$  è la massa dell'impalcato.

La presenza dei fenomeni di accoppiamento latero-torsionale produce la variazione degli spostamenti massimi dell'impalcato rispetto allo spostamento  $u_o$  del corrispondente sistema bilanciato e dunque delle sollecitazioni negli elementi resistenti verticali. Al fine di mostrare tali effetti sono determinati i massimi spostamenti d'impalcato di un insieme di sistemi monopiano irregolari in pianta caratterizzati da diversi valori di  $e_s$  ed  $\Omega_\theta$ . I sistemi in esame possiedono un impalcato di forma rettangolare ( $L = 29.5$  m e  $B = 13$  m) sostenuto da quattro elementi resistenti verticali di eguale rigidezza laterale. In particolare, degli elementi resistenti due sono paralleli all'asse  $X$  e due all'asse  $Y$  (Fig. 1). I sistemi considerati sono, inoltre, simmetrici rispetto all'asse  $X$  essendo gli elementi resistenti simmetrici rispetto all'asse  $X$  ed il centro di massa coincidente con il baricentro geometrico dell'impalcato. Lo spostamento degli elementi resistenti lungo l'asse  $X$  consente di modificare la posizione del centro di rigidezza e, dunque, di ottenere il valore desiderato dell'eccentricità strutturale. La variazione della distanza reciproca tra gli elementi resistenti consente, invece, la modifica del raggio d'inerzia delle rigidezze e, dunque, del rapporto  $\Omega_\theta$ . In relazione agli schemi strutturali da esaminare sono considerati due possibili valori di  $e_s$  ( $0.05 L$  e  $0.15 L$ ) e tre valori di  $\Omega_\theta$  ( $0.6$ ,  $1.0$  e  $1.4$ ), così da ottenere sei differenti sistemi monopiano irregolari in pianta.

Per ciascuno degli sistemi generati è, inoltre, determinato il corrispondente sistema monopiano bilanciato. A tal proposito si fa notare che i sistemi bilanciati rispondono tutti allo stesso modo alle azioni sismiche poiché sono tutti caratterizzati dalla stessa rigidezza laterale e, dunque, dallo stesso periodo traslazionale di vibrazione.

Per ciascuno dei sistemi sopra descritti, sia quelli irregolari in pianta che quelli bilanciati, è determinata mediante analisi modale con spettro di risposta la distribuzione in pianta dei massimi spostamenti d'impalcato  $u_y$  dovuti ad un sisma agente in direzione  $Y$ . L'azione sismica considerata è caratterizzata

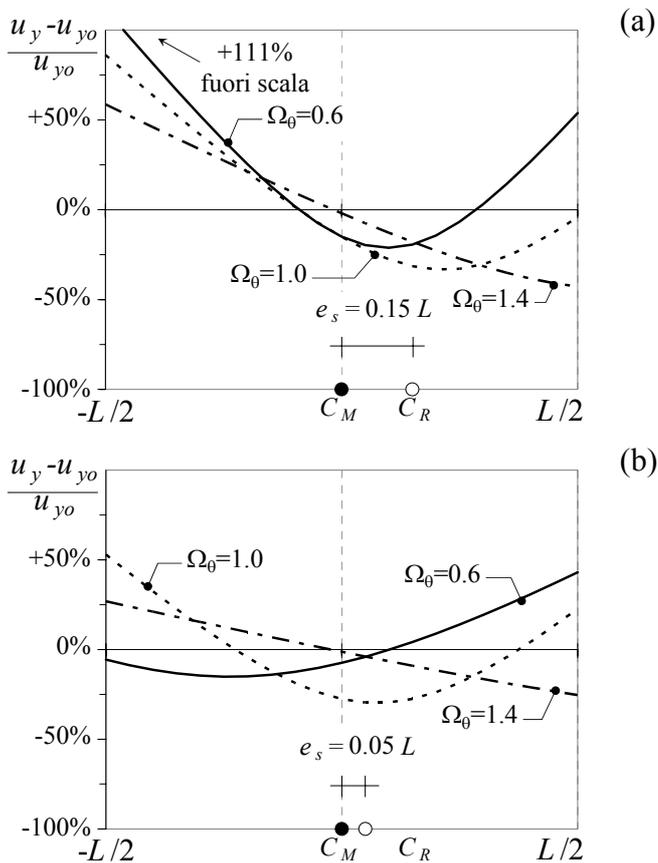


Figura 2: Variazione percentuale degli spostamenti d'impalcato di sistemi irregolari in pianta rispetto a quelli del corrispondente sistema bilanciato: (a) sistemi con  $e_s = 0.15 L$ , (b) sistemi con  $e_s = 0.05 L$ .

dallo spettro di risposta elastico proposto dall'Ordinanza del Presidente del Consiglio dei Ministri n. 3431 (2005) per suoli di classe B e scalato attraverso un'accelerazione al suolo pari ad  $a_g = 0.35 g$ .

In Figura 2 è rappresentata la differenza percentuale tra gli spostamenti di ciascun sistema irregolare in pianta  $u_y$  e quello del sistema bilanciato  $u_{yo}$ . Dal confronto tra le diverse curve emerge chiaramente che, a parità di  $\Omega_\theta$ , il contributo delle rotazioni agli spostamenti d'impalcato cresce con l'eccentricità strutturale  $e_s$  e che tale osservazione si ripete dal punto di vista qualitativo pressoché identica con riferimento a sistemi sia torsionalmente rigidi che flessibili. In particolare, nel caso in cui  $\Omega_\theta$  è uguale ad 1.4 il massimo incremento percentuale dello spostamento del sistema irregolare rispetto a quello del corrispondente sistema bilanciato è del 25% se  $e_s = 0.05 L$  e, invece, del 55% se  $e_s = 0.15 L$ . Inoltre, se si confrontano le curve corrispondenti a sistemi con la stessa eccentricità si osserva che anche il parametro  $\Omega_\theta$  esercita una notevole influenza sulla risposta sismica dei sistemi irregolari in pianta. Infatti, nei sistemi torsionalmente rigidi la forte rigidità torsionale limita gli spostamenti indotti dalle rotazioni d'impalcato anche in presenza di eccentricità elevate. Viceversa, nei sistemi torsionalmente flessibili la bassa rigidità torsionale produce importanti incrementi degli spostamenti per effetto delle rota-

zioni di impalcato, soprattutto in presenza di elevate eccentricità strutturali. Ciò è evidente in Figura 2 dove, con riferimento a sistemi con  $e_s = 0.15 L$ , il summenzionato massimo incremento percentuale dello spostamento risulta essere del 55% nel caso in cui  $\Omega_\theta$  è pari a 1.4 ed uguale a circa il 110% nel caso in cui  $\Omega_\theta$  è pari 0.6.

Qualche ulteriore considerazione merita il caso in cui  $\Omega_\theta$  è uguale ad uno. Dalla Figura 2 si osserva, infatti, che in questi sistemi gli spostamenti prodotti dalle rotazioni d'impalcato sono notevoli sebbene la rigidità torsionale dei sistemi sia comunque rilevante. Ciò accade perché in tali sistemi il grado di accoppiamento tra i modi di vibrazione è elevato.

La Figura 2 mostra, infine, un fenomeno interessante e non facilmente prevedibile. Nel caso dei sistemi irregolari in pianta con  $\Omega_\theta$  maggiore od uguale ad uno le rotazioni d'impalcato possono determinare un incremento degli spostamenti d'impalcato rispetto a quelli del corrispondente sistema bilanciato anche sul lato rigido dell'edificio (e non una riduzione come erroneamente ci si potrebbe aspettare). Ad esempio, si osserva in Figura 2 che per il sistema con  $e_s = 0.15 L$  e  $\Omega_\theta = 0.6$  lo spostamento del lato rigido del sistema irregolare in pianta è superiore di circa il 50% rispetto a quello del sistema bilanciato.

### 3 EDIFICI MULTIPIANO

I parametri  $e_s$  ed  $\Omega_\theta$  possono essere definiti e determinati rigorosamente per un sistema strutturale monopiano perché la rigidità dei suoi elementi resistenti può essere descritta attraverso quantità scalari. Nel caso di edifici multipiano, invece, la rigidità degli elementi resistenti verticali è descritta attraverso matrici e, pertanto, i metodi utilizzabili per i sistemi monopiano nel calcolo di  $e_s$  ed  $\Omega_\theta$  non sono più validi. Esiste, tuttavia, una particolare categoria di edifici, detti *regolarmente asimmetrici*, per i quali tutte le quantità definite nel paragrafo precedente, incluse  $e_s$  ed  $\Omega_\theta$ , conservano validità fisica e possono essere determinate attraverso metodi sostanzialmente uguali a quelli validi per sistemi monopiano.

Col termine edificio regolarmente asimmetrico si intende un edificio che soddisfa le ipotesi di seguito elencate (Hejal e Chopra, 1987; Marino, 2002):

1. gli elementi resistenti verticali collegati da impalcato rigidi nel proprio piano devono essere disposti secondo una griglia ortogonale;
2. gli elementi resistenti verticali devono possedere matrici di rigidità laterali tra loro proporzionali;
3. i centri di massa di tutti i piani devono essere allineati lungo un asse verticale;
4. il raggio d'inerzia delle masse deve essere uguale a tutti i piani.

In un edificio regolarmente asimmetrico di  $N$  piani, in virtù della proporzionalità che esiste tra le matrici di rigidezza degli elementi resistenti, i centri di rigidezza  $C_R$  risultano allineati lungo un asse verticale. Poiché anche i centri di massa sono allineati lungo un'asse verticale, l'intero edificio sarà caratterizzato da un'unica eccentricità strutturale  $e_s$ , che in generale avrà due componenti  $e_{sx}$  ed  $e_{sy}$ . Si dimostra, inoltre, che i  $3N$  modi di vibrazione del corrispondente sistema bilanciato possono essere ordinati in  $N$  gruppi di tre modi e che il rapporto tra la pulsazioni torsionale  $\omega_{\theta j}$  e quelle traslazionali  $\omega_{xj}$  ed  $\omega_{yj}$  (nel caso di  $\omega_{xj}$  diversa da  $\omega_{yj}$ ) della  $j$ -esima terna dei modi di vibrazione sono indipendenti dalla terna di modi considerati. Tale rapporti generalmente si denotano con i simboli  $\Omega_{\theta x}$  ed  $\Omega_{\theta y}$ .

Le quantità sopra descritte possono essere determinate attraverso gli stessi metodi utilizzati per i sistemi monopiano. In particolare, si noti che le matrici di rigidezza  $K_{xi}$  e  $K_{yi}$  degli elementi resistenti disposti lungo le direzioni  $X$  ed  $Y$  possono essere scritte come segue:

$$\mathbf{K}_{xi} = k_{xi} \mathbf{K} \quad (4a)$$

$$\mathbf{K}_{yi} = k_{yi} \mathbf{K} \quad (4b)$$

dove  $\mathbf{K}$  è una matrice di riferimento che descrive la distribuzione della rigidezza uguale per tutti gli elementi resistenti, mentre  $k_{xi}$  e  $k_{yi}$  sono costanti di proporzionalità che rappresentano la rigidezza dei singoli elementi strutturali. Dunque, la posizione di  $C_R$ , nonché i valori di  $r_{kx}$  ed  $r_{ky}$  coincidono rispettivamente con la posizione del baricentro delle rigidezze  $k_{xi}$  e  $k_{yi}$  e con i loro raggi d'inerzia rispetto a  $C_R$  misurati lungo gli assi  $X$  ed  $Y$ . Le componenti dell'eccentricità strutturale,  $e_{sx}$  ed  $e_{sy}$ , si calcolano come le distanze tra il baricentro delle masse ed il centro di rigidezza lungo  $X$  ed  $Y$ . I rapporti delle pulsazioni torsionale e traslazionali  $\Omega_{\theta x}$  ed  $\Omega_{\theta y}$  coincidono rispettivamente con i rapporti di  $r_{kx}$  ed  $r_{ky}$  con  $r_m$ . Infine, dalle proprietà dei modi di vibrazione degli edifici regolarmente asimmetrici discende che il valore massimo assunto dall'ente di risposta  $r$  dell'edificio (spostamenti, sollecitazioni, ecc.) durante il sisma può essere espresso mediante la seguente relazione:

$$r = r_o \cdot \bar{r} \quad (5)$$

dove  $r_o$  rappresenta il valore dello stesso ente di risposta calcolato nel corrispondente sistema multipiano bilanciato mediante analisi modale con spettro di risposta attraverso combinazione dei contributi modali secondo la regola della radice quadrata della somma dei quadrati (SRSS);  $\bar{r}$  il valore dell'ente di risposta (corrispondente ad  $r$ ) valutato nel sistema monopiano asimmetrico equivalente mediante regola di combinazione CQC e normalizzato rispetto al sistema monopiano bilanciato. Il sistema monopiano

prima citato è quello che possiede centri di massa e di rigidezza nelle stesse posizioni di quelli dell'edificio multipiano, e dunque eccentricità strutturali pari ad  $e_{sx}$  ed  $e_{sy}$  e rapporti tra pulsazioni torsionale e traslazionali pari ad  $\Omega_{\theta x}$  ed  $\Omega_{\theta y}$ .

Al fine di mostrare le proprietà degli edifici regolarmente asimmetrici nonché le peculiarità della loro risposta sismica, è analizzato l'edificio regolarmente asimmetrico descritto in Figura 3. L'edificio è dotato di sei impalcati rigidi nel proprio piano di forma rettangolare ( $29.5 \times 13$  m) aventi massa pari a 232.3 t e raggio d'inerzia delle masse pari ad 8.85 m ad ogni livello. Il centro di massa  $C_M$  coincide con il baricentro geometrico dell'impalcato  $C_G$  a tutti i piani. Gli elementi resistenti verticali possiedono rigidezza solo nel proprio piano e sono definiti da 12 telai (4 telai con sette campate lungo la direzione  $X$  ed 8 telai con tre campate lungo la direzione  $Y$ ). I telai sono simmetricamente disposti rispetto al baricentro geometrico dell'impalcato ed i momenti d'inerzia di travi e pilastri variano proporzionalmente da un telaio all'altro. Le matrici di rigidezza dei telai sono, dunque, tra loro proporzionali (i coefficienti di proporzionalità sono elencati in Figura 3).

Al fine di determinare il centro di rigidezza ed i raggi d'inerzia delle rigidezze degli elementi resistenti, le rigidezze dei telai sono assunte eguali ai coefficienti di proporzionalità summenzionati (Fig. 3). Si suppone, inoltre, che l'ascissa e l'ordinata del centro di rigidezza rispetto al sistema di riferimento fissato siano pari rispettivamente a 2.95 m ( $0.10 L$ ) e 0.52 m ( $0.05 B$ ). Poiché il centro di massa  $C_M$  è coincidente con l'origine del sistema di riferimento il sistema è torsionalmente accoppiato e presenta eccentricità nelle due direzioni pari a  $e_{sx} = 0.10 L$  ed  $e_{sy} = 0.05 B$ . I due raggi d'inerzia delle rigidezze  $r_{kx}$  ed  $r_{ky}$  sono uguali rispettivamente a 7.08 m e 10.62 m. Dividendo  $r_{kx}$  ed  $r_{ky}$  per  $r_m$  (8.85 m) si ottengono i due rapporti  $\Omega_{\theta x}$  ed  $\Omega_{\theta y}$  pari rispettivamente a 0.8 e 1.2.

Spostando i centri di massa sui centri di rigidezza si ottiene il corrispondente sistema bilanciato. Per tale sistema sono state determinate le pulsazioni dei primi tre modi di vibrazione che risultano pari a  $\omega_{\theta 1} = 5.02$  rad/s,  $\omega_{x1} = 6.28$  rad/s ed  $\omega_{y1} = 4.19$  rad/s. È interessante osservare che ricalcolando  $\Omega_{\theta x}$  ed  $\Omega_{\theta y}$  come rapporti tra la pulsazione torsionale  $\omega_{\theta 1}$  e quelle traslazionali  $\omega_{x1}$  ed  $\omega_{y1}$ , ovvero applicando rigorosamente la definizione, si riottengono i valori  $\Omega_{\theta x} = 0.8$  ed  $\Omega_{\theta y} = 1.2$ .

Sia l'edificio regolarmente asimmetrico analizzato che il corrispondente sistema bilanciato sono sottoposti all'azione di due sismi che agiscono, non contemporaneamente, lungo gli assi  $X$  ed  $Y$ . Tali sismi sono caratterizzati dallo stesso spettro considerato per il sistema monopiano. Per ciascuna delle direzioni del sisma la risposta sismica dell'edificio analizzato, valutata determinando i contributi modali e combinandoli mediante il criterio CQC, è confron-

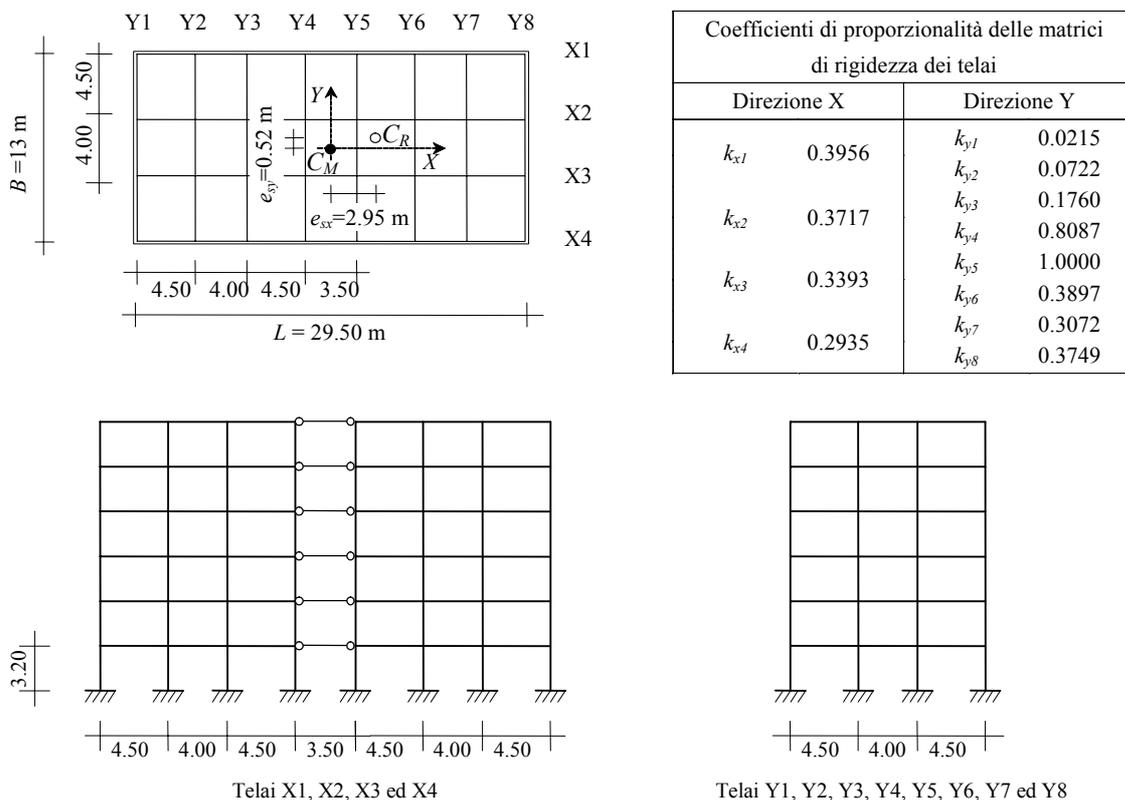


Figura 3. Caratteristiche dell'edificio analizzato: pianta, schema geometrico dei telai e coefficienti di proporzionalità tra le matrici rigidezza.

tata con quella del corrispondente sistema bilanciato. In particolare, per ciascun sistema, è determinata la distribuzione in pianta ai diversi piani dei massimi spostamenti assoluti d'impalcato nella direzione del sisma. Quindi, sono determinati gli scarti percentuali tra gli spostamenti dell' $i$ -esimo piano ( $u_{xi}$  e  $u_{yi}$ ) del sistema irregolare in pianta e lo spostamento del corrispondente sistema bilanciato ( $u_{xoi}$  e  $u_{yoi}$ ). I risultati distinti per le direzioni  $X$  ed  $Y$  sono mostrati in Figura 4. Si osserva che, sia nel caso di sisma agente in direzione  $X$  che in quello di sisma agente in direzione  $Y$ , le curve che forniscono gli scarti percentuali tra gli spostamenti del sistema asimmetrico analizzato e quelli del corrispondente sistema bilanciato si sovrappongono. Ciò significa che gli effetti dell'accoppiamento latero-torsionale si ripetono identicamente a tutti i piani. È dunque ragionevole pensare che sia possibile cogliere tali effetti mediante un unico sistema monopiano equivalente.

Tale sistema è individuato nel sistema monopiano che possiede la stessa pianta, la stessa eccentricità strutturale in direzione  $X$  ed  $Y$  e che è caratterizzato dagli stessi valori di  $r_{kx}$ ,  $r_{ky}$  ed  $r_m$  dell'edificio asimmetrico analizzato. Per tale sistema e per il corrispondente sistema bilanciato è valutata la risposta sismica ai sismi agenti in direzione  $X$  ed  $Y$ . Gli scarti percentuali tra gli spostamenti del sistema monopiano asimmetrico e lo spostamento del corrispondente sistema bilanciato (evidenziati nella Figura 4 mediante pallini) sono praticamente uguali a quelli rela-

tivi al sistema regolarmente asimmetrico per entrambe le direzioni del sisma considerate.

#### 4 METODO PROPOSTO

Il metodo descritto si ripropone di valutare i parametri  $e_s$  ed  $\Omega_\theta$  nel caso di edifici reali in cui le formule valide per i sistemi regolarmente asimmetrici non siano applicabili. In particolare, ci si attende che i valori ottenuti dei parametri citati siano fortemente rappresentativi della risposta dinamica dei numerosi sistemi esistenti che, pur essendo a rigore non regolarmente asimmetrici, sono dotati di piano tipo. È ragionevole pensare infatti che l'irregolarità in pianta di tali edifici può essere ancora caratterizzata attraverso un unico valore dei parametri  $e_s$  ed  $\Omega_\theta$ .

Nel seguito, dallo studio della risposta statica di sistemi monopiano irregolari in pianta sottoposti ad insiemi di forze del tutto generici sono ricavate delle relazioni analitiche per la determinazione dei parametri ( $e_s$  ed  $\Omega_\theta$ ) che ne caratterizzano il grado di irregolarità.

Per un sistema monopiano, di cui siano note le rigidezze laterale e torsionale, lo spostamento di un qualunque punto dell'impalcato provocato da un qualunque sistema di forze (che nel più generale dei casi è costituito da due forze agenti secondo due direzioni ortogonali ed applicate in uno stesso punto dell'impalcato e da una coppia) può essere espresso

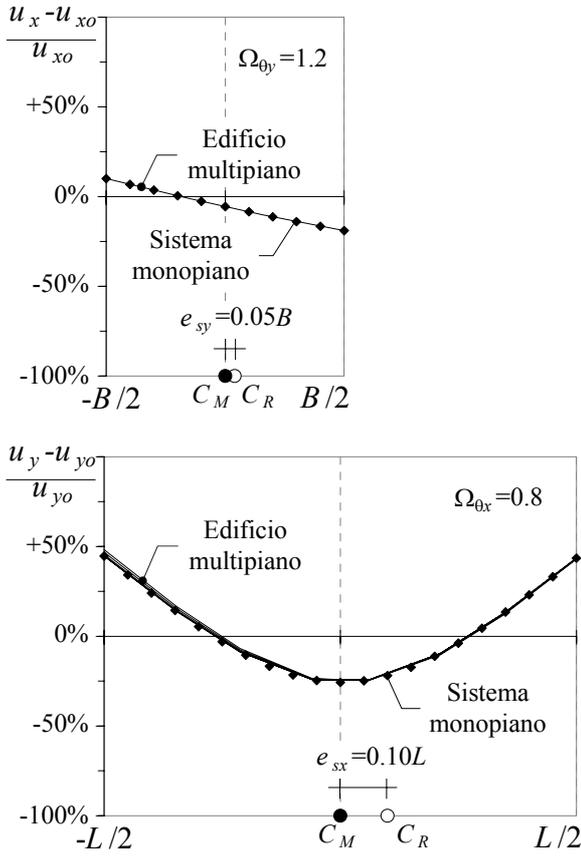


Figura 4. Variazione percentuale degli spostamenti d'impalcato di sistemi regolarmente asimmetrici e monopiano rispetto a quelli dei corrispondenti sistemi bilanciati: (a) spostamenti in direzione  $X$ , (b) spostamenti in direzione  $Y$ .

in maniera analitica. Con riferimento al sistema mostrato in Figura 5, privo di qualunque asse di simmetria e soggetto all'azione di due forze  $f_x$  ed  $f_y$  applicate nel punto  $O$  (assunto quale origine del sistema di riferimento) ed una coppia  $f_\theta$ , gli spostamenti  $u_x$  ed  $u_y$  del generico punto dell'impalcato di coordinate  $x$  ed  $y$  sono dati dalle seguenti espressioni:

$$u_x = \frac{f_x}{K_x} - \frac{f_\theta - f_y x_R + f_x y_R}{K_x r_{ky}^2} (y - y_R) \quad (6a)$$

$$u_y = \frac{f_y}{K_y} + \frac{f_\theta - f_y x_R + f_x y_R}{K_y r_{kx}^2} (x - x_R) \quad (6b)$$

dove  $x_R$  ed  $y_R$  sono le coordinate del centro di rigidezza  $C_R$  rispetto al sistema di riferimento adottato,  $K_x$  e  $K_y$  sono le rigidezze laterali del sistema in direzione  $X$  ed  $Y$ , mentre  $r_{kx}$  ed  $r_{ky}$  sono i raggi d'inerzia delle rigidezze rispetto a  $C_R$ . Gli spostamenti  $u_x$  ed  $u_y$  sono dati dalla somma di due termini: il contributo dovuto alla traslazione dell'impalcato per effetto della forza  $f_x$  o  $f_y$  applicata nel centro di rigidezza  $C_R$  e quello dovuto alla rotazione dell'impalcato attorno a  $C_R$  causata dalla coppia  $f_\theta$  e dai momenti di trasporto  $f_y x_R$  ed  $f_x y_R$ . Forze e spostamenti sono assunti positivi se concordi con il sistema di riferimento,

mentre coppie e rotazioni sono assunte positive se antiorarie.

Utilizzando le relazioni (6a) e (6b) è possibile costruire un sistema di equazioni che consentono di determinare le coordinate  $x_R$  ed  $y_R$  del centro di rigidezza del sistema strutturale ed i raggi d'inerzia delle rigidezze  $r_{kx}$  ed  $r_{ky}$  attraverso il procedimento di seguito descritto.

Assegnati due sistemi di forze ( $f_{x1}, f_{y1}, f_{\theta1}$  ed  $f_{x2}, f_{y2}, f_{\theta2}$ ), si possono determinare con un qualunque programma di calcolo gli spostamenti in direzione  $X$  di due punti dell'impalcato causati da detti sistemi di forze, ad esempio di due punti appartenenti ai lati inferiore e superiore dell'impalcato ( $u_{B1}, u_{B2}, u_{T1}$  ed  $u_{T2}$ ), e quelli in direzione  $Y$  di altri due punti dell'impalcato, ad esempio appartenenti ai lati sinistro e destro dell'impalcato ( $u_{L1}, u_{L2}, u_{R1}$  ed  $u_{R2}$ ). Quindi si calcola il rapporto di ciascuna coppia di spostamenti. Se si esprimono gli spostamenti  $u_{B1}$  ed  $u_{B2}$  attraverso l'equazione (6a) il loro rapporto è dato da:

$$\frac{u_{B1}}{u_{B2}} = \frac{\frac{f_{x1}}{K_x} + \frac{f_{\theta1} - f_{y1} x_R + f_{x1} y_R}{K_x r_{ky}^2} (\beta_y L_y + y_R)}{\frac{f_{x2}}{K_x} + \frac{f_{\theta2} - f_{y2} x_R + f_{x2} y_R}{K_x r_{ky}^2} (\beta_y L_y + y_R)} \quad (7)$$

dove  $\beta_y L_y$  è la distanza del lato inferiore dell'impalcato dall'origine del sistema di riferimento. Sviluppando i prodotti, l'equazione (7) può essere riscritta nella seguente forma:

$$\frac{1}{r_{ky}^2} (f_{xB} y_R^2 - f_{yB} x_R y_R - f_{yB} \beta_y L_y x_R + f_{xB} \beta_y L_y y_R + f_{\theta B} y_R + f_{\theta B} \beta_y L_y) = -f_{xB} \quad (8)$$

con

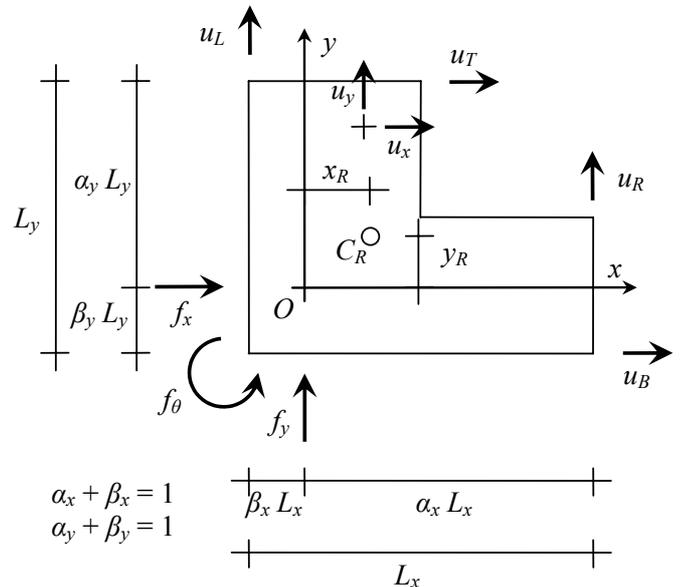


Figura 5. Spostamenti dei punti dell'impalcato causati da un assegnato sistema di forze.

$$f_{xB} = f_{x1} - \frac{u_{B1}}{u_{B2}} f_{x2} \quad (9a)$$

$$f_{yB} = f_{y1} - \frac{u_{B1}}{u_{B2}} f_{y2} \quad (9b)$$

$$f_{\theta B} = f_{\theta 1} - \frac{u_{B1}}{u_{B2}} f_{\theta 2} \quad (9c)$$

Si noti che in questa relazione le uniche incognite sono  $x_R$ ,  $y_R$  ed  $r_{ky}$ . La rigidezza  $K_x$ , che in generale non è nota, non compare nell'equazione (8). Operando in maniera analoga con il rapporto tra  $u_{T1}$  ed  $u_{T2}$  si ottiene:

$$\frac{1}{r_{ky}^2} (f_{xT} y_R^2 - f_{yT} x_R y_R + f_{yT} \alpha_y L_y x_R + f_{xT} \alpha_y L_y y_R + f_{\theta T} y_R - f_{\theta T} \alpha_y L_y) = -f_{xT} \quad (10)$$

con

$$f_{xT} = f_{x1} - \frac{u_{T1}}{u_{T2}} f_{x2} \quad (11a)$$

$$f_{yT} = f_{y1} - \frac{u_{T1}}{u_{T2}} f_{y2} \quad (11b)$$

$$f_{\theta T} = f_{\theta 1} - \frac{u_{T1}}{u_{T2}} f_{\theta 2} \quad (11c)$$

Dividendo membro a membro le equazioni (8) e (10) si elimina l'incognita  $r_{ky}$  e si ottiene l'equazione:

$$a_x x_R y_R + b_x x_R + c_x y_R + d_x = 0 \quad (12)$$

con

$$a_x = f_{xT} f_{yB} - f_{xB} f_{yT} \quad (13a)$$

$$b_x = f_{xT} f_{yB} \beta_y L_y + f_{xB} f_{yT} \alpha_y L_y \quad (13b)$$

$$c_x = -(f_{xB} f_{xT} L_y + f_{xT} f_{\theta B} - f_{xB} f_{\theta T}) \quad (13c)$$

$$d_x = -(f_{xT} f_{\theta B} \beta_y L_y + f_{xB} f_{\theta T} \alpha_y L_y) \quad (13d)$$

dove le uniche incognite sono le coordinate del centro di rigidezza  $x_R$  ed  $y_R$ .

Ripetendo il procedimento sin qui descritto con gli spostamenti in direzione  $Y$  dei lati sinistro e destro dell'impalcato  $u_{L1}$ ,  $u_{L2}$ ,  $u_{R1}$  ed  $u_{R2}$ , si ottiene:

$$\frac{1}{r_{kx}^2} (f_{yL} x_R^2 - f_{xL} x_R y_R + f_{yL} \beta_x L_x x_R + f_{yL} \alpha_x L_x y_R - f_{\theta L} \beta_x L_x) = -f_{yL} \quad (14)$$

con

$$f_{xL} = f_{x1} - \frac{u_{L1}}{u_{L2}} f_{x2} \quad (15a)$$

$$f_{yL} = f_{y1} - \frac{u_{L1}}{u_{L2}} f_{y2} \quad (15b)$$

$$f_{\theta L} = f_{\theta 1} - \frac{u_{L1}}{u_{L2}} f_{\theta 2} \quad (15c)$$

$$\frac{1}{r_{kx}^2} (f_{yR} x_R^2 - f_{xR} x_R y_R - f_{yR} \alpha_x L_x x_R + f_{yR} \alpha_x L_x y_R + f_{\theta R} \alpha_x L_x) = -f_{yR} \quad (16)$$

con

$$f_{xR} = f_{x1} - \frac{u_{R1}}{u_{R2}} f_{x2} \quad (17a)$$

$$f_{yR} = f_{y1} - \frac{u_{R1}}{u_{R2}} f_{y2} \quad (17b)$$

$$f_{\theta R} = f_{\theta 1} - \frac{u_{R1}}{u_{R2}} f_{\theta 2} \quad (17c)$$

e dividendo membro a membro si ottiene l'equazione:

$$a_y x_R y_R + b_y x_R + c_y y_R + d_y = 0 \quad (18)$$

con

$$a_y = f_{yL} f_{xR} - f_{yR} f_{xL} \quad (19a)$$

$$b_y = f_{yL} f_{yR} L_x + f_{yL} f_{\theta R} - f_{yR} f_{\theta L} \quad (19b)$$

$$c_y = -(f_{yL} f_{xR} \alpha_x L_x + f_{yR} f_{xL} \beta_x L_x) \quad (19c)$$

$$d_y = -(f_{yL} f_{\theta R} \alpha_x L_x + f_{yR} f_{\theta L} \beta_x L_x) \quad (19d)$$

Le equazioni (12) e (18) costituiscono un sistema di equazioni di secondo grado nelle incognite  $x_R$  ed  $y_R$  che risolto fornisce due coppie di coordinate. Una di queste coppie corrisponde ad un punto interno all'impalcato ed individua il centro di rigidezza  $C_R$ . L'altra è scartata perchè corrisponde ad un punto che si trova all'esterno dell'impalcato ed è dunque fisicamente inaccettabile.

In particolare, si può determinare una delle due coordinate, ad esempio  $x_R$ , dall'equazione di secondo grado:

$$A_x x_R^2 + B_x x_R + C_x = 0 \quad (20)$$

con

$$A_x = a_y b_x - a_x b_y \quad (21a)$$

$$B_x = a_y d_x + c_y b_x - a_x d_y - c_x b_y \quad (21b)$$

$$C_x = c_y d_x - c_x d_y \quad (21c)$$

e ricavare poi la seconda incognita, ad esempio  $y_R$ , da una delle due equazioni del sistema, come

$$y_R = -\frac{b_y x_R + d_y}{a_y x_R + c_y} \quad (22)$$

Determinate le coordinate  $x_R$  ed  $y_R$ , i raggi d'inerzia delle rigidezze si determinano dalle equazioni (8), (10), (14) e (16). In particolare,  $r_{ky}$  si ricava indifferentemente attraverso una delle due seguenti relazioni:

$$r_{ky}^2 = -\frac{1}{f_{xB}}(f_{xB} y_R^2 - f_{yB} x_R y_R - f_{yB} \beta_y L_y x_R + f_{xB} \beta_y L_y y_R + f_{0B} y_R + f_{0B} \beta_y L_y) \quad (23a)$$

$$r_{ky}^2 = -\frac{1}{f_{xT}}(f_{xT} y_R^2 - f_{yT} x_R y_R + f_{yT} \alpha_y L_y x_R - f_{xT} \alpha_y L_y y_R + f_{0T} y_R - f_{0T} \alpha_y L_y) \quad (23b)$$

mentre  $r_{kx}$  si calcola attraverso una a scelta delle due seguenti relazioni:

$$r_{kx}^2 = -\frac{1}{f_{yL}}(f_{yL} x_R^2 - f_{xL} x_R y_R + f_{yL} \beta_x L_x x_R - f_{0L} x_R - f_{xL} \beta_x L_x y_R - f_{0L} \beta_x L_x) \quad (24a)$$

$$r_{kx}^2 = -\frac{1}{f_{yR}}(f_{yR} x_R^2 - f_{xR} x_R y_R - f_{yR} \alpha_x L_x x_R - f_{0R} x_R + f_{xR} \alpha_x L_x y_R + f_{0R} \alpha_x L_x) \quad (24b)$$

In definitiva, le equazioni (12), (18), (20), (22), (23) e (24) consentono di determinare le coordinate del centro di rigidezza  $C_R$  e dei raggi d'inerzia delle rigidezze rispetto a  $C_R$ , noti gli spostamenti in direzione  $X$  e  $Y$  degli estremi superiore ed inferiore ( $u_{B1}$ ,  $u_{B2}$ ,  $u_{T1}$  ed  $u_{T2}$ ) e degli estremi sinistro e destro ( $u_{L1}$ ,  $u_{L2}$ ,  $u_{R1}$  ed  $u_{R2}$ ), rispettivamente causati da due assegnati sistemi di forze ( $f_{x1}$ ,  $f_{y1}$ ,  $f_{01}$  ed  $f_{x2}$ ,  $f_{y2}$ ,  $f_{02}$ ). L'unica condizione è che i due sistemi di forze devono provocare spostamenti non nulli dei punti prima citati sia in direzione  $X$  che  $Y$ . In alternativa, si possono usare quattro sistemi di forze. I primi due, da utilizzarsi nelle equazioni (12), (20) e (23), devono fornire spostamenti  $u_{B1}$ ,  $u_{B2}$ ,  $u_{T1}$  ed  $u_{T2}$  (in direzione  $X$ ), mentre gli altri due, da utilizzarsi nelle equazioni (18), (22) e (24), devono fornire spostamenti  $u_{L1}$ ,  $u_{L2}$ ,  $u_{R1}$  ed  $u_{R2}$  (in direzione  $Y$ ). Qualora si disponga dei risultati delle analisi modali del sistema strutturale eseguite con due eccitazioni sismiche agenti in direzione  $X$  ed  $Y$ , i quattro sistemi di forze possono essere costituiti dalle forze modali corrispondenti ai due modi di vibrazione che contri-

buiscono maggiormente alla risposta per sisma in direzione  $X$  (due sistemi di forze da utilizzarsi nelle equazioni (12), (20) e (23)) e da quelle corrispondenti ai due modi di vibrazione che contribuiscono maggiormente alla risposta per sisma in direzione  $Y$  (due sistemi di forze da utilizzarsi nelle equazioni (18), (22) e (24)). Determinata la posizione di  $C_R$  ed i raggi d'inerzia delle rigidezze  $r_{kx}$  ed  $r_{ky}$ , le eccentricità strutturali del sistema  $e_{sx}$  ed  $e_{sy}$  si ottengono come le distanze tra  $C_R$  e  $C_M$  lungo gli assi coordinati, mentre i rapporti  $\Omega_{0x}$  ed  $\Omega_{0y}$  si ottengono dividendo  $r_{kx}$  ed  $r_{ky}$  per  $r_m$ .

## 5 ESEMPI NUMERICI

Le relazioni ricavate nel paragrafo precedente sono utilizzate per determinare i parametri  $e_s$  ed  $\Omega_\theta$  che influenzano il grado di irregolarità planimetrica di due edifici multipiano. Il primo è l'edificio regolarmente asimmetrico descritto ed analizzato nel paragrafo 3. Il secondo è l'edificio del caso studio n. 2 analizzato nell'ambito del programma di ricerca "Valutazione del comportamento non lineare degli edifici con particolare riferimento a edifici irregolari" (ReLUIS, Linea n. 2, obiettivo IRREG). Si tratta di un edificio in cemento armato a cinque piani con pianta ad L dotato di piano tipo. Nella Figura 7 sono riportate la configurazione in pianta dell'edificio, la posizione del centro di massa  $C_M$  e le dimensioni delle sezioni trasversali di travi e pilastri. L'altezza d'interpiano è pari a 3.5 m a tutti i piani. La massa ed il momento polare della massa rispetto a  $C_M$  del generico impalcato sono uguali rispettivamente a 250 kN s<sup>2</sup>/m e 15635 kN s<sup>2</sup> m. Dunque il raggio d'inerzia delle masse  $r_m$  è uguale a 7.91 m. Si noti che l'edificio non è regolarmente asimmetrico, nonostante sia dotato di piano tipo, perché le matrici di rigidezza dei telai che sostengono gli impalcati non sono tra loro proporzionali.

Per poter applicare il procedimento proposto e descritto nel paragrafo 4 agli edifici di cui sopra è necessario scegliere quattro sistemi di forze (due che determinano spostamenti non nulli degli impalcati in direzione  $X$  e due che determinano spostamenti non nulli in direzione  $Y$ ). Quindi per il primo sistema di forze bisogna determinare gli spostamenti di due punti dell'impalcato in direzione  $X$  e per il secondo gli spostamenti in direzione  $Y$  di altri due punti non necessariamente coincidenti con i precedenti.

Nel caso dell'edificio regolarmente asimmetrico descritto in Figura 3, i primi due sistemi di forze scelti per l'applicazione del metodo proposto sono costituiti dalle forze modali per sisma agente in direzione  $X$  applicate nell'origine del sistema di riferimento fissato (in questo caso coincidente con  $C_M$ ) ed associate al primo ed al secondo modo di vibrazione dell'edificio (quelli che contribuiscono maggiormente alla risposta strutturale per sisma in direzione  $X$ ).

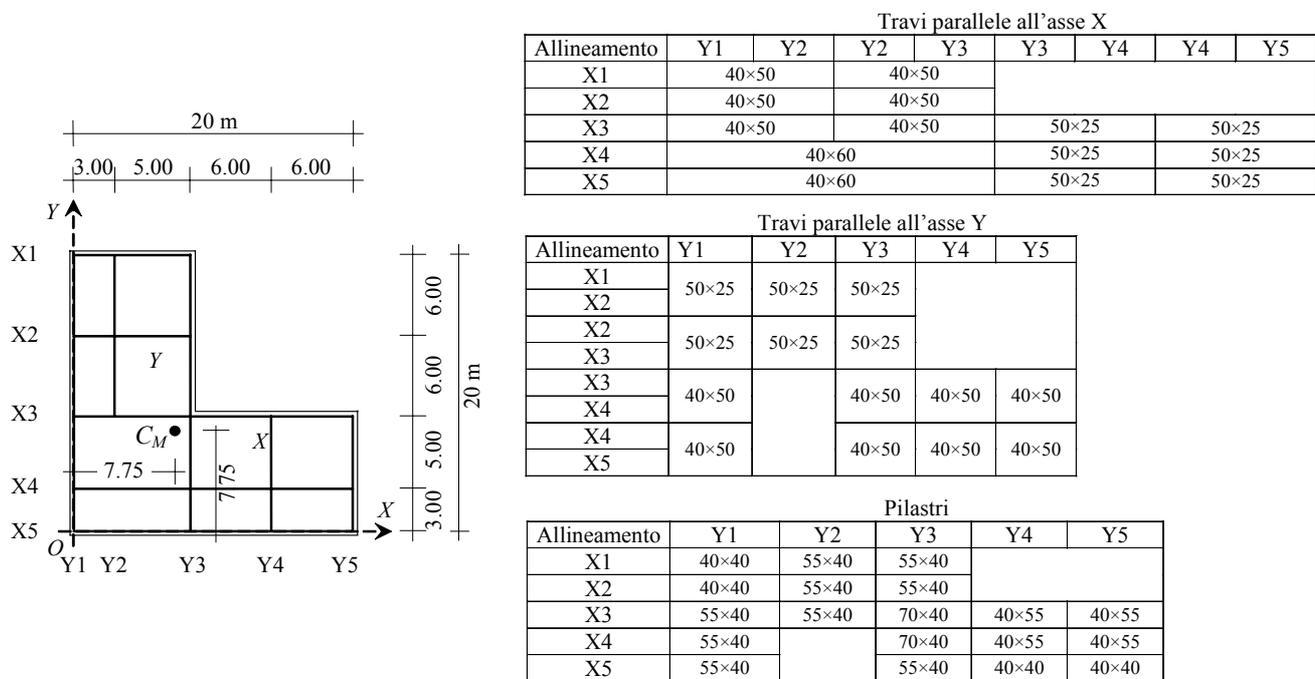


Figura 6. Caratteristiche dell'edificio analizzato: pianta e sezioni trasversali delle membrature strutturali.

Gli spostamenti corrispondenti sono quelli in direzione  $X$  dei lati inferiore e superiore dell'impalcato (telai X4 ed X1 in Figura 3) denominati  $u_B$  ed  $u_T$ . Analogamente, gli altri due sistemi di forze scelti sono costituiti dalle forze modali per sisma agente in direzione  $Y$  ed associate al secondo e al terzo modo di vibrazione dell'edificio (quelli che contribuiscono maggiormente alla risposta strutturale per sisma in direzione  $Y$ ). Gli spostamenti corrispondenti sono quelli in direzione  $Y$  dei lati a sinistra ed a destra dell'impalcato (telai Y1 ed Y8 in Figura 3) denominati  $u_L$  ed  $u_R$ . In Tabella 1 ed in Tabella 2 sono riportati, rispettivamente per la direzione  $X$  ed  $Y$ , le forze, gli spostamenti corrispondenti ed i rapporti di spostamento a ciascun piano e per l'intero edificio. I dati relativi all'intero edificio consistono negli spostamenti dell'ultimo impalcato e nei tagli e momento torcente alla base. Nella Tabella 3 sono invece riportate per ciascun piano e con riferimento all'intero edificio, le coordinate del centro di rigidità  $x_R$  ed  $y_R$ , le eccentricità strutturali  $e_{sx}$  ed  $e_{sy}$  (uguali in questo caso con  $x_R$  ed  $y_R$  poiché l'origine del sistema di riferimento fissato coincide con  $C_M$ ), i raggi d'inerzia delle rigidità  $r_{ky}$  ed  $r_{kx}$  ed i rapporti  $\Omega_{\theta y}$  ed  $\Omega_{\theta x}$  (ottenuti dividendo  $r_{ky}$  ed  $r_{kx}$  per  $r_m$ ). Si nota che le quantità determinate sono uguali a tutti i piani e coincidono con quelle determinate nel paragrafo 3 a riprova del fatto che nel caso di edifici regolarmente asimmetrici il metodo proposto fornisce risultati esatti.

Il grado di irregolarità planimetrica è determinato anche per l'edificio non regolarmente asimmetrico descritto in Figura 6. I sistemi di forze utilizzati coincidono ancora una volta con le forze modali relative al primo ed al terzo modo di vibrazione per si-

sma agente in direzione  $X$  e con quelle relative al secondo ed al terzo modo di vibrazione per sisma in direzione  $Y$ . Le forze sono applicate nell'origine del sistema di riferimento fissato che, in questo caso, coincide con lo spigolo in basso a sinistra dell'impalcato (Fig. 6). Anche per questo caso, gli spostamenti considerati per sisma in direzione  $X$  sono quelli dei lati inferiore ( $u_B$ ) e superiore ( $u_T$ ) dell'impalcato (telai X5 ed X1 in Figura 6) mentre quelli per sisma in direzione  $Y$  sono quelli dei lati sinistro ( $u_L$ ) e destro ( $u_R$ ) (telai Y1 ed Y5 in Figura 6). Forze, spostamenti corrispondenti e rapporti di spostamento utili per la determinazione dei parametri che caratterizzano il grado di irregolarità planimetrica dell'edificio sono riepilogati nella Tabella 4 e nella Tabella 5, rispettivamente per sisma in direzione  $X$  ed  $Y$ . In Tabella 6 sono, invece, riportati i risultati finali. Si nota che in questo caso, la posizione del centro di rigidità  $C_R$  varia di piano in piano. Di conseguenza, anche le eccentricità strutturali (ottenute sottraendo ad  $x_R$  ed  $y_R$  le coordinate del centro di massa  $x_M = y_M = 7.75$  m) non si mantengono rigorosamente costanti lungo l'altezza dell'edificio. In particolare,  $e_{sx}$  varia da un minimo di 2.01 m ad un massimo di 2.24 m con uno scarto percentuale di circa il 10%. Anche  $e_{sy}$  si mantiene pressoché costante lungo l'altezza. Tra il secondo e l'ultimo piano  $e_{sy}$  assume valori compresi tra 1.70 m ed 1.83 m e solo al primo piano  $e_{sy}$  assume un valore significativamente diverso (1.25 m). I raggi d'inerzia delle rigidità  $r_{ky}$  ed  $r_{kx}$  e dunque i rapporti  $\Omega_{\theta y}$  ed  $\Omega_{\theta x}$  variano moderatamente lungo l'altezza dell'edificio con scarti percentuali tra valore minimo e valore massimo molto modesti. Si nota infine che i valori relativi all'intero edificio sono intermedi tra quelli

relativi ad i vari piani. Dall'analisi dei risultati ottenuti si può concludere che l'edificio, pur non essendo rigorosamente regolarmente asimmetrico, presenta un grado di irregolarità planimetrica che si mantiene abbastanza uniforme lungo l'altezza (l'unico parametro che presenta variazioni significa-

tive è l'eccentricità  $e_{sy}$  al primo piano). Tenendo conto di ciò, dall'analisi dei valori ottenuti si può prevedere che l'edificio analizzato sia torsio-rigido ( $\Omega_{0y}$  ed  $\Omega_{0x}$  sono prossimi a 1.3) e dotato di eccentricità strutturale non trascurabile (circa il 10% della dimensione dell'impalcato) nei confronti delle azioni

Tabella 1. Sistemi di forze che determinano spostamenti non nulli degli impalcato in direzione  $X$  (per sisma in direzione  $X$ ), relativi spostamenti e rapporti di spostamento per l'edificio regolarmente asimmetrico.

Piano	$u_{B1}$	$u_{T1}$	$f_{X1}$	$f_{Y1}$	$f_{\theta 1}$	$u_{B2}$	$u_{T2}$	$f_{X2}$	$f_{Y2}$	$f_{\theta 2}$	$u_{B1}/u_{B2}$	$u_{T1}/u_{T2}$
6	184.1	131.9	635.3	-84.8	1264.1	-12.8	32.4	47.3	104.5	-1313.6	-14.40	4.07
5	168.7	120.9	582.4	-77.8	1158.7	-11.7	29.7	43.4	95.8	-1204.1	-14.40	4.07
4	143.1	102.5	493.8	-65.9	982.5	-9.9	25.2	36.8	81.2	-1021.0	-14.40	4.07
3	107.8	77.3	372.2	-49.7	740.6	-7.5	19.0	27.7	61.2	-769.6	-14.40	4.07
2	66.1	47.3	228.1	-30.5	453.7	-4.6	11.6	17.0	37.5	-471.5	-14.39	4.07
1	24.2	17.3	83.4	-11.2	166.0	-1.7	4.3	6.2	13.7	-172.5	-14.38	4.07
Edificio	143.1	102.5	2395.1	-319.8	4765.4	-9.9	25.2	178.3	393.8	-4952.1	-14.40	4.07

Tabella 2. Sistemi di forze che determinano spostamenti non nulli degli impalcato in direzione  $Y$  (per sisma in direzione  $Y$ ), relativi spostamenti e rapporti di spostamento per l'edificio regolarmente asimmetrico.

Piano	$u_{L1}$	$u_{R1}$	$f_{X1}$	$f_{Y1}$	$f_{\theta 1}$	$u_{L2}$	$u_{R2}$	$f_{X2}$	$f_{Y2}$	$f_{\theta 2}$	$u_{L1}/u_{L2}$	$u_{R1}/u_{R2}$
6	160.9	-65.4	104.5	230.7	-2900.3	-10.9	146.5	-17.7	765.8	4720.1	-14.77	-0.45
5	147.5	-59.9	95.8	211.4	-2658.4	-10.0	134.2	-16.2	702.0	4326.5	-14.77	-0.45
4	125.1	-50.8	81.2	179.3	-2254.3	-8.5	113.8	-13.8	595.3	3668.8	-14.78	-0.45
3	94.3	-38.3	61.2	135.1	-1699.1	-6.4	85.8	-10.4	448.7	2765.3	-14.78	-0.45
2	57.8	-23.5	37.5	82.8	-1041.0	-3.9	52.6	-6.4	274.9	1694.2	-14.77	-0.45
1	21.1	-8.6	13.7	30.3	-380.7	-1.4	19.2	-2.3	100.6	619.6	-14.77	-0.45
Edificio	160.9	-65.4	393.8	869.5	-10933.8	-10.9	146.5	-66.7	2887.1	17794.5	-14.77	-0.45

Tabella 3. Coordinate dei centri di rigidezza, eccentricità strutturali, raggio d'inerzia delle rigidezze ed rapporti  $\Omega_0$  dell'edificio regolarmente asimmetrico.

Piano	$x_R$	$y_R$	$e_{sx}$	$e_{sy}$	$r_{ky}$	$r_{kx}$	$\Omega_{0y}$	$\Omega_{0x}$
6	2.95	0.52	2.95	0.52	10.61	7.08	1.20	0.80
5	2.95	0.52	2.95	0.52	10.62	7.08	1.20	0.80
4	2.95	0.52	2.95	0.52	10.62	7.08	1.20	0.80
3	2.95	0.52	2.95	0.52	10.62	7.08	1.20	0.80
2	2.95	0.52	2.95	0.52	10.62	7.08	1.20	0.80
1	2.95	0.52	2.95	0.52	10.62	7.08	1.20	0.80
Edificio	2.95	0.52	2.95	0.52	10.62	7.08	1.20	0.80

Tabella 4. Sistemi di forze che determinano spostamenti non nulli degli impalcato in direzione  $X$  (per sisma in direzione  $X$ ), relativi spostamenti e rapporti di spostamento per l'edificio non regolarmente asimmetrico (edificio programma ReLUIS).

Piano	$u_{B1}$	$u_{T1}$	$f_{X1}$	$f_{Y1}$	$f_{\theta 1}$	$u_{B2}$	$u_{T2}$	$f_{X2}$	$f_{Y2}$	$f_{\theta 2}$	$u_{B1}/u_{B2}$	$u_{T1}/u_{T2}$
5	138.4	88.6	1837.7	700.9	-6406.8	-17.1	43.3	178.7	-175.5	-8113.1	-8.09	2.05
4	121.3	77.8	1612.8	620.8	-5589.9	-15.2	38.3	157.7	-154.3	-7172.8	-7.99	2.03
3	94.3	60.8	1255.3	490.3	-4312.5	-12.0	30.2	124.4	-121.0	-5651.8	-7.88	2.01
2	59.4	38.8	794.0	319.1	-2686.9	-7.7	19.6	81.9	-78.8	-3679.4	-7.69	1.98
1	22.5	15.2	304.2	129.7	-1000.2	-3.1	8.0	34.7	-32.7	-1509.9	-7.31	1.90
Edificio	138.4	88.6	5803.9	2260.8	-19996.4	-17.1	43.3	577.3	-562.2	-26126.9	-8.09	2.05

Tabella 5. Sistemi di forze che determinano spostamenti non nulli degli impalcato in direzione  $Y$  (per sisma in direzione  $Y$ ), relativi spostamenti e rapporti di spostamento per l'edificio non regolarmente asimmetrico (edificio programma ReLUIS).

Piano	$u_{L1}$	$u_{R1}$	$f_{X1}$	$f_{Y1}$	$f_{\theta 1}$	$u_{L2}$	$u_{R2}$	$f_{X2}$	$f_{Y2}$	$f_{\theta 2}$	$u_{L1}/u_{L2}$	$u_{R1}/u_{R2}$
5	170.0	59.3	-525.4	1572.2	11975.1	-16.8	42.0	-174.0	170.9	7900.7	-10.13	1.41
4	150.0	52.3	-459.4	1387.4	10534.1	-14.9	37.2	-153.5	150.2	6984.9	-10.07	1.41
3	117.7	41.2	-355.8	1089.3	8238.7	-11.8	29.3	-121.2	117.8	5503.8	-10.00	1.40
2	75.5	26.8	-222.5	700.6	5268.7	-7.6	19.0	-79.8	76.7	3583.1	-9.90	1.41
1	29.7	10.9	-82.8	277.6	2067.3	-3.1	7.8	-33.8	31.9	1470.3	-9.68	1.41
Edificio	170.0	59.3	-1645.9	5027.1	38083.7	-16.8	42.0	-562.2	547.5	25442.8	-10.13	1.41

Tabella 6. Coordinate dei centri di rigidezza, eccentricità strutturali, raggio d'inerzia delle rigidezze ed rapporti  $\Omega_0$  dell'edificio non regolarmente asimmetrico (edificio programma ReLUIS).

Piano	$x_R$	$y_R$	$e_{sx}$	$e_{sy}$	$r_{ky}$	$r_{kx}$	$\Omega_{0y}$	$\Omega_{0x}$
5	9.85	9.58	2.10	1.83	10.18	10.76	1.29	1.36
4	9.87	9.53	2.12	1.78	10.04	10.69	1.27	1.35
3	9.93	9.55	2.18	1.80	9.98	10.66	1.26	1.35
2	9.99	9.45	2.24	1.70	9.86	10.65	1.25	1.35
1	.76	9.00	2.01	1.25	9.61	10.64	1.21	1.35
Edificio	9.92	9.47	2.17	1.72	9.95	10.67	1.26	1.35

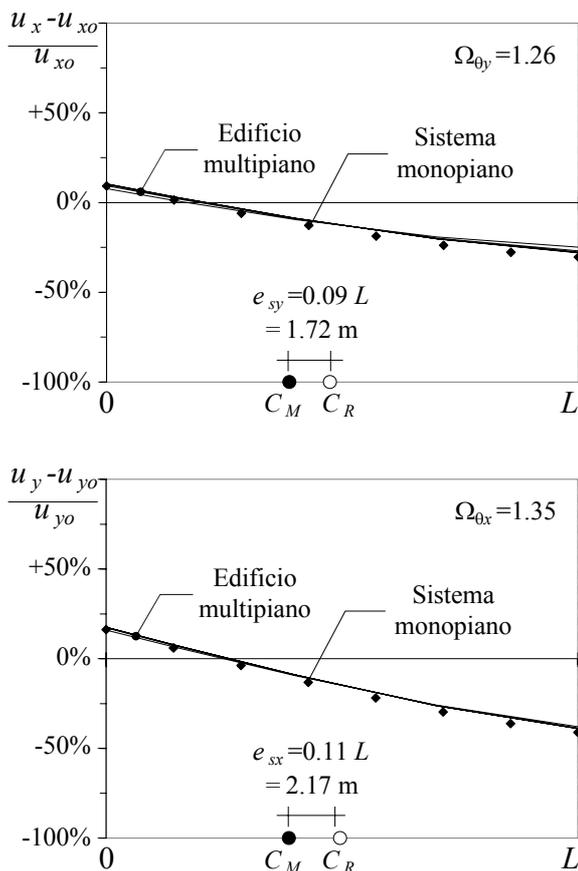


Figura 7. Variazione percentuale degli spostamenti d'impalcato dell'edificio asimmetrico analizzato e del sistema monopiano equivalente rispetto a quelli dei corrispondenti sistemi traslanti: (a) spostamenti in direzione  $X$ , (b) spostamenti in direzione  $Y$ .

sismiche agenti in direzione  $X$  ed  $Y$ .

Al fine di verificare che il comportamento dell'edificio analizzato sia prossimo a quello di un edificio regolarmente asimmetrico, ne è valutata mediante analisi modale la risposta a due eccitazioni sismiche, una agente lungo l'asse  $X$  e l'altra agente lungo  $Y$ . Gli spostamenti degli impalcati ottenuti nei due casi sono quindi confrontati con quelli del corrispondente sistema traslante (ottenuto impedendo la rotazione degli impalcati). In Figura 7 sono mostrati gli scarti percentuali tra gli spostamenti dell' $i$ -esimo piano ( $u_{xi}$  e  $u_{yi}$ ) dell'edificio irregolare in pianta e quello del corrispondente sistema traslante ( $u_{x0i}$  e  $u_{y0i}$ ) per le due eccitazioni sismiche considerate. In entrambi i casi le curve relative ai diversi piani sono quasi sovrapposte tra loro. Ciò dimostra che gli effetti dell'irregolarità planimetrica sono praticamente uguali a tutti i piani così come per un edificio regolarmente asimmetrico. In Figura 7, inoltre, sono riportati gli scarti percentuali tra gli spostamenti d'impalcato del sistema monopiano equivalente e quello del corrispondente sistema bilanciato. Il sistema monopiano equivalente è quello che possiede centri di massa  $C_M$  e di rigidezza  $C_R$  nella medesima posizioni di quelli dell'edificio asimmetrico analizzato ed è caratterizzato dagli stessi valori di  $r_{kx}$ ,  $r_{ky}$

ed  $r_m$  (i valori di  $x_R$ ,  $y_R$ ,  $r_{kx}$  ed  $r_{ky}$  utilizzati sono quelli medi determinati con riferimento all'intero edificio e riportati in Tabella 6). Tale sistema monopiano è dunque caratterizzato dalla stessa eccentricità strutturale e dai medesimi valori dei rapporti  $\Omega_{\theta x}$ , ed  $\Omega_{\theta y}$  dell'edificio multipiano analizzato. A riprova del fatto che i valori di  $e_{sx}$ ,  $e_{sy}$ ,  $\Omega_{\theta x}$ , ed  $\Omega_{\theta y}$  determinati col metodo proposto descrivono in maniera accurata il grado di irregolarità in pianta dell'edificio analizzato, si fa osservare che gli scarti percentuali tra gli spostamenti dei sistemi monopiano (asimmetrico e bilanciato), che sono evidenziati in figura mediante pallini, sono praticamente uguali a quelli relativi al sistema multipiano per entrambe le direzioni del sisma.

## 6 CONCLUSIONI

Il presente lavoro propone un metodo per la valutazione del grado di irregolarità planimetrica di edifici reali. Tale metodo richiede che si valuti preliminarmente la risposta dell'edificio a quattro insiemi di forze orizzontali e coppie arbitrariamente scelti agenti sugli impalcati e, quindi, consente di determinare in funzione dei risultati ottenuti l'eccentricità strutturale  $e_s$  ed il rapporto  $\Omega_\theta$  dell'edificio. Il metodo è applicabile anche al caso più generale di edificio multipiano, non regolarmente asimmetrico, dotato di doppia eccentricità (con  $e_{sx}$  ed  $e_{sy}$  entrambi diversi da zero) e con diversa sensibilità agli effetti torsionali causati da azioni sismiche che agiscono in direzioni diverse ( $r_{kx}$  diverso da  $r_{ky}$  e dunque  $\Omega_{\theta x}$  diverso da  $\Omega_{\theta y}$ ). In questo caso le eccentricità  $e_{sx}$  ed  $e_{sy}$  ed i rapporti  $\Omega_{\theta x}$  e  $\Omega_{\theta y}$  determinati assumeranno valori diversi di piano in piano.

Rispetto ad altri metodi presenti in letteratura, tra i quali si ricordano quelli formulati da Makarios e Anastassiadis (1998), Calderoni *et al.* (2002) e Marino e Rossi (2004), il metodo proposto possiede un importante vantaggio. Infatti, i metodi di letteratura citati richiedono la conoscenza della risposta dell'edificio ad insiemi di forze e/o coppie prestabiliti che generalmente non sono inclusi tra quelli usati per l'analisi sismica della struttura. Il metodo proposto, invece, consente di scegliere liberamente tali insiemi di forze. Dunque, questi possono essere selezionati tra quelli usati per l'analisi sismica della struttura senza aumentare il numero di schemi di carico da considerare. Si noti inoltre che, anche nel caso in cui la risposta sismica sia valutata mediante analisi modale non è necessario risolvere ulteriori schemi di carico, poiché gli insiemi di forze da utilizzare per la valutazione di  $e_s$  ed  $\Omega_\theta$  possono essere scelti tra le forze modali associate ai diversi modi di vibrazione considerati nell'analisi modale e le relative risposte strutturali coincideranno con i contributi modali relativi ad i modi di vibrazione prescelti.

Infine, si sottolinea che gli esempi numerici presentati nell'articolo mostrano che il metodo proposto consente di valutare correttamente i parametri che caratterizzano l'irregolarità in pianta sia nel caso ideale di sistemi regolarmente asimmetrici che in quello più generale di edifici reali.

## RINGRAZIAMENTI

Il presente lavoro è stato sviluppato nell'ambito del programma di ricerca dal titolo "Valutazione e riduzione della vulnerabilità di edifici esistenti in c.a." (ReLUIS, linea n. 2) finanziato dal Dipartimento della Protezione Civile.

## BIBLIOGRAFIA

- Calderoni, B., D'Aveni, A., Ghersi, A., e Rinaldi, Z. 2002. Static vs. Modal Analysis of Asymmetric Buildings: Effectiveness of Dynamic Eccentricity Formulations. *Earthquake Spectra* 18 (2): pp. 219-231.
- Hejal, H. e Chopra, A.K. 1987. Earthquake response of torsionally-coupled buildings. Earthquake Engineering Research Center, Report n° UBC/EERC-87/20, College of Engineering, University of California at Berkeley.
- Makarios, T. e Anastassiadis, A. 1998. Real and fictitious elastic axes of multy-storey buildings: theory. *The Structural Design of Tall and Special Buildings*. 7 (1), pp: 33-55.
- Makarios, T. e Anastassiadis, A. 1998. Real and fictitious elastic axes of multy-storey buildings: applications. *The Structural Design of Tall and Special Buildings*. 7 (1): pp. 57-71.
- Marino, E. 2000. Comportamento sismico e criteri di progettazione di edifici multipiano irregolari in pianta. Tesi di dottorato, Facoltà di Ingegneria, Università di Catania, Italia.
- Marino, E.M. 2002. Analisi critica della definizione di edifici regolarmente asimmetrici. *Ingegneria Sismica*, Patron Editore, n.3: pp. 35-42.
- Marino, E. M. e Rossi, P. P. 2004. Exact evaluation of the location of the optimum torsion axis. *The Structural Design of Tall and Special Buildings* 13 (4): pp. 277-290.
- O.P.C.M. 3431, 2005. Norme tecniche per il progetto la valutazione e l'adeguamento sismico degli edifici. Roma.