

## Analisi critica della definizione di edifici regolarmente asimmetrici

E. Marino

Dipartimento di Ingegneria Civile e Ambientale, Università di Catania, Italia

**SOMMARIO:** I pesanti danni subiti dalle strutture asimmetriche in occorrenza di terremoti hanno spinto ricercatori di tutto il mondo a studiarne il comportamento sismico. Tale comportamento in passato è stato schematizzato mediante un modello estremamente semplificato: lo *schema monopiano*. Ciò ha reso possibile la formulazione di metodologie di progetto (Chandler e Duan 1992; Ghersi e Rossi 1996; Tso e Zhu 1992a, b) di cui è stata testata l'efficacia anche su edifici multipiano (Chandler e Duan 1992; Marino 2000; Moghadam e Tso 2000). Tuttavia il campo d'indagine è stato ristretto, nella maggior parte dei casi, ad una particolare categoria di sistemi: gli *edifici regolarmente asimmetrici*. Diventa, dunque, importante possedere criteri che consentano di stabilire se un sistema strutturale appartenga o meno a detta categoria. Il problema è affrontato da molte normative antisismiche, che forniscono criteri basati sulla definizione formulata da Hejal e Chopra. Nell'articolo si mostra che tali criteri portano, in alcuni casi, a conclusioni errate; inoltre, si generalizza la definizione di Hejal e Chopra dimostrando che sotto determinate ipotesi, strutture da sempre classificate come *non regolarmente asimmetriche* (ad esempio strutture con telai e pareti accoppiate) possiedono tutte le proprietà che caratterizzano i sistemi regolarmente asimmetrici.

**ABSTRACT:** The damage experienced by asymmetric structures in occurrence of strong ground motions has stimulated researchers to study their seismic behaviour. Such a behaviour has in the past been schematised by means of a simplified model: the *single-storey scheme*. This has made possible the formulation of design methodologies (Chandler and Duan 1992; Ghersi and Rossi 1996; Tso and Zhu 1992a, b) which have been tested also on multi-storey systems (Chandler and Duan 1992; Marino 2000; Moghadam and Tso 2000). Nevertheless, the study has been restricted, in most cases, to a particular category of systems, called *regularly asymmetric buildings*. For this reason the definition of criteria which establish the belonging of structural systems to such a category is important. The problem is faced by different codes that, on the basis of formulations given by Hejal and Chopra, provide helpful criteria. The paper shows that such criteria may lead in some cases to erroneous conclusions. Furthermore, the definition of Hejal and Chopra is extended demonstrating that, in such hypotheses, structures defined as *irregularly asymmetric* (e.g. structures with frames and shear walls) have all the properties which characterise regularly asymmetric systems.

### 1 INTRODUZIONE

In generale la risposta elastica ad un'eccitazione sismica di un edificio planimetricamente irregolare dotato di  $N$  piani può essere determinata mediante l'analisi modale, risolvendo un problema a  $3N$  gradi di libertà. Però se la struttura appartiene ad una particolare categoria, denominata degli *edifici regolarmente asimmetrici* (Hejal e Chopra 1987), è possibile valutarne la risposta combinando quelle di due sistemi più semplici ad essa associati: un *sistema torsionalmente bilanciato* ad  $N$  piani (con  $N$  gradi di libertà), ottenuto dal sistema multipiano asimmetri-

co spostando i suoi centri di massa  $C_M$  fino a farli coincidere con quelli di rigidezza  $C_R$ , ed un sistema monopiano torsionalmente accoppiato (con 3 gradi di libertà) le cui caratteristiche saranno specificate in seguito.

La possibilità di operare tale decomposizione non si esaurisce nella possibilità di risalire alla risposta di un sistema multipiano regolarmente asimmetrico valutando quella dei due sistemi più semplici prima definiti, con gli ovvi vantaggi in termini di onere computazionale che ne derivano. Infatti, essa sancisce pure che gli effetti dell'accoppiamento latero-torsionale in un sistema multipiano asimmetrico possono essere colti "scalando" la risposta del sistema traslante attraverso la risposta normalizzata del sistema monopiano asimmetrico ad esso associato. Ciò consente, sotto le ipotesi specificate sin qui, di estendere alle reali strutture multipiano i risultati scaturiti dallo studio della risposta elastica dei sistemi monopiano. Tali proprietà furono molto apprezzate in passato poiché consentivano di cogliere l'effetto dei moti torsionali sulla risposta elastica dei sistemi regolarmente asimmetrici mediante l'analisi statica, applicata con eccentricità di progetto tarate utilizzando i risultati degli studi condotti su sistemi monopiano.

Attualmente la possibilità di eseguire l'analisi modale senza rilevanti difficoltà anche per strutture spaziali ha ridimensionato l'interesse sul comportamento elastico dei sistemi asimmetrici, mentre è particolarmente vivo l'interesse sulle caratteristiche della loro risposta inelastica. Infatti, le lezioni impartite dai terremoti verificatisi nel passato hanno spinto ricercatori di tutto il mondo a studiare il comportamento di tali strutture in occorrenza di eccitazioni sismiche severe, perlopiù schematizzando l'edificio mediante un modello estremamente semplificato: lo schema monopiano. È stato possibile, così, formulare metodologie di progetto più o meno efficaci, che cercano di cogliere un duplice obiettivo: evitare escursioni plastiche per sismi di modesta intensità ed assicurare richieste di duttilità massime non superiori a quella riscontrata in presenza di sola traslazione in occorrenza di terremoti severi. Negli ultimi anni, grazie alla disponibilità di mezzi di calcolo sempre più potenti, l'efficacia di questi metodi è stata testata anche su edifici multipiano. Tuttavia il campo d'indagine è stato ristretto, nella maggior parte dei casi, alla categoria degli edifici regolarmente asimmetrici.

Diventa, dunque, importante possedere strumenti che consentano di stabilire se un sistema strutturale appartiene a detta categoria. Il problema è affrontato da molte normative antisismiche che stabiliscono l'appartenenza a detta classe quando i centri di massa degli impalcati ed i centri di rigidezza di piano sono allineati lungo due assi verticali. Nell'articolo si mostra che le indicazioni contenute in tali norme portano, in alcuni casi, a conclusioni completamente errate; si dimostra, inoltre, che sotto determinate ipotesi, strutture da sempre classificate come non regolarmente asimmetriche (ad esempio strutture con telai e pareti accoppiate) possiedono tutte le proprietà che caratterizzano i sistemi regolarmente asimmetrici.

## 2 PROPRIETÀ ELASTICHE DEGLI EDIFICI REGOLARMENTE ASIMMETRICI

L'attuale definizione di edificio regolarmente asimmetrico fu formulata da Hejal e Chopra i quali individuarono le ipotesi, di seguito elencate, cui deve soddisfare un sistema appartenente a tale classe (Hejal e Chopra 1987):

1. gli elementi resistenti verticali, collegati da impalcati rigidi nel proprio piano, devono essere disposti secondo una griglia ortogonale
2. i centri di massa di tutti i piani devono essere allineati lungo un asse verticale;
3. gli elementi resistenti verticali devono possedere matrici di rigidezza laterali tra loro proporzionali.

Nel presente lavoro la trattazione è stata ristretta ad edifici che presentano simmetria rispetto ad uno degli assi principali, entrambi paralleli ai lati della griglia, sottoposti ad un'eccitazione sismica che agisce ortogonalmente a tale asse. Sotto questa ipotesi gli  $N$  modi traslazionali con spostamenti paralleli all'asse di simmetria, che sono disaccoppiati dagli altri, non vengono eccitati dal sisma e dunque non sono stati presi in considerazione. Le semplificazioni introdotte rendono più agevole la trattazione analitica del problema, tuttavia le conclusioni a cui si perviene continuano a valere anche nel caso generale di sistemi dotati di eccentricità lungo entrambe le direzioni principali.

Ricordando la definizione di edificio regolarmente asimmetrico si risale alle proprietà che caratterizzano la loro risposta sismica. In particolare, per via della proporzionalità che esiste tra le

matrici di rigidezza degli elementi resistenti, i centri di rigidezza  $C_R$  risultano univocamente determinati, vale a dire indipendenti dalla distribuzione di forze utilizzata per determinarli, ed allineati lungo un'asse verticale (Cheung e Tso 1986) detto *asse elastico*. Dunque l'eccentricità strutturale  $e_s$ , definita come la distanza tra il baricentro delle masse ed il centro di rigidezza, assume lo stesso valore ad ogni piano. Si dimostra, inoltre, che il rapporto tra le frequenze torsionale  $\omega_{\theta i}$  e traslazionale  $\omega_{y i}$  della  $i$ -esima coppia di modi di vibrazione che caratterizzano il corrispondente sistema bilanciato è indipendente dalla coppia di modi considerati (Hejal e Chopra 1987). Tale rapporto è generalmente denotato con il simbolo  $\Omega_{\theta}$ . Il sistema monopiano prima citato è quello che possiede un'eccentricità strutturale pari ad  $e_s$  ed un rapporto tra la frequenza torsionale e quella traslazionale pari ad  $\Omega_{\theta}$ . Le frequenze di tale sistema normalizzate rispetto alla frequenza traslazionale  $\omega_y$  del corrispondente sistema monopiano bilanciato dipendono esclusivamente dai parametri  $e_s$  ed  $\Omega_{\theta}$  e valgono:

$$\bar{\omega}_n = \frac{\omega_n}{\omega_y} = \sqrt{\frac{1 + (e_s / r_m)^2 + \Omega_{\theta}^2}{2} \pm \sqrt{\left[ \frac{1 + (e_s / r_m)^2 + \Omega_{\theta}^2}{2} \right]^2 + (e_s / r_m)^2 \Omega_{\theta}^2}} \quad n = 1, 2 \quad (1)$$

dove  $r_m$  rappresenta il raggio d'inerzia delle masse dell'impalcato calcolato rispetto a  $C_M$ . Note le frequenze  $\omega$  ed i modi di vibrazione  $\mathbf{y}_i$  del sistema multipiano bilanciato, nonché le due frequenze normalizzate  $\bar{\omega}_n$  ed i modi di vibrazione  $[\alpha_{yn}, \alpha_{\theta n}]$  del sistema monopiano accoppiato, le frequenze naturali  $\omega_{hi}$  ed i modi di vibrazione  $\mathbf{f}_{ni}$  del sistema multipiano accoppiato si possono determinare mediante le seguenti relazioni:

$$\omega_{1i} = \bar{\omega}_1 \cdot \omega_{yi}, \quad \omega_{2i} = \bar{\omega}_2 \cdot \omega_{yi}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2)$$

$$\mathbf{f}_{1i} = \begin{Bmatrix} \alpha_{y1} \mathbf{y}_i \\ \alpha_{\theta 1} \mathbf{y}_i \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{f}_{2i} = \begin{Bmatrix} \alpha_{y2} \mathbf{y}_i \\ \alpha_{\theta 2} \mathbf{y}_i \end{Bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3)$$

Quindi, se si valutano i massimi modali del sistema multipiano asimmetrico si osserva che il massimo modale di un qualunque ente di risposta  $r_{ni}$  può essere espresso mediante il prodotto tra  $r_i$ , valore massimo assunto dallo stesso ente di risposta per il corrispondente sistema multipiano disaccoppiato nel suo  $i$ -esimo modo di vibrazione, per  $\bar{r}_{ni}$ , valore massimo dell'ente di risposta corrispondente ad  $r_{ni}$  nell' $n$ -esimo modo di vibrazione del corrispondente sistema monopiano asimmetrico normalizzato rispetto a quello del sistema monopiano traslante con frequenza naturale pari  $\omega_{yi}$ , in simboli:

$$r_{ni} = \bar{r}_{ni} \cdot r_i \quad n = 1, 2; \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4)$$

Se lo spettro di risposta varia con legge iperbolica oppure è costante la risposta normalizzata  $\bar{r}_{ni}$  del generico sistema monopiano asimmetrico associato diventa indipendente dalla sua frequenza laterale disaccoppiata  $\omega_{yi}$ . Ciò permette di esprimere la stima del vabre massimo assunto dall'ente di risposta  $r$  durante il sisma mediante la seguente relazione:

$$r = \sqrt{\left( \sum_{i=1}^N r_i^2 \right) (\bar{r}_1^2 + \bar{r}_2^2 + 2\gamma_{12} \bar{r}_1 \bar{r}_2)} = r_o \cdot \bar{r} \quad (5)$$

La (5) mostra che il valore massimo a cui attinge il generico ente di risposta  $r$  del sistema multipiano torsionalmente accoppiato si ottiene moltiplicando  $r_o$ , valore massimo assunto dallo stesso ente di risposta nel corrispondente sistema multipiano bilanciato determinato con il criterio SRSS, per  $\bar{r}$ , valore massimo normalizzato dell'ente di risposta corrispondente ad  $r$  del sistema monopiano asimmetrico valutato mediante il criterio CQC. Generalmente, gli spettri proposti dalle normative antisismiche presentano un tratto costante (per bassi periodi) seguito da un tratto iperbolico. In questi casi la (5) fornirà risultati approssimati che saranno più realistici se i modi significativi ricadono tutti sul tratto iperbolico o costante dello spettro.

### 3 CLASSIFICAZIONE DEGLI EDIFICI SECONDO LA NORMATIVA

Benché l'analisi modale sia ormai uno strumento d'uso comune tra gli ingegneri strutturisti, quasi tutte le normative antisismiche (EC8 1993, NBCC 1990, UBC 1997) consentono la valutazione approssimata della risposta alle azioni sismiche di sistemi irregolari in pianta utilizzando l'analisi statica quando i centri di massa e di rigidezza della struttura sono allineati lungo due assi verticali. Tale risposta si ottiene come l'involuppo dei risultati di due analisi statiche dove le forze orizzontali equivalenti al sisma vanno applicate con due eccentricità di progetto rispetto al centro elastico  $C_R$ . Le semplici relazioni che forniscono le eccentricità di progetto, di seguito denominate  $e_{max}$  ed  $e_{min}$  possono essere espresse nella seguente forma, dove i coefficienti  $\alpha$ ,  $\delta$  e  $\beta$  assumono valori differenti per ciascuna normativa:

$$e_{max} = \alpha \cdot e_s + \beta \cdot L \quad (6a)$$

$$e_{min} = \delta \cdot e_s - \beta \cdot L \quad (6b)$$

Ricordando i numerosi studi (Anastassiadis ed al. 1998, Calderoni ed al. 1994) i quali dimostrano la possibilità di involuppare la risposta dinamica di un sistema monopiano asimmetrico mediante l'analisi statica attraverso due eccentricità di progetto opportunamente tarate ( $e_{max}$  ed  $e_{min}$ ), nonché le proprietà degli edifici di cui si tratta nel presente lavoro, si conclude che secondo tali norme sotto l'ipotesi summenzionata una struttura è assimilabile ad un sistema regolarmente asimmetrico. L'assunzione delle norme in questione, secondo lo scrivente, non è lecita poiché queste trascurano che l'esistenza di un asse elastico parallelo all'asse dei centri di massa costituisce soltanto una delle proprietà che caratterizzano gli edifici regolarmente asimmetrici e pertanto, in quanto condizione necessaria ma non sufficiente, non garantisce l'appartenenza della struttura in oggetto a tale classe di sistemi.

### 4 UNA NUOVA DEFINIZIONE DI EDIFICIO REGOLARMENTE ASIMMETRICO

Le strutture che vengono realizzate nella pratica tecnica difficilmente possiedono tutti i requisiti necessari per essere classificate come regolarmente asimmetriche, poiché le condizioni stabilite dalla definizione di Hejal e Chopra sono molto restrittive. Tra queste la più limitativa è certamente quella che richiede la proporzionalità tra le matrici di rigidezza degli elementi resistenti verticali. Tale condizione non è mai soddisfatta negli edifici dotati di telai e pareti che, per tale motivo, sono stati usati in passato come esempio di edifici non regolarmente asimmetrici (Hejal e Chopra 1987, Makarios e Anastassiadis 1998a).

Ciò che rende gli edifici regolarmente asimmetrici più pregiati di altri sono le proprietà di cui gode la loro risposta elastica ed in particolare la possibilità di cogliere gli effetti dei fenomeni di accoppiamento latero-torsionale mediante uno schema monopiano equivalente. La dimostrazione di Hejal e Chopra mostra che ciò è possibile per gli edifici che possiedono i requisiti elencati nel paragrafo 2 ma non esclude che sistemi diversi da questi possano godere delle stesse proprietà. In sostanza le predette condizioni sono *sufficienti* ma non *necessarie*. Sulla base di tali considerazioni è stata riformulata la definizione di sistema regolarmente asimmetrico: "Un edificio è regolarmente asimmetrico se la sua risposta elastica ad un'eccitazione sismica si può ottenere componendo, mediante le relazioni mostrate nel paragrafo 2, la risposta di un sistema multipiano traslante e quella di un sistema monopiano asimmetrico".

La nuova definizione consente di ampliare la classe degli edifici regolarmente asimmetrici, poiché comprende gli edifici studiati da Hejal e Chopra ma non esclude a priori l'appartenenza a tale classe dei sistemi dotati di elementi resistenti con matrici di rigidezza non proporzionali. Nel seguito si dimostra analiticamente che è lecito utilizzare la scomposizione prima citata, anche in assenza di proporzionalità tra le matrici di rigidezza, ogni qualvolta l'edificio può essere suddiviso in più sottosistemi strutturali regolarmente asimmetrici caratterizzati dalla stessa eccentricità  $e_s$  e dallo stesso rapporto  $\Omega_0$  tra le frequenze torsionali e traslazionali disaccoppiate.

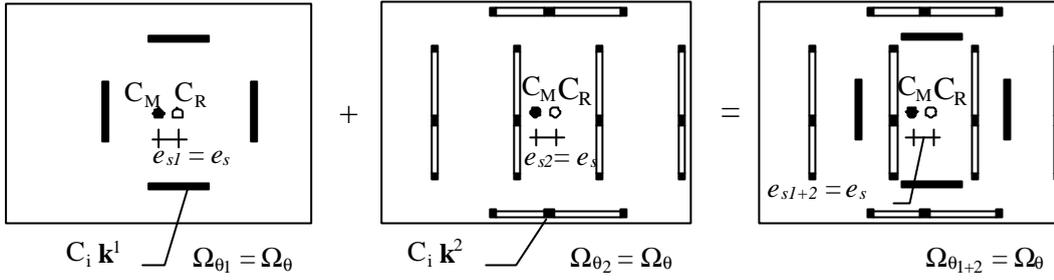


Figura 1. Sistema regolarmente asimmetrico generalizzato.

Senza inficiare la generalità dei risultati si considera un edificio la cui struttura, simmetrica rispetto ad un asse, può essere scomposta in due sottosistemi strutturali regolarmente asimmetrici (Figura 1). Gli elementi resistenti di ciascun sottosistema sono tra loro proporzionali, mentre non c'è proporzionalità tra le matrici di rigidezza appartenenti a sottosistemi distinti. Gli assi  $X$  ed  $Y$  del sistema di riferimento  $OXYZ$  sono paralleli agli assi principali del sistema mentre l'asse  $Z$  è coincidente con l'asse dei centri di massa. Il sisma agisce lungo l'asse  $Y$  e non attiva i modi traslazionali lungo l'asse  $X$  poiché questo è di simmetria per il sistema; dunque il problema che bisogna risolvere è a 2N gradi di libertà. Si assumono come gradi di libertà del sistema gli spostamenti dei centri di massa in direzione  $Y$   $\mathbf{u}_y$  e le rotazioni degli impalcati moltiplicati per il raggio d'inerzia delle masse  $r_m \mathbf{q}_z$ .

Al fine di scrivere le equazioni del moto del sistema bisogna prima costruire la sua matrice di rigidezza, che si ottiene sommando quelle dei due sottosistemi:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^1 + \mathbf{K}^2 \quad (7)$$

dove la generica matrice  $\mathbf{K}^i$  possiede in generale la seguente forma:

$$\mathbf{K}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{yy}^i & \frac{1}{r_m} \mathbf{K}_{y\theta}^i \\ \frac{1}{r_m} \mathbf{K}_{y\theta}^i & \frac{1}{r_m^2} \mathbf{K}_{\theta\theta}^i \end{bmatrix} \quad (8)$$

Sfruttando la proporzionalità tra le matrici di rigidezza degli elementi resistenti dell' $i$ -esimo sistema la matrice  $\mathbf{K}_{yy}^i$  può essere posta nella seguente forma:

$$\mathbf{K}_{yy}^i = \sum_j \mathbf{k}_{yyj}^i = \left( \sum_j C_{yj} \right) \mathbf{k}^i = C_y^i \mathbf{k}^i \quad (9)$$

esplicitando, inoltre, la matrice  $\mathbf{K}_{y\theta}^i$  è possibile trovare una relazione che la lega alla matrice  $\mathbf{K}_{yy}^i$ :

$$\mathbf{K}_{y\theta}^i = \sum_j \mathbf{k}_{\theta yj}^i = \left( \sum_j C_{yj} x_j \right) \mathbf{k}^i = C_{y\theta}^i \mathbf{k}^i = \frac{C_{y\theta}^i}{C_y^i} \mathbf{K}_{yy}^i = e_s \cdot \mathbf{K}_{yy}^i \quad (10)$$

Bisogna osservare che per ciascun sottosistema il rapporto  $C_{y\theta}^i / C_y^i$ , rappresenta l'ascissa del centro di rigidezza di piano rispetto al centro di massa dell'impalcato (Hejal e Chopra 1987) che è numericamente uguale all'eccentricità strutturale  $e_s$ , ed assumerà segno positivo o negativo a seconda che il centro di rigidezza si trovi a sinistra o a destra del centro di massa.

Analogamente anche la generica matrice  $\mathbf{K}_{\theta\theta}^i$  potrà essere messa in relazione con la corrispondente  $\mathbf{K}_{yy}^i$ :

$$\mathbf{K}_{\theta\theta}^i = \sum_j (C_{yj}^i x_j^2 + C_{xj}^i y_j^2) \mathbf{k}^i = C_\theta^i \mathbf{k}^i = \frac{C_\theta^i}{C_y^i} \mathbf{K}_{yy}^i = \left( e_s^2 + \frac{C_{\theta R}^i}{C_y^i} \right) \mathbf{K}_{yy}^i \quad (11)$$

Si possono quindi scrivere le equazioni del moto del sottosistema utilizzando le espressioni appena trovate per la  $\mathbf{K}_{y\theta}^i$  e la  $\mathbf{K}_{\theta\theta}^i$ :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{m} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_y \\ r_m \ddot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{yy}^i & \frac{e_s}{r_m} \mathbf{K}_{yy}^i \\ \frac{e_s}{r_m} \mathbf{K}_{yy}^i & \left( \frac{e_s^2}{r_m^2} + \frac{C_{\theta R}}{r_m^2 C_y} \right) \mathbf{K}_{yy}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_y \\ r_m \mathbf{q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{m} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \ddot{u}_g \quad (12)$$

dove  $\mathbf{m}$  è una matrice diagonale di ordine  $N$  contenente le masse dei diversi piani.

Le equazioni del moto del corrispondente sistema bilanciato si ottengono dalle (12) ponendo  $e_s = 0$ . In questo caso, i moti traslazionali e torsionali sono disaccoppiati, le frequenze naturali ed i modi di vibrazione del sistema possono essere determinati risolvendo le equazioni che seguono:

$$\left( \mathbf{K}_{yy}^i - \omega_y^2 \mathbf{m} \right) \mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (13a)$$

$$\left( \frac{C_{\theta R}}{r_m^2 C_y} \mathbf{K}_{yy}^i - \omega_\theta^2 \mathbf{m} \right) \mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (13b)$$

Risolvendo la (13a) si determinano le  $N$  frequenze traslazionali del sistema  $\omega_{yj}$  ed i corrispondenti modi di vibrazione  $\mathbf{y}_j$ . Si osserva, inoltre, che  $\mathbf{y}_j$  è anche soluzione della (13b) mentre la corrispondente frequenza torsionale  $\omega_{\theta j}$  è legata a quella traslazionale  $\omega_{yj}$  dalla relazione che segue:

$$\frac{\omega_{\theta j}}{\omega_{yj}} = \sqrt{\frac{C_{\theta R}}{r_m^2 C_y}} = \Omega_\theta \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (14)$$

Adesso, nota l'espressione del rapporto  $\Omega_\theta$ , e ricordando che i due sottosistemi possiedono la stessa eccentricità strutturale  $e_s$  e lo stesso  $\Omega_\theta$ , si possono scrivere i diversi termini della matrice di rigidezza  $\mathbf{K}$  dell'intero sistema e quindi le sue equazioni del moto:

$$\mathbf{K}_{yy} = \mathbf{K}_{yy}^1 + \mathbf{K}_{yy}^2 \quad (15a)$$

$$\frac{\mathbf{K}_{y\theta}}{r_m} = \frac{\mathbf{K}_{y\theta}^1}{r_m} + \frac{\mathbf{K}_{y\theta}^2}{r_m} = \frac{e_s}{r_m} \cdot (\mathbf{K}_{yy}^1 + \mathbf{K}_{yy}^2) = \frac{e_s}{r_m} \cdot \mathbf{K}_{yy} \quad (15b)$$

$$\frac{\mathbf{K}_{\theta\theta}}{r_m^2} = \frac{\mathbf{K}_{\theta\theta}^1}{r_m^2} + \frac{\mathbf{K}_{\theta\theta}^2}{r_m^2} = \left( \frac{e_s^2}{r_m^2} + \Omega_\theta^2 \right) (\mathbf{K}_{yy}^1 + \mathbf{K}_{yy}^2) = \left( \frac{e_s^2}{r_m^2} + \Omega_\theta^2 \right) \cdot \mathbf{K}_{yy} \quad (15c)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{m} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_y \\ r_m \ddot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{yy} & \frac{e_s}{r_m} \mathbf{K}_{yy} \\ \frac{e_s}{r_m} \mathbf{K}_{yy} & \left( \frac{e_s^2}{r_m^2} + \Omega_\theta^2 \right) \mathbf{K}_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_y \\ r_m \mathbf{q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{m} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \ddot{u}_g \quad (16)$$

Si osserva che le equazioni appena ottenute sono formalmente identiche a quelle del generico sistema componente e pertanto esso sarà caratterizzato da unica eccentricità strutturale  $e_s$  ai diversi piani e da un unico rapporto  $\Omega_\theta$  tra le frequenze torsionali e traslazionali disaccoppiate uguali a quelli dei sistemi componenti.

Le frequenze naturali del sistema ed i modi di vibrazione ad esse associati coincidono con la soluzione del seguente del problema di autovalori ed autovettori:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{yy} - \omega^2 \mathbf{m} & \frac{e_s}{r_m} \mathbf{K}_{yy} \\ \frac{e_s}{r_m} \mathbf{K}_{yy} & \left( \frac{e_s^2}{r_m^2} + \frac{C_{\theta R}}{r_m^2 C_y} \right) \mathbf{K}_{yy} - \omega^2 \mathbf{m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_y \\ \mathbf{f}_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

dove i vettori  $\mathbf{f}_y$  e  $\mathbf{f}_\theta$  contengono rispettivamente le componenti traslazionali e torsionali del generico modo di vibrazione. Le frequenze con i corrispondenti modi di vibrazione sono legate a quelle di due sistemi più semplici; il sistema torsionalmente bilanciato ad N piani, ed un sistema monopiano torsionalmente accoppiato.

Esprimendo i modi di vibrazione del sistema torsionalmente accoppiato in funzione di quelli del sistema bilanciato:

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_y \\ \mathbf{f}_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_y \mathbf{y}_j \\ \alpha_\theta \mathbf{y}_j \end{Bmatrix} \quad (18)$$

dove le quantità  $\alpha_y$  e  $\alpha_\theta$  vanno determinate opportunamente, sostituendo la (18) nella (17) e premoltiplicando per  $(1/\omega_j^2) \mathbf{y}_j$  si ottiene:

$$\begin{bmatrix} 1 - \bar{\omega}^2 & \frac{e_s}{r_m} \\ \frac{e_s}{r_m} & \frac{e_s^2}{r_m^2} + \Omega_\theta^2 - \bar{\omega}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_y \\ \alpha_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

dove  $\bar{\omega} = \omega/\omega_j$ . Queste equazioni possono essere interpretate come il problema di autovalori ed autovettori associato ad un sistema monopiano avente eccentricità  $e_s$  e rapporto tra le frequenze torsionali e laterali disaccoppiate pari ad  $\Omega_\theta$ . Le quantità  $\alpha_y$  e  $\alpha_\theta$  rappresentano dunque le componenti traslazionale e torsionale del suo generico modo di vibrazione, mentre  $\bar{\omega}_1$  ed  $\bar{\omega}_2$  sono le sue frequenze naturali normalizzate rispetto alla frequenza traslazionale del suo corrispondente sistema disaccoppiato.

Sulla base di quanto è stato detto sin qui le frequenze naturali ed i modi di vibrazione del sistema multipiano regolarmente asimmetrico esaminato possono essere determinati mediante le seguenti relazioni:

$$\omega_{1j} = \bar{\omega}_1 \omega_{yj}, \quad \omega_{2j} = \bar{\omega}_2 \omega_{yj}, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (20)$$

$$\mathbf{f}_{1j} = \begin{Bmatrix} \alpha_{y1} \mathbf{y}_j \\ \alpha_{\theta 1} \mathbf{y}_j \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{f}_{2j} = \begin{Bmatrix} \alpha_{y2} \mathbf{y}_j \\ \alpha_{\theta 2} \mathbf{y}_j \end{Bmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (21)$$

La (20) e la (21), coincidenti rispettivamente con la (2) e la (3) riportate nel paragrafo 2, mostrano che le frequenze ed i modi di vibrazione del sistema esaminato, nonostante non vi sia proporzionalità tra le matrici di rigidezza degli elementi resistenti verticali, rispettano le stesse regole di composizione valide per gli edifici definiti da Hejal e Chopra. Utilizzando questo risultato e ripercorrendo la dimostrazione dei predetti autori (Hejal e Chopra 1987) si dimostra che la risposta elastica ad un'eccitazione sismica del sistema in questione possiede tutte le proprietà che caratterizzano gli edifici regolarmente asimmetrici.

## 5 APPLICAZIONI NUMERICHE

Ciascuno dei due edifici esaminati in questo paragrafo (Figura 2), in seguito denominati sistemi A e B, è dotato di sei impalcati rigidi nel proprio piano di forma rettangolare ( $29.5 \times 15.5$  m) aventi massa pari a 232.3 t ad ogni livello e raggio d'inerzia delle masse pari ad 8.85 m. La distribuzione della massa degli impalcati è diversa nei due casi: nel sistema A il centro di massa  $C_M$  è spostato alla sinistra del baricentro geometrico dell'impalcato  $C_G$  di 2.95 m, mentre nel si-

stema B i baricentri  $C_M$  e  $C_G$  sono coincidenti. Gli elementi portanti verticali dei due sistemi, dotati di rigidezza solo nel loro piano, possono essere distinti in due gruppi. Il primo di questi consiste in 12 telai (4 telai con sette campate lungo la direzione longitudinale ed 8 telai con tre campate lungo quella trasversale), simmetricamente disposti rispetto al baricentro geometrico dell'impalcato, mentre il secondo è costituito da 4 pareti. In ciascun caso, i due gruppi di elementi costituiscono due sottosistemi strutturali regolarmente asimmetrici caratterizzati da un asse elastico e da un valore del rapporto tra le frequenze laterali e torsionali che indicheremo con  $\Omega_{\theta F}$  per i telai ed  $\Omega_{\theta W}$  per le pareti.

I momenti d'inerzia di travi e pilastri, che variano proporzionalmente da un telaio all'altro, sono stati assegnati in maniera che il rapporto  $\Omega_{\theta F}$  della struttura intelaiata risulti unitario e che il suo asse elastico si collochi nella posizione desiderata: coincidente con il baricentro geometrico  $C_G$  dell'impalcato nel primo edificio (sistema A), spostato a destra di 2.95 m rispetto a  $C_G$  nel secondo (sistema B).

In entrambi gli edifici considerati le pareti, aventi tutte la medesima sezione trasversale, sono disposte simmetricamente rispetto all'asse elastico del sottosistema a struttura intelaiata, pertanto l'asse elastico del sottosistema costituito dalle pareti coincide con quello dei telai. La disposizione in pianta delle pareti, diversa nei due casi considerati, è tale che nel sistema A il rapporto  $\Omega_{\theta W}$  è pari a 0.25 mentre nel sistema B assume valore unitario.

Sia in direzione  $X$  che in direzione  $Y$ , il sistema traslante dei telai possiede periodo fondamentale pari ad  $1/\sqrt{2}$  s, mentre il periodo fondamentale del sistema accoppiato telai-pareti è pari ad 1 s. Se si osserva che il periodo fondamentale del sistema intelaiato ottenuto raddoppiando le inerzie dei telai è pari ad 1 s, se ne può concludere che i due sottosistemi forniscono contributi comparabili alla rigidezza complessiva del sistema.

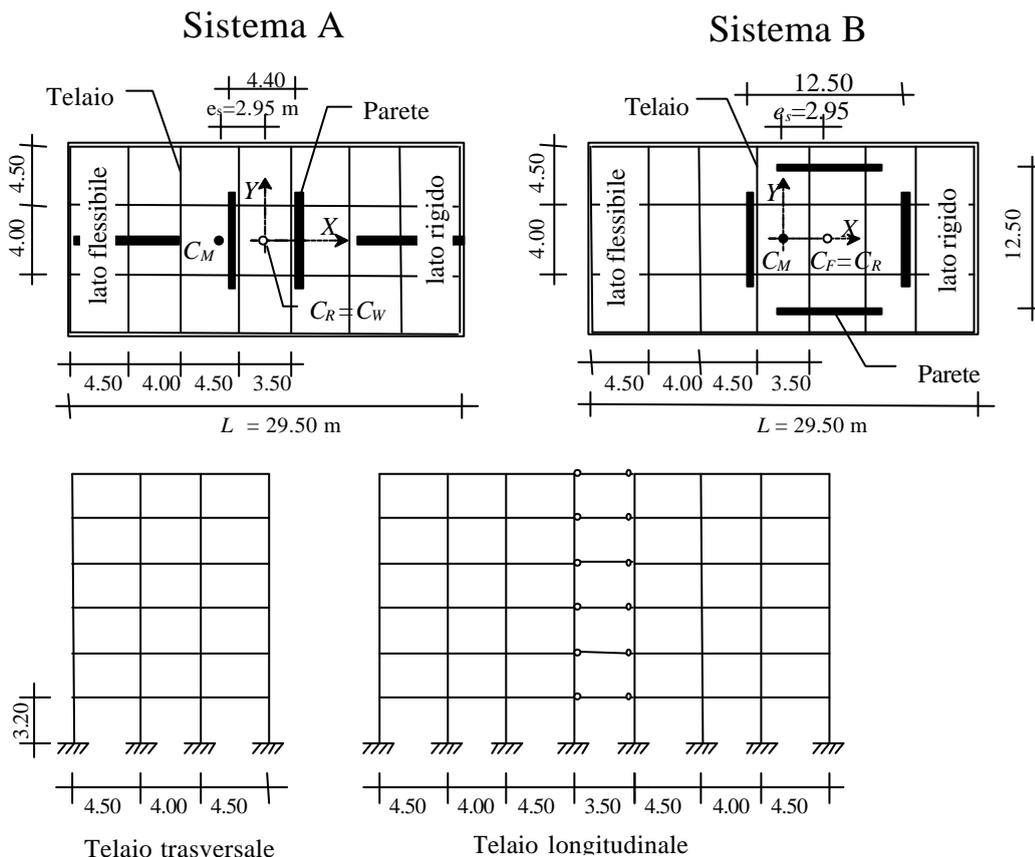


Figura 2. Caratteristiche geometriche degli edifici analizzati; sistema A,  $\Omega_{\theta F} = 1.00$ ,  $\Omega_{\theta W} = 0.25$ ; sistema B,  $\Omega_{\theta F} = \Omega_{\theta W} = 1.00$ .

I due sistemi sono torsionalmente accoppiati e l'eccentricità  $e_s$ , tra i centri di rigidezza ed i centri di massa di piano, allineati lungo due assi verticali, è di 2.95 m, uguale al 10% della dimensione maggiore  $L$  dell'impalcato. È interessante osservare che, seguendo le prescrizioni di diversi co-

dici antisismici (EC8 1993; NBCC 1990; UBC 1997) entrambi gli edifici andrebbero classificati come regolarmente asimmetrici, poiché possiedono centri di massa e centri di rigidità allineati lungo due assi verticali, mentre applicando la definizione di Hejal e Chopra bisognerebbe escluderne l'appartenenza a tale classe di edifici in quanto gli elementi resistenti che costituiscono la loro struttura non possiedono matrici di rigidità proporzionali.

Al fine di stabilire se gli edifici in questione possiedono o meno le proprietà di quelli regolarmente asimmetrici, questi sono stati sottoposti all'azione di un sisma che agisce ortogonalmente all'asse di simmetria. Le azioni sismiche sono state valutate mediante lo spettro di risposta proposto dall'Eurocodice 8 per suoli di classe A, ridotto mediante un valore costante del fattore di struttura  $q=5$  e scalato attraverso un'accelerazione al suolo pari ad  $a_g=0.35$  g. La risposta sismica dei sistemi torsionalmente accoppiati, valutata determinando i massimi modali e combinandoli mediante il criterio CQC, è stata quindi confrontata con quella del corrispondente sistema bilanciato. In particolare, per ciascun edificio, è stata determinata la distribuzione in pianta ai diversi piani dei massimi spostamenti assoluti d'impalcato nella direzione del sisma. Quindi, gli spostamenti dell' $i$ -esimo piano  $u_i$  sono stati normalizzati dividendoli per lo spostamento del corrispondente sistema bilanciato  $u_{o,i}$ . Il diagramma degli spostamenti normalizzati descrive gli effetti dei fenomeni di accoppiamento latero-torsionale sugli spostamenti del piano in questione: tali effetti saranno tanto più rilevanti quanto più il parametro normalizzato in questione si discosta dal valore unitario. Le conclusioni a cui si perviene non cambiano quando si analizza un altro parametro di risposta in luogo degli spostamenti assoluti d'impalcato.

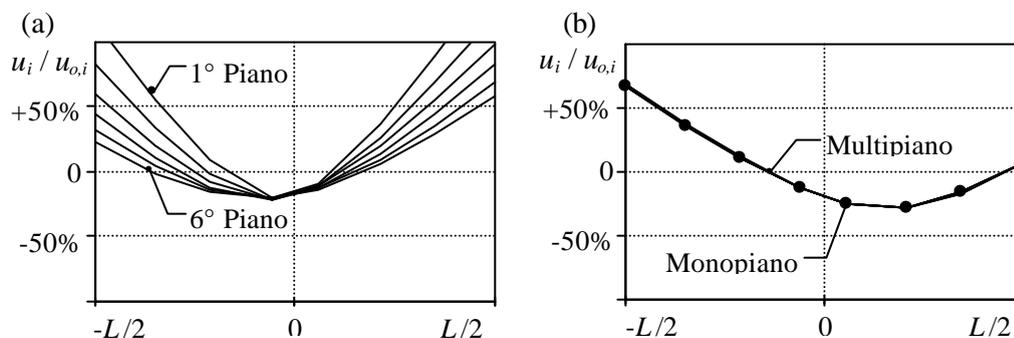


Figura 3. Involuppo degli spostamenti d'impalcato normalizzati rispetto al corrispondente sistema bilanciato; (a) Sistema A; (b) Sistema B.

Dall'esame dei diagrammi relativi al sistema A (Figura 3a) si osserva che l'irregolarità in pianta produce, ad ogni piano, spostamenti dei telai d'estremità superiori a quelli del sistema bilanciato. Tuttavia lo scarto percentuale tra i due spostamenti (quelli del sistema asimmetrico e bilanciato) è molto più rilevante ai piani bassi: all'estremo destro dell'impalcato lo scarto è di circa il 55% al 6° piano mentre è superiore al 150% al 1° piano. Tutto questo indica che gli effetti dei fenomeni di accoppiamento latero-torsionale si manifestano in misura diversa ai vari piani dell'edificio e quindi non possono essere colti scalando la risposta del sistema traslante attraverso la risposta normalizzata di un unico sistema monopiano asimmetrico equivalente. Dunque il sistema A, a dispetto di ciò che si concluderebbe applicando le prescrizioni di normativa, è non regolarmente asimmetrico. Il diverso comportamento osservato ai vari piani dell'edificio può essere spiegato tenendo conto dei diversi valori del rapporto  $\Omega_\theta$  che caratterizzano i due sottosistemi ( $\Omega_{\theta W} = 0.25$  per le pareti,  $\Omega_{\theta F} = 1.00$  per i telai). Ciò implica che al primo piano, dove la rigidità delle pareti è nettamente prevalente rispetto a quella dei telai, il comportamento del sistema è caratteristico di un sistema torsio-flessibile, mentre ai piani alti, dove è la rigidità dei telai a prevalere, il comportamento è tipico di un sistema torsio-rigido.

Le curve degli spostamenti normalizzati relative a diversi piani del sistema B (Figura 3b) sono tutte sovrapposte, ciò significa che gli effetti dell'accoppiamento latero-torsionale si ripetono identicamente a tutti i piani. È dunque ragionevole pensare che sia possibile cogliere tali effetti mediante la risposta normalizzata di un sistema monopiano equivalente. Tale sistema esiste realmente ed è quello caratterizzato da un'eccentricità strutturale  $e_s = 2.95$  m, pari a quella del sistema multipiano, e dal rapporto tra le frequenze torsionali e traslazionali disaccoppiate  $\Omega_\theta = 1.0$ , uguale a quello dei sottosistemi che costituiscono il sistema B. La sua risposta norma-

lizzata, evidenziata mediante i pallini nella Figura 3b, si sovrappone perfettamente alle curve relative al sistema multipiano. I risultati dell'analisi modale del sistema B mostrano, inoltre, che le frequenze e i modi di vibrazione nonché i massimi modali del sistema accoppiato in questione si possono ottenere combinando le corrispondenti quantità relative ai sistemi multipiano bilanciato e monopiano accoppiato mediante le relazioni elencate nel paragrafo 2. Il riepilogo dettagliato di tali risultati si trova in (Marino 2000), la Tabella 1 mostra il confronto tra le frequenze relative alle prime tre coppie di modi di vibrazione determinate per via diretta ed attraverso l'uso delle (2), mentre nella Tabella 2 un analogo confronto è stato fatto per i modi di vibrazione. In entrambi i casi la corrispondenza tra i valori è eccellente e le piccolissime differenze sono dovute ai limiti di precisione del calcolatore. Concludendo il sistema B, nonostante la contemporanea presenza in esso di elementi resistenti con matrici di rigidezza tra loro non proporzionali, gode di tutte le proprietà che caratterizzano i sistemi regolarmente asimmetrici. Ciò era prevedibile poiché esso soddisfa tutte le ipotesi del teorema dimostrato nel paragrafo 4.

Tabella 1. Frequenze del sistema multipiano asimmetrico.

Coppia di modi	Frequenza (rad/sec)			
	$\bar{\omega}_1 \cdot \omega_{yi}$	$\omega_{1i}$	$\bar{\omega}_2 \cdot \omega_{yi}$	$\omega_{1i}$
1	5.3227	5.3229	7.4171	7.4173
2	23.3041	23.3042	32.4740	32.4780
3	59.7380	59.7361	83.2441	83.2410

Tabella 2. Prima coppia di modi di vibrazione del sistema multipiano asimmetrico.

Piano	$\begin{Bmatrix} \alpha_{y1} \cdot \mathbf{y}_1 \\ \alpha_{\theta 1} \cdot \mathbf{y}_1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{y11} \\ \mathbf{f}_{\theta 11} \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} \alpha_{y2} \cdot \mathbf{y}_1 \\ \alpha_{\theta 2} \cdot \mathbf{y}_1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{y21} \\ \mathbf{f}_{\theta 21} \end{Bmatrix}$
6	0.5123	0.5124	-0.4340	-0.4339
5	0.4136	0.4137	-0.3504	-0.3503
4	0.3092	0.3092	-0.2619	-0.2618
3	0.2029	0.2029	-0.1719	-0.1719
2	0.1049	0.1049	-0.0889	-0.0889
1	0.0304	0.0305	-0.0258	-0.0258
6	-0.4340	-0.4339	-0.5123	-0.5124
5	-0.3504	-0.3503	-0.4136	-0.4137
4	-0.2619	-0.2618	-0.3092	-0.3091
3	-0.1719	-0.1718	-0.2029	-0.2030
2	-0.0889	-0.0889	-0.1049	-0.1049
1	-0.0258	-0.0258	-0.0304	-0.0304

## 6 CONCLUSIONI

Attraverso una revisione critica del concetto di edificio regolarmente asimmetrico, frequentemente utilizzato in letteratura, è stato possibile riformulare la definizione che Hejal e Chopra diedero di tali edifici nel 1987. Poiché da un punto di vista ingegneristico è utile distinguere tali edifici multipiano da altri per via delle particolari proprietà di cui gode la loro risposta sismica, in particolare la possibilità di cogliere gli effetti dell'accoppiamento latero-torsionale mediante un modello monopiano caratterizzato dalla stessa eccentricità strutturale  $e_s$  e dallo stesso rapporto tra le frequenze torsionale e traslazionale  $\Omega_\theta$  del sistema multipiano, è apparso logico definire regolarmente asimmetrico un edificio che gode di tali proprietà.

La nuova definizione consente di ampliare la classe degli edifici regolarmente asimmetrici, poiché comprende gli edifici studiati da Hejal e Chopra ma non esclude a priori l'appartenenza a tale classe di sistemi con schema sismoresistente *misto*, ad esempio dotato di telai e pareti. Nell'articolo l'esistenza di sistemi che non soddisfano le ipotesi di Hejal e Chopra ma che, tuttavia, sono regolarmente asimmetrici è stata dimostrata sia analiticamente che attraverso un esempio. In particolare si è dimostrato che un edificio gode delle proprietà prima citate, anche in

assenza di proporzionalità tra le matrici di rigidezza dei suoi elementi resistenti (requisito indispensabile secondo Hejal e Chopra), ogni qualvolta può essere suddiviso in più sottosistemi strutturali regolarmente asimmetrici caratterizzati dalla stessa eccentricità  $e_s$  e dallo stesso rapporto  $\Omega_\theta$ .

Infine si è esaminato l'approccio che molte normative (EC8 1993; NBCC 1990; UBC 1997) utilizzano per stabilire se un edificio sia o meno regolarmente asimmetrico. Tali norme, nel tentativo di legare l'appartenenza alla speciale classe di edifici alle proprietà di cui essi godono, considerano regolarmente asimmetrici tutti gli edifici multipiano i cui centri di massa e di rigidezza sono allineati lungo due assi verticali, dimenticando che il possesso di tale proprietà costituisce una condizione necessaria ma non sufficiente. Nell'articolo si esamina un edificio che, pur possedendo i requisiti richiesti dalle norme, manifesta una risposta sismica che differisce nettamente da quella di un sistema regolarmente asimmetrico. Il che dimostra come l'uso di tale criterio può portare, in alcuni casi, a conclusioni fallaci.

## RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- Anastassiadis, K., Athanatopoulos, A. e Makarios, T. 1998: Equivalent static eccentricities in the simplified methods of seismic analysis of buildings. *Earthquake Spectra* 14(1): 1-34.
- Chandler A.M. e Duan X.N. 1992. A modified static procedure for the design of torsionally unbalanced multistorey frame buildings. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 22: 447-462.
- Cheung, V.W.T. e Tso, W.K. 1986. Eccentricity in irregular multistorey buildings. *Canadian J. Civil Engng*, 10: 46-52.
- Duan X.N. e Chandler A.M. 1992. Inelastic seismic response of code-designed multistorey frame buildings with regular asymmetry. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 22: 431-445.
- Calderoni, B., Ghersi, A. e Mazzolani, F.M. 1994: A new approach to the problem of in-plan regularity in seismic design of buildings. *Proceedings of 10<sup>th</sup> European Conference on Earthquake Engineering*, Vol. 2: 843-848. Vienna: Austria.
- Eurocode 8 1993. Design provisions for earthquake resistance of structures. European Committee for Standardisation, ENV 1998-1-1/2/3.
- Ghersi, A. e Rossi, P.P. 1999. Formulation of design eccentricity to reduce ductility demand in asymmetric buildings. *Engineering Structures*, 22: 857-871.
- Hejal, H. e Chopra, A.K. 1987. Earthquake response of torsionally-coupled buildings. Earthquake Engineering Research Center, Report n° UBC/EERC-87/20, College of Engineering, University of California at Berkeley.
- Makarios, T. e Anastassiadis, A. 1998a. Real and fictitious elastic axes of multy-storey buildings: theory. *Struct. Design Tall Build.*, 7: 33-55.
- Makarios, T. e Anastassiadis, A. 1998b. Real and fictitious elastic axes of multy-storey buildings: applications. *Struct. Design Tall Build.*, 7: 57-71.
- Marino, E. 2000. Comportamento sismico e criteri di progettazione di edifici multipiano irregolari in pianta. Tesi di dottorato, Facoltà di Ingegneria, Università di Catania, Italia.
- Moghadam A.S. e Tso W.K. 2000. Extension of Eurocode 8 torsional provisions to multy-storey buildings. *Journal of Earthquake Engineering*, 4: 25-41.
- National Building Code of Canada, NBCC, 1990. Associate Committee on the National Building Code, National Research Council of Canada.
- SEAOC Blue Book, Recommended Lateral Force Requirements and Commentary, 1996. Structural Engineers Association of California's.
- Uniform Building Code, UBC, 1997. International Conference of Building Officials.
- Tso, W.K. e Zhu, T.J. 1992a. Design of torsionally unbalanced structural systems based on code provisions I: ductility demand. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 21: 609-627.
- Zhu, T.J. e Tso, W.K. 1992b. Design of torsionally unbalanced structural systems based on code provisions II: strength distribution. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 21: 629-644.