

## Formulazione analitica dell'asse di torsione ottimale

E. Marino, P.P. Rossi

*Dipartimento di Ingegneria Civile e Ambientale, Università di Catania, Italia*

**SOMMARIO:** Le strutture asimmetriche che vengono analizzate nella pratica tecnica, a rigore, difficilmente possiedono tutti i requisiti necessari per essere classificate come regolarmente asimmetriche. Molte di esse, tuttavia, presentano irregolarità planimetriche che, pur non essendo rigorosamente uniformi lungo l'altezza, differiscono poco da un piano all'altro. Ciò malgrado anche in tali sistemi non sono applicabili i metodi di progettazione proposti dalle normative antisismiche. Tali metodi presuppongono, infatti, la determinazione dell'eccentricità strutturale, che avviene in maniera semplice ed univoca in un sistema monopiano, ma è concettualmente difficoltosa in un sistema reale per via della mancanza di validi punti di riferimento. Un'interessante soluzione al problema è stata proposta negli ultimi anni da Makarios e Anastasiadis che suggeriscono di utilizzare, quale riferimento per un sistema multipiano, *l'asse di torsione ottimale*. La posizione di tale asse è tuttavia calcolata nella loro proposta mediante un metodo approssimato. Lo stesso problema è affrontato dagli Autori nel presente articolo per via analitica, al fine di ricavare le relazioni matematiche che individuano, con precisione e rigore scientifico, la posizione dell'asse di torsione ottimale.

**ABSTRACT:** Strictly speaking, actual asymmetric structures rarely have all the requirements necessary to be classified as regularly asymmetric. Most of them are characterized by in-plan irregularities which, even if not uniform in elevation, are not very different from story to story. Notwithstanding, for these systems as well as for those really irregular both in plan and in elevation the application of the design methods proposed by codes for irregular structures it is not possible. Such provisions always imply the knowledge of the structural eccentricity, which is straightforward in one-story models but conceptually difficult in actual multi-story systems because of the lack of valid reference points. An interesting solution to the problem has in last years been proposed by Makarios and Anastasiadis, which suggested to use, as a reference term for multistory systems, the axis of optimal torsion. The position of such axis is calculated by means of an approximated method. The same problem is analytically faced here at the aim of obtaining the mathematical expressions which rigorously define the position of the axis of optimal torsion.

### 1 INTRODUZIONE

Negli edifici planimetricamente irregolari sottoposti ad eccitazione sismica traslazionale gli impalcati subiscono contemporaneamente moti traslazionali e rotazionali. Ciò determina nelle membrature della struttura l'insorgere di sollecitazioni e deformazioni che sono diverse da quelle che si riscontrerebbero negli stessi elementi se la struttura fosse simmetrica e, pertanto, soggetta a moti di pura traslazione. In particolare, tali quantità risultano superiori od inferiori a

quelle del corrispondente sistema traslante a seconda della posizione che l'elemento resistente occupa nell'edificio nonché della rilevanza dei moti torsionali.

Diverse normative antisismiche (EC8 1993, NBCC 1990, UBC 1997) propongono al progettista due differenti approcci per valutare gli effetti dell'accoppiamento latero-torsionale. Il primo prevede l'impiego dell'analisi modale mentre il secondo consente la valutazione approssimata della risposta alle azioni sismiche di sistemi irregolari in pianta utilizzando l'analisi statica, opportunamente corretta. Questa è tuttavia utilizzabile solo se sono soddisfatte particolari condizioni: i centri di massa e quelli di rigidezza dell'edificio devono essere allineati lungo due assi verticali. Sotto tali ipotesi la previsione della risposta dell'edificio alle azioni sismiche si ottiene attraverso l'involuppo dei risultati di due analisi statiche nelle quali le forze orizzontali equivalenti al sisma vengono applicate con due eccentricità di progetto rispetto al centro elastico  $C_R$ . Le relazioni che forniscono tali eccentricità di progetto, di seguito denominate  $e_{max}$  ed  $e_{min}$ , in funzione dell'eccentricità strutturale del sistema  $e_s$  possono essere ricondotte sempre alla seguente forma:

$$e_{max} = \alpha \cdot e_s + \beta \cdot L \quad (1a)$$

$$e_{min} = \delta \cdot e_s - \beta \cdot L \quad (1b)$$

dove i coefficienti  $\alpha$ ,  $\delta$  e  $\beta$  assumono valori differenti per ciascuna normativa. Attraverso il termine  $\beta \cdot L$ , denominato *eccentricità accidentale*, si tiene conto delle incertezze sulla distribuzione dei carichi variabili e dei carichi permanenti, nonché delle differenze che vi possono essere tra i valori reali e quelli assunti per la rigidezza e la resistenza degli elementi strutturali. I coefficienti  $\alpha$  e  $\delta$ , invece, sono stati introdotti per tenere conto dell'amplificazione dinamica della risposta torsionale che si riscontra, in misura più o meno rilevante, negli edifici irregolari in pianta.

La validità dei metodi proposti dalle norme è stata oggetto in passato di numerosi studi che ne hanno messo a nudo le carenze. Le eccentricità di progetto definite attraverso le (1), che spesso non consentono di cogliere neppure la risposta elastica delle strutture asimmetriche con un accettabile grado di approssimazione (Anastassiadis ed al. 1998, Calderoni ed al. 1994), portano ad una ripartizione in pianta della resistenza generalmente inadeguata, ovvero incapace di assicurare un eguale impegno plastico dei diversi elementi resistenti della struttura quando questa viene sollecitata dal sisma oltre il suo limite elastico (Goel e Chopra 1990, Tso e Zhu 1992b). Tali risultati nonché le lezioni impartite dai terremoti verificatisi nel passato hanno spinto ricercatori di tutto il mondo a studiare il comportamento di tali strutture in occorrenza di eccitazioni sismiche severe. Tali studi hanno portato alla formulazione di metodologie per il calcolo degli edifici asimmetrici (Chandler e Duan 1992, Tso e Zhu 1992a, Gherzi e Rossi 1999), basate sull'impiego di eccentricità di progetto, ricavate sempre in funzione dell'eccentricità strutturale  $e_s$ , che cercano di cogliere un duplice obiettivo: evitare escursioni plastiche per sismi di modesta intensità e di assicurare richieste di duttilità massime non superiori a quelle riscontrate in presenza di sola traslazione in occorrenza di terremoti severi.

L'applicazione dei metodi per il progetto di edifici irregolari in pianta, sia proposti dalle norme sia messi a punto dai ricercatori che hanno studiato il problema negli ultimi anni, dunque è subordinata alla conoscenza dell'eccentricità strutturale  $e_s$ . La determinazione di tale grandezza, che avviene in maniera semplice ed univoca per un sistema monopiano (in tal caso essa coincide con la distanza tra il suo centro elastico ed il centro di massa dell'impalcato), è concettualmente difficoltosa in un sistema multipiano per via della mancanza di validi punti di riferimento (Hejal e Chopra 1987, Marino 2000).

Solo per edifici che appartengono alla speciale classe dei *sistemi regolarmente asimmetrici* è possibile individuare un insieme di punti, uno per ogni impalcato, che godono di tutte le proprietà del centro elastico del sistema monopiano. Tali punti sono allineati lungo un'asse verticale detto *asse dei centri elastici* (Cheung e Tso 1986, Hejal e Chopra 1987). Le strutture asimmetriche che vengono analizzate nella pratica tecnica, a rigore, difficilmente possiedono tutti i requisiti necessari per essere classificate come regolarmente asimmetriche. Molte di esse, tuttavia, presentano irregolarità planimetriche che, pur non essendo rigorosamente uniformi lungo l'altezza, differiscono poco da un piano all'altro. Anche in tali sistemi, che da un punto di vista pratico possono essere considerati come regolarmente asimmetrici, non è dunque possibile defi-

nire un asse dei centri elastici e pertanto non è possibile applicare, così come per quelli maggiormente irregolari, i metodi di progettazione per strutture con irregolarità planimetriche. Nei sistemi non regolarmente asimmetrici, anche se lievemente non regolari, i vari centri di riferimento definiti in passato (centri di taglio, di rigidezza, di torsione, ecc.) dipendono in maniera più o meno sensibile dalla distribuzione delle forze orizzontali utilizzata per calcolarne la posizione ed inoltre non sono tra loro coincidenti. Una interessante soluzione al problema è stata proposta negli ultimi anni da Makarios e Anastasiadis che suggeriscono di utilizzare, quale riferimento per un sistema multipiano, *l'asse di torsione ottimale*. La posizione di tale asse è tuttavia calcolata nella loro proposta mediante un metodo approssimato. Lo stesso problema è affrontato dagli Autori nel presente articolo per via analitica, al fine di ricavare le relazioni matematiche che individuano, con precisione e rigore scientifico, la posizione dell'asse di torsione ottimale.

## 2 CENTRI DI RIFERIMENTO DI STRUTTURE MULTIPIANO

Il primo ostacolo che si incontra quando si studia un edificio multipiano asimmetrico costituito da impalcati rigidi nel proprio piano sostenuti da elementi resistenti verticali (telai, pareti, nuclei, ecc.) consiste nella mancanza di validi punti di riferimento equivalenti al centro elastico utilizzato nei sistemi monopiano. Numerosi ricercatori hanno affrontato il problema fornendo definizioni che applicate ad un sistema monopiano restituiscono il suo centro elastico. Tra queste ricordiamo:

1. i *centri di rigidezza di piano*, definiti come quei punti degli impalcati in cui bisogna applicare un insieme di forze statiche orizzontali per ottenere solo la traslazione degli impalcati (Cheung e Tso 1986, Hejal e Chopra 1987);
2. i *centri di torsione di piano*, cioè i punti intorno ai quali avviene la rotazione degli impalcati quando l'edificio è sottoposto ad una data distribuzione di coppie torcenti lungo l'altezza (Hejal e Chopra 1987);
3. i *centri di taglio di piano*, cioè i punti di applicazione della risultante dei tagli, che insorgono negli elementi resistenti di quel livello, quando il sistema è sottoposto ad una data distribuzione di forze che provoca solo la traslazione degli impalcati (Hejal e Chopra 1987, Tso 1990);
4. i *baricentri delle rigidezze di piano*, determinati assumendo come rigidezza di piano del generico elemento resistente il rapporto tra taglio assorbito e spostamento relativo (Gherzi A. 1999);
5. i *centri di resistenza di piano*: al generico piano il centro in questione coincide con il punto in cui deve essere applicata la forza orizzontale, mentre gli altri impalcati non sono soggetti all'azione di alcuna forza, affinché quell'impalcato trasli senza ruotare (Humar 1984); in generale gli altri impalcati ruoteranno.

Generalmente in un edificio multipiano la posizione dei centri di riferimento appena definiti varia da piano a piano ed è influenzata, salvo nel caso dei centri di resistenza, in maniera più o meno rilevante dalla distribuzione di forze utilizzata per calcolarli. Inoltre, mentre in un sistema monopiano essi coincidono in un unico punto (il centro elastico), in un sistema multipiano sono distinti ad ogni piano. Per tali motivi ancora oggi non esiste una definizione universalmente accettata per i centri di riferimento degli edifici multipiano. Solo per edifici regolarmente asimmetrici le diverse definizioni individuano punti tra loro coincidenti che sono allineati lungo l'asse dei centri elastici.

Tra i citati insiemi di punti i più noti sono certamente i centri di rigidezza  $C_{Ri}$ , utilizzati come riferimento per il calcolo dell'eccentricità strutturale  $e_s$  da diverse normative antisismiche. Le espressioni che forniscono la loro posizione, in una struttura multipiano con  $N$  impalcati rigidi nel proprio piano, si determinano imponendo che gli impalcati traslino senza ruotare quando in essi si applica un assegnato insieme di forze orizzontali. Al fine determinare i centri di rigidezza si scrivono le equazioni di equilibrio, scelti quali gradi di libertà del generico impalcato gli spostamenti lungo due assi ortogonali  $u_{xj}$  ed  $u_{yj}$  di un suo punto  $P_i$  arbitrariamente scelto e la sua la rotazione  $\theta_{zj}$ :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{xx} & \mathbf{K}_{xy} & \mathbf{K}_{x\theta} \\ \mathbf{K}_{yx} & \mathbf{K}_{yy} & \mathbf{K}_{y\theta} \\ \mathbf{K}_{\theta x} & \mathbf{K}_{\theta y} & \mathbf{K}_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_x \\ \mathbf{u}_y \\ \boldsymbol{\theta}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_x \\ \mathbf{F}_y \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2)$$

dove i vettori  $\mathbf{u}_x$ ,  $\mathbf{u}_y$  e  $\boldsymbol{\theta}_z$  contengono rispettivamente gli spostamenti dei punti  $P_i$  in direzione  $X$  ed  $Y$  e le rotazioni degli impalcati mentre i vettori  $\mathbf{F}_x$ ,  $\mathbf{F}_y$  contengono le forze agenti nei punti  $P_i$ . Le sottomatrici di  $\mathbf{K}$  in generale sono tutte piene, tuttavia se si scelgono opportunamente i gradi di libertà alcune di esse si annullano. In particolare, se si scelgono come gradi di libertà gli spostamenti dei centri di rigidità di piano, ordinati nel vettore  $\tilde{\mathbf{u}}^T = [\tilde{\mathbf{u}}_x \ \tilde{\mathbf{u}}_y \ \boldsymbol{\theta}_z]$ , la matrice di rigidità deve assumere la seguente forma:

$$\tilde{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}_{xx} & \tilde{\mathbf{K}}_{xy} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{K}}_{yx} & \tilde{\mathbf{K}}_{yy} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{K}}_{\theta\theta} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Solo in questo caso, infatti, applicato un insieme di forze orizzontali in tali punti gli impalcati del sistema traslano senza ruotare. Il passaggio dalla matrice  $\mathbf{K}$  alla matrice  $\tilde{\mathbf{K}}$  avviene attraverso un cambio di base descritto dalla matrice di passaggio  $\mathbf{P}$ :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{y}_R \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & -\mathbf{x}_R \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{P}^T \mathbf{K} \mathbf{P} \quad (4)$$

dove  $\mathbf{I}$  è la matrice identica mentre  $\mathbf{x}_R$  ed  $\mathbf{y}_R$  sono matrici quadrate di ordine  $N$  da determinare. Sviluppando il prodotto si ottiene:

$$\tilde{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{xx} & \mathbf{K}_{xy} & \tilde{\mathbf{K}}_{x\theta} \\ \mathbf{K}_{yx} & \mathbf{K}_{yy} & \tilde{\mathbf{K}}_{y\theta} \\ \tilde{\mathbf{K}}_{\theta x} & \tilde{\mathbf{K}}_{\theta y} & \mathbf{K}_{\theta\theta} \end{bmatrix} \quad (5a)$$

dove

$$\tilde{\mathbf{K}}_{x\theta} = \mathbf{K}_{xx} \mathbf{y}_R - \mathbf{K}_{xy} \mathbf{x}_R + \mathbf{K}_{x\theta} \quad (5b)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_{y\theta} = \mathbf{K}_{yx} \mathbf{y}_R - \mathbf{K}_{yy} \mathbf{x}_R + \mathbf{K}_{y\theta} \quad (5c)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_{\theta x} = \mathbf{y}_R \mathbf{K}_{xx} - \mathbf{x}_R \mathbf{K}_{yx} + \mathbf{K}_{\theta x} \quad (5d)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_{\theta y} = \mathbf{y}_R \mathbf{K}_{yx} - \mathbf{x}_R \mathbf{K}_{yy} + \mathbf{K}_{\theta y} \quad (5e)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_{\theta\theta} = \mathbf{K}_{\theta\theta} + \mathbf{K}_{\theta x} \mathbf{y}_R - \mathbf{K}_{\theta y} \mathbf{x}_R - \mathbf{x}_R \tilde{\mathbf{K}}_{y\theta} + \mathbf{y}_R \tilde{\mathbf{K}}_{x\theta} \quad (5f)$$

Ricordando quale deve essere la forma della  $\tilde{\mathbf{K}}$  seguono le seguenti condizioni:

$$\mathbf{K}_{xx} \mathbf{y}_R - \mathbf{K}_{xy} \mathbf{x}_R + \mathbf{K}_{x\theta} = \mathbf{0} \quad (6a)$$

$$\mathbf{K}_{yx} \mathbf{y}_R - \mathbf{K}_{yy} \mathbf{x}_R + \mathbf{K}_{y\theta} = \mathbf{0} \quad (6b)$$

e risolvendo si determinano le matrici incognite:

$$\mathbf{x}_R = (\mathbf{K}_{yy} - \mathbf{K}_{yx} \mathbf{K}_{xx}^{-1} \mathbf{K}_{xy})^{-1} (\mathbf{K}_{y\theta} - \mathbf{K}_{yx} \mathbf{K}_{xx}^{-1} \mathbf{K}_{x\theta}) \quad (7a)$$

$$\mathbf{y}_R = -(\mathbf{K}_{xx} - \mathbf{K}_{xy} \mathbf{K}_{yy}^{-1} \mathbf{K}_{yx})^{-1} (\mathbf{K}_{x\theta} - \mathbf{K}_{xy} \mathbf{K}_{yy}^{-1} \mathbf{K}_{y\theta}) \quad (7b)$$

Le matrici  $\mathbf{x}_R$  e  $\mathbf{y}_R$  sono indipendenti dalla distribuzione di forze e dunque sono caratteristiche della struttura. Quando gli assi  $X$  ed  $Y$  del sistema di riferimento scelto coincidono con quelli principali del sistema le matrici  $\mathbf{K}_{xy}$  e  $\mathbf{K}_{yx}$  sono nulle e così le (7) possono essere semplificate:

$$\mathbf{x}_R = \mathbf{K}_{yy}^{-1} \mathbf{K}_{y0} \quad (8a)$$

$$\mathbf{y}_R = -\mathbf{K}_{xx}^{-1} \mathbf{K}_{x0} \quad (8b)$$

Ricordando che per un dato insieme di forze  $\mathbf{F}^t = [\mathbf{F}_x^t \ \mathbf{F}_y^t \ \mathbf{0}]$  applicate nei centri di rigidezza gli impalcati traslano senza ruotare si ricavano dalle equazioni di equilibrio le coordinate dei punti cercati che dipendono dalla distribuzione di forze assegnata e dalle matrici  $\mathbf{x}_R$  ed  $\mathbf{y}_R$ :

$$\{\mathbf{x}_R\} = [\mathbf{F}_y]^{-1} \mathbf{x}_R^T \mathbf{F}_y \quad (9a)$$

$$\{\mathbf{y}_R\} = [\mathbf{F}_x]^{-1} \mathbf{y}_R^T \mathbf{F}_x \quad (9b)$$

dove  $[\mathbf{F}_x]$  ed  $[\mathbf{F}_y]$  rappresentano le matrici diagonali aventi sulla diagonale principale le componenti dei vettori  $\mathbf{F}_x$  ed  $\mathbf{F}_y$ . Esplicitando i prodotti contenuti nelle (9) le coordinate dell' $i$ -esimo centro di piano possono essere espresse nella seguente forma:

$$x_{Ri} = x_{Rii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N x_{Rij} \frac{F_{yj}}{F_{yi}} \quad (10a)$$

$$y_{Ri} = y_{Rii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N y_{Rij} \frac{F_{xj}}{F_{xi}} \quad (10b)$$

La (10a) esprime l'ascissa  $x_{Ri}$ , anche se tutto continua a valere anche per l'ordinata  $y_{Ri}$ , mediante la somma di due contributi: il primo di questi coincide con il corrispondente termine diagonale della matrice  $\mathbf{x}_R$  ed è quindi indipendente dalla distribuzione di forze, il secondo contiene i termini non diagonali della stessa matrice moltiplicati per i rapporti tra le forze  $F_{yj} / F_{yi}$ . È proprio la presenza di elementi non nulli all'esterno della diagonale principale delle matrici  $\mathbf{x}_R$  e  $\mathbf{y}_R$  a rendere i centri di rigidezza dipendenti dalla distribuzione di forze. Solo nei casi in cui tali matrici sono diagonali, ad esempio per gli edifici regolarmente asimmetrici, i centri di rigidezza sono punti caratteristici della struttura e le loro coordinate coincidono con gli elementi della loro diagonale principale delle matrici  $\mathbf{x}_R$  e  $\mathbf{y}_R$ .

Per un'assegnata distribuzione di forze le coordinate dei centri  $C_R$  saranno tanto più prossime ai valori assunti dagli elementi diagonali delle matrici  $\mathbf{x}_R$  ed  $\mathbf{y}_R$  quanto maggiore è il loro peso rispetto a quelli non diagonali. Tuttavia, anche quando gli elementi  $x_{Rii}$  ed  $y_{Rii}$  prevalgono nettamente sugli altri le coordinate dei centri di rigidezza possono discostarsi sensibilmente da essi se si considera una distribuzione di forze che contiene una o più componenti molto più piccole delle altre (in tal caso infatti i corrispondenti rapporti  $F_{yj} / F_{yi}$  assumeranno valori elevati amplificando nelle (10) il contributo dipendente dalla distribuzione di forze). Ciò accade, ad esempio, con la distribuzione di forze lineare proposta da molte normative antisismiche che, soprattutto per edifici molto alti, è caratterizzata da forze ai piani bassi sensibilmente inferiori a quelle agenti ai piani alti.

### 3 L'ASSE DI TORSIONE OTTIMALE

È stato già sottolineato che una struttura multipiano, in generale, non possiede un'asse dei centri elastici, anche se è sempre possibile determinare diversi centri di riferimento (i centri di rigidezza, di torsione, di taglio, ecc.). Purtroppo, però, nessuno tra questi punti possiede caratteristiche che lo rendano adatto ad essere utilizzato come riferimento per il calcolo delle eccentricità strutturali al pari dei centri elastici, ed in particolare:

1. ciascuno dei centri citati possiede solo alcune delle proprietà del centro elastico;

2. i su indicati centri di riferimento possono essere determinati solo dopo aver assegnato una distribuzione di forze lungo l'altezza, dalla quale essi sono influenzati in misura più o meno rilevante; in conseguenza di ciò nessuno di tali punti è caratteristico della struttura;
3. in particolare, come è stato dimostrato nel paragrafo precedente, la dipendenza tra la posizione dei centri di rigidezza, proposti dai codici antisismici quale riferimento per il calcolo dell'eccentricità  $e_s$ , e la distribuzione di forze è molto accentuata; così, utilizzando distribuzioni di forze differenti, si determinano insiemi di centri di rigidezza nettamente distinti che presentano una distribuzione in altezza estremamente irregolare;
4. infine, ad oggi non esistono metodologie basate su tali centri che consentono di uguagliare la risposta statica di sistemi multipiano con i valori massimi di quella dinamica.

Tali motivi hanno indotto Anastasiadis, A. e Makarios, T. a negare fermamente la possibilità di utilizzare tali punti come centri di riferimento per la definizione delle eccentricità strutturali.

Al fine di superare l'ostacolo costituito dalla mancanza di validi punti di riferimento equivalenti ai centri elastici gli stessi Autori generalizzano il concetto di asse dei centri elastici definendo l'*asse di torsione ottimale* (Makarios e Anastasiadis 1998). Tale asse esiste sempre e coincide con l'asse dei centri elastici quando anche quest'ultimo esiste. Inoltre, al contrario dei centri di rigidezza, la sua posizione è poco sensibile alla distribuzione di forze utilizzata per determinarlo.

Il concetto di asse di torsione ottimale scaturisce quasi naturalmente quando si esamina la risposta di un edificio multipiano sottoposto all'azione di forze orizzontali, di cui è nota la distribuzione in altezza, agenti su un piano verticale che denomineremo piano di carico.

Gli impalcati trasleranno e ruoteranno sotto l'effetto delle forze. Se l'edificio possiede l'asse elastico sarà possibile determinare una posizione del piano di carico tale da annullare tutte le rotazioni d'impalcato. In caso contrario esisterà comunque un piano a cui corrisponde la distribuzione in altezza delle rotazioni d'impalcato più prossima a quella con rotazioni nulle. Ricordando che le rotazioni possono assumere segno diverso ai vari piani ciò avverrà quando:

$$\theta^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \theta_i^2 = \text{minimo} \quad (11)$$

Tale relazione costituisce l'espressione matematica del criterio di torsione ottimale il quale stabilisce che *la torsione di un edificio è ottimale quando la media della somma dei quadrati delle rotazioni degli impalcati è minima*. Per via della natura della funzione da minimizzare il minimo da noi cercato sarà sempre non minore di zero, in particolare l'uguaglianza a zero sarà soddisfatta in presenza di edifici dotati dell'asse dei centri elastici mentre sarà strettamente positivo in tutti gli altri casi.

### 3.1 Determinazione approssimata

Gli Autori, piuttosto che cercare analiticamente il minimo della funzione  $\theta^2$ , hanno preferito condurre un'analisi parametrica su edifici multipiano, dotati al tempo stesso di telai e di pareti, mostrando che quando tale funzione attinge al suo valore minimo la distribuzione in altezza delle rotazioni d'impalcato presenta un punto di nullo. Inoltre, nell'ambito delle analisi effettuate, la quota di tale punto rispetto alla base dell'edificio varia in un range limitato (tra 0.75 H e 0.85 H). Queste osservazioni hanno suggerito la formulazione semplificata del criterio di torsione ottimale secondo cui *la torsione di un edificio è ottimale quando il punto di nullo delle rotazioni d'impalcato si colloca ad una quota pari a 0.80 H* (corrispondente al punto medio dell'intervallo prima determinato). Questa formulazione consente la determinazione dell'asse di torsione ottimale in maniera estremamente agevole se si tiene conto di un'importante proprietà di cui godono gli edifici multipiano.

Siano dati due sistemi di azioni applicate in corrispondenza degli impalcati: il primo costituito dalle forze orizzontali  $F_1, F_2, \dots, F_N$  contenute in un piano verticale, il secondo dalle coppie torcenti  $M_1 = 1 \times F_1, M_2 = 1 \times F_2, \dots, M_N = 1 \times F_N$ . Ad ogni piano, la rotazione d'impalcato  $\theta_{i,F}$  provocata dalle forze **F** (Figura 1a) è numericamente uguale allo spostamento orizzontale  $u_{i,M}$  misurato lungo la direzione parallela alle forze, provocato dalle coppie **M**, dei punti appartenenti, al tempo stesso, all'impalcato in questione ed al piano di carico (Figura 1b).



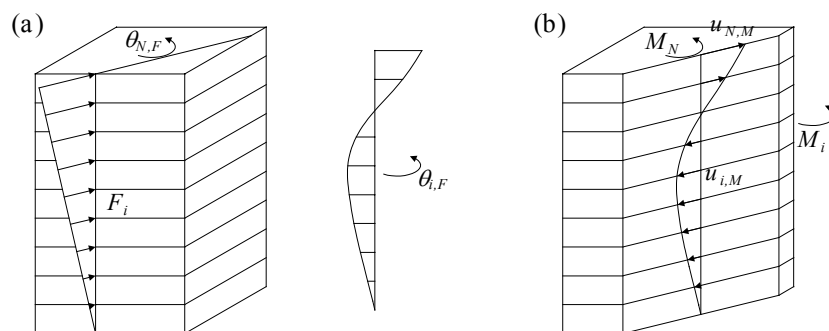


Figura 1. Proprietà di reciprocità; (a) spostamenti dovuti alle forze, (b) rotazioni dovute alle coppie.

Da questa proprietà, segue immediatamente la formulazione semplificata del criterio di torsione ottimale secondo cui l'asse di torsione ottimale coincide con l'asse verticale passante per il centro di torsione  $P_o$  dell'impalcato posto approssimativamente ad una quota  $z_o$  pari a  $0.8 H$ . Infatti, per la definizione di centro di torsione, questo punto non subirà alcuno spostamento ( $u_{o,M} = 0$ ) quando l'edificio è sottoposto alle coppie  $\mathbf{M}$ , e quindi per la proprietà di reciprocità prima descritta, quando l'edificio è sottoposto alle forze  $\mathbf{F}$  l'impalcato in questione non subirà alcuna rotazione ( $\theta_{o,F} = 0$ ). Facendo ruotare il piano di carico attorno a questo asse la rotazione d'impalcato a livello  $z_o$  sarà sempre nulla, mentre il valore medio di  $\theta^2$  subirà delle modeste oscillazioni attorno al suo valore minimo; ciò è dovuto alle semplificazioni del criterio utilizzato. Inoltre, utilizzando ancora una volta la proprietà di reciprocità, la somma dei quadrati degli spostamenti  $u_{i,M}$  dei punti  $P_i$ , intersezioni tra l'asse di torsione ottimale e gli impalcati dell'edificio, prodotti all'applicazione delle coppie  $\mathbf{M}$ , oscillerà attorno al suo valore minimo.

### 3.2 Determinazione analitica

Anche se chi ha definito l'asse di torsione ottimale propone di determinarlo utilizzando un criterio approssimato, la cui validità è sostenuta dai risultati di indagini numeriche, si dimostrerà che, almeno nel caso di edifici dotati di elementi resistenti disposti secondo una griglia ortogonale, esso può essere determinato in maniera rigorosa.

Fissato un sistema di riferimento ortogonale con gli assi  $X$  ed  $Y$  paralleli ai piani principali degli elementi resistenti, le rotazioni provocate da un insieme di forze orizzontali che agiscono su di un piano verticale parallelo ad uno degli assi coordinati possono essere espresse, mediante relazioni relativamente semplici, in funzione delle forze agenti e della posizione del piano di carico.

Consideriamo prima il caso in cui il piano delle forze è parallelo all'asse  $Y$  ed interseca in  $x$  quello delle ascisse. Come gradi di libertà del sistema assumiamo le rotazioni  $\theta_z$  degli impalcati e gli spostamenti orizzontali lungo gli assi coordinati  $u_x$  ed  $u_y$  degli  $N$  punti appartenenti ad essi (uno per ciascun impalcato) allineati lungo l'asse  $Z$ . L'effetto di tali forze coincide con la somma della risposta ottenuta applicando le stesse forze in corrispondenza dei gradi di libertà della struttura e quella di una distribuzione di coppie agenti sugli impalcati pari ad  $x \cdot F_y$  (Figura 2).

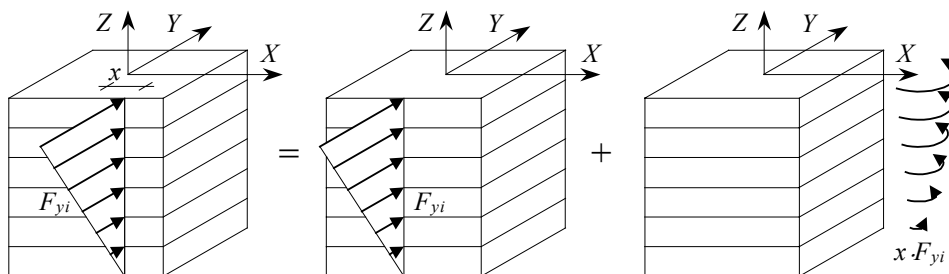


Figura 2. Decomposizione del sistema di forze eccentriche.

Imponendo l'equilibrio del sistema si ottiene il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \mathbf{K}_{xx}\mathbf{u}_x + \mathbf{K}_{xy}\mathbf{u}_y + \mathbf{K}_{x\theta}\boldsymbol{\theta}_z = 0 \\ \mathbf{K}_{yx}\mathbf{u}_x + \mathbf{K}_{yy}\mathbf{u}_y + \mathbf{K}_{y\theta}\boldsymbol{\theta}_z = \mathbf{F}_y \\ \mathbf{K}_{\theta x}\mathbf{u}_x + \mathbf{K}_{\theta y}\mathbf{u}_y + \mathbf{K}_{\theta\theta}\boldsymbol{\theta}_z = x \cdot \mathbf{F}_y \end{cases} \quad (12)$$

dove le matrici  $\mathbf{K}_{ii}$  rappresentano i diversi blocchi della matrice di rigidezza del sistema. Osserviamo che, avendo scelto i piani coordinati paralleli ai piani principali del sistema, i blocchi matriciali  $\mathbf{K}_{xy}$  e  $\mathbf{K}_{yx}$  sono nulli. Utilizzando le prime due equazioni è possibile esprimere gli spostamenti incogniti  $\mathbf{u}_x$  ed  $\mathbf{u}_y$  in funzione di  $\boldsymbol{\theta}_z$  ed  $\mathbf{F}_y$ :

$$\mathbf{u}_x = -\mathbf{K}_{xx}^{-1}\mathbf{K}_{x\theta}\boldsymbol{\theta}_z \quad (13a)$$

$$\mathbf{u}_y = -\mathbf{K}_{yy}^{-1}\mathbf{K}_{y\theta}\boldsymbol{\theta}_z + \mathbf{K}_{yy}^{-1}\mathbf{F}_y \quad (13b)$$

Utilizzando le (13) si eliminano le incognite  $\mathbf{u}_x$  ed  $\mathbf{u}_y$  dall'equazione di equilibrio alla rotazione, che diventa:

$$(\mathbf{K}_{\theta\theta} - \mathbf{K}_{x\theta}\mathbf{K}_{xx}^{-1}\mathbf{K}_{x\theta} - \mathbf{K}_{y\theta}\mathbf{K}_{yy}^{-1}\mathbf{K}_{y\theta})\boldsymbol{\theta}_z + \mathbf{K}_{y\theta}\mathbf{K}_{yy}^{-1}\mathbf{F}_y = x \cdot \mathbf{F}_y \quad (14)$$

Adesso è possibile ricavare il vettore delle rotazioni d'impalcato, il quale, ricordando la (8a), assume la seguente forma:

$$\boldsymbol{\theta}_z = \mathbf{A}^{-1}(x \cdot \mathbf{I} - \mathbf{x}_R^T)\mathbf{F}_y \quad (15)$$

dove la matrice  $\mathbf{A}$ , di cui si riporta l'espressione, è simmetrica in quanto somma di matrici simmetriche:

$$\mathbf{A} = \mathbf{K}_{\theta\theta} - \mathbf{K}_{x\theta}\mathbf{K}_{xx}^{-1}\mathbf{K}_{x\theta} - \mathbf{K}_{y\theta}\mathbf{K}_{yy}^{-1}\mathbf{K}_{y\theta} \quad (16)$$

Le rotazioni degli impalcati, dunque, dipendono linearmente dalla posizione del piano di carico, in questo caso definita dall'ascissa  $x$ . La somma dei quadrati di tali rotazioni si determina moltiplicando scalarmente il vettore  $\boldsymbol{\theta}_z$  per se stesso:

$$\theta^2(x) = \boldsymbol{\theta}_z^T \cdot \boldsymbol{\theta}_z = \mathbf{F}_y^T (x \cdot \mathbf{I} - \mathbf{x}_R) \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}^{-1} (x \cdot \mathbf{I} - \mathbf{x}_R^T) \mathbf{F}_y \quad (17)$$

Manipolando opportunamente la (17) si riesce a ricondurre la funzione  $\theta^2(x)$  ad una forma più semplice. Infatti posto:

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}^{-1} \quad (18)$$

e sviluppati i prodotti presenti nella (17) si ottiene:

$$\theta^2(x) = \mathbf{F}_y^T \mathbf{B} \mathbf{F}_y x^2 - \mathbf{F}_y^T (\mathbf{B} \mathbf{x}_R^T + \mathbf{x}_R \mathbf{B}) \mathbf{F}_y x + \mathbf{F}_y^T \mathbf{x}_R \mathbf{B} \mathbf{x}_R^T \mathbf{F}_y \quad (19)$$

La (19) può essere ulteriormente semplificata utilizzando la simmetria della matrice  $\mathbf{B}$  e considerando che uno scalare è sempre uguale al proprio trasposto. Da ciò segue che:

$$\mathbf{F}_y^T \mathbf{x}_R \mathbf{B} \mathbf{F}_y = [\mathbf{F}_y^T \mathbf{x}_R \mathbf{B} \mathbf{F}_y]^T = \mathbf{F}_y^T \mathbf{B} \mathbf{x}_R^T \mathbf{F}_y \quad (20)$$

e quindi

$$\theta^2(x) = \mathbf{F}_y^T \mathbf{B} \mathbf{F}_y x^2 - 2 \mathbf{F}_y^T \mathbf{B} \mathbf{x}_R^T \mathbf{F}_y x + \mathbf{F}_y^T \mathbf{x}_R \mathbf{B} \mathbf{x}_R^T \mathbf{F}_y \quad (21)$$

La (21) mostra che la somma dei quadrati delle rotazioni d'impalcato dipende da  $x$  mediante una legge parabolica. Se si osserva che la funzione  $\theta^2(x)$  può assumere solo valori positivi si conclude che la parabola deve rivolgere necessariamente la concavità verso l'alto e dunque ammette un unico minimo in corrispondenza dell'ascissa del suo vertice:

$$x_o = \frac{\mathbf{F}_y^T \mathbf{B} \mathbf{x}_R^T \mathbf{F}_y}{\mathbf{F}_y^T \mathbf{B} \mathbf{F}_y} \quad (22a)$$

L'ascissa  $x_o$  individua la posizione del piano delle forze che consente di rendere minime le rotazioni degli impalcati e dunque coincide con l'ascissa dell'asse di torsione ottimale. Essa dipende



dalle proprietà della struttura tramite le matrici  $\mathbf{B}$  ed  $\mathbf{x}_R^T$  e dalla distribuzione di forze agenti  $\mathbf{F}_y$ . Ripetendo il procedimento sin qui esposto con una distribuzione di forze complanari agenti lungo l'asse  $X$  si determina anche l'ordinata  $y_o$ , che individua univocamente la posizione dell'asse cercato:

$$y_o = \frac{\mathbf{F}_x^T \mathbf{B} \mathbf{y}_R^T \mathbf{F}_x}{\mathbf{F}_x^T \mathbf{B} \mathbf{F}_x} \quad (22b)$$

#### 4 CONCLUSIONI

I metodi attualmente conosciuti per il progetto delle strutture asimmetriche raramente sono applicabili agli edifici reali in quanto presuppongono sempre la conoscenza dell'eccentricità strutturale. La determinazione di tale quantità è concettualmente difficoltosa in un sistema reale per via della mancanza di centri di riferimento equivalenti al centro elastico del sistema monopiano. In particolare nei sistemi non regolarmente asimmetrici, anche se lievemente non regolari, non si riesce a definire una posizione del centro delle rigidezze che sia indipendente dalla distribuzione delle forze orizzontali utilizzate per il suo calcolo. Le considerazioni sulle proprietà dei diversi tipi di centri di riferimento reperibili in letteratura, da un lato evidenziano che i centri di rigidezza, utilizzati dalle normative antisismiche come riferimento per il calcolo dell'eccentricità strutturale del sistema, sono estremamente sensibili alla distribuzione di forze utilizzata per determinarli, dall'altro hanno consentito di individuare nell'*asse di torsione ottimale* un utile riferimento per la determinazione dell'eccentricità strutturale equivalente e quindi del grado di irregolarità planimetrica degli edifici multipiano. Affrontando per via analitica il problema della determinazione dell'asse di torsione ottimale sono state ricavate le relazioni che individuano la sua posizione. Makarios e Anastassiadis, che ne hanno dato la definizione, proponevano invece di determinarlo mediante un metodo approssimato basato sui risultati delle indagini parametriche da loro condotte, la cui validità rimane limitata alle tipologie strutturali da essi prese in considerazione.

#### RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- Anastassiadis, K., Athanatopoulos, A. e Makarios, T. 1998: Equivalent static eccentricities in the simplified methods of seismic analysis of buildings. *Earthquake Spectra* 14(1): 1-34.
- Chandler A.M. e Duan X.N. 1992. A modified static procedure for the design of torsionally unbalanced multistorey frame buildings. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 22: 447-462.
- Cheung, V.W.T. e Tso, W.K. 1986. Eccentricity in irregular multistory buildings. *Canadian J. Civil Engng*, 10: 46-52.
- Duan X.N. e Chandler A.M. 1992. Inelastic seismic response of code-designed multistorey frame buildings with regular asymmetry. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 22: 431-445.
- Calderoni, B., Gherzi, A. e Mazzolani, F.M. 1994: A new approach to the problem of in-plan regularity in seismic design of buildings. *Proceedings of 10<sup>th</sup> European Conference on Earthquake Engineering*, Vol. 2: 843-848. Vienna: Austria.
- Calderoni, B., Gherzi, A. e Rinaldi, Z. 1999: Efficacia delle eccentricità correttive nel progetto degli edifici multipiano planimetricamente irregolari: metodologia ed applicazione ad un caso reale. *Atti del IX Convegno Nazionale "L'ingegneria sismica in Italia"*. Torino: Italia.
- Eurocode 8 1993. Design provisions for earthquake resistance of structures. European Committee for Standardisation, ENV 1998-1-1/2/3.
- Gherzi, A. 1999. Edifici antisismici con struttura intelaiata in cemento armato. Napoli: CUEN.
- Gherzi, A. e Rossi, P.P. 1999. Formulation of design eccentricity to reduce ductility demand in asymmetric buildings. *Engineering Structures*, 22: 857-871.
- Goel, R.K. e Chopra, A.K. 1990. Inelastic seismic response of one-story, asymmetric-plan systems. Earthquake Engineering Research Center, Report n° UBC/EERC-90/14, University of California at Berkeley.
- Hejal, H. e Chopra, A.K. 1987. Earthquake response of torsionally-coupled buildings. Earthquake Engineering Research Center, Report n° UBC/EERC-87/20, College of Engineering, University of California at Berkeley.

- Humar, J.L. 1984. Design for seismic torsional forces. *Canadian J. Civil Engng.*, 12: 150-163.
- Makarios, T. e Anastassiadis, A. 1998a. Real and fictitious elastic axes of multy-storey buildings: theory. *Struct. Design Tall Build.*, 7: 33-55.
- Makarios, T. e Anastassiadis, A. 1998b. Real and fictitious elastic axes of multy-storey buildings: applications. *Struct. Design Tall Build.*, 7: 57-71.
- Marino, E. 2000. Comportamento sismico e criteri di progettazione di edifici multipiano irregolari in pianta. Tesi di dottorato, Facoltà di Ingegneria, Università di Catania, Italia.
- Marino, E. 2001. Analisi critica della definizione di edifici regolarmente asimmetrici. *Atti del X Convegno Nazionale "L'ingegneria sismica in Italia"*. Potenza-Matera: Italia.
- Moghadam A.S. e Tso W.K. 2000. Extension of eurocode 8 torsional provisions to multy-storey buildings. *Journal of Earthquake Engineering*, 4: 25-41.
- National Building Code of Canada, NBCC, 1990. Associate Committee on the National Building Code, National Research Council of Canada.
- Uniform Building Code, UBC, 1997. International Conference of Building Officials.
- Tso, W.K. 1990. Static eccentricity concept for torsional moment estimation. *J. Struct. Engng*, 116: 1199-1212.
- Tso, W.K. e Zhu, T.J. 1992a. Design of torsionally unbalanced structural systems based on code provisions I: ductility demand. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 21: 609-627.
- Zhu, T.J. e Tso, W.K. 1992b. Design of torsionally unbalanced structural systems based on code provisions II: strength distribution. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 21: 629-644.