

Aurelio Ghersi Raffaele Coraggio

ANALISI MATRICIALE DI STRUTTURE INTELAIATE

Il personal computer nel calcolo di edifici



© CUEN 1990
© CUEN s.r.l. 1995
in Area Industrie della Cultura
80124 Napoli - Via Coroglio, 156
Tel. 081/2301019 pbx Fax 081/2301044

INDICE

PREMESSA	pag.	9
----------------	------	---

PARTE PRIMA – TEORIA

CAPITOLO 1

INTRODUZIONE

1. L'analisi strutturale	pag.	15
2. Metodi di analisi	pag.	17
3. Schematizzazione di un edificio	pag.	20
4. Procedimento risolutivo	pag.	23

CAPITOLO 2

LA SINGOLA ASTA

1. Generalità	pag.	25
2. Azioni agli estremi dell'asta	pag.	27
3. Componenti di movimento degli estremi dell'asta	pag.	31
4. Caratteristiche di sollecitazione e spostamento dei punti interni dell'asta	pag.	34
5. Relazione tra azioni e componenti di movimento degli estremi dell'asta	pag.	36
5.1. Matrici fondamentali di rigidezza e di deformabilità	pag.	36
5.2. Matrice di rigidezza nel sistema di riferimento locale	pag.	39
5.3. Matrice di rigidezza nel sistema di riferimento globale	pag.	40

6. Matrice di rigidezza dell'asta: altri casi	pag.	41
6.1. Effetto della deformazione dovuta al taglio	pag.	41
6.2. Asta con una cerniera all'estremità	pag.	43
6.3. Asta incernierata ai due estremi (pendolo)	pag.	46
6.4. Trave su suolo elastico (alla Winkler)	pag.	49
6.5. Asta con tratti rigidi all'estremità	pag.	56
6.6. Nodo rigido non puntiforme (asta con tratti rigidi non coassiali)	pag.	61
7. Azioni di incastro perfetto	pag.	66
7.1. Carichi uniformemente distribuiti su tutta l'asta	pag.	68
7.2. Carichi concentrati in un punto dell'asta	pag.	68
7.3. Carichi distribuiti con andamento lineare su parte dell'asta	pag.	69
7.4. Variazioni termiche	pag.	71
7.5. Effetto della deformazione dovuta al taglio	pag.	72
7.6. Asta con cerniere all'estremità	pag.	72
7.7. Trave su suolo elastico alla Winkler	pag.	74
7.8. Asta con tratti rigidi	pag.	74
8. Relazione tra carichi, azioni e componenti di movimento di estremità	pag.	75
9. Determinazione delle caratteristiche di sollecitazione nei punti interni dell'asta	pag.	75

CAPITOLO 3

L'INSIEME PIANO DI ASTE

1. Generalità	pag.	79
2. Azioni e componenti di movimento degli estremi delle aste	pag.	83
3. Le incognite del problema	pag.	85
4. Relazione tra incognite, componenti di movimento dei nodi e componenti di movimento degli estremi delle aste	pag.	89
5. Le azioni nodali	pag.	91
6. Relazione tra azioni nodali ed azioni agli estremi delle aste	pag.	93
7. Relazione tra carichi, azioni nodali e spostamenti nodali	pag.	94
8. Equilibrio nodale e risoluzione del problema	pag.	98
9. Determinazione diretta della matrice di rigidezza	pag.	99

CAPITOLO 4

L'INSIEME SPAZIALE DI TELAI PIANI

1. Macroelementi e sottostrutture	pag. 105
2. Condensazione della matrice di rigidità e del vettore azioni di incastro	pag. 108
3. Matrice di rigidità traslante di un telaio piano	pag. 111
4. Matrice di rigidità traslante di un telaio piano nel riferimento spaziale	pag. 114
5. Matrice di rigidità dell'insieme spaziale di telai	pag. 119
6. Equilibrio degli impalcati e risoluzione del problema	pag. 120

PARTE SECONDA – PROGRAMMI

CAPITOLO 1

INTRODUZIONE

1. Analisi strutturale mediante il personal computer	pag. 125
2. Caratteristiche del Quick Basic	pag. 126
2.1. Sequenza delle istruzioni	pag. 126
2.2. Codifica delle strutture logiche	pag. 128
2.3. I sottoprogrammi: routine e procedure	pag. 130
2.4. Altre istruzioni	pag. 133
3. Contenuto del dischetto	pag. 134
4. Utilizzazione dei programmi	pag. 136
5. Utilizzazione delle procedure e dei programmi in BASIC	pag. 137

CAPITOLO 2

OPERAZIONI MATRICIALI

1. Generalità	pag. 139
2. Procedimenti per l'esecuzione delle operazioni	pag. 141

3. Codifica	pag. 146
4. Esempio	pag. 165

CAPITOLO 3

SOLUZIONE DEI SISTEMI DI EQUAZIONI LINEARI

1. Generalità	pag. 169
2. Il metodo di riduzione di Gauss	pag. 171
2.1. Le fasi del procedimento	pag. 171
2.2. Riduzione e fattorizzazione	pag. 173
2.3. Pivotaggio parziale	pag. 175
2.4. Risoluzioni multiple	pag. 176
3. Applicazione all'analisi strutturale	pag. 178
3.1. Ordine di esecuzione del procedimento	pag. 178
3.2. Riduzione di una matrice simmetrica	pag. 179
3.3. Riduzione di una matrice a banda	pag. 181
4. Codifica	pag. 185
5. Esempio	pag. 191

CAPITOLO 4

LA SINGOLA ASTA

1. Generalità	pag. 201
2. Codifica	pag. 203
3. Esempio: diagramma delle caratteristiche di sollecitazione	pag. 226
3.1. Generalità	pag. 226
3.2. Applicazione	pag. 230

CAPITOLO 5

L'INSIEME PIANO DI ASTE

1. Geometria dello schema e tipologia dei carichi	pag. 237
2. Descrizione del programma	pag. 240
3. Elenco delle variabili	pag. 247

4. Codifica	pag. 253
5. Modalità di utilizzazione del programma	pag. 277
6. Risultati forniti	pag. 280
7. Esempio	pag. 281

CAPITOLO 6

SCHEMI PARTICOLARI

1. Preprocessor e postprocessor	pag. 287
2. Il telaio a maglie rettangolari	pag. 289
3. Il telaio a maglie trapezie con trave di fondazione	pag. 292
4. Descrizione del programma	pag. 297
5. Elenco delle variabili	pag. 300
6. Codifica	pag. 307
7. Modalità di utilizzazione del programma	pag. 336
8. Risultati forniti	pag. 340
9. Esempio	pag. 341

CAPITOLO 7

L'INSIEME SPAZIALE DI TELAI PIANI

1. Generalità	pag. 349
2. Descrizione del programma	pag. 351
3. Elenco delle variabili	pag. 355
4. Codifica	pag. 358
5. Modalità di utilizzazione del programma	pag. 380
6. Risultati forniti	pag. 387

PARTE TERZA - APPLICAZIONI

EDIFICIO PER 54 APPARTAMENTI NEL COMUNE DI GIUGLIANO

Il progetto (F.Gheresi)	pag. 391
-------------------------------	----------

Relazione generale di calcolo	pag. 399
Elaborati numerici	pag. 405
BIBLIOGRAFIA	pag. 441

PREMESSA

Appena una decina di anni fa il computer era uno strumento riservato a pochi, disponibile solo in ambienti universitari, grosse industrie e qualche raro studio professionale. L'evoluzione tecnica lo ha in breve trasformato in uno strumento di massa, rendendolo un componente essenziale ed ineliminabile della progettazione strutturale. I programmi disponibili in tale campo, inizialmente limitati alla risoluzione di schemi relativamente semplici, con dati geometrici e di carico totalmente definiti dall'utente, sono notevolmente cresciuti in complessità e completezza. I compiti e l'atteggiamento dell'ingegnere civile vanno quindi man mano cambiando. Scomparsa la fatica brutta del calcolo manuale, è aumentata l'importanza della sua preparazione teorica, indispensabile per valutare consapevolmente le ipotesi e le scelte del programmatore. Sempre fondamentale rimane l'esperienza pratica, necessaria per prevedere l'ordine di grandezza dei risultati ed effettuare un riscontro con i valori forniti dall'elaboratore. Forse meno essenziale, ma ugualmente importante, è anche la padronanza delle tecniche di programmazione, che consente di giudicare con più maturità i programmi fatti dagli altri, adattarli alle proprie esigenze o crearne di specifici per le necessità individuali.

A questa rapida evoluzione tecnica corrisponde una lenta trasformazione dell'insegnamento universitario. Il seminario "Il personal computer nel calcolo di edifici", da me tenuto a partire dal 1983/84, organizzato nell'ambito dei corsi di Complementi di Tecnica delle Costruzioni della Facoltà di Ingegneria di Napoli, vuole essere un piccolo contributo in questa direzione. I suoi contenuti sono andati via via crescendo e precisandosi, anche se l'assetto raggiunto non può ancora essere considerato definitivo. Attualmente esso è diviso in tre parti. La prima, "introduzione all'uso del personal computer", vuol fornire agli studenti informazioni generali sugli elaboratori elettronici e su alcuni programmi di base (in particolare programmi per elaborazione di testi e di disegni), con l'obiettivo di metterli in grado di utilizzare il computer con maturità e consapevolezza dei suoi limiti. La seconda parte, "introduzione alla programmazione", ha lo scopo di fornire

i concetti necessari per lo sviluppo di programmi nel campo dell'ingegneria civile. Nella terza, infine, sono stati trattati nel corso degli anni svariati argomenti, come il progetto e la verifica di sezioni in c.a. presso e tensoinflesse, il calcolo di travi continue e travi di fondazione, la risoluzione matriciale di insiemi di aste, la risoluzione iterativa di schemi intelaiati piani e spaziali a maglie rettangolari.

Ho ritenuto che il trasporre gli argomenti delle lezioni in un insieme di testi dedicati alle applicazioni del personal computer nel calcolo strutturale potesse risultare utile agli allievi che seguono il seminario ed anche, più in generale, a studenti ed ingegneri che indipendentemente dall'università sentono la necessità di affrontare queste problematiche. Al primo volume, "Introduzione alla programmazione", segue ora questo testo, realizzato con la valida collaborazione di Raffaele Coraggio, ex allievo del corso ed ora brillante ingegnere.

Il testo si pone sostanzialmente tre obiettivi. Innanzitutto, esso vuole costituire una introduzione generale alla metodologia matriciale di analisi delle strutture ed alla applicazione di essa ai casi particolari dei telai piani di forma generica e degli insiemi spaziali di detti telai, mutuamente collegati da impalcati rigidi. In secondo luogo, vuole mostrare in che modo la teoria viene tradotta in programmi per personal computer, per abituare il lettore ad una metodologia, di analisi e di programmazione, che potrà essergli utile per far fronte autonomamente a situazioni diverse da quelle trattate. Infine, vuole fornire una biblioteca di procedure generali e di programmi applicativi in linguaggio BASIC, che consente di analizzare, oltre che edifici regolari, anche quelli che presentino particolarità geometriche quali travi a ginocchio, piani sfalsati, impalcati non continui, piano di posa non orizzontale.

Il volume è stato suddiviso in tre parti. La prima contiene tutto l'apparato teorico dell'argomento. Dopo aver presentato brevemente i problemi connessi alla modellazione geometrica di una struttura, alle metodologie di analisi ed alla notazione matriciale, si prende innanzitutto in esame il comportamento di una singola asta nel piano, definendo le componenti di movimento e le azioni di estremità ed esprimendone il legame reciproco mediante la matrice di rigidezza. Per fornire al lettore un'ampia panoramica di situazioni diverse vengono discussi numerosi casi particolari (aste con tratti rigidi di estremità, aste su suolo alla Winkler, ecc.) che possono essere anche tralasciati in una prima lettura del testo. Si prende successivamente in esame l'insieme piano di aste, evidenziando il contributo fornito dalla singola asta alla matrice di rigidezza globale della struttura e pervenendo così all'espressione matriciale della condizione di equilibrio e quindi alla soluzione del problema statico. Si introduce infine la definizione di

sottostruttura, mostrando come condensare la matrice di rigidezza globale per ottenere le relazioni tra un insieme ridotto di azioni e componenti di movimento. Si ricava in tal modo la matrice di rigidezza traslante di un telaio piano e la si utilizza per l'analisi di un insieme spaziale di telai.

La seconda parte mostra come tradurre la trattazione teorica in un insieme di programmi. Vengono fatti ampi richiami all'impostazione generale di programmazione strutturata ed al linguaggio utilizzato (Quick Basic), nonché ai problemi numerici connessi alle operazioni matriciali ed alla risoluzione di sistemi di equazioni lineari. Le procedure presentate costituiscono un'ampia biblioteca matematica che può essere utilizzata per tutti i problemi che coinvolgono operazioni matriciali o sistemi di equazioni, anche indipendentemente dall'ambito strutturale. Si passa quindi all'applicazione diretta della teoria, fornendo procedure relative a tutti i tipi di asta considerati ed utilizzandone una parte nella realizzazione di un programma per la risoluzione di un insieme piano di aste (telaio generico o travatura reticolare). Le fasi di ingresso dati e stampa risultati vengono poi particolarizzate per una tipologia descrivibile in maniera più sintetica, il telaio a maglie rettangolari o trapezie con trave di fondazione. Si presenta infine un programma per la risoluzione di un insieme spaziale di telai piani, che costituisce uno strumento molto potente per l'analisi di schemi anche complessi, come edifici con piani sfalsati, piano di posa non orizzontale, travi a ginocchio.

La terza parte mostra in dettaglio l'utilizzazione del programma per il calcolo di un edificio reale, con l'obiettivo di chiarirne l'uso anche al lettore non interessato alla programmazione. Si è preso in esame un complesso di edifici per 54 appartamenti da realizzare nel comune di Giugliano, il cui progetto è stato commissionato dall'impresa Bengoa agli architetti Fabio Gherzi e Rita De Simone. La caratteristica più interessante dal punto di vista strutturale è costituita dalla presenza di impalcati sfalsati, situazione in genere non molto ben vista dagli strutturisti, un po' per le incertezze sul comportamento dinamico ma soprattutto per la difficoltà di trovare uno strumento di calcolo adeguato. Il progetto comprendeva solo un dimensionamento di massima della struttura; il calcolo dettagliato è stato quindi effettuato da noi, espressamente per questo libro. Nell'esposizione si è voluto evidenziare anche l'impostazione della relazione di calcolo, che segue i criteri utilizzati da me e da numerosi altri progettisti. Essa è costituita da una relazione generale che illustra i principi seguiti e da una serie di elaborati numerici che contengono il dettaglio dei calcoli svolti. Di questi ultimi è stata riportata solo una brevissima sintesi, che mette in luce esclusivamente i problemi connessi all'utilizzazione del programma ed all'esame dei risul-

tati da esso forniti; una trattazione più approfondita delle problematiche connesse alla progettazione di fabbricati in zona sismica è contenuta nel mio libro "Edifici antisismici con struttura intelaiata in cemento armato".

Nel concludere questo lavoro, desidero ringraziare le persone che maggiormente hanno contribuito a stimolarmi ed aiutarmi. Innanzitutto, il prof. Michele Pagano, che mi ha proposto di tenere ai suoi studenti questo seminario lasciandomi piena libertà nella scelta degli argomenti da trattare e nell'impostazione da dare alle lezioni. In secondo luogo tutti i colleghi e gli studenti con i quali ho avuto modo di discutere gli argomenti qui esposti, ricevendo spesso utili suggerimenti. Sono grato in particolare a Carmelo Roccasalva, che ha svolto una tesi di laurea sull'argomento, e ad Alfonso Impelliceri che ha riletto con cura le bozze della prima parte. Quanto sia stato grande il contributo di Raffaele Coraggio è mostrato dal fatto che, dopo aver affrontato l'argomento nella sua tesi di laurea, è diventato a pieno titolo coautore di questo libro. Un ringraziamento speciale va a mio fratello Fabio, che ha messo a disposizione il progetto illustrato nella terza parte, e al quale devo dare atto di essere uno dei pochi architetti con cui uno strutturista può andare d'accordo. L'ultimo pensiero infine per mia moglie Lia che ha sopportato con pazienza l'assorbimento totale con cui ho lavorato al libro e mi ha costantemente incoraggiato, aiutandomi a superare l'inevitabile stanchezza.

Aurelio Ghersi

PARTE PRIMA

TEORIA

CAPITOLO PRIMO

INTRODUZIONE

1. L'analisi strutturale

Gli edifici, come in generale ogni altro oggetto dell'attenzione dell'ingegnere, sono organismi complessi che possono essere esaminati solo mediante una opportuna schematizzazione degli elementi resistenti, cioè mediante la definizione di un modello fisico-matematico, lo *schema strutturale*. Lo studio di questo modello è detto *analisi strutturale*.

Nell'ambito dell'analisi strutturale si possono individuare due tipi di problemi. Il primo è quello dello studio di un singolo elemento, ad esempio una trave, una lastra, una volta. La meccanica del continuo analizza tali tipologie mediante algoritmi matematici appartenenti all'analisi infinitesimale, come le equazioni differenziali. Il secondo è quello dell'esame di insiemi di elementi mutuamente collegati, per il quale si utilizzano invece algoritmi matematici appartenenti all'algebra lineare, come i sistemi di equazioni lineari.

Nel passato ha avuto grande sviluppo soprattutto lo studio del continuo. Il predominio di tale aspetto è testimoniato dal fatto che in alcuni casi si preferiva analizzare strutture complesse, ad esempio le volte reticolari, facendo ricorso ad un continuo equivalente. Le difficoltà numeriche connesse alla risoluzione di sistemi di equazioni con molte incognite rendevano invece praticamente impossibile esaminare in maniera generale gli insiemi di elementi. Fino a non molti anni fa vi è stato quindi un fiorire

di procedimenti specifici per la risoluzione di particolari schemi strutturali come la trave continua, il telaio piano a maglie rettangolari a nodi fissi oppure a nodi spostabili, le travature reticolari.

La rapida diffusione dei calcolatori elettronici, che consentono di risolvere con facilità ed immediatezza sistemi lineari con un numero anche elevato di incognite, ha completamente ribaltato la situazione. Oggi è possibile affrontare in maniera molto generale l'analisi di insiemi di elementi, ovviamente partendo sempre dalla conoscenza del comportamento del singolo componente. Tale capacità è sfruttata spesso anche nell'esame di strutture continue che presentino una complessità tale da rendere difficile uno studio rigoroso mediante l'analisi infinitesimale. Il *metodo degli elementi finiti* consiste infatti nel discretizzare tali strutture, cioè nello scomporle in un insieme di elementi di dimensioni finite.

In tale ottica, si indicherà nel seguito col termine struttura un insieme di elementi deformabili collegati mutuamente in punti dello spazio detti nodi. L'impostazione seguita è anzi meglio evidenziata ribaltando i termini di tale enunciato e definendo *struttura* un insieme di nodi rigidi, liberi o vincolati, collegati tra loro mediante elementi deformabili. I nodi sono usualmente considerati puntiformi, cioè di dimensioni nulle. È però possibile, e in alcuni casi opportuno, considerare nodi di dimensioni finite; un tipico esempio si ritrova negli edifici, quando gli assi di travi e pilastri non convergono in un unico punto (fig.1.1).

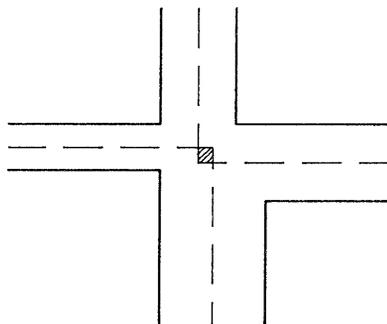


Fig. 1.1 — Nodo di un telaio, con trave a spessore e trave emergente e pilastri di differente sezione

Gli elementi deformabili possono essere in generale aste monodimensionali, schematizzazione usata quando una dimensione è nettamente prevalente sulle altre due, come nel caso delle travi di un edificio; oppure elementi bidi-

mensionali, come membrane o piastre; o, infine, elementi tridimensionali. L'importante è che per ciascuno di essi si conosca, eventualmente con ipotesi semplificative, la relazione tra stato tensionale e stato di deformazione, e quindi tra azioni applicate nei punti di estremità e componenti di movimento degli stessi. Nel caso di elementi monodimensionali, gli unici che verranno utilizzati nel presente testo, la relazione è fornita dalla teoria di De Saint-Venant. Nel caso di elementi bi o tri-dimensionali è necessario formulare delle ipotesi sul comportamento, ad esempio che lo stato tensionale vari linearmente, oppure che vari in tale maniera lo stato deformativo, e si avranno per essi in conseguenza modelli differenti.

2. Metodi di analisi

L'approccio più generale all'analisi di una struttura consiste nel considerarla scomposta nei singoli elementi, assumere come incognite le azioni (forze e momenti) esercitate agli estremi di ciascuno di essi e le componenti di movimento (spostamenti e rotazioni) di tali estremi, e scrivere quindi il necessario numero di equazioni di equilibrio e congruenza. Questa via presenta una complessità operativa elevata e non indispensabile. Si utilizzano pertanto due procedimenti, analoghi e duali rispetto alle grandezze in considerazione: il metodo delle forze e quello degli spostamenti.

Nel *metodo delle forze* (detto anche delle reazioni) si prende in esame uno schema principale (in genere, ma non necessariamente, isostatico) ottenuto effettuando sulla struttura delle sconnessioni e si assumono come incognite le azioni trasmesse attraverso esse. Si opera quindi su un sistema equilibrato, e si determina il valore delle incognite mediante la risoluzione del sistema di equazioni di congruenza che impone il rispetto delle connessioni eliminate, individuando in tal modo tra le infinite configurazioni equilibrate l'unica che sia anche congruente. Lo stato tensionale e deformativo dei singoli elementi è ottenuto come somma di quanto provocato sullo schema principale dai carichi esterni e dalle azioni determinate in corrispondenza delle sconnessioni.

Nel *metodo degli spostamenti* (detto anche dei cedimenti o delle deformazioni) si prende in esame uno schema principale ottenuto aggiungendo vincoli che impediscono spostamenti e rotazioni dei nodi della struttura (in genere, ma non necessariamente, tutti) e si assumono come incognite le componenti di movimento impedito. Si opera quindi su un sistema congruente, e si determina il valore delle incognite mediante la risoluzione del sistema di equazioni che impone l'equilibrio in assenza dei vincoli aggiunti,

cioè l'equilibrio tra i carichi nodali, le azioni sui nodi che insorgono nello schema principale per effetto dei carichi applicati ai singoli elementi (azioni di incastro perfetto) e le azioni sui nodi conseguenti alle componenti di movimento incognite, individuando in tal modo tra le infinite configurazioni congruenti l'unica che sia anche equilibrata. Lo stato tensionale e deformativo dei singoli elementi è ottenuto come somma di quanto provocato nello schema principale dai carichi esterni e dalle componenti di movimento determinate.

Il metodo delle forze ha avuto un grosso sviluppo nel passato, anche perché le sue incognite, forze e momenti, sono entità più familiari all'ingegnere, che è in genere in grado di valutarne l'ordine di grandezza e tenere quindi sotto controllo il procedimento numerico di soluzione. Il ricorso a tale metodo, accoppiato a tecniche iterative per la risoluzione del sistema di equazioni, è stato quindi il primo approccio per l'organizzazione di programmi di calcolo strutturale automatico. La scelta dello schema principale tra le numerose alternative possibili (fig.1.2, 1.3) è però un problema molto delicato e può condizionare sia la semplicità di scrittura delle equazioni di congruenza che l'accuratezza della soluzione. Questa impostazione è pertanto oggi limitata al caso di particolari tipologie strutturali, per le quali esistono dei criteri automatici per tale scelta.

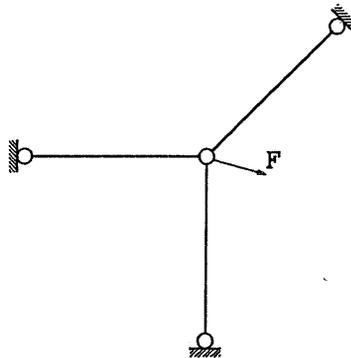


Fig. 1.2 — Schema strutturale

Il metodo degli spostamenti ha invece avuto, fino all'avvento dei computer, poche applicazioni, a volte anche parzialmente mascherate (come nel caso del metodo delle rigidità globali per la risoluzione di telai piani, che utilizza come incognite momenti di nodo e piano proporzionali alle rotazioni dei nodi e delle aste). Esso però consente una individuazione automatica delle incognite, che sono sempre costituite dalle componenti di movimento dei nodi (fig.1.4).

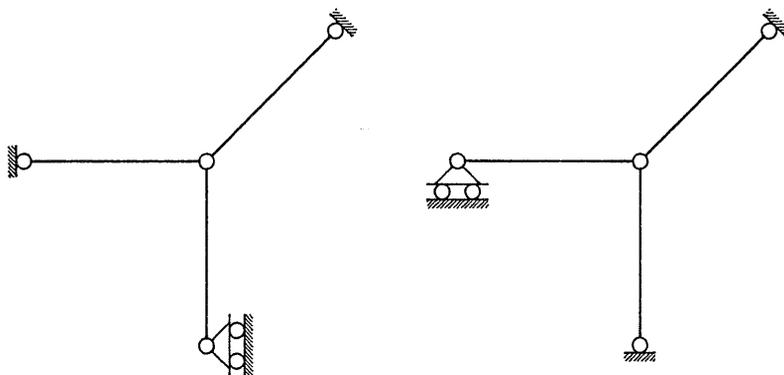


Fig. 1.3 — Due possibili schemi principali per il metodo delle forze

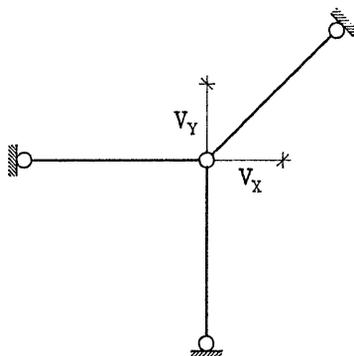


Fig. 1.4 — Incognite per il metodo degli spostamenti

Si presta quindi notevolmente all'impostazione schematica necessaria nella realizzazione di programmi per calcolatori elettronici e per tale motivo ha oggi soppiantato quasi totalmente l'altro procedimento.

L'impostazione classica del metodo delle forze o degli spostamenti prevede la scrittura delle equazioni di congruenza o di equilibrio in maniera esplicita, in genere basandosi su un'analisi teorica preliminare valida solo per il particolare schema geometrico in esame. Negli ultimi decenni, parallelamente allo sviluppo dell'impiego dell'elaborazione elettronica si è avuto una rivoluzione formale dell'approccio al problema, consistente nell'uso della notazione matriciale; oggi si parla quindi di *analisi matriciale delle strutture*. Ovviamente, tale notazione non introduce nulla di nuovo, poiché i principi di base e le equazioni cui si giunge sono sempre gli stessi. Il primo impatto per chi non abbia con essa sufficiente familiarità è indubbiamente duro, e può a volte sembrare difficile mantenere il legame tra nuovi simboli e realtà

fisica da essi rappresentata. Una volta acquisito un minimo di padronanza ci si rende però conto di come essa consenta una migliore visione globale ed una notevole sintesi espressiva, sia nell'analisi dei problemi che nella loro traduzione in programmi per computer. Diventa quindi agevole affrontare l'analisi strutturale di schemi molto generali.

Infine, un'ultima innovazione riguarda il modo di risolvere il sistema di equazioni che caratterizza il problema strutturale. L'approccio manuale era sempre effettuato in maniera iterativa, ad esempio col metodo di Gauss-Siedel, che presenta il vantaggio di possedere un preciso significato fisico. Nel metodo degli spostamenti esso equivale infatti ad eliminare di volta in volta uno dei vincoli aggiuntivi e calcolare le deformazioni che insorgono per assicurare l'equilibrio. Il ricorso a calcolatori ha reso possibile l'uso di altri algoritmi dell'analisi numerica, come ad esempio il metodo di riduzione di Gauss, che consentono di risolvere il sistema con un numero predefinito di operazioni. È però opportuno sottolineare che nessuna delle due impostazioni è esente da problemi applicativi. Nella prima, la convergenza del procedimento iterativo è fortemente condizionata dai rapporti di rigidezza degli elementi strutturali. Nella seconda, gli errori di arrotondamento possono esaltarsi in casi particolari (matrici mal condizionate) inficiando la correttezza dei risultati.

3. Schematizzazione di un edificio

La scelta del modello strutturale da utilizzare per valutare il comportamento di un edificio reale è sempre complessa e dipende in generale dalla sua geometria, dagli elementi non strutturali in esso presenti (tramezzi, tompagni, ecc.), dai carichi cui esso è soggetto, dal terreno e dalla tipologia della struttura di fondazione.

In assenza di carichi orizzontali e con forti ipotesi limitative (presenza di robuste tompagnature o altri elementi irrigidenti fuori calcolo che rendono gli impalcati fissi, luci contenute, numero limitato di piani) è possibile considerare indipendenti i diversi componenti strutturali e adottare per essi schemi monodimensionali, come quello di trave continua ad appoggi fissi per le travi e i solai o di singolo elemento soggetto ad azioni assiali per i pilastri.

In presenza di carichi orizzontali alcune limitazioni geometriche (struttura intelaiata con doppio asse di simmetria in pianta, impalcati orizzontali continui e molto rigidi nel loro piano) rendono possibile esaminare il comportamento della struttura separatamente in due direzioni ortogonali adottando schemi bidimensionali, come quello che ipotizza che la struttura

sia costituita da un insieme di telai piani mutuamente collegati da pendoli inestensibili (telaio traslante o treno di telai).

Nei casi più frequenti occorre però un modello che consenta di valutare l'effettivo comportamento tridimensionale dell'edificio. Lo schema più generale di telaio spaziale è quello che vede la struttura come un insieme di aste nello spazio, con eventuali vincoli mutui tra i nodi che rappresentano la presenza di impalcati indeformabili nel loro piano. Un tale modello, eventualmente ancor più generalizzato con l'aggiunta di elementi bidimensionali, lastre o piastre, può essere analizzato mediante programmi come il SAP o il NASTRAN, il primo dei quali è ormai disponibile anche per i più diffusi personal computer. La maggiore generalità comporta ovviamente problemi operativi, come l'elevato ingombro di memoria, la lunghezza dei tempi di soluzione, la complessità della fase di input e dell'esame dei risultati. I primi due problemi perdono man mano rilevanza, grazie alla introduzione di calcolatori sempre più potenti e veloci. Contemporaneamente, la diffusione di pre e post-processor grafici rende più agevole il controllo dei dati e la valutazione dell'attendibilità dei risultati. Nonostante ciò, questa impostazione è ancora molto onerosa e quindi inadatta per un uso quotidiano da parte del progettista strutturale.

Una possibile semplificazione consiste nel considerare strutture spaziali con impalcati orizzontali planimetricamente indeformabili, pilastri verticali e travi poste solo a livello dell'impalcato. Una tale impostazione, adottata da programmi come l'ETABS, è di facile e rapido uso e consente di analizzare anche edifici con piante molto irregolari. Non può però essere utilizzata in presenza di travi fuori piano, come quelle delle scale, di tetti a falde inclinate, impalcati sfalsati, o piano di posa a quota non costante.

In alternativa si può considerare la struttura spaziale come costituita da un insieme di telai piani, ed eventualmente anche nuclei irrigidenti tridimensionali, collegati da impalcati indeformabili. In questo caso non si tiene conto innanzitutto della congruenza verticale tra i nodi comuni a due o più telai incidenti, cioè si accettano spostamenti verticali differenti per uno stesso nodo a seconda che esso sia considerato appartenente ad un telaio oppure ad un altro. Se però il nodo appartiene in entrambi i telai a pilastri verticali, l'elevata rigidità estensionale dei pilastri rende in assoluto modesti gli spostamenti verticali e quindi poco rilevante l'effetto di tale incongruenza. In secondo luogo, viene trascurato l'accoppiamento flessionale e torsionale delle travi di due telai incidenti, cioè il momento flettente e torcente che nasce nelle aste di un telaio per effetto di una rotazione nel piano dell'altro telaio. Si osservi però che la flessione anzidetta è rigorosamente nulla se i due telai sono tra loro perpendicolari in pianta e, se non

lo sono, è tanto più modesta quanto più ci si avvicina a tale situazione. L'entità della torsione dipende invece dalla rigidità torsionale delle travi, che è usualmente molto minore rispetto a quella flessionale. Questa impostazione cade quindi in difetto solo nel caso di piante molto irregolari, nelle quali non sia possibile individuare due famiglie di telai sostanzialmente (ma non rigorosamente) ortogonali.

Chiedersi quale tra i modelli qui presentati sia in assoluto il migliore per la pratica professionale è una domanda sostanzialmente scorretta perché sottintende la convinzione di poter utilizzare per qualsiasi applicazione sempre la stessa schematizzazione, ovvero lo stesso programma per il calcolatore. Bisogna invece rendersi conto che edifici diversi richiedono differenti modelli, e quindi che l'organizzazione di uno studio professionale richiede la disponibilità di una gamma di programmi sufficientemente ampia per soddisfare tutte le esigenze.

Analizzare in uno stesso testo tutti gli schemi innanzi descritti è un compito molto oneroso. In questo volume ci si limita pertanto all'esame di due modelli. Il primo è quello di telaio piano, o più propriamente di *insieme piano di aste*, perché in esso sono compresi anche quegli schemi in cui la resistenza della struttura è affidata prevalentemente agli sforzi estensionali (travature reticolari) anziché a quelli flessione-taglienti. L'argomento è trattato in numerosi testi, sia in lingua inglese che in italiano, nei quali sono però poco evidenziati alcuni problemi particolari ma utili nell'applicare il modello agli edifici, come quello della indeformabilità estensionale dei traversi. La sua semplicità lo rende inoltre particolarmente adatto per un primo approccio all'analisi matriciale da parte dei molti studenti o ingegneri che non hanno ancora familiarità con questa metodologia. Si è preferito affrontare il problema direttamente in maniera generale. Contemporaneamente si è però ritenuto opportuno dedicare ampio spazio alla descrizione di pre-processor (o interfaccia di ingresso dati) che consentono di particolareggiare la preparazione dei dati al singolo caso in esame; è così possibile, ad esempio, descrivere la geometria di telai a maglie rettangolari fornendo direttamente luci delle campate e altezze degli interpiani, anziché le coordinate di tutti i nodi. A ciascun pre-processor corrisponde un post-processor (o interfaccia di uscita), che ad esempio presenta i risultati individuando travi e pilastri mediante la numerazione in carpenteria anziché con un numero progressivo.

Il secondo modello è quello di *insieme spaziale di telai piani*. Il rilievo ad esso dato dalla letteratura tecnica corrente, in particolare da quella italiana, è molto limitato. Il suo studio presenta invece interessanti risvolti teorici, come quello della scomposizione di una struttura in sottostrutture

più semplici, ma soprattutto grosse potenzialità applicative. Nel testo si mostra quindi esplicitamente come esso possa essere utilizzato per l'analisi di edifici con travi a ginocchio, impalcati sfalsati o piano di posa a quota non costante.

4. Procedimento risolutivo

Entrambi i modelli strutturali qui descritti sono costituiti da nodi rigidi collegati da elementi monodimensionali, cioè da solidi in cui una dimensione sia predominante rispetto alle altre due. Questi elementi vengono indicati col termine *aste*.

Per adottare nella risoluzione dello schema il metodo degli spostamenti, occorre innanzitutto analizzare il comportamento della singola asta, cioè definire le relazioni che intercorrono tra le azioni applicate ai suoi estremi e le componenti di movimento degli stessi (matrice di rigidezza dell'asta), nonché le azioni di estremità che insorgono in conseguenza ai carichi applicati all'interno dell'asta quando il movimento dei suoi estremi è impedito (azioni di incastro perfetto).

Il passo successivo consiste nel determinare il comportamento complessivo di un insieme piano di aste, cioè le relazioni esistenti tra le azioni applicate ai nodi e le componenti di movimento di essi (matrice di rigidezza dell'insieme).

Nel caso di un telaio piano, una volta calcolate le azioni nodali (sia esterne che derivate da carichi agenti sulle aste) è possibile utilizzare le relazioni anzidette per determinare le componenti di movimento nodale e da queste risalire alle caratteristiche di sollecitazione nelle aste.

Volendo analizzare un insieme spaziale di telai, occorre invece modificare tali relazioni in modo da ottenere per il singolo telaio piano un collegamento diretto tra forze orizzontali e spostamento dei traversi (matrice di rigidezza laterale o traslante dello schema piano); occorre inoltre valutare le azioni orizzontali che insorgono per effetto dei carichi (nodali e sulle aste) quando gli spostamenti dei traversi sono impediti. Si può quindi passare all'esame dell'insieme spaziale di telai, determinando l'analogo collegamento esistente tra azioni orizzontali e componenti di movimento degli impalcati (matrice di rigidezza laterale dello schema spaziale). Utilizzando queste relazioni, si può risalire dai carichi orizzontali alle componenti di movimento degli impalcati ed agli spostamenti dei singoli traversi, e quindi alle componenti di movimento nodale ed alle caratteristiche di sollecitazione delle aste di ciascun telaio piano.

CAPITOLO SECONDO

LA SINGOLA ASTA

1. Generalità

Caratteristica comune alle due tipologie strutturali prese in esame in questo testo è che le aste da cui esse sono costituite rientrino nell'ambito dei sistemi monodimensionali a comportamento piano. Dal punto di vista geometrico ciò richiede che l'asse di ciascuna asta sia contenuto in un piano e che la sua sezione retta sia simmetrica rispetto ad esso; in tutte le applicazioni verranno anzi considerate, in maniera più restrittiva, solo aste ad asse rettilineo. In secondo luogo, è necessario che l'asta sia caricata simmetricamente rispetto al piano, in modo che gli spostamenti dell'asse siano contenuti in esso. Questa condizione è implicitamente rispettata dal modello di telaio piano. Nel caso dell'insieme spaziale di telai essa equivale a considerare irrilevante, e quindi trascurare, la capacità di ciascun telaio di assorbire carichi al di fuori del piano cui esso appartiene.

Per la validità della trattazione occorre effettuare alcune ulteriori ipotesi. La prima è quella cosiddetta di piccoli spostamenti. Questi devono essere tali da consentire di determinare le caratteristiche di sollecitazione facendo riferimento alla struttura indeformata. In secondo luogo, il materiale deve essere linearmente elastico. Queste due ipotesi rendono valido il principio di sovrapposizione degli effetti, che consente di valutare separatamente lo stato tensionale e deformativo provocato da un singolo carico o da uno spostamento imposto. Si ipotizza infine la conservazione delle sezioni

piane; ciò è vicino al vero quando gli spostamenti dovuti alla sollecitazione locale di taglio sono piccoli rispetto a quelli dovuti alla deformazione complessiva della struttura, cioè quando la lunghezza dell'asta predomina sulle dimensioni della sezione trasversale.

Avendo a che fare con sistemi piani, si userà come riferimento una terna ortogonale destrorsa xyz tale da contenere le aste nel piano xy . Essa viene denominata *sistema di riferimento globale* perché è valida per tutte le aste dell'insieme. Nelle figure si rappresenterà l'asse x orizzontale ed orientato da sinistra verso destra, quello y verticale ed orientato dal basso verso l'alto (fig.2.1); il verso positivo dell'asse z è di conseguenza quello uscente dal foglio.

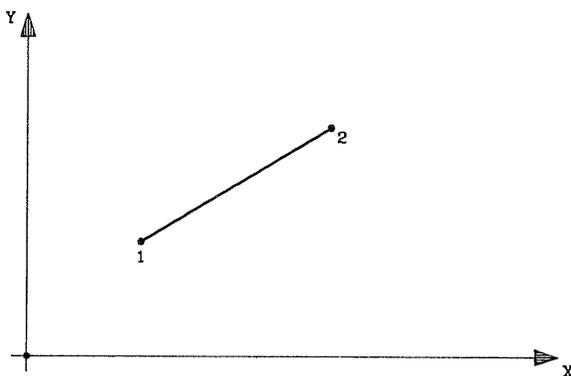


Fig. 2.1 — Sistema di riferimento globale

Nell'esaminare una singola asta, è in genere più comodo utilizzare un diverso sistema di riferimento, denominato *sistema di riferimento locale* perché specifico dell'asta in esame e strettamente legato alla sua geometria. L'origine è infatti posta in corrispondenza del suo primo estremo; l'asse x coincide con l'asse dell'asta ed è orientato nel verso che va dal primo al secondo estremo di questa; l'asse y è ad esso perpendicolare ed orientato in verso tale che il semiasse positivo x possa sovrapporsi a quello y con una rotazione antioraria di 90 gradi (fig.2.2). In tutti i casi in cui è necessario distinguere i due sistemi di riferimento, gli assi di quello locale verranno contraddistinti con un apice ($x'y'$).

Nei paragrafi che seguono viene analizzato il comportamento di una generica asta. Ciò richiede innanzitutto la definizione delle azioni (forze e momenti) esercitate ai suoi estremi e delle componenti di movimento (spostamenti e rotazioni) di tali punti, che in termini matriciali vengono rispettivamente indicate mediante i vettori S ed s . Poiché queste grandezze

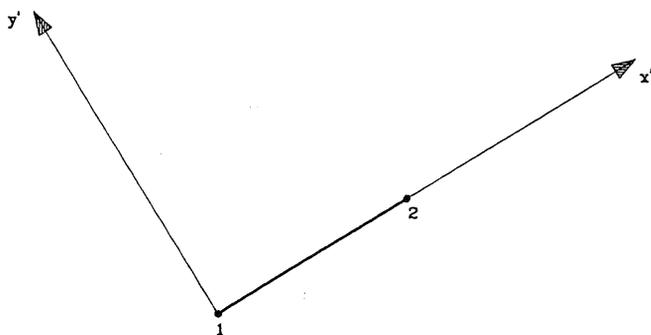


Fig. 2.2 — Sistema di riferimento locale

possono essere riferite ad entrambi i sistemi di assi innanzi descritti, vengono individuate le relazioni che consentono il passaggio dall'uno all'altro.

Sono poi richiamate le equazioni differenziali che legano carichi, caratteristiche di sollecitazione e componenti di movimento dei punti dell'asse dell'asta, note dalla Scienza delle Costruzioni. Dalla loro risoluzione si determina la relazione lineare che insorge, in assenza di carichi, tra azioni e componenti di movimento di estremità, sintetizzata dalla matrice di rigidità k dell'asta. Questa viene esplicitata per i casi che più frequentemente possono ricorrere nella pratica professionale.

Vengono quindi definite le azioni di incastro perfetto \bar{S} , che insorgono per effetto dei carichi agenti sull'asta quando le componenti di movimento dei suoi estremi sono impedito. Per comodità del lettore sono richiamate le espressioni analitiche corrispondenti ad una vasta gamma di tipologie di carico. Il principio di sovrapposizione degli effetti rende così possibile esprimere il legame tra carichi, azioni e componenti di movimento di estremità mediante la relazione generale $S = \bar{S} + k s$.

Sono infine riportate le formulazioni che consentono di determinare le caratteristiche di sollecitazione in un qualsiasi punto dell'asta, in funzione dei carichi e delle azioni di estremità.

2. Azioni agli estremi dell'asta

A ciascun estremo di un'asta si può considerare agente, in generale, una forza comunque orientata ed una coppia. Quando si è interessati ad evidenziare le relazioni tra l'asta in esame e le altre dell'insieme, risulta conveniente descrivere queste azioni mediante le sei componenti rispetto al sistema di riferimento globale, mostrate col loro verso positivo nella figu-

ra 2.3 e racchiuse nel vettore S_g .

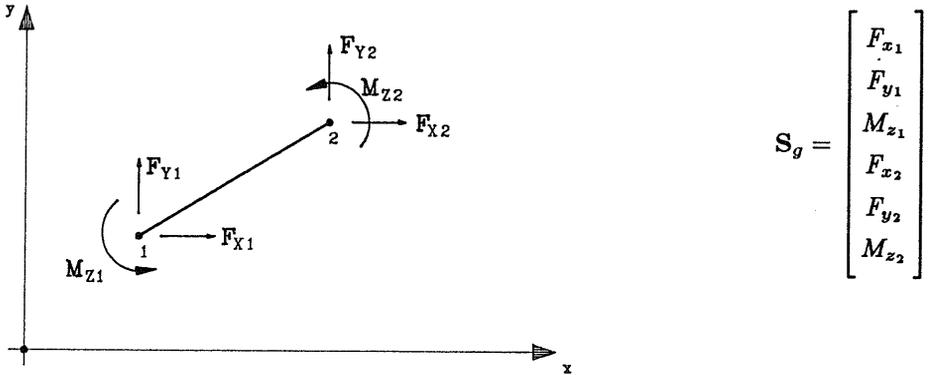


Fig. 2.3 — Azioni di estremità nel riferimento globale

Quando invece si analizza un'asta indipendentemente dalle altre è preferibile descrivere le azioni mediante le componenti rispetto al sistema di riferimento locale, mostrate col loro verso positivo nella figura 2.4 e racchiuse nel vettore S_ℓ .

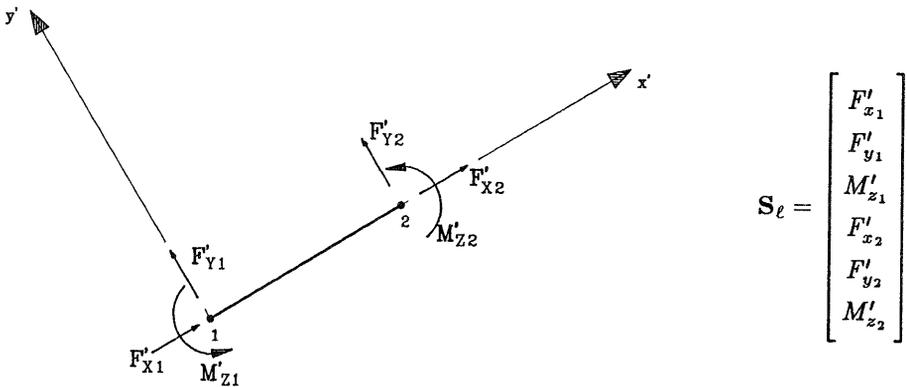


Fig. 2.4 — Azioni di estremità nel riferimento locale

Il passaggio dal secondo al primo insieme di grandezze può essere espresso in funzione dall'angolo α , che rappresenta l'inclinazione dell'asse dell'asta rispetto all'asse x del riferimento globale (positivo se il semiasse

positivo x deve ruotare in verso antiorario per sovrapporsi ad x'):

$$\begin{aligned} F_{x1} &= \cos \alpha F'_{x1} - \sin \alpha F'_{y1} & F_{x2} &= \cos \alpha F'_{x2} - \sin \alpha F'_{y2} \\ F_{y1} &= \sin \alpha F'_{x1} + \cos \alpha F'_{y1} & F_{y2} &= \sin \alpha F'_{x2} + \cos \alpha F'_{y2} \\ M_{z1} &= M'_{z1} & M_{z2} &= M'_{z2} \end{aligned}$$

In termini matriciali si può scrivere

$$\mathbf{S}_g = \mathbf{L}_d \mathbf{S}_\ell \quad (2.1)$$

indicando con \mathbf{L}_d la *matrice di rotazione*, che consente di tener conto della rotazione del sistema di riferimento,

$$\mathbf{L}_d = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

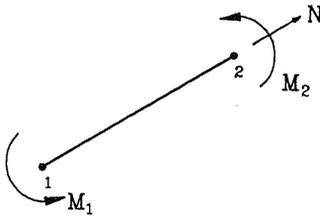
Ad ogni vettore \mathbf{S}_ℓ corrisponde mediante la relazione innanzi scritta un unico vettore \mathbf{S}_g . Si può facilmente constatare che la corrispondenza tra i due insiemi è biunivoca e si possono quindi scrivere, in maniera analoga, le espressioni che consentono il passaggio inverso, da \mathbf{S}_g a \mathbf{S}_ℓ . In termini matriciali si ottiene

$$\mathbf{S}_\ell = \mathbf{L}_d^T \mathbf{S}_g$$

Si noti come la trasformazione inversa avvenga in questo caso mediante la trasposta della matrice di rotazione, che consentiva la trasformazione diretta, e che si ha quindi

$$\mathbf{L}_d^{-1} = \mathbf{L}_d^T$$

Quando si descrivono le azioni agli estremi dell'asta mediante il vettore \mathbf{S}_g oppure \mathbf{S}_ℓ , non è possibile assegnare alle sei componenti valori arbitrari. Occorre infatti che l'insieme costituito da azioni di estremità e carichi sull'asta rispetti tre condizioni di equilibrio (tre perché si ha a che fare con uno schema piano). Per definire in maniera completa ed univoca le azioni sono quindi sufficienti tre sole componenti, che costituiscono l'insieme minimo, o insieme fondamentale, di azioni di estremità. La figura 2.5 mostra le grandezze scelte (tra le possibili alternative), racchiuse nel vettore \mathbf{S}_f .



$$\mathbf{S}_f = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ N \end{bmatrix}$$

Fig. 2.5 — Insieme fondamentale di azioni

Il passaggio dal vettore \mathbf{S}_f a \mathbf{S}_ℓ richiede la conoscenza dei carichi agenti sull'asta. Per un'asta scarica si ha

$$\begin{aligned} F'_{x1} &= -N & F'_{x2} &= N \\ F'_{y1} &= \frac{M_1}{\ell} + \frac{M_2}{\ell} & F'_{y2} &= -\frac{M_1}{\ell} - \frac{M_2}{\ell} \\ M'_{z1} &= M_1 & M'_{z2} &= M_2 \end{aligned}$$

In termini matriciali si può scrivere

$$\mathbf{S}_\ell = \mathbf{T} \mathbf{S}_f \quad (2.3)$$

indicando con \mathbf{T} la *matrice di trasformazione* che consente tale passaggio, funzione esclusivamente della lunghezza ℓ dell'asta

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \frac{1}{\ell} & \frac{1}{\ell} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\ell} & -\frac{1}{\ell} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Anche in questo caso ad ogni vettore \mathbf{S}_f corrisponde un unico vettore \mathbf{S}_ℓ . Esistono però infiniti vettori \mathbf{S}_ℓ che non corrispondono ad alcun \mathbf{S}_f (perché non rispettano le condizioni di equilibrio). La corrispondenza tra i due insiemi non è quindi biunivoca, e non è possibile effettuare la trasformazione inversa.

Utilizzando le espressioni innanzi riportate, si ottiene la relazione che lega l'insieme fondamentale di azioni alle loro componenti nel sistema di riferimento globale

$$\mathbf{S}_g = \mathbf{L}_d \mathbf{T} \mathbf{S}_f \quad (2.5)$$

Ovviamente anche questa relazione non è invertibile.

3. Componenti di movimento degli estremi dell'asta

Il movimento di ciascun estremo di un'asta può essere definito, in generale, mediante una traslazione comunque diretta ed una rotazione. Quando si è interessati ad evidenziare le relazioni tra l'asta in esame e le altre dell'insieme, risulta conveniente descrivere questo moto mediante le sei componenti rispetto al sistema di riferimento globale, mostrate in scala amplificata col loro verso positivo nella figura 2.6 e racchiuse nel vettore \mathbf{s}_g .

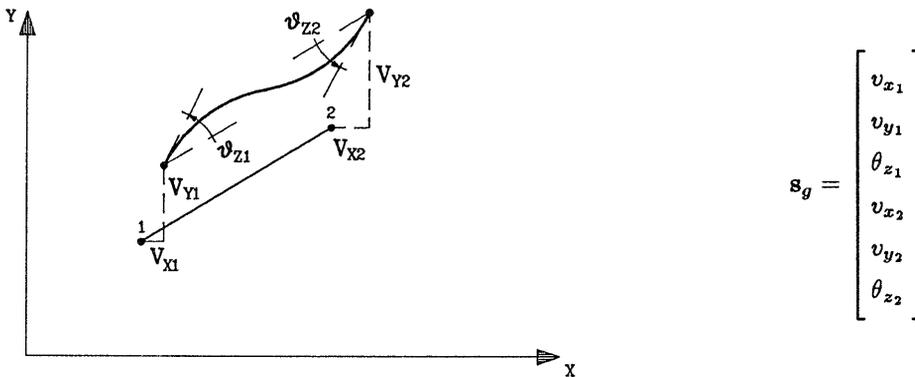


Fig. 2.6 — Componenti di movimento nel riferimento globale

Quando invece si analizza un'asta indipendentemente dalle altre è preferibile descriverne il movimento mediante le componenti rispetto al sistema di riferimento locale, mostrate col loro verso positivo nella figura 2.7 e racchiuse nel vettore \mathbf{s}_ℓ .

La corrispondenza tra \mathbf{s}_g ed \mathbf{s}_ℓ è biunivoca ed è fornita, in maniera identica a quanto mostrato nel paragrafo precedente, da

$$\mathbf{s}_g = \mathbf{L}_d \mathbf{s}_\ell \quad \mathbf{s}_\ell = \mathbf{L}_d^T \mathbf{s}_g \quad (2.6)$$

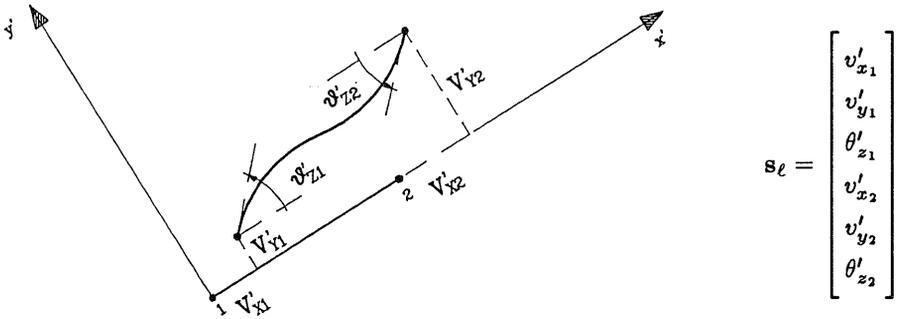


Fig. 2.7 — Componenti di movimento nel riferimento locale

A differenza di quanto avviene per le azioni di estremità, è possibile assegnare qualsiasi valore alle sei componenti di movimento, siano esse riferite al sistema globale o a quello locale. Occorre però rilevare che lo stato deformativo dell'asta non è influenzato da un suo moto rigido, ed è quindi identico per tutti quegli insiemi di componenti di movimento che differiscono tra loro solo per un tale moto. Per definire in maniera completa ed univoca la deformazione di un'asta sono pertanto sufficienti tre sole grandezze, che costituiscono l'insieme minimo, o insieme fondamentale, di componenti di movimento. La figura 2.8 mostra le grandezze scelte, racchiuse nel vettore s_f .

Ad ogni vettore s_ℓ corrisponde un unico vettore s_f , mediante le relazioni

$$\varphi_1 = \theta'_{z1} - \frac{v'_{y2} - v'_{y1}}{\ell} = \frac{v'_{y1}}{\ell} + \theta'_{z1} - \frac{v'_{y2}}{\ell}$$

$$\varphi_2 = \theta'_{z2} - \frac{v'_{y2} - v'_{y1}}{\ell} = \frac{v'_{y1}}{\ell} - \frac{v'_{y2}}{\ell} + \theta'_{z2}$$

$$\Delta = v'_{x2} - v'_{x1}$$

In termini matriciali si può scrivere

$$s_f = \mathbf{T}^T s_\ell \quad (2.7)$$

essendo \mathbf{T}^T la trasposta della matrice di trasformazione già definita nel paragrafo precedente.

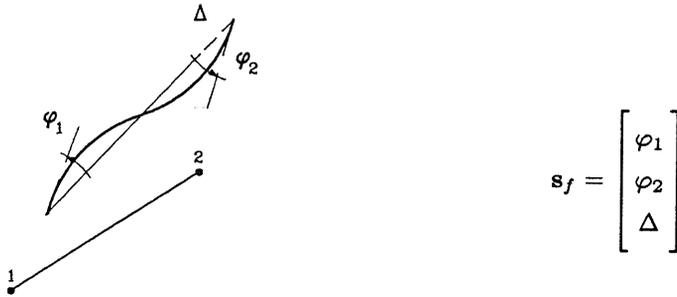


Fig. 2.8 — Insieme fondamentale di componenti di movimento

Ad ogni vettore \mathbf{s}_f corrispondono invece infiniti vettori \mathbf{s}_ℓ , e non è quindi possibile la trasformazione inversa.

Utilizzando le espressioni innanzi riportate si ottiene la relazione, non invertibile, che lega le componenti di movimento nel sistema di riferimento globale al corrispondente insieme fondamentale

$$\mathbf{s}_f = (\mathbf{L}_d \mathbf{T})^T \mathbf{s}_g \tag{2.8}$$

I tre diversi insiemi di componenti di movimento definiti in questo paragrafo sono duali con gli insiemi di azioni del paragrafo precedente, perché ogni componente di movimento è associata alla corrispondente azione. Anche tra le relazioni che legano mutuamente i primi insiemi o i secondi vi è una stretta analogia. Non si tratta di un fatto casuale, bensì della conseguenza di una legge generale, che può essere denominata *principio di dualità tra forze e spostamenti*.

Si considerino infatti due insiemi \mathbf{S}_1 ed \mathbf{S}_2 di forze (e coppie) agenti su un corpo, staticamente equivalenti e legati tra loro da una trasformazione lineare, non necessariamente invertibile, espressa matricialmente da

$$\mathbf{S}_2 = \mathbf{B} \mathbf{S}_1$$

Ai due sistemi di forze sono associati i due insiemi di spostamenti (e rotazioni) \mathbf{s}_1 ed \mathbf{s}_2 , costituiti dalle componenti di movimento corrispondenti alle singole azioni. Applicando al corpo gli spostamenti \mathbf{s}_1 , il lavoro W_1 compiuto dalle forze \mathbf{S}_1 è pari alla somma dei prodotti di forze per spostamenti corrispondenti, cioè

$$W_1 = \mathbf{S}_1^T \mathbf{s}_1$$

Per il principio dei lavori virtuali, essendo i due sistemi di forze e di spostamenti tra loro equivalenti, il lavoro compiuto da ciascun sistema deve essere lo stesso. Deve quindi essere

$$\mathbf{S}_1^T \mathbf{s}_1 = \mathbf{S}_2^T \mathbf{s}_2$$

La relazione tra i due insiemi di azioni può indicarsi anche con

$$\mathbf{S}_2^T = \mathbf{S}_1^T \mathbf{B}^T$$

che sostituita nella precedente fornisce

$$\mathbf{S}_1^T \mathbf{s}_1 = \mathbf{S}_1^T \mathbf{B}^T \mathbf{s}_2$$

e quindi

$$\mathbf{s}_1 = \mathbf{B}^T \mathbf{s}_2$$

Si può pertanto affermare in generale che, se esiste una trasformazione lineare da un sistema di forze \mathbf{S}_1 ad uno equivalente \mathbf{S}_2 , espressa mediante una matrice \mathbf{B} , è sempre possibile trasformare il sistema di spostamenti \mathbf{s}_2 (associato ad \mathbf{S}_2) nell'equivalente \mathbf{s}_1 (associato ad \mathbf{S}_1) mediante la trasposta della stessa matrice \mathbf{B} .

4. Caratteristiche di sollecitazione e spostamento dei punti interni dell'asta

Le ipotesi formulate nel primo paragrafo consentono di applicare all'asta la teoria della trave di De Saint-Venant, che fornisce la soluzione delle equazioni dell'equilibrio elastico per le sollecitazioni semplici di trazione, flessione e flessione+taglio, e di utilizzare tutte le relazioni che da essa derivano per le travi piane ad asse rettilineo.

Si consideri un'asta nel sistema di riferimento locale (fig.2.9), la cui sezione retta abbia area A e momento d'inerzia I , eventualmente variabili in funzione della distanza x dal primo estremo. Siano inoltre χ il fattore di taglio, parametro adimensionale che tiene conto del discostarsi delle tensioni tangenziali dal loro valore medio, ed E e G i moduli di elasticità normale e tangenziale del materiale. Si indicano con φ la rotazione della sezione e con u e v le componenti in direzione x ed y dello spostamento del suo baricentro. Si indicano inoltre con N , M e T le caratteristiche di sollecitazione e con

n , m e q i carichi distribuiti (assiali, flettenti e taglianti) agenti sull'asta. Il verso positivo di tutte queste grandezze è indicato nella figura.

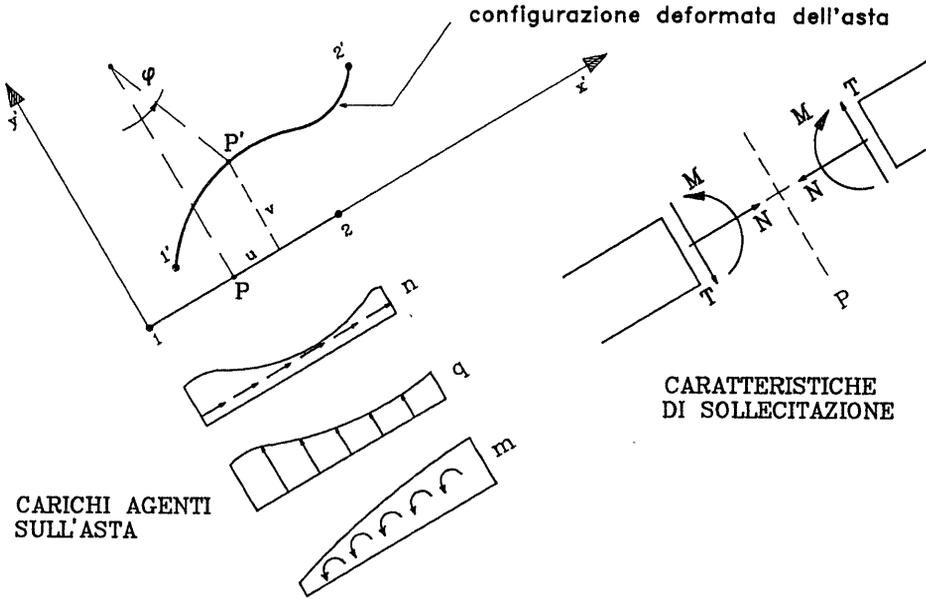


Fig. 2.9 — Carichi, caratteristiche di sollecitazione e spostamenti dei punti interni di un'asta

Per gli schemi più comuni di carico e di vincolo, le relazioni tra componenti di movimento, caratteristiche di sollecitazione e carichi sono fornite da espressioni analitiche ben note che verranno di volta in volta richiamate. Per le situazioni meno usuali, come quella di aste deformabili a taglio o di travi su suolo elastico, esse saranno invece esplicitamente ricavate a partire dalle equazioni differenziali che legano tali enti¹

¹In numerosi testi di Scienza delle Costruzioni l'asta è riferita ad una terna xyz nella quale l'asse z coincide con l'asse dell'asta e l'asse y è orientato verso il basso (nelle rappresentazioni piane); stesso verso positivo ha il carico tagliante q . La formulazione ivi riportata delle suddette equazioni differenziali differisce quindi per lo scambio delle variabili x e z e per il segno di alcuni termini legati alla y .

$$\frac{dy}{dx} = \frac{N}{EA} \quad \frac{dN}{dx} = -n \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} &= \varphi - \frac{\chi T}{GA} & \frac{d\varphi}{dx} &= \frac{M}{EI} \\ \frac{dM}{dx} &= T - m & \frac{dT}{dx} &= q \end{aligned} \quad (2.10)$$

Le equazioni (2.10) possono essere accorpate in un'unica relazione

$$\frac{d^4 v}{dx^4} = \frac{q}{EI} - \frac{1}{EI} \frac{dm}{dx} - \frac{\chi}{GA} \frac{d^2 q}{dx^2} \quad (2.11)$$

Il diagramma degli spostamenti v viene usualmente denominato linea elastica. Di conseguenza quest'ultima espressione, che mette direttamente in relazione i valori di v con i carichi, viene detta *equazione della linea elastica*.

5. Relazione tra azioni e componenti di movimento degli estremi dell'asta

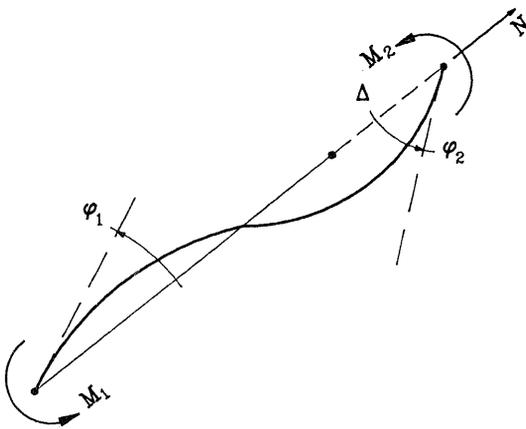
Applicando la teoria della trave ad un'asta soggetta solo a forze e coppie applicate ai suoi estremi (tali da rendere equilibrata la configurazione), è possibile determinare le caratteristiche di sollecitazione sforzo normale, momento flettente e taglio, risalire da esse alle tensioni e deformazioni in un punto qualsiasi dell'asta ed ottenere infine le componenti di movimento dei suoi estremi (a meno di un moto rigido). Viceversa, conoscendo spostamento e rotazione degli estremi dell'asta, si possono determinare successivamente le deformazioni, le tensioni, le caratteristiche di sollecitazione ed infine le azioni di estremità.

5.1. Matrici fondamentali di rigidezza e di deformabilità

Si prenda in esame un'asta, la cui sezione retta sia costante per tutta la lunghezza (fig.2.10). Si ipotizza di poter trascurare lo scorrimento della sezione dovuto alla deformazione a taglio $\left(\gamma = \frac{\chi T}{GA} = 0\right)$ e di poter applicare le azioni di estremità indifferentemente sulla configurazione indeformata o su quella deformata. La relazione tra l'insieme fondamentale

di azioni e di componenti di movimento di estremità potrebbe essere ricavata dalla risoluzione delle equazioni differenziali innanzi riportate, con le condizioni ai limiti

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= \varphi_1 & \varphi(\ell) &= \varphi_2 \\ v(0) &= 0 & v(\ell) &= 0 \\ u(0) &= 0 & u(\ell) &= \Delta \end{aligned}$$



$$\mathbf{S}_f = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ N \end{bmatrix} \quad \mathbf{s}_f = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \Delta \end{bmatrix}$$

Fig. 2.10 — Asta a sezione costante: insieme fondamentale di azioni e componenti di movimento

Nel caso particolare essa è però già nota (fig.2.11) e fornita dalle espressioni

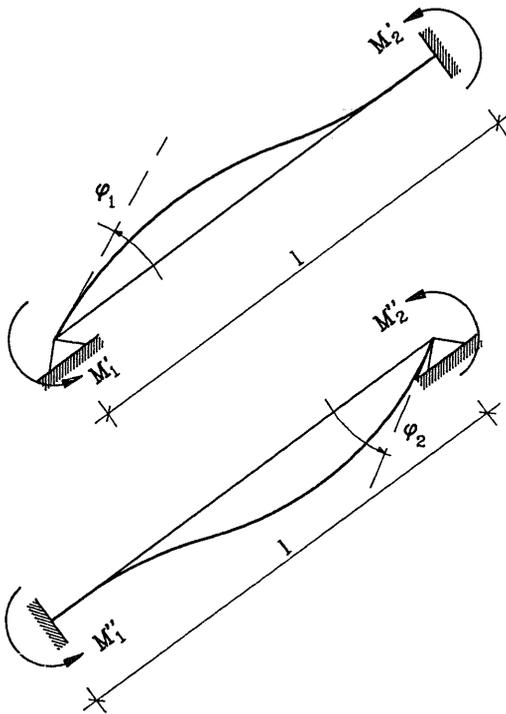
$$M_1 = 4 \frac{EI}{l} \varphi_1 + 2 \frac{EI}{l} \varphi_2$$

$$M_2 = 2 \frac{EI}{l} \varphi_1 + 4 \frac{EI}{l} \varphi_2$$

$$N = \frac{EA}{l} \Delta$$

che in termini matriciali possono essere sintetizzate in

$$\mathbf{S}_f = \mathbf{k}_f \mathbf{s}_f \tag{2.12}$$



$$\varphi_1 = \frac{M_1' \ell}{4EI} \quad M_2' = \frac{1}{2} M_1'$$

e quindi

$$M_1' = 4 \frac{EI}{\ell} \varphi_1 \quad M_2' = 2 \frac{EI}{\ell} \varphi_1$$

$$\varphi_2 = \frac{M_2'' \ell}{4EI} \quad M_1'' = \frac{1}{2} M_2''$$

e quindi

$$M_1'' = 2 \frac{EI}{\ell} \varphi_2 \quad M_2'' = 4 \frac{EI}{\ell} \varphi_2$$

Fig. 2.11 — Relazioni tra coppie flettenti e rotazioni

essendo

$$\mathbf{k}_f = \begin{bmatrix} 4 \frac{EI}{\ell} & 2 \frac{EI}{\ell} & 0 \\ 2 \frac{EI}{\ell} & 4 \frac{EI}{\ell} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{\ell} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

La matrice \mathbf{k}_f prende il nome di *matrice di rigidezza* (fondamentale) dell'asta. Il suo generico termine k_{ij} rappresenta l'azione i -esima che insorge nell'asta per effetto della componente di movimento j -esima unitaria, quando tutte le altre componenti di movimento sono impedito. La matrice è invertibile, e la sua inversa

$$\mathbf{f}_f = \mathbf{k}_f^{-1}$$

è denominata *matrice di deformabilità* (o di flessibilità) dell'asta e consente di determinare le componenti di movimento in funzione delle azioni di estremità

$$\mathbf{s}_f = \mathbf{f}_f \mathbf{S}_f$$

In particolare, nel caso in esame si ha

$$\mathbf{f}_f = \begin{bmatrix} \frac{\ell}{3EI} & -\frac{\ell}{6EI} & 0 \\ -\frac{\ell}{6EI} & \frac{\ell}{3EI} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\ell}{EA} \end{bmatrix}$$

5.2. Matrice di rigidezza nel sistema di riferimento locale

La relazione tra azioni e componenti di movimento nel sistema di riferimento locale può essere ottenuta da quella relativa all'insieme fondamentale utilizzando le espressioni che consentono il passaggio tra un insieme e l'altro. Si ha infatti

$$\mathbf{S}_\ell = \mathbf{T} \mathbf{S}_f \quad \mathbf{S}_f = \mathbf{k}_f \mathbf{s}_f \quad \mathbf{s}_f = \mathbf{T}^T \mathbf{s}_\ell$$

e quindi

$$\mathbf{S}_\ell = \mathbf{k}_\ell \mathbf{s}_\ell \tag{2.14}$$

con

$$\mathbf{k}_\ell = \mathbf{T} \mathbf{k}_f \mathbf{T}^T \tag{2.15}$$

Per l'asta in esame, utilizzando la definizione (2.4) della matrice di trasformazione \mathbf{T} e l'espressione (2.13) di \mathbf{k}_f si ottiene come matrice di rigidezza nel sistema di riferimento locale

$$\mathbf{k}_\ell = \begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & 12\frac{EI}{\ell^3} & 6\frac{EI}{\ell^2} & 0 & -12\frac{EI}{\ell^3} & 6\frac{EI}{\ell^2} \\ 0 & 6\frac{EI}{\ell^2} & 4\frac{EI}{\ell} & 0 & -6\frac{EI}{\ell^2} & 2\frac{EI}{\ell} \\ -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & -12\frac{EI}{\ell^3} & -6\frac{EI}{\ell^2} & 0 & 12\frac{EI}{\ell^3} & -6\frac{EI}{\ell^2} \\ 0 & 6\frac{EI}{\ell^2} & 2\frac{EI}{\ell} & 0 & -6\frac{EI}{\ell^2} & 4\frac{EI}{\ell} \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

Si noti che, a differenza di \mathbf{k}_f , la matrice \mathbf{k}_ℓ non è invertibile. Dal punto di vista numerico, ciò è dovuto al fatto che le sue righe non sono linearmente indipendenti: la prima è ottenuta cambiando segno alla quarta, la seconda sommando terza e sesta e dividendo per ℓ il risultato, e così via. Come significato fisico, non può esistere una formulazione che fornisca le componenti di spostamento in funzione di un arbitrario insieme di azioni (nel riferimento locale) perché, come già detto nel secondo paragrafo, un tale insieme arbitrario non è ammissibile ed è possibile assegnare soltanto azioni che rispettino le condizioni di equilibrio del corpo.

5.3. Matrice di rigidezza nel sistema di riferimento globale

Anche la relazione tra azioni e componenti di movimento nel sistema globale può essere ottenuta mediante le relazioni tra questi insiemi e quelli locale e fondamentale. Si ha

$$\mathbf{S}_g = \mathbf{L}_d \mathbf{S}_\ell \quad \mathbf{S}_\ell = \mathbf{k}_\ell \mathbf{s}_\ell \quad \mathbf{s}_\ell = \mathbf{L}_d^T \mathbf{s}_g$$

e quindi

$$\mathbf{S}_g = \mathbf{k}_g \mathbf{s}_g \quad (2.17)$$

con

$$\mathbf{k}_g = \mathbf{L}_d \mathbf{k}_\ell \mathbf{L}_d^T \quad (2.18)$$

o anche

$$\mathbf{k}_g = \mathbf{L}_d \mathbf{T} \mathbf{k}_f \mathbf{T}^T \mathbf{L}_d^T = (\mathbf{L}_d \mathbf{T}) \mathbf{k}_f (\mathbf{L}_d \mathbf{T})^T \quad (2.19)$$

Anche \mathbf{k}_g , come \mathbf{k}_ℓ , non è invertibile per le stesse ragioni innanzi riportate. Per l'asta in esame, l'espressione completa della matrice di rigidezza nel sistema di riferimento globale è fornita da

$$\mathbf{k}_g = \begin{bmatrix} k_1 & k_7 & -k_3 & -k_1 & -k_7 & -k_3 \\ k_7 & k_2 & k_4 & -k_7 & -k_2 & k_4 \\ -k_3 & k_4 & k_5 & k_3 & -k_4 & k_6 \\ -k_1 & -k_7 & k_3 & k_1 & k_7 & k_3 \\ -k_7 & -k_2 & -k_4 & k_7 & k_2 & -k_4 \\ -k_3 & k_4 & k_6 & k_3 & -k_4 & k_5 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

avendo posto

$$\begin{aligned}
 k_1 &= \frac{EA}{\ell} \cos^2 \alpha + 12 \frac{EI}{\ell^3} \sin^2 \alpha \\
 k_2 &= \frac{EA}{\ell} \sin^2 \alpha + 12 \frac{EI}{\ell^3} \cos^2 \alpha \\
 k_3 &= 6 \frac{EI}{\ell^2} \sin \alpha \\
 k_4 &= 6 \frac{EI}{\ell^2} \cos \alpha \\
 k_5 &= 4 \frac{EI}{\ell} \\
 k_6 &= 2 \frac{EI}{\ell} \\
 k_7 &= \frac{EA}{\ell} \sin \alpha \cos \alpha - 12 \frac{EI}{\ell^3} \sin \alpha \cos \alpha
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

6. Matrice di rigidezza dell'asta: altri casi

6.1. Effetto della deformazione dovuta al taglio

L'espressione della matrice di rigidezza fondamentale della trave a sezione costante riportata nel paragrafo precedente è ricavata trascurando la deformazione a taglio dell'asta, cioè il termine $\chi T/GA$. Si tratta di una semplificazione molto diffusa, che comporta in genere un'approssimazione pienamente accettabile. Diventa opportuno tenerne conto solo per quegli elementi la cui sezione trasversale abbia dimensioni comparabili con la lunghezza; ciò accade in particolare, nel caso di un edificio, per pilastri con sezione molto allungata o pareti di taglio.

In questo caso, è preferibile ricavare la relazione tra l'insieme fondamentale di azioni e di componenti di movimento risolvendo le equazioni differenziali (2.9) e (2.10). Le prime, che riguardano azioni e deformazioni estensionali, non sono influenzate dalla deformazione a taglio e forniscono ancora

$$N = \frac{EA}{\ell} \Delta$$

Dalle seconde, essendo nulli q ed m , si ricava per successive integrazioni

$$T = c_1$$

$$M = c_1 x + c_2$$

$$\varphi = \frac{1}{EI} \left(c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x \right) + c_3$$

$$v = \frac{1}{EI} \left(c_1 \frac{x^3}{6} + c_2 \frac{x^2}{2} \right) + \left(c_3 - \frac{\chi}{GA} c_1 \right) x + c_4$$

Il valore delle quattro costanti c_1, c_2, c_3, c_4 può essere determinato imponendo le condizioni al contorno

$$\varphi(0) = \varphi_1 \qquad \varphi(\ell) = \varphi_2$$

$$v(0) = 0 \qquad v(\ell) = 0$$

Da esse si ottiene infatti il sistema di quattro equazioni

$$c_3 = \varphi_1$$

$$\frac{\ell^2}{2EI} c_1 + \frac{\ell}{EI} c_2 + c_3 = \varphi_2$$

$$c_4 = 0$$

$$\left(\frac{\ell^3}{6EI} - \frac{\chi \ell}{GA} \right) c_1 + \frac{\ell^2}{2EI} c_2 + \ell c_3 + c_4 = 0$$

che fornisce il risultato

$$c_1 = 6 \frac{EI}{\ell^2} \frac{1}{1 + 4\varepsilon} (\varphi_1 + \varphi_2)$$

$$c_2 = -4 \frac{EI}{\ell} \frac{1 + \varepsilon}{1 + 4\varepsilon} \varphi_1 - 2 \frac{EI}{\ell} \frac{1 - 2\varepsilon}{1 + 4\varepsilon} \varphi_2$$

$$c_3 = \varphi_1$$

$$c_4 = 0$$

avendo posto

$$\varepsilon = \frac{3 EI \chi}{GA \ell^2} \quad (2.22)$$

Si può così ricavare il valore delle coppie M_1 e M_2

$$M_1 = -M(0) = 4 \frac{EI}{\ell} \frac{1 + \varepsilon}{1 + 4\varepsilon} \varphi_1 + 2 \frac{EI}{\ell} \frac{1 - 2\varepsilon}{1 + 4\varepsilon} \varphi_2$$

$$M_2 = M(\ell) = 2 \frac{EI}{\ell} \frac{1 - 2\varepsilon}{1 + 4\varepsilon} \varphi_1 + 4 \frac{EI}{\ell} \frac{1 + \varepsilon}{1 + 4\varepsilon} \varphi_2$$

La matrice di rigidezza fondamentale è quindi

$$\mathbf{k}_f = \begin{bmatrix} 4 \frac{EI}{\ell} \frac{1 + \varepsilon}{1 + 4\varepsilon} & 2 \frac{EI}{\ell} \frac{1 - 2\varepsilon}{1 + 4\varepsilon} & 0 \\ 2 \frac{EI}{\ell} \frac{1 - 2\varepsilon}{1 + 4\varepsilon} & 4 \frac{EI}{\ell} \frac{1 + \varepsilon}{1 + 4\varepsilon} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{\ell} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Utilizzando le (2.15) e le (2.19) si possono infine determinare anche le matrici di rigidezza rispettivamente nel sistema di riferimento locale e in quello globale.

6.2. Asta con una cerniera all'estremità

Nella quasi totalità delle strutture intelaiate in cemento armato, ed anche nella maggioranza di quelle in acciaio, le aste che convergono in un nodo sono mutuamente incastrate e presentano quindi una stessa rotazione, che coincide con la rotazione del nodo. In alcuni casi particolari di analisi elastica, o più spesso quando si vuol fare un calcolo elastoplastico step-by-step che preveda successive plasticizzazioni delle sezioni, il modello geometrico può richiedere che nel nodo una o più aste siano collegate alle altre mediante una cerniera. La risoluzione di questi schemi potrebbe essere effettuata aumentando il numero complessivo delle incognite, cioè inserendo tra queste anche le rotazioni degli estremi incernierati delle aste. È però più comodo mantenere inalterato il numero delle incognite ed esaminare

a parte il modello di asta con cerniera all'estremità, per determinarne la matrice di rigidezza.

La presenza di una cerniera ad un estremo dell'asta comporta che in tale punto il momento flettente debba essere nullo. È quindi impossibile applicarvi una coppia esterna, e le azioni fondamentali di estremità si riducono alle due mostrate nella figura 2.12. Inoltre, non è più possibile assegnare in maniera arbitraria la rotazione dell'estremo dell'asta in cui è posta la cerniera, ed anche le componenti di movimento fondamentali si riducono a due.

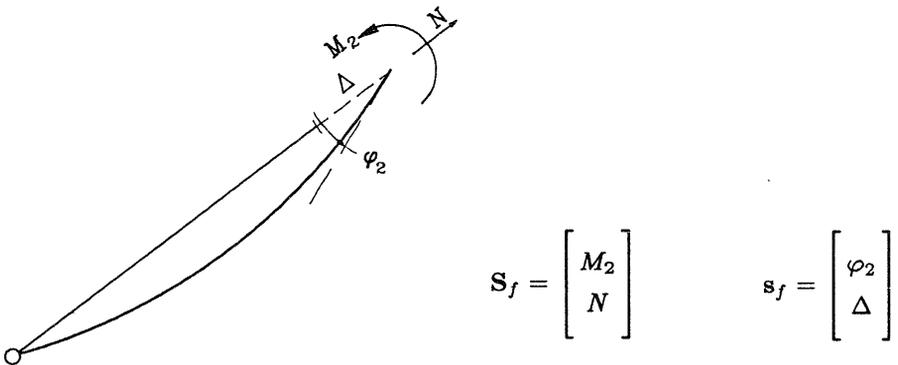


Fig. 2.12 — Asta con una cerniera al primo estremo: insieme fondamentale di azioni e componenti di movimento

La relazione tra questi due insiemi è nota (fig.2.13) e fornita (se la cerniera è posta al primo estremo) dalle espressioni

$$M_2 = 3 \frac{EI}{\ell} \varphi_2$$

$$N = \frac{EA}{\ell} \Delta$$

La matrice fondamentale di rigidezza è pertanto

$$k_f = \begin{bmatrix} 3 \frac{EI}{\ell} & 0 \\ 0 & \frac{EA}{\ell} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

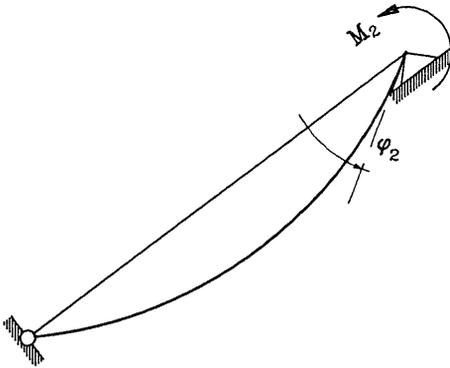
Se si vuol tener conto della deformabilità a taglio dell'asta, occorre risol-

vere le equazioni differenziali (2.10) ponendo come condizioni al contorno

$$\begin{aligned} M(0) &= 0 & \varphi(\ell) &= \varphi_2 \\ v(0) &= 0 & v(\ell) &= 0 \end{aligned}$$

Si ottiene in tal modo

$$\mathbf{k}_f = \begin{bmatrix} 3 \frac{EI}{\ell} & \frac{1}{1+\varepsilon} & 0 \\ 0 & \frac{EA}{\ell} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$



$$\varphi_2 = \frac{M_2 \ell}{3EI}$$

Fig. 2.13 — Relazione tra coppia e rotazione

Le azioni di estremità possono essere ancora descritte mediante le loro componenti nel sistema di riferimento locale, racchiuse nel vettore \mathbf{S}_ℓ già definito. Il passaggio da \mathbf{S}_f a \mathbf{S}_ℓ nel caso di un'asta con cerniera al primo estremo è fornito da

$$\begin{aligned} F'_{x1} &= -N & F'_{x2} &= N \\ F'_{y1} &= \frac{M_2}{\ell} & F'_{y2} &= -\frac{M_2}{\ell} \\ M'_{z1} &= 0 & M'_{z2} &= M_2 \end{aligned}$$

In termini matriciali vale quindi sempre la relazione (2.3)

$$\mathbf{S}_\ell = \mathbf{T} \mathbf{S}_f$$

e la matrice di trasformazione è in questo caso

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{\ell} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{1}{\ell} & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Si noti che questa matrice è ottenuta da quella relativa all'asta priva di cerniere (2.4) eliminando la prima colonna, cioè quella corrispondente alla coppia M_1 non più presente nell'insieme fondamentale. Analogamente, quando la cerniera è situata nel secondo estremo dell'asta la matrice \mathbf{T} è ricavata eliminando la seconda colonna.

La matrice di trasformazione così definita consente il passaggio duale dall'insieme di componenti di movimento nel riferimento locale a quello fondamentale con la relazione (2.7)

$$\mathbf{s}_f = \mathbf{T}^T \mathbf{s}_\ell$$

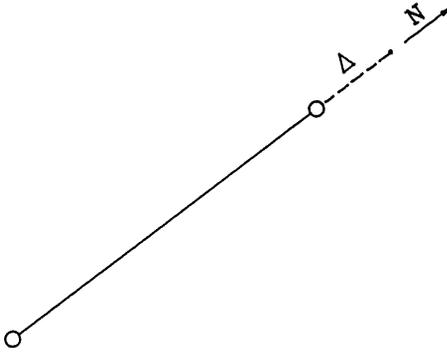
e la determinazione delle matrici di rigidezza nel riferimento locale e globale mediante le (2.15) e (2.19).

6.3. Asta incernierata ai due estremi (pendolo)

Il modello di asta pendolare, cioè con cerniere all'estremità, non è quasi mai utilizzato nel caso di strutture in cemento armato. L'unica sua possibile applicazione si ritrova nello schematizzare eventuali pannelli murari collaboranti con la struttura vera e propria. Esso è invece molto utilizzato per le travature reticolari in acciaio, nelle quali anche in presenza di nodi incastro le sollecitazioni estensionali sono nettamente prevalenti su quelle flessionali.

Analogamente a quanto indicato per il caso precedente, se in una struttura sono presenti alcune aste incernierate all'estremità è preferibile non aumentare il numero delle incognite ed esaminare esplicitamente il modello

di asta pendolo. Essendo impossibile applicare ad essa coppie di estremità, le azioni fondamentali si riducono alla sola forza assiale N e le componenti di movimento alla variazione di lunghezza Δ (fig.2.14).



$$\mathbf{S}_f = \begin{bmatrix} N \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{s}_f = \begin{bmatrix} \Delta \end{bmatrix}$$

Fig. 2.14 — Asta incernierata agli estremi (pendolo): insieme fondamentale di azioni e componenti di movimento

La matrice di rigidezza fondamentale è quindi

$$\mathbf{k}_f = \begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Le azioni di estremità possono essere anche in questo caso descritte mediante le componenti nel riferimento locale \mathbf{S}_ℓ , che sono ancora legate ad \mathbf{S}_f dalla relazione (2.3), nella quale è ora

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

cioè coincide con la terza colonna della matrice di trasformazione dell'asta priva di cerniere.

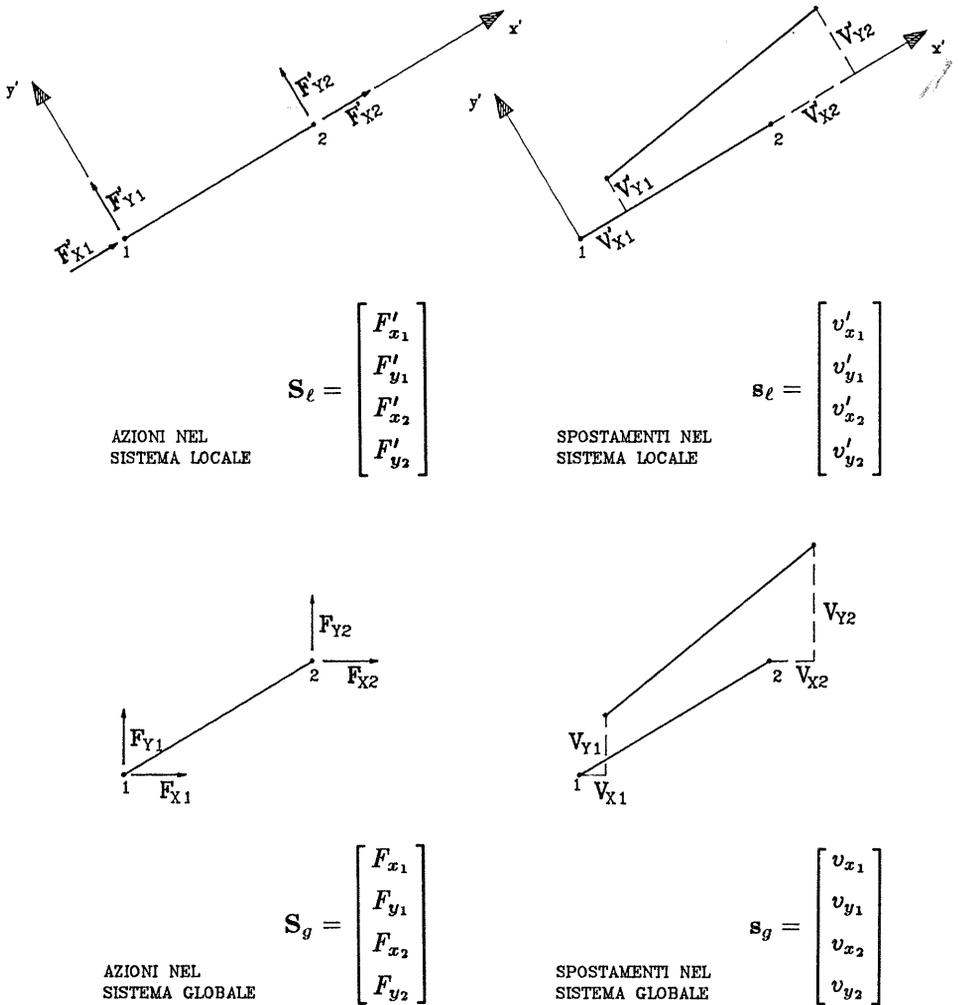


Fig. 2.15 — Azioni e componenti di movimento nei sistemi di riferimento locale e globale per insiemi di aste pendolari

Le matrici di rigidezza nel riferimento locale e globale vengono ancora ottenute mediante le (2.15) e (2.19). È facile constatare che esse coincidono con quelle che si avrebbero per la stessa asta, priva di cerniere, se si considera nullo il momento d'inerzia della sua sezione.

Una considerazione a parte richiede il caso di strutture costituite da un insieme di aste tutte pendolari, come ad esempio le travature reticolari.

L'impostazione generale, che considera tre azioni e tre componenti di movimento per ciascun estremo delle aste è ancora valida. Occorre però notare che in ogni nodo convergono solo aste incernierate, che non ne impediscono la rotazione. Questa deve pertanto essere impedita imponendo a ciascun nodo un vincolo esterno.

Un'alternativa molto diffusa consiste nell'eliminare direttamente dall'insieme di azioni locali e globali le coppie di estremità e dall'insieme di componenti di movimento le rotazioni (fig.2.15). In tal caso la matrice di trasformazione è

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

e quella di rotazione

$$\mathbf{L}_d = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

6.4. Trave su suolo elastico (alla Winkler)

Col termine trave su suolo elastico si indica, come noto, un'asta collegata in maniera continua ad un mezzo elastico che esplica su essa, nel caso di contatto liscio, azioni ortogonali all'asse, dipendenti dalle componenti di spostamento in tale direzione. In particolare è molto utilizzato il modello di Winkler, che schematizza il suolo come un insieme di molle indipendenti che esercitano in ciascun punto dell'asta un'azione legata esclusivamente allo spostamento del punto e proporzionale ad esso. Il suolo elastico è in tal caso definito in maniera completa mediante un unico parametro c , detto costante di sottofondo, che rappresenta il rapporto tra la pressione mutuamente esercitata tra trave e letto di molle ed il corrispondente spostamento.

Il modello di trave su suolo alla Winkler è stato il primo, e per lungo tempo l'unico, utilizzato per il calcolo di travi di fondazione. I notevoli

sviluppi teorici avutisi nel campo della geotecnica, uniti alla possibilità di ricorrere agli elaboratori elettronici per gli sviluppi numerici, hanno reso disponibili altri modelli, da quello di semispazio elastico o di strato elastico di dimensioni finite ai più complessi modelli elastoplastici. A differenza di quello di Winkler, tutti questi modelli prevedono un effetto mutuo tra punti distinti della trave, perché allo spostamento di un punto della superficie di contatto tra trave e suolo concorrono non solo i carichi ad esso direttamente applicati, ma anche quelli agenti su altre aree del piano.

La disponibilità di tanti nuovi modelli non ha comunque annullato la possibilità d'uso di quello di Winkler. Esso fornisce infatti risultati attendibili nel caso di travi di fondazione relativamente flessibili, ma anche per travi relativamente rigide poste su banchi di terreno di spessore ridotto. Inoltre, esso consente di schematizzare adeguatamente anche altri elementi strutturali diversi dalle fondazioni. Si pensi, ad esempio, al caso del travetto di ripartizione di un solaio, per il quale il letto di molle è costituito dai travetti stessi del solaio che esercitano effettivamente un'azione proporzionale al loro abbassamento; oppure al caso di serbatoi o silos cilindrici, nei quali il vincolo elastico è fornito dalle fibre anulari che si oppongono agli spostamenti delle fibre longitudinali mediante la loro rigidezza estensionale.

Ai fini dell'approccio matriciale, nell'analisi di strutture discretizzate mediante elementi finiti, il modello di Winkler presenta infine un grande vantaggio. Un punto fondamentale di tale approccio è il fatto che sollecitazioni e deformazioni di un'asta dipendono esclusivamente dalle componenti di movimento e dalle azioni dei punti di estremità e dai carichi su essa applicati. Considerare il suolo elastico come costituito da molle tra loro indipendenti rende possibile correlare direttamente l'azione del suolo alla deformazione della trave, ottenendo quindi, come verrà tra poco mostrato, una matrice di rigidezza della trave su suolo alla Winkler, cioè dell'intero complesso trave-suolo. Negli altri modelli citati, l'azione del suolo dipende invece anche dalla deformazione delle altre aste poste a contatto con esso. Occorre quindi considerare le aste separatamente dal suolo ed anzi suddividerle in un numero elevato di elementi per imporre la congruenza asta-suolo in un numero adeguato di punti, aumentando quindi notevolmente il numero di incognite e la complessità del problema.

Nell'esaminare il complesso costituito da una trave e dal suolo elastico alla Winkler, occorre riesaminare brevemente quanto scritto a proposito di azioni e componenti di movimento di estremità. A differenza di quanto accade per un'asta libera nel piano, nel caso in esame è possibile assegnare

valori completamente arbitrari alle quattro azioni di estremità F'_{y1} , M'_{z1} , F'_{y2} , M'_{z2} . L'equilibrio dell'asta è infatti garantito dalle azioni esercitate sulla trave deformata dal terreno ad essa solidale. È invece possibile assegnare solo una azione assiale, perché le molle elastiche non esplicano alcuna forza in tale direzione. L'insieme fondamentale di azioni è quindi costituito dalle cinque componenti mostrate col loro segno positivo nella figura 2.16. In maniera duale, lo stato deformativo dell'asta è influenzato da rotazioni e spostamenti degli estremi ortogonali all'asse, ma non da un moto rigido in direzione dell'asse. Le cinque componenti di movimento fondamentali sono mostrate nella figura 2.17.

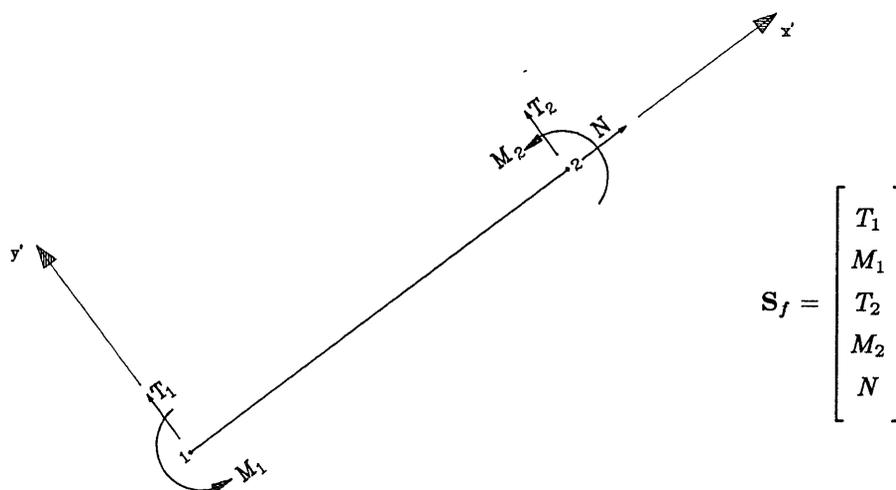


Fig. 2.16 — Trave su suolo elastico alla Winkler: insieme fondamentale di azioni

La relazione tra l'insieme fondamentale di azioni e di componenti di movimento deve essere ricavata dalle equazioni differenziali (2.9) e (2.10). Dalle prime si ottiene come sempre

$$N = \frac{EA}{\ell} \Delta$$

Nelle seconde, in assenza di carichi esterni il carico per unità di lunghezza q è dovuto esclusivamente al suolo; esso è proporzionale allo spostamento v ed ha verso opposto ad esso, e vale quindi

$$q = -c b v$$

avendo indicato con b la larghezza della trave a contatto col suolo.

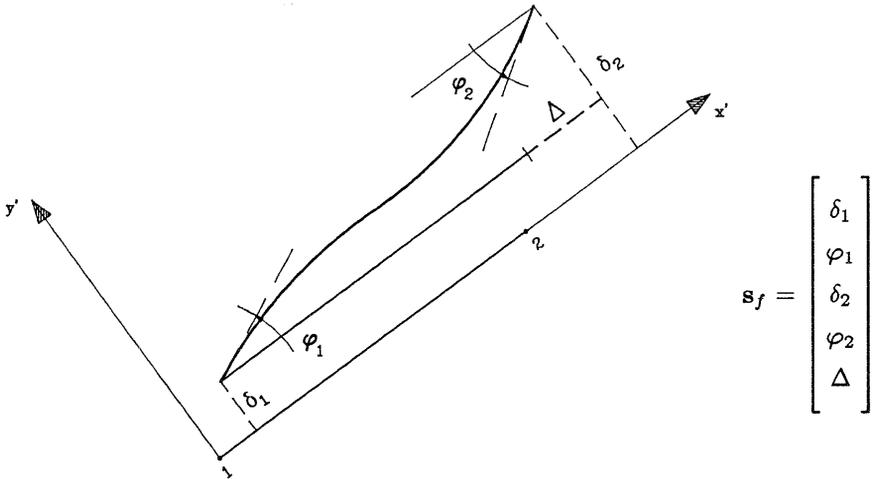


Fig. 2.17 — Trave su suolo elastico alla Winkler:
insieme fondamentale di componenti di movimento

L'equazione (2.11) della linea elastica, che sintetizza le (2.10), diventa pertanto, trascurando la deformazione da taglio

$$\frac{d^4 v}{dx^4} + \frac{cb}{EI} v = 0$$

ovvero

$$\frac{d^4 v}{dx^4} + 4\lambda^4 v = 0$$

avendo posto

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{cb}{4EI}} \quad (2.31)$$

Una soluzione generale di questa equazione differenziale può scriversi nella forma

$$v(x) = c_1 e^{\lambda x} \sin \lambda x + c_2 e^{\lambda x} \cos \lambda x + c_3 e^{-\lambda x} \sin \lambda x + c_4 e^{-\lambda x} \cos \lambda x$$

Da essa si ricavano le espressioni della rotazione e delle caratteristiche

di sollecitazione

$$\begin{aligned}
 \varphi(x) &= \frac{dv}{dx} = c_1 \lambda e^{\lambda x} (\sin \lambda x + \cos \lambda x) + \\
 &\quad + c_2 \lambda e^{\lambda x} (-\sin \lambda x + \cos \lambda x) + \\
 &\quad + c_3 \lambda e^{-\lambda x} (-\sin \lambda x + \cos \lambda x) + \\
 &\quad + c_4 \lambda e^{-\lambda x} (-\sin \lambda x - \cos \lambda x) \\
 M(x) &= EI \frac{d\varphi}{dx} = 2EI\lambda^2 \left[c_1 e^{\lambda x} \cos \lambda x - c_2 e^{\lambda x} \sin \lambda x + \right. \\
 &\quad \left. - c_3 e^{-\lambda x} \cos \lambda x + c_4 e^{-\lambda x} \sin \lambda x \right] \quad (2.32) \\
 T(x) &= \frac{dM}{dx} = 2EI\lambda^2 \left[c_1 \lambda e^{\lambda x} (-\sin \lambda x + \cos \lambda x) + \right. \\
 &\quad + c_2 \lambda e^{\lambda x} (-\sin \lambda x - \cos \lambda x) + \\
 &\quad + c_3 \lambda e^{-\lambda x} (\sin \lambda x + \cos \lambda x) + \\
 &\quad \left. + c_4 \lambda e^{-\lambda x} (-\sin \lambda x + \cos \lambda x) \right]
 \end{aligned}$$

Il valore delle quattro costanti c_1, c_2, c_3, c_4 può essere determinato imponendo le condizioni al contorno

$$\begin{aligned}
 v(0) &= \delta_1 & v(\ell) &= \delta_2 \\
 \varphi(0) &= \varphi_1 & \varphi(\ell) &= \varphi_2
 \end{aligned}$$

Da esse, ponendo per chiarezza di scrittura

$$\begin{aligned}
 s' &= e^{\lambda \ell} \sin \lambda \ell & s'' &= e^{-\lambda \ell} \sin \lambda \ell \\
 c' &= e^{\lambda \ell} \cos \lambda \ell & c'' &= e^{-\lambda \ell} \cos \lambda \ell
 \end{aligned}$$

si ottiene infatti il sistema di quattro equazioni

$$\begin{aligned}
 c_2 + c_4 &= \delta_1 \\
 \lambda c_1 + \lambda c_2 + \lambda c_3 - \lambda c_4 &= \varphi_1 \\
 s' c_1 + c' c_2 + s'' c_3 + c'' c_4 &= \delta_2 \\
 \lambda(s' + c') c_1 + \lambda(-s' + c') c_2 + \lambda(-s'' + c'') c_3 + \lambda(-s'' - c'') c_4 &= \varphi_2
 \end{aligned}$$

che in termini matriciali può essere scritto

$$\mathbf{A} \mathbf{C} = \mathbf{s}'_f$$

essendo \mathbf{A} la matrice dei coefficienti, \mathbf{C} l'insieme di costanti incognite ed \mathbf{s}'_f il sottoinsieme di \mathbf{s}_f racchiudente spostamenti ortogonali all'asse e rotazioni

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \lambda & \lambda & \lambda & -\lambda \\ s' & c' & s'' & c'' \\ \lambda(s' + c') & \lambda(-s' + c') & \lambda(-s'' + c'') & \lambda(-s'' - c'') \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{s}'_f = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \varphi_1 \\ \delta_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}$$

La risoluzione del sistema per via analitica presenta una certa complessità e non è idonea a fornire formulazioni di immediata applicabilità. La soluzione numerica può però essere facilmente ottenuta mediante l'inversione della matrice \mathbf{A}

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{s}'_f \quad (2.34)$$

Si può così ricavare il valore delle azioni T_1, M_1, T_2, M_2

$$\begin{aligned} T_1 = T(0) &= 2EI\lambda^2 [\lambda c_1 - \lambda c_2 + \lambda c_3 + \lambda c_4] \\ M_1 = -M(0) &= 2EI\lambda^2 [-c_1 + c_3] \\ T_2 = -T(\ell) &= 2EI\lambda^2 [\lambda(s' - c')c_1 + \lambda(s' + c')c_2 + \\ &\quad + \lambda(-s'' - c'')c_3 + \lambda(s'' - c'')c_4] \\ M_2 = M(\ell) &= 2EI\lambda^2 [c'c_1 - s'c_2 - c''c_3 + s''c_4] \end{aligned}$$

Indicando con \mathbf{S}'_f il sottoinsieme di \mathbf{S}_f contenente le azioni innanzi elencate, si può scrivere in termini matriciali

$$\mathbf{S}'_f = \mathbf{B} \mathbf{C} \quad (2.35)$$

con

$$\mathbf{B} = 2EI\lambda^2 \begin{bmatrix} \lambda & -\lambda & \lambda & \lambda \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ \lambda(s' - c') & \lambda(s' + c') & \lambda(-s'' - c'') & \lambda(s'' - c'') \\ c' & -s' & -c'' & s'' \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Dalle (2.34) e (2.35) si ricava la relazione tra i due sottoinsiemi di azioni e componenti di movimento

$$\mathbf{S}'_f = \mathbf{k}'_f \mathbf{s}'_f$$

avendo posto

$$\mathbf{k}'_f = \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1} \quad (2.37)$$

La matrice \mathbf{k}'_f così ottenuta è costituita da 4 righe e 4 colonne ed è una sottomatrice della matrice di rigidezza fondamentale \mathbf{k}_f della trave su suolo elastico

$$\mathbf{k}_f = \begin{bmatrix} & & & & 0 \\ & & & & 0 \\ & & \mathbf{k}'_f & & 0 \\ & & & & 0 \\ & & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{\ell} \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Azioni e componenti di movimento nel riferimento locale possono essere ottenuti dagli insiemi fondamentali mediante le relazioni (2.3) e (2.7). Si può con facilità controllare che nel caso in esame la matrice di trasformazione \mathbf{T} è espressa mediante

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

La matrice di rigidezza nel sistema di riferimento locale può ancora essere valutata mediante la (2.15). Se si immagina di dividere la matrice \mathbf{k}'_f in 4 sottomatrici di 2 righe e 2 colonne,

$$\mathbf{k}'_f = \begin{bmatrix} \mathbf{k}'_{f_{11}} & \mathbf{k}'_{f_{12}} \\ \mathbf{k}'_{f_{21}} & \mathbf{k}'_{f_{22}} \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

si può constatare che la (2.15) in questo caso provoca come unico effetto il duplicamento dei termini EA/ℓ ed un posizionamento diverso delle 4 sottomatrici ora definite. Si ha cioè

$$\mathbf{k}_\ell = \begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\mathbf{k}'_{f_{11}}} & 0 & 0 & \boxed{\mathbf{k}'_{f_{12}}} \\ 0 & 0 & \boxed{\mathbf{k}'_{f_{21}}} & 0 & 0 & \boxed{\mathbf{k}'_{f_{22}}} \\ -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\mathbf{k}'_{f_{21}}} & 0 & 0 & \boxed{\mathbf{k}'_{f_{22}}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

La matrice di rigidezza nel sistema globale si può infine ottenere, a partire da quella nel riferimento locale, mediante la (2.18).

6.5. Asta con tratti rigidi all'estremità

Il modello di telaio costituito da aste monodimensionali convergenti in punti nodali approssima correttamente la realtà quando le aste presentano effettivamente una sezione trasversale molto piccola rispetto alla loro lunghezza. Ciò non si verifica nel caso di telai-pareti (walled frames) o di pareti di taglio (shear walls), molto comuni per edifici alti. In tali situazioni la zona nodale non è più puntiforme ed in essa non è valido il modello di trave alla De Saint Venant.

Uno schema limite frequentemente utilizzato, valido quando gli assi delle aste convergono in un unico punto, considera presente a ciascun estremo di esse un tratto infinitamente rigido, corrispondente alla parte di asta contenuta nel nodo. Quando invece gli assi delle aste non convergono in un unico punto è più corretto, anche se meno utilizzato, il modello di nodo rigido non puntiforme, esaminato nel paragrafo successivo.

Si consideri un'asta di lunghezza ℓ , con tratti rigidi di estremità aventi lunghezza $s\ell$ e $t\ell$ (fig.2.18). Per differenziare le grandezze relative al tratto centrale, deformabile, da analoghe entità relative all'intera asta si indicano nel seguito le prime con un doppio apice. In particolare, si indica con ℓ'' la lunghezza di tale tratto. Essa vale

$$\ell'' = (1 - s - t)\ell = \frac{\ell}{c} \tag{2.42}$$

avendo posto

$$c = \frac{1}{1 - s - t} \tag{2.43}$$

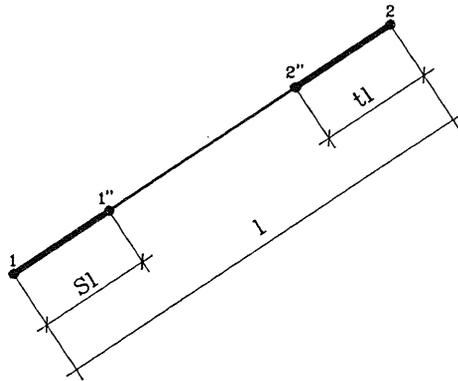


Fig. 2.18 — Asta con tratti rigidi di estremità

In figura 2.19 è mostrato l'insieme fondamentale di azioni S_f e l'analogo insieme di azioni S_f'' mutuamente trasmesse agli estremi del tratto deformabile. Ricordando la relazione tra taglio e momento nel tratto deformabile

$$T_1'' = T_2'' = \frac{M_1'' + M_2''}{\ell''}$$

per l'equilibrio del tratto rigido si ha

$$\begin{aligned} M_1 &= M_1'' + T_1'' s \ell = (1 + c s) M_1'' + c s M_2'' \\ M_2 &= M_2'' + T_2'' t \ell = c t M_1'' + (1 + c t) M_2'' \\ N &= N'' \end{aligned}$$

In termini matriciali queste relazioni sono espresse da

$$\mathbf{S}_f = \mathbf{C} \mathbf{S}_f'' \quad (2.44)$$

indicando con \mathbf{C} la matrice che consente il passaggio tra i due insiemi

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 + c s & c s & 0 \\ c t & 1 + c t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

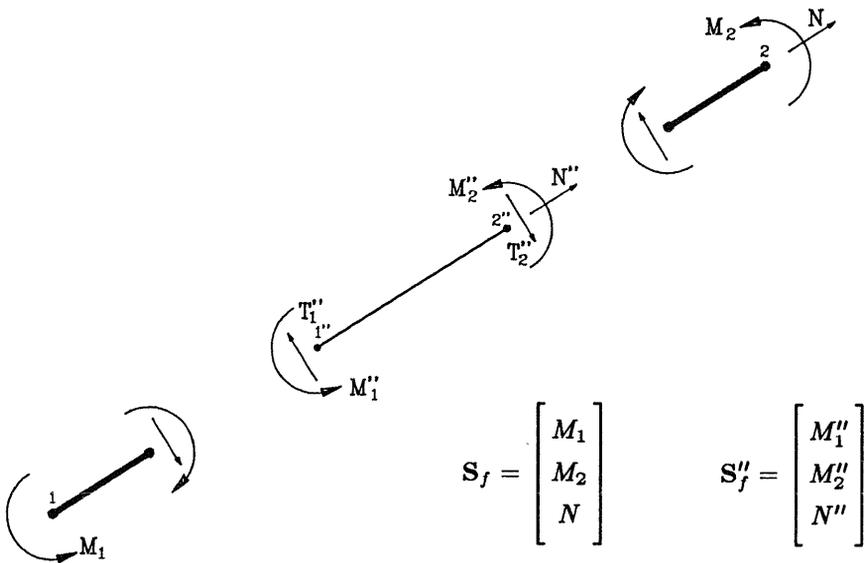


Fig. 2.19 — Azioni fondamentali all'estremità dell'asta e del tratto deformabile

Nella figura 2.20 sono mostrati l'insieme fondamentale s_f delle componenti di movimento degli estremi dell'asta e l'insieme s_f'' che racchiude i corrispondenti movimenti degli estremi del tratto deformabile.

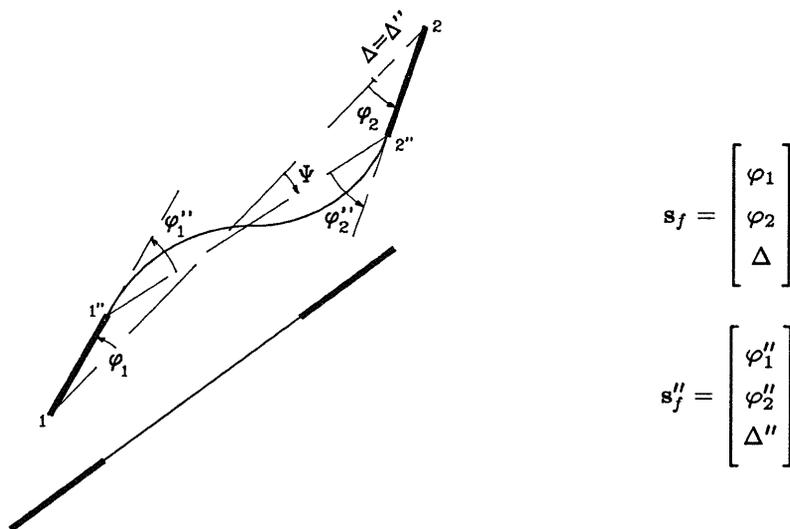


Fig. 2.20 — Componenti di movimento fondamentale degli estremi dell'asta e del tratto deformabile

Essendo i tratti di estremità infinitamente rigidi, i punti $1''$ e $2''$ subiscono uno spostamento in direzione ortogonale all'asse rispettivamente pari a $\varphi_1 s l$ e $\varphi_2 t l$. L'asse del tratto deformabile è quindi ruotato, rispetto all'asse dell'asta, dell'angolo ψ

$$\psi = c s \varphi_1 + c t \varphi_2$$

Le componenti di movimento degli estremi del tratto deformabile valgono pertanto

$$\begin{aligned} \varphi_1'' &= \varphi_1 + \psi = (1 + c s) \varphi_1 + c t \varphi_2 \\ \varphi_2'' &= \varphi_2 + \psi = c s \varphi_1 + (1 + c t) \varphi_2 \\ \Delta'' &= \Delta \end{aligned}$$

In termini matriciali, queste relazioni sono espresse da

$$s_f'' = C^T s_f \tag{2.46}$$

mediante la trasposta della matrice \mathbf{C} già definita.

Il tratto centrale, deformabile, è a tutti gli effetti una trave alla De Saint Venant. Per esso quindi la relazione tra azioni e componenti di movimento fondamentali di estremità è espressa mediante la (2.12), che in questo caso si può scrivere

$$\mathbf{S}_f'' = \mathbf{k}_f'' \mathbf{s}_f'' \quad (2.47)$$

Utilizzando le relazioni (2.44), (2.46) e (2.47) si ottiene

$$\mathbf{S}_f = \mathbf{C} \mathbf{k}_f'' \mathbf{C}^T \mathbf{s}_f$$

e quindi l'espressione della matrice di rigidezza per l'asta con tratti rigidi di estremità

$$\mathbf{k}_f = \mathbf{C} \mathbf{k}_f'' \mathbf{C}^T \quad (2.48)$$

Se per il tratto centrale si trascura l'effetto della deformazione dovuta al taglio, la formulazione generale qui riportata può essere esplicitata; si ha infatti

$$\mathbf{k}_f'' = \begin{bmatrix} 4 \frac{EI}{\ell''} & 2 \frac{EI}{\ell''} & 0 \\ 2 \frac{EI}{\ell''} & 4 \frac{EI}{\ell''} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{\ell''} \end{bmatrix}$$

e si ottiene quindi

$$\mathbf{k}_f = \begin{bmatrix} 4 \frac{EI}{\ell} a_1 & 2 \frac{EI}{\ell} b & 0 \\ 2 \frac{EI}{\ell} b & 4 \frac{EI}{\ell} a_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{\ell} c \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} \text{con} \quad a_1 &= c[(1-t)^2 + s(1-t) + s^2] \\ a_2 &= c[(1-s)^2 + t(1-s) + t^2] \\ b &= c[1 + s + t - 2(s^2 - st + t^2)] \end{aligned} \quad (2.50)$$

Nelle applicazioni concrete, la presenza di tratti rigidi è quasi sempre accoppiata ad aste con sezione trasversale non trascurabile rispetto alla lunghezza. In tal caso è più corretto tener conto della deformabilità

tagliante ed utilizzare per la matrice di rigidezza del tratto centrale l'espressione (2.23). La sostituzione diretta di essa nell'espressione (2.48) non porta a formulazioni di agevole scrittura ed è quindi preferibile operare effettuando per via numerica il prodotto matriciale.

Come per tutti gli altri casi esposti, le matrici di rigidezza nel sistema di riferimento locale e globale possono essere ricavate da quella fondamentale utilizzando le (2.15) e (2.19).

6.6. Nodo rigido non puntiforme (asta con tratti rigidi non coassiali)

Nelle applicazioni professionali, in particolare quando si progettano edifici in cemento armato, accade frequentemente che gli assi delle aste convergenti in un nodo non si incontrino in un unico punto. Si pensi ad esempio alla presenza contemporanea di travi emergenti e a spessore, oppure a pilastri che risegano in maniera non simmetrica. Quando l'eccentricità degli assi assume entità rilevante, non più trascurabile, occorre superare il concetto di nodo puntiforme e riguardare la zona nodale come una zona indeformabile di dimensioni finite. Non esistono criteri assoluti per determinare l'ampiezza di essa; un minimo, costituito dall'area delimitata dagli assi eccentrici (fig.2.21a), può essere adottato quando si vuole tenere conto esclusivamente dell'effetto del disassamento; un valore maggiore (fig.2.21b) può essere giustificato dal desiderio di valutare anche l'irrigidimento costituito dalla sovrapposizione delle aste.

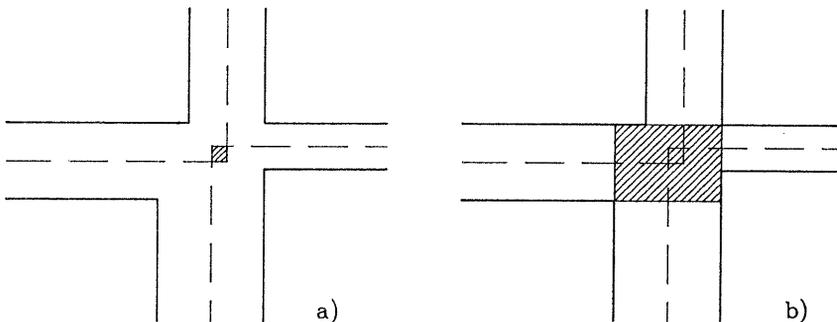


Fig. 2.21 — Nodo rigido non puntiforme
a) dimensioni minime
b) dimensioni massime

Il modo più semplice per tener conto di nodi rigidi non puntiformi con-

siste nell'assumere come nodo un punto (arbitrario) dell'area rigida e considerare che ciascuna asta in esso confluyente sia dotata all'estremità di un tratto rigido che va dal punto nodale all'intersezione tra area rigida e asse dell'asta (fig.2.22). Si effettua in tal modo una generalizzazione del caso, già descritto, di asta con tratti rigidi all'estremità. La differenza sostanziale consiste nel fatto che ora l'asse del tratto deformabile non è più coincidente con la congiungente gli estremi dell'asta.

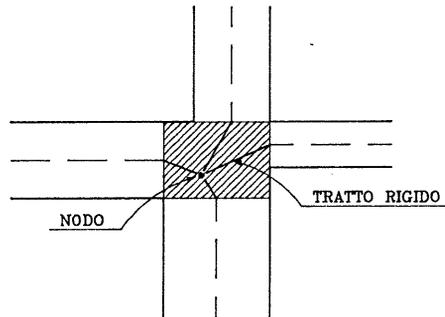


Fig. 2.22 — Schematizzazione del nodo e delle aste

Si consideri un'asta dotata ad entrambe le estremità di tratti rigidi non coassiali (fig.2.23).

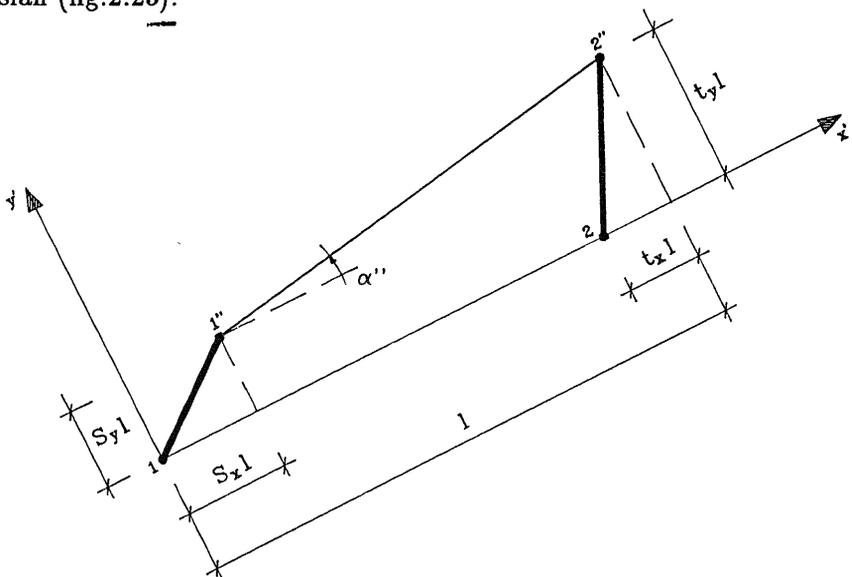


Fig. 2.23 — Asta con tratti rigidi non coassiali

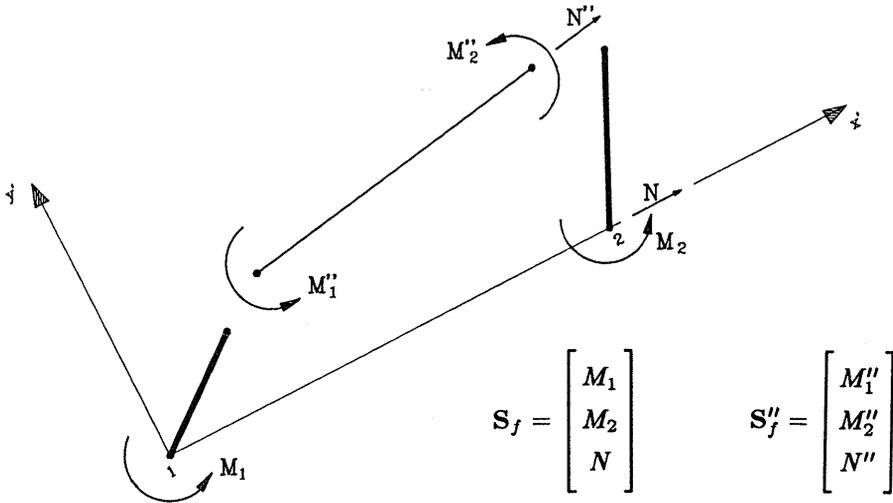


Fig. 2.24 — Azioni fondamentali all'estremità dell'asta e del tratto deformabile

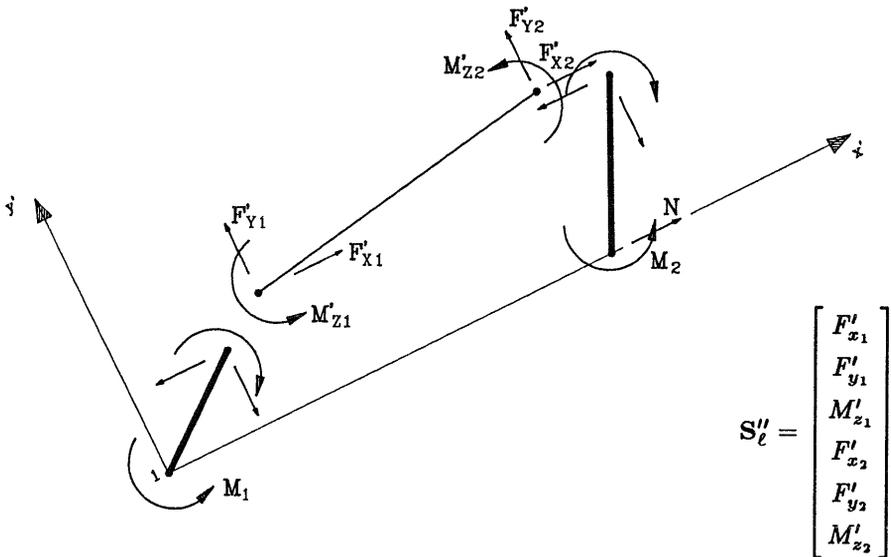


Fig. 2.25 — Componenti rispetto al sistema locale delle azioni trasmesse agli estremi del tratto deformabile

Si indica con ℓ la distanza tra i nodi (1-2) ed ℓ'' la lunghezza del tratto deformabile (1''-2''). Si indica inoltre con $s_x \ell$ ed $s_y \ell$ le componenti del tratto rigido del primo estremo rispetto agli assi locali $x'y'$, $t_x \ell$ e $t_y \ell$ le analoghe componenti del tratto rigido del secondo estremo, considerate positive se di verso concorde con tali assi. Con queste posizioni, la lunghezza del tratto deformabile vale

$$\ell'' = \ell \sqrt{(1 + t_x - s_x)^2 + (t_y - s_y)^2} = \frac{\ell}{c} \quad (2.51)$$

avendo posto

$$c = \frac{1}{\sqrt{(1 + t_x - s_x)^2 + (t_y - s_y)^2}} \quad (2.52)$$

Il tratto deformabile è inclinato, rispetto alla congiungente i nodi di estremità, di un angolo α'' , fornito da

$$\tan \alpha'' = \frac{t_y - s_y}{1 + t_x - s_x} \quad (2.53)$$

Nella figura 2.24 è mostrato l'insieme fondamentale di azioni S_f e l'analogo insieme di azioni S_f'' mutuamente trasmesso agli estremi del tratto deformabile.

Nella figura 2.25 è mostrato l'insieme S_ℓ'' equivalente ad S_f'' , che contiene le componenti di tali azioni rispetto al riferimento locale $x'y'$. S_ℓ'' può essere ottenuta da S_f'' mediante una matrice di trasformazione T'' ed una di rotazione L_d'' , in maniera analoga a quanto mostrato nel paragrafo 2

$$S_\ell'' = L_d'' T'' S_f'' \quad (2.54)$$

Le matrici L_d'' e T'' sono ottenute dalle (2.2) e (2.4), inserendo in esse l'angolo α'' e la lunghezza ℓ'' .

Imponendo la condizione di equilibrio dei tratti rigidi di estremità, si ottiene una relazione tra gli insiemi S_f ed S_ℓ''

$$M_1 = -F'_{x1} s_y \ell + F'_{y1} s_x \ell + M'_{z1}$$

$$M_2 = -F'_{x2} t_y \ell + F'_{y2} t_x \ell + M'_{z2}$$

$$N = F'_{x2}$$

e quindi

$$\mathbf{S}_f = \mathbf{C}'' \mathbf{S}_\ell'' \quad (2.55)$$

con

$$\mathbf{C}'' = \begin{bmatrix} -s_y \ell & s_x \ell & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -t_y \ell & t_x \ell & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

Dalle (2.54) e (2.55) si ottiene infine

$$\mathbf{S}_f = \mathbf{C} \mathbf{S}_f'' \quad (2.57)$$

avendo posto

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}'' \mathbf{L}_d'' \mathbf{T}'' \quad (2.58)$$

Il suddetto prodotto matriciale può essere effettuato anche analiticamente ottenendo in tal modo

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

con

$$c_{11} = 1 + c(s_y \sin \alpha'' + s_x \cos \alpha'')$$

$$c_{12} = c(s_y \sin \alpha'' + s_x \cos \alpha'')$$

$$c_{13} = (s_y \cos \alpha'' - s_x \sin \alpha'') \ell$$

$$c_{21} = -c(t_y \sin \alpha'' + t_x \cos \alpha'')$$

$$c_{22} = 1 - c(t_y \sin \alpha'' + t_x \cos \alpha'')$$

$$c_{23} = -(t_y \cos \alpha'' - t_x \sin \alpha'') \ell$$

$$c_{31} = \frac{c \sin \alpha''}{\ell}$$

$$c_{32} = \frac{c \sin \alpha''}{\ell}$$

$$c_{33} = \cos \alpha''$$

La relazione (2.57) coincide formalmente con la (2.44) ottenuta per tratti rigidi coassiali. L'espressione (2.45) della matrice \mathbf{C} si può ottenere come caso particolare della (2.59) ponendo

$$s_y = t_y = 0 \quad s_x = s \quad t_x = -t$$

e quindi

$$\sin \alpha'' = 0 \quad \cos \alpha'' = 1$$

In maniera perfettamente analoga si possono definire le componenti di movimento fondamentali agli estremi dell'asta, s_f , e del tratto deformabile, s_f'' . Si può facilmente dimostrare, anche in virtù del principio di dualità dimostrato nel paragrafo 3, che esse sono legate dalla relazione

$$s_f'' = \mathbf{C}^T s_f \quad (2.60)$$

Azioni e componenti di movimento agli estremi del tratto deformabile sono sempre legati tra loro mediante la matrice di rigidità di tale tratto \mathbf{k}_f'' . La matrice di rigidità dell'asta \mathbf{k}_f è pertanto fornita ancora formalmente dalla (2.48), ricavata per tratti rigidi coassiali, inserendo in essa l'espressione qui ricavata per la matrice \mathbf{C} .

7. Azioni di incastro perfetto

Nei paragrafi precedenti si sono esaminate le relazioni esistenti tra azioni e componenti di movimento di estremità in un'asta non soggetta a carichi nei punti interni (cioè diversi da quelli di estremità). Per completare lo studio dell'asta occorre però valutare anche le azioni che insorgono agli estremi per effetto di carichi o distorsioni termiche applicate all'interno dell'asta, quando il movimento dei suoi estremi è impedito. Per evidenziare questo vincolo, tali azioni sono dette *azioni di incastro perfetto*.

Così come indicato in generale per le azioni di estremità, anche quelle di incastro perfetto possono essere descritte mediante le sei componenti rispetto al sistema di riferimento globale, mostrate col loro verso positivo nella figura 2.26 e racchiuse nel vettore \mathbf{S}_g .

Per determinarne il valore è però sempre più comodo operare nel sistema di riferimento locale e descriverle quindi mediante le componenti mostrate in figura 2.27 e racchiuse nel vettore \mathbf{S}_ℓ . La trasformazione dall'uno all'altro insieme è possibile mediante la relazione (2.1) e la sua inversa.

Le azioni di incastro perfetto possono in generale essere calcolate mediante le equazioni differenziali (2.9) e (2.10), imponendo come condizione ai limiti l'annullarsi di spostamento e rotazione nei punti di estremità. La loro determinazione è ancora più immediata nei casi in cui sono disponibili relazioni algebriche tra carichi e deformazioni per schemi di trave semplicemente appoggiata. Poiché questo modo di procedere è fin troppo noto, si ritiene inutile approfondire in questo testo i passaggi necessari, concettualmente semplici ma in alcuni casi analiticamente complessi. Nei paragrafi

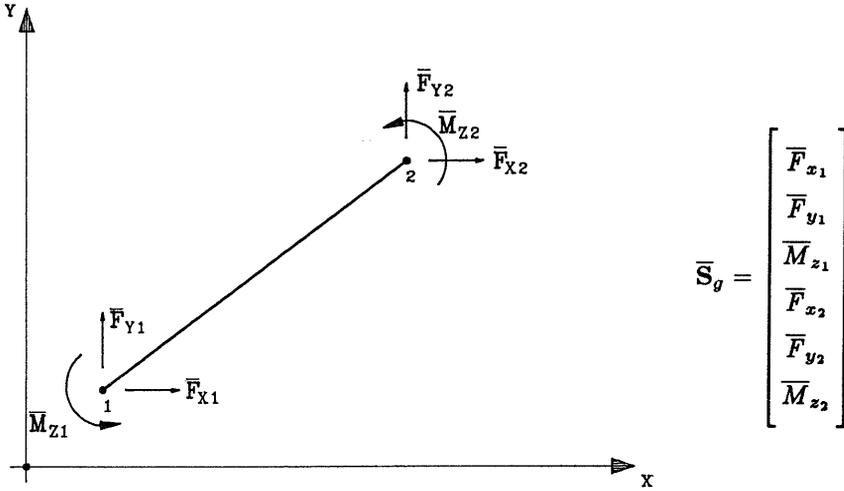


Fig. 2.26 — Azioni di incastro perfetto nel riferimento globale

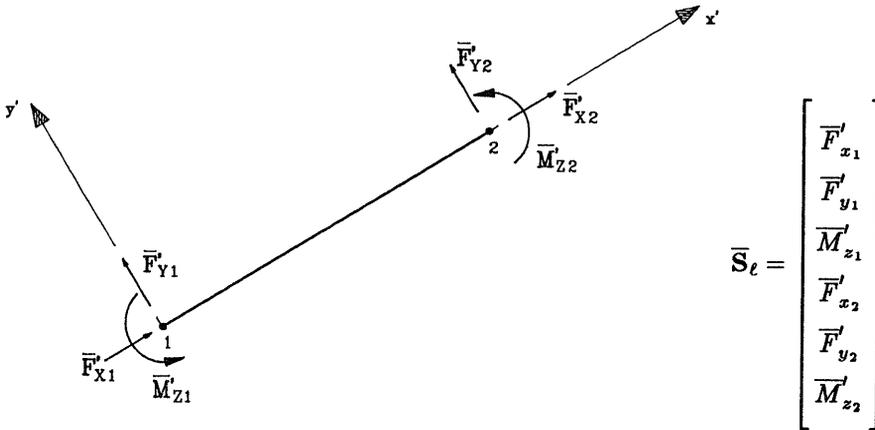


Fig. 2.27 — Azioni di incastro perfetto nel riferimento locale

successivi sono quindi riportate direttamente le formulazioni finali per numerosi schemi di carico, relative al caso di asta con sezione costante e per la quale si trascura l'aliquota di deformazione dovuta al taglio. Per i casi particolari di aste mostrati in precedenza sono riportate solo le espressioni relative ad un carico uniforme ortogonale all'asse; per carichi agenti nella direzione dell'asse valgono ancora le formulazioni dell'asta a sezione costante.

7.1. Carichi uniformemente distribuiti su tutta l'asta

Si prende in considerazione un carico uniformemente distribuito q agente su tutta l'asta, in direzione ortogonale all'asse, ed un carico n agente in direzione dell'asse. I versi positivi di tali carichi, concordi con quelli del sistema locale di riferimento, sono mostrati nella figura 2.28.

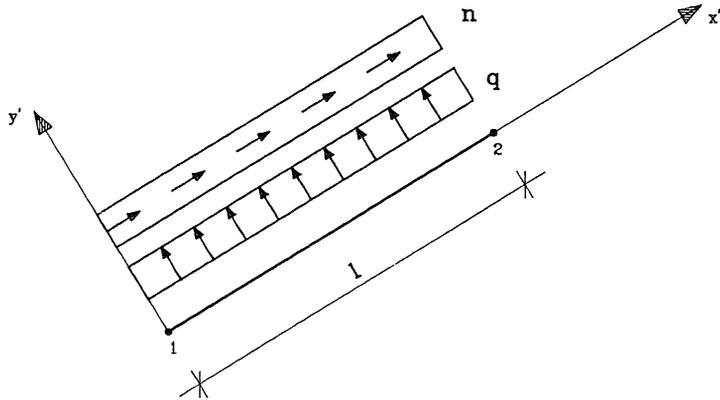


Fig. 2.28 — Carichi uniformemente distribuiti su tutta l'asta

Il vettore che racchiude le componenti delle azioni di incastro perfetto nel riferimento locale è fornito dalle ben note espressioni

$$\bar{S}_\ell = \begin{bmatrix} 0 \\ \ell \\ -\frac{\ell^2}{2} \\ \frac{\ell^2}{12} \\ 0 \\ \ell \\ -\frac{\ell^2}{2} \\ \frac{\ell^2}{12} \end{bmatrix} q + \begin{bmatrix} -\frac{\ell}{2} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{\ell}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} n \quad (2.61)$$

7.2. Carichi concentrati in un punto dell'asta

Si prendono in considerazione una forza di componenti F_x ed F_y rispetto

al sistema locale ed una coppia M_z , applicate in un punto dell'asta posto a distanza x_0 dal primo estremo (fig.2.29).

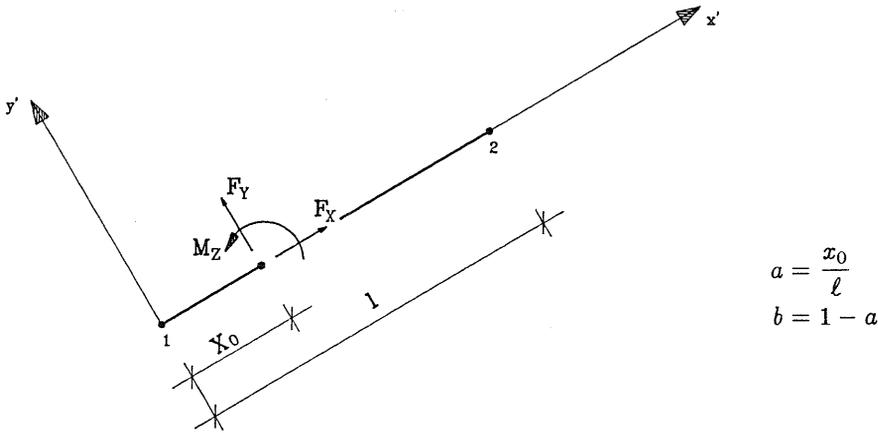


Fig. 2.29 — Carichi concentrati in un punto dell'asta

Le azioni di incastro perfetto sono funzione dei carichi, della lunghezza dell'asta e delle grandezze adimensionali a e b che individuano il punto di applicazione dei carichi e sono fornite dalle espressioni

$$\bar{S}_\ell = \begin{bmatrix} 0 \\ -b^2(1+2a) \\ -ab^2\ell \\ 0 \\ -a^2(1+2b) \\ a^2b\ell \end{bmatrix} F_x + \begin{bmatrix} -b \\ 0 \\ 0 \\ -a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F_y + \begin{bmatrix} 0 \\ 6\frac{ab}{\ell} \\ b(2a-b) \\ 0 \\ -6\frac{ab}{\ell} \\ a(2b-a) \end{bmatrix} M_z \quad (2.62)$$

7.3. Carichi distribuiti con andamento lineare su parte dell'asta

Si considera un carico distribuito agente in direzione ortogonale all'asse dell'asta, variabile linearmente dal valore q_1 al valore q_2 , ed applicato sulla parte di essa compresa tra le ascisse x_1 ed x_2 (fig.2.30). Per valutarne

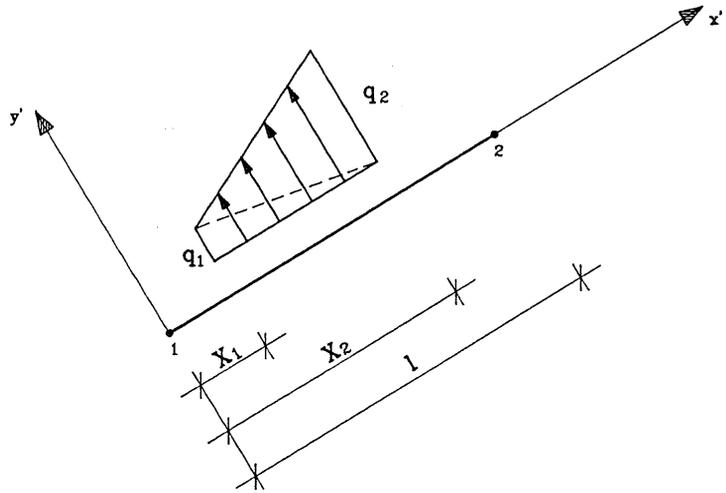


Fig. 2.30 — Carico linearmente distribuito su parte dell'asta

l'effetto, esso può essere considerato come somma di due carichi triangolari, il primo variabile da q_1 a 0, il secondo da 0 a q_2 .

Si definiscono le seguenti grandezze adimensionali, dipendenti dalla posizione e dall'ampiezza del tratto in cui è applicato il carico

$$\begin{aligned}
 r_1 &= \frac{3}{2} - \frac{x_1 + x_2/2}{\ell} & s_1 &= 3 - 2r_1 \\
 r_2 &= \frac{x_2 + x_1/2}{\ell} & s_2 &= 3 - 2r_2 \\
 t &= \frac{x_2 - x_1}{\ell}
 \end{aligned} \tag{2.63}$$

ed inoltre f_1, g_1, h_1 ed f_2, g_2, h_2 valutate rispettivamente in funzione di r_1, s_1 ed r_2, s_2 mediante le espressioni

$$\begin{aligned}
 f(r, s, t) &= \frac{t}{27} [40r^2s + t^2(2t - 30r + 15)] \\
 g(r, s, t) &= \frac{t}{18} [20rs^2 - t^2(2t - 30r + 30)] \\
 h(r, s, t) &= 3f - 2g
 \end{aligned} \tag{2.64}$$

Tutte queste grandezze assumono valore unitario quando il carico è applicato all'intera asta, cioè quando $x_1 = 0$ ed $x_2 = \ell$.

Le azioni di incastro perfetto nel riferimento locale sono quindi fornite da

$$\bar{S}_\ell = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{20r_1 t + h_1}{60} \ell \\ -\frac{f_1 \ell^2}{20} \\ 0 \\ -\frac{10s_1 t - h_1}{60} \ell \\ \frac{g_1 \ell^2}{30} \end{bmatrix} q_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{10s_2 t - h_2}{60} \ell \\ -\frac{g_2 \ell^2}{30} \\ 0 \\ -\frac{20r_2 t - h_2}{60} \ell \\ \frac{f_2 \ell^2}{20} \end{bmatrix} q_2 \quad (2.65)$$

7.4. Variazioni termiche

Si considera una variazione termica, applicata in maniera uguale lungo tutta l'asta, costituita da un'aliquota ΔT_u costante per tutti i punti della sezione ed un'aliquota ΔT_f variabile linearmente, a farfalla (fig.2.31).

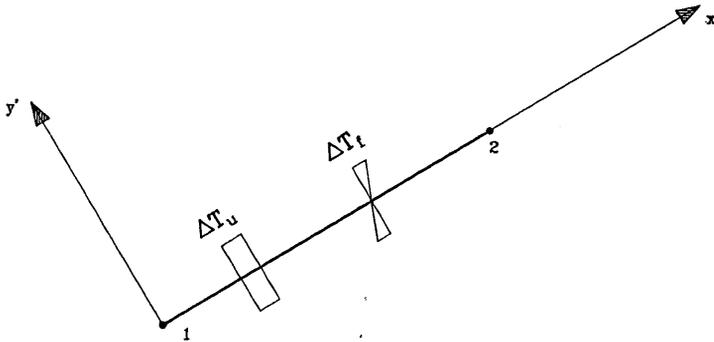


Fig. 2.31 — Variazioni termiche

La variazione termica uniforme è considerata positiva quando corrisponde ad un incremento di temperatura. La variazione a farfalla è positiva quando si ha un incremento di temperatura sull'estremo della sezione posto nel verso positivo dell'asse y' (cioè superiormente nella figura). L'effetto della variazione termica sull'asta incastrata dipende dal coefficiente di deformabilità termica α e dalle caratteristiche geometriche della sezione tra-

sversale dell'asta, espresse mediante l'altezza H , l'area A ed il momento d'inerzia I . Le azioni di incastro perfetto sono fornite da

$$\bar{\mathbf{S}}_e = \begin{bmatrix} EA\alpha \\ 0 \\ 0 \\ -EA\alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta T_u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{EI\alpha}{H} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{EI\alpha}{H} \end{bmatrix} \Delta T_f \quad (2.66)$$

7.5. Effetto della deformazione dovuta al taglio

Si prenda nuovamente in esame l'asta soggetta ad un carico q uniformemente distribuito, ortogonale all'asse. Per valutare le azioni di incastro perfetto tenendo conto anche della deformazione dovuta al taglio si può partire dallo schema di trave semplicemente appoggiata ed applicare ad esso due coppie tali da annullare la rotazione degli estremi. Per la simmetria geometrica e di carico, il taglio provocato da q ha un andamento lineare emisimmetrico. Le deformazioni da esso provocate nella parte destra dell'asta sono quindi uguali ed opposte a quelle provocate nella parte sinistra e non provocano rotazione degli estremi. Sempre per la simmetria, le coppie necessarie per la congruenza sono uguali ed opposte e non provocano taglio. Di conseguenza, le azioni di incastro perfetto sono, per questo caso come per qualunque altro schema di carico che rispetti la simmetria, identiche a quelle determinate trascurando la deformazione dovuta al taglio.

7.6. Asta con cerniere all'estremità

Per lo schema di asta a sezione costante con una cerniera al primo estremo, soggetta ad un carico uniformemente distribuito q ortogonale

all'asse, trascurando l'effetto della deformazione dovuta al taglio si ha

$$\bar{\mathbf{S}}_\ell = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{3}{8}\ell \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{5}{8}\ell \\ \frac{\ell^2}{8} \end{bmatrix} q \quad (2.67)$$

Se la cerniera è al secondo estremo si ha invece

$$\bar{\mathbf{S}}_\ell = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{5}{8}\ell \\ -\frac{\ell^2}{8} \\ 0 \\ -\frac{3}{8}\ell \\ 0 \end{bmatrix} q \quad (2.68)$$

Se entrambi gli estremi sono incernierati si ha infine

$$\bar{\mathbf{S}}_\ell = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\ell}{2} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{\ell}{2} \\ 0 \end{bmatrix} q \quad (2.69)$$

7.7. Trave su suolo elastico alla Winkler

Si prende in esame un'asta poggiata su un suolo alla Winkler, di costante elastica c . Si indica con b la larghezza della superficie di contatto col suolo. Se la trave è libera agli estremi, un carico q uniformemente distribuito ortogonale al suo asse provoca uno spostamento nella direzione di applicazione uguale in tutti i punti e pari a $\frac{q}{cb}$. Le azioni di incastro perfetto devono essere tali da annullare questo spostamento, cioè da provocare uno spostamento $-\frac{q}{cb}$. Possono essere quindi determinate mediante la matrice di rigidezza nel sistema locale, con

$$\bar{\mathbf{S}}_\ell = \mathbf{k}_\ell \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{cb} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{cb} \\ 0 \end{bmatrix} q \quad (2.70)$$

7.8. Asta con tratti rigidi

Si prende in esame l'asta con tratti rigidi coassiali di estremità, già mostrata nella figura 2.18. Con i simboli ivi indicati, e considerando agente un carico q uniformemente distribuito ortogonale all'asse, si ha

$$\bar{\mathbf{S}}_\ell = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\ell}{2}(1+s-t) \\ -\frac{\ell^2}{12}z_1 \\ 0 \\ -\frac{\ell}{2}(1-s+t) \\ \frac{\ell^2}{12}z_2 \end{bmatrix} q \quad (2.71)$$

con

$$\begin{aligned} z_1 &= (1 - s - t)^2 + 6s(1 - s - t) + 6s^2 \\ z_2 &= (1 - s - t)^2 + 6t(1 - s - t) + 6t^2 \end{aligned} \quad (2.72)$$

8. Relazione tra carichi, azioni e componenti di movimento di estremità

Nei paragrafi precedenti si è mostrata la relazione lineare che esiste tra azioni e componenti di movimento di estremità in assenza di carichi interni all'asta, sintetizzata mediante la matrice di rigidezza. Si sono poi fornite le espressioni per valutare le azioni che nascono, per effetto dei carichi, negli estremi dell'asta impediti al movimento. Poiché con le ipotesi inizialmente formulate è valido il principio di sovrapposizione degli effetti, si possono combinare i risultati ottenuti, scrivendo le relazioni generali che legano carichi, azioni e componenti di movimento di estremità

$$\begin{aligned} S_\ell &= \bar{S}_\ell + \mathbf{k}_\ell \mathbf{s}_\ell \\ S_g &= \bar{S}_g + \mathbf{k}_g \mathbf{s}_g \end{aligned} \quad (2.73)$$

valide rispettivamente nel riferimento locale e in quello globale. Queste relazioni costituiscono la base di partenza per la scrittura del sistema di equazioni di equilibrio, come mostrato nel successivo capitolo. Mediante esse, inoltre, una volta determinati i valori delle componenti di movimento che soddisfano tali equazioni è possibile determinare l'entità delle azioni che insorgono agli estremi di ciascun'asta e quindi anche le caratteristiche di sollecitazione nei punti interni ad essa.

9. Determinazione delle caratteristiche di sollecitazione nei punti interni dell'asta

Nel paragrafo 4 si sono scritte le relazioni generali che legano carichi, componenti di movimento e caratteristiche di sollecitazione nei punti interni dell'asta. La conoscenza delle componenti di movimento e delle azioni nodali consente di scrivere le condizioni ai limiti necessarie per la determinazione di quelle grandezze. L'entità delle caratteristiche di sollecitazione può però essere determinata in maniera immediata, perché nell'asta le azioni nodali ed i carichi interni costituiscono un insieme equilibrato di forze. Nella generica sezione a distanza x dal primo estremo, lo sforzo normale, il momento flettente ed il taglio possono quindi essere calcolati come

risultante delle forze (nodali ed interne) agenti alla sinistra della sezione. Essendo valido il principio di sovrapposizione degli effetti, si possono valutare separatamente le aliquote dovute alle azioni nodali ed ai singoli carichi interni. Per comodità del lettore si riportano nel seguito le relative formulazioni, valide con la simbologia e la convenzione dei segni definite in precedenza.

Azioni di estremità.

$$\begin{aligned} N(x) &= -F'_{x1} \\ M(x) &= F'_{y1}x - M'_{z1} \\ T(x) &= F'_{y1} \end{aligned}$$

Carichi uniformemente distribuiti su tutta l'asta.

$$\begin{aligned} N(x) &= -nx \\ M(x) &= \frac{qx^2}{2} \\ T(x) &= qx \end{aligned}$$

Carichi concentrati in un punto dell'asta.

per $x > x_0$

$$\begin{aligned} N(x) &= -F_x \\ M(x) &= F_y(x - x_0) - M_z \\ T(x) &= F_y \end{aligned}$$

Carichi distribuiti con andamento lineare su parte dell'asta.

ponendo

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= x - x_1 & \Delta x_2 &= x - x_2 \\ \Delta &= x_2 - x_1 & u &= \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \end{aligned}$$

si ha per $x_1 < x < x_2$

$$M(x) = \left[\left(1 - \frac{u}{3} \right) q_1 + \frac{u}{3} q_2 \right] \frac{\Delta x_1^2}{2}$$

$$T(x) = \left[\left(1 - \frac{u}{2} \right) q_1 + \frac{u}{2} q_2 \right] \Delta x_1$$

e per $x \geq x_2$

$$T_0 = \frac{q_1 + q_2}{2} \Delta$$

$$M_0 = \left(\frac{2}{3} q_1 + \frac{1}{3} q_2 \right) \frac{\Delta^2}{2}$$

$$M(x) = T_0 \Delta x_2 + M_0$$

$$T(x) = T_0$$

Le espressioni innanzi riportate valgono per tutti i tipi di asta, sia che gli estremi siano solidali al nodo oppure incernierati e che si tenga conto, o no, della deformazione a taglio. Solo il caso di trave su suolo elastico alla Winkler si presenta differente, perché in esso bisogna tener conto anche dei carichi trasmessi dal terreno, proporzionali agli spostamenti e quindi non noti a priori. In tale situazione è quindi necessario rifarsi alle relazioni generali, con criterio analogo a quello seguito per la determinazione della matrice di rigidezza. In particolare, spostamenti e caratteristiche di sollecitazione sono fornite dalle (2.32), nelle quali vanno inseriti i valori delle costanti di integrazione determinati mediante la (2.34) in base ai valori degli spostamenti di estremità.

CAPITOLO TERZO

L'INSIEME PIANO DI ASTE

1. Generalità

La prima tipologia strutturale che si prende in esame è denominata *insieme piano di aste* perché costituita da nodi tutti appartenenti ad un piano, collegati da aste la cui sezione retta è simmetrica rispetto a tale piano. I carichi agenti sui nodi o sulle aste sono anch'essi simmetrici rispetto al piano e provocano quindi spostamenti contenuti in esso.

Nell'esaminare questa tipologia, si userà sempre come riferimento la terna ortogonale destrorsa xyz , che contiene nodi ed aste nel piano xy , già presentata nel capitolo precedente e denominata *sistema di riferimento globale* (fig.3.1). Poiché, salvo specifica indicazione contraria, tutte le grandezze utilizzate in questo capitolo sono riferite a questa terna, si ometterà in seguito il pedice g che nel capitolo precedente era stato utilizzato come segno distintivo rispetto a grandezze riferite al sistema locale o all'insieme fondamentale.

Le aste della struttura sono contraddistinte da numeri consecutivi. Si indicherà con j l'asta generica, con m il numero totale di aste. Per ciascuna di esse valgono le ipotesi formulate nel capitolo precedente. Ogni asta è collegata all'estremità a due nodi; l'insieme delle informazioni relative ai collegamenti aste-nodi della struttura è denominato *tabella di incidenza delle aste* (un esempio è mostrato più avanti nella figura 3.7).

Anche i nodi sono contrassegnati con numeri consecutivi. Si indicherà

zato per le travature reticolari nelle quali le aste, pur non essendo rigorosamente incernierate, lavorano sostanzialmente a sforzo assiale consentendo quindi di trascurare per semplicità di calcolo le sollecitazioni flessotaglianti. Il movimento dei nodi-cerniera consiste solo in uno spostamento, individuato in uno schema piano mediante le due componenti v_x e v_y .

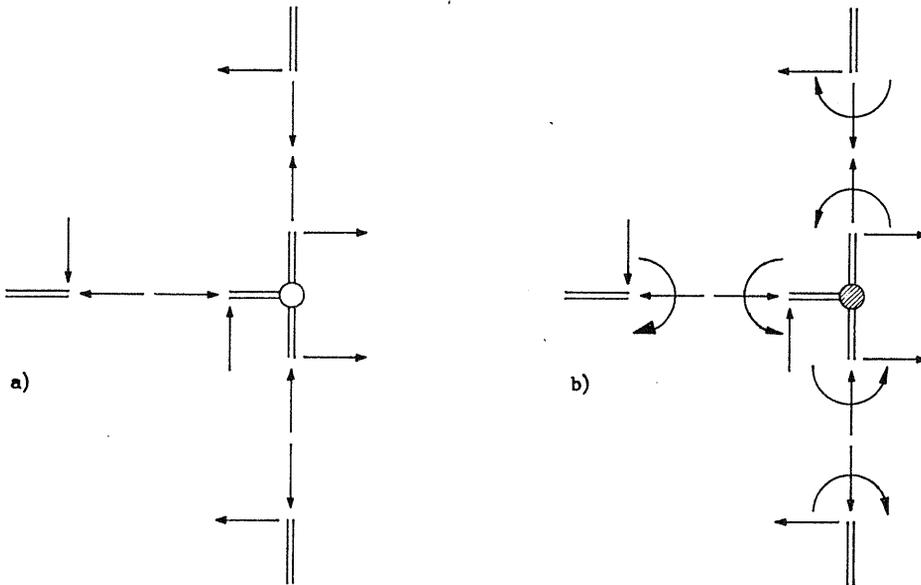


Fig. 3.3 — a) nodo-cerniera
b) nodo rigido

Col termine nodo rigido, o meglio “connesso rigidamente alle aste”, si indica che spostamento e rotazione del nodo coincidono con quelli delle aste in esso confluenti (fig.3.3b). Questo modello è utilizzato nelle strutture intelaiate, nelle quali la trasmissione di azioni flettenti tra le aste è essenziale per l’assorbimento dei carichi esterni. Poiché il presente testo è finalizzato all’analisi di questa tipologia, si suppone nel seguito che tutti i nodi siano rigidi. Questa ipotesi non inficia comunque la generalità della trattazione. L’eventuale presenza di un nodo cerniera può infatti essere efficacemente descritta con l’ausilio di elementi che dispongano di tale grado di vincolo all’estremità convergente nel nodo in questione (fig.3.4a).

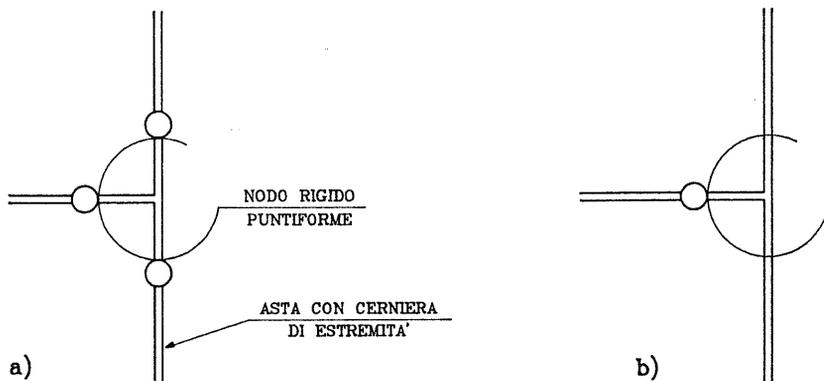


Fig. 3.4 — Utilizzazione di aste con cerniere di estremità
 a) per simulare un nodo cerniera
 b) in presenza contemporanea di aste vincolate rigidamente

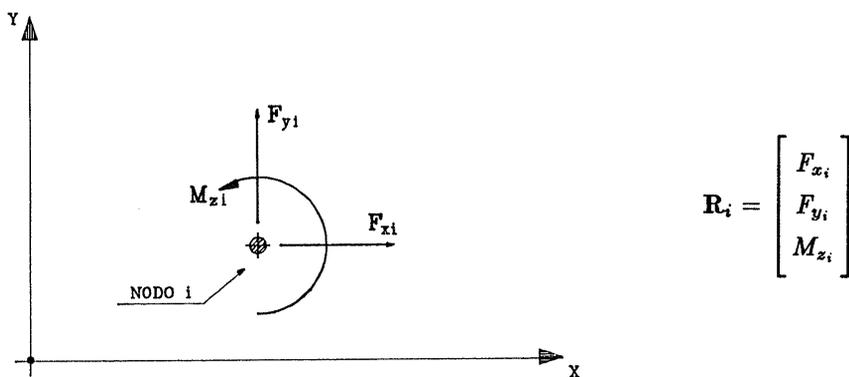


Fig. 3.5 — Azioni sul nodo rigido

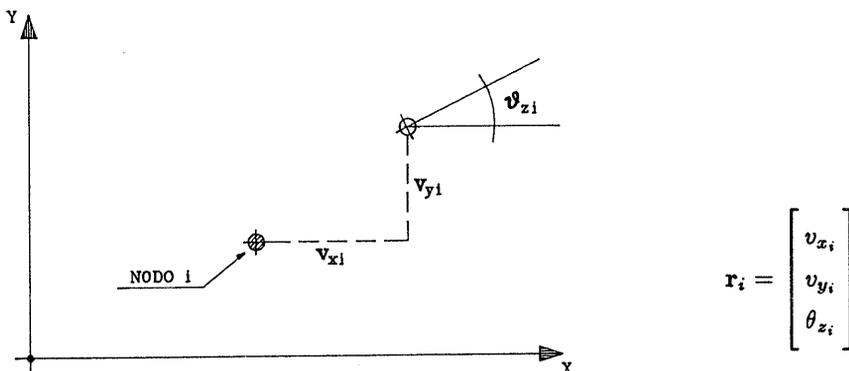


Fig. 3.6 — Componenti di movimento del nodo rigido

Va anzi osservato come una siffatta impostazione consenta, con estrema facilità e senza variazione alcuna dell'impostazione generale del problema, di contemplare anche il caso più generale della confluenza in uno stesso nodo di aste vincolate rigidamente ed aste incernierate (fig.3.4b).

Le azioni applicate dall'esterno o trasmesse dalle aste al generico nodo i di uno schema piano possono essere definite mediante una forza comunque diretta ed una coppia, cioè con le componenti rispetto al sistema di riferimento globale mostrate col loro verso positivo nella figura 3.5 e racchiuse nel vettore \mathbf{R}_i . In maniera duale, il suo movimento è definito dalle componenti mostrate nella figura 3.6 e racchiuse nel vettore \mathbf{r}_i .

Per analizzare la struttura, occorre conoscere se ciascun nodo è libero o se esistono vincoli esterni che ne limitano il movimento. In generale può essere presente un vincolo qualsiasi, ad esempio un carrello che impedisca lo spostamento in una direzione inclinata rispetto agli assi. Tuttavia nelle applicazioni svolte nel testo verranno considerati solo vincoli, rigidi od elastici, immediatamente corrispondenti alle componenti di movimento definite.

Nelle strutture sono possibili anche vincoli mutui tra i nodi. Nel caso di un edificio, una situazione del genere è provocata dagli impalcati, che presentano quasi sempre una elevata rigidità nel loro piano (usualmente orizzontale). Nello schema piano che qui si esamina si considerano quindi possibili vincoli mutui che impongano l'uguaglianza degli spostamenti orizzontali di gruppi di nodi.

2. Azioni e componenti di movimento degli estremi delle aste

Come già illustrato nel capitolo precedente, le azioni applicate agli estremi della generica asta j sono costituite da una forza, individuata mediante le due componenti rispetto al sistema di riferimento globale, ed una coppia per ciascuno dei due estremi. Queste sei componenti sono raggruppate nel vettore \mathbf{S}_j .

In analogia a quanto fatto per la singola asta, si può definire per un insieme piano di m aste il vettore di azioni di estremità \mathbf{S} che ha come componenti l'insieme ordinato dei vettori azioni agli estremi di ogni asta; l'ordine assunto per tali vettori coincide con quello definito mediante la numerazione delle aste

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 \\ \dots \\ \mathbf{S}_j \\ \dots \\ \mathbf{S}_m \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

In maniera duale, le componenti di movimento degli estremi della generica asta j sono costituite dalle due componenti di traslazione e dalla rotazione dei due estremi, raggruppate nel vettore \mathbf{s}_j . Per l'insieme piano di aste, si può definire il vettore di componenti di movimento degli estremi \mathbf{s} che è costituito dall'insieme ordinato dei vettori spostamento delle estremità di ogni asta

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 \\ \dots \\ \mathbf{s}_j \\ \dots \\ \mathbf{s}_m \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

L'introduzione di queste entità vettoriali non fornisce alcuna informazione aggiuntiva rispetto a quelle già disponibili per il singolo elemento asta. In particolare, con essa non si tiene ancora conto della presenza di connessioni mutue né della presenza di vincoli esterni. Consente però notevoli semplificazioni formali nell'analisi del problema.

Si osservi come la simbologia adottata coincida, a meno del pedice j , con quella delle singole aste. Pertanto, nel seguito, la mancanza di tale pedice indicherà che le relazioni sono riferite, invece che ad una asta, ad un loro insieme piano.

Nel capitolo precedente si è mostrato come la relazione fra carichi interni, azioni e componenti di movimento degli estremi della generica asta j si concretizza, mediante la definizione del vettore azioni di incastro perfetto e della matrice di rigidezza dell'asta stessa, nell'espressione matriciale

$$\mathbf{S}_j = \bar{\mathbf{S}}_j + \mathbf{k}_j \mathbf{s}_j$$

Tale relazione può essere formalmente estesa all'insieme piano di aste, eliminando il pedice j e scrivendo

$$\mathbf{S} = \bar{\mathbf{S}} + \mathbf{k} \mathbf{s} \quad (3.3)$$

Il vettore $\bar{\mathbf{S}}$, analogamente a quanto visto per \mathbf{S} ed \mathbf{s} , è semplicemente un raggruppamento delle azioni di incastro perfetto delle singole aste. Allo stesso modo, anche la matrice di correlazione \mathbf{k} è ottenuta assemblando le matrici di rigidezza corrispondenti, nell'ordine definito dalla numerazione

delle aste

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{k}_2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{k}_j & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \mathbf{k}_m \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

3. Le incognite del problema

Nel metodo degli spostamenti le incognite del problema sono costituite dalle componenti di movimento dei nodi della struttura. Se non esistessero vincoli esterni o vincoli mutui tra i nodi, tali componenti sarebbero tutte ammesse. Le incognite del problema sarebbero quindi individuate dal vettore spostamenti nodali

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \dots \\ \mathbf{r}_i \\ \dots \\ \mathbf{r}_n \end{bmatrix}$$

che racchiude le componenti di movimento di tutti i nodi della struttura, nell'ordine definito dalla numerazione dei nodi stessi.

Non è però possibile prendere in esame una struttura i cui nodi siano tutti liberi. Essa sarebbe infatti labile e, anche se soggetta ad un insieme di carichi in equilibrio, i suoi spostamenti sarebbero indeterminati in quanto definiti a meno di un moto rigido. È pertanto necessaria la presenza di vincoli esterni che annullino alcune componenti di movimento, che non vanno computate nel numero delle incognite. Il vettore spostamenti nodali racchiuderà quindi solo le componenti di movimento compatibili coi vincoli.

Si consideri come esempio la struttura mostrata in figura 3.7, costituita da quattro aste e cinque nodi.

Se essa fosse, per assurdo, priva di qualsiasi vincolo presenterebbe $3 \times 5 = 15$ gradi di libertà. La presenza di un carrello nel nodo 1, consentendo solamente rotazione e traslazione orizzontale, rende nulla, e quindi nota a priori, la componente verticale dello spostamento nodale. La presenza di un incastro nei nodi 4 e 5 rende nulle, e quindi ancora una volta note, le tre componenti del moto di tali nodi. Il numero delle incognite del problema risulta pertanto ridotto a $15 - 1 - 2 \times 3 = 8$.

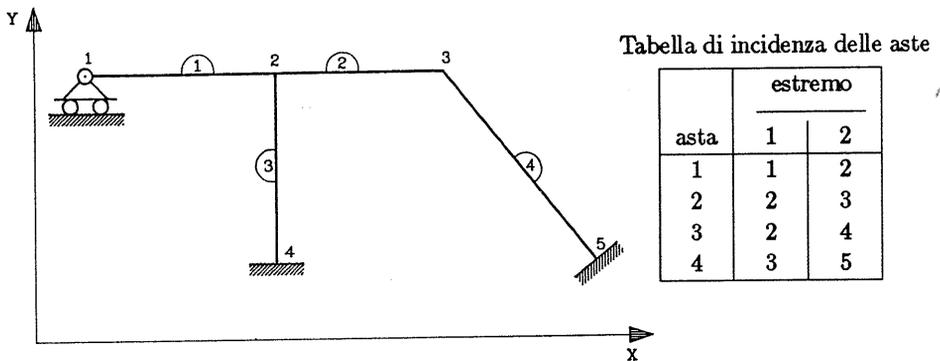


Fig. 3.7 — Schema di struttura con aste deformabili estensionalmente

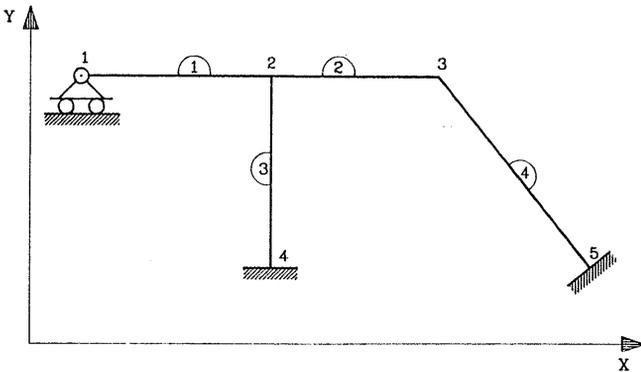
Nel caso in esame, il vettore spostamenti nodali è pertanto costituito da

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} v_{x1} \\ \theta_{z1} \\ v_{x2} \\ v_{y2} \\ \theta_{z2} \\ v_{x3} \\ v_{y3} \\ \theta_{z3} \end{bmatrix}$$

Una ulteriore riduzione delle incognite è determinata dalla introduzione di vincoli mutui fra i nodi. È il caso, già citato, della presenza di impalcati infinitamente rigidi in uno schema intelaiato spaziale, ovvero di traversi orizzontali indeformabili estensionalmente in uno schema piano. Tale circostanza determina l'uguaglianza delle componenti in direzione x degli spostamenti dei nodi appartenenti al traverso e quindi la sostituzione di più incognite (gli spostamenti orizzontali dei nodi) con una sola (lo spostamento orizzontale del traverso). Il vettore spostamenti nodali, che individua le incognite, sarà costituito da

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{r}'_1 \\ \dots \\ \dots \\ \mathbf{r}'_n \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

avendo indicato con \mathbf{t} il vettore che contiene gli spostamenti orizzontali dei traversi, nell'ordine a questi attribuito, ed $\mathbf{r}'_1 \dots \mathbf{r}'_n$ le componenti di movimento dei nodi non soggette a vincoli esterni o mutui.



I nodi 1, 2, 3 sono collegati da un traverso inestensibile

Fig. 3.8 — Schema con traverso orizzontale indeformabile estensionalmente

Nella figura 3.8 è mostrato uno schema che differisce da quello dell'esempio precedente solo per il fatto che i nodi 1, 2 e 3 fanno parte di un traverso inestensibile. In tal caso gli spostamenti v_{x1} , v_{x2} e v_{x3} devono essere uguali e possono denominarsi t_1 . Il numero di incognite si riduce quindi a $8 - 2 = 6$ e si ha

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} t_1 \\ \theta_{z1} \\ v_{y2} \\ \theta_{z2} \\ v_{y3} \\ \theta_{z3} \end{bmatrix}$$

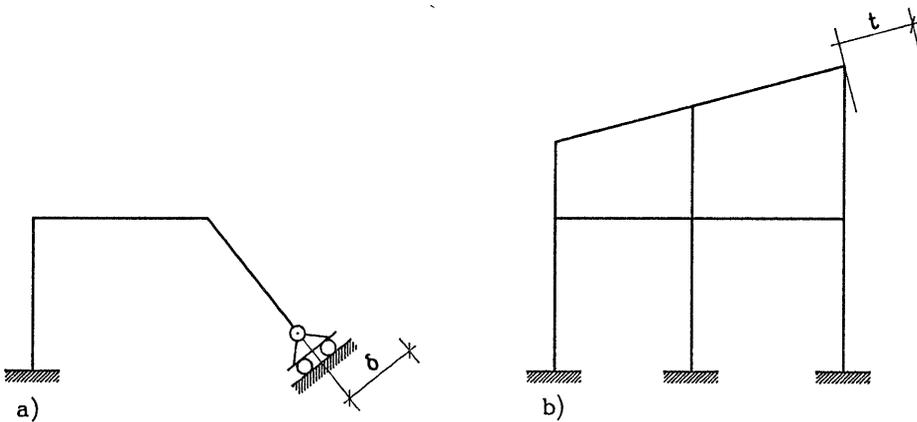


Fig. 3.9 — Vincoli esterni o mutui in direzione inclinata
 a) carrello su un piano inclinato
 b) traverso inestensibile non orizzontale

L'impostazione qui seguita nella individuazione delle incognite è molto generale ma non si adatta ad alcune situazioni che possono verificarsi, sia pur raramente, nella pratica professionale. Un primo caso è quello di vincoli esterni che impongono spostamenti in direzioni prefissate (fig.3.9a); un altro è quello di traversi inestensibili inclinati che vincolano mutuamente i nodi in una direzione diversa dall'orizzontale (fig.3.9b).

Per entrambi si dovrebbe assumere come componente di movimento incognita la traslazione nella direzione in questione, che non coincide con quella degli assi coordinati. Ad esempio, nello schema descritto dalla figura 3.10, nel quale il nodo 6 è vincolato da un carrello non orizzontale ed i nodi 1, 2 e 3 sono collegati da un traverso inestensibile inclinato, il vettore spostamenti nodali incogniti è costituito da

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} t_1 \\ v_{y1} \\ \theta_{z1} \\ v_{y2} \\ \theta_{z2} \\ v_{y3} \\ \theta_{z3} \\ \delta_6 \\ \theta_{z6} \end{bmatrix}$$

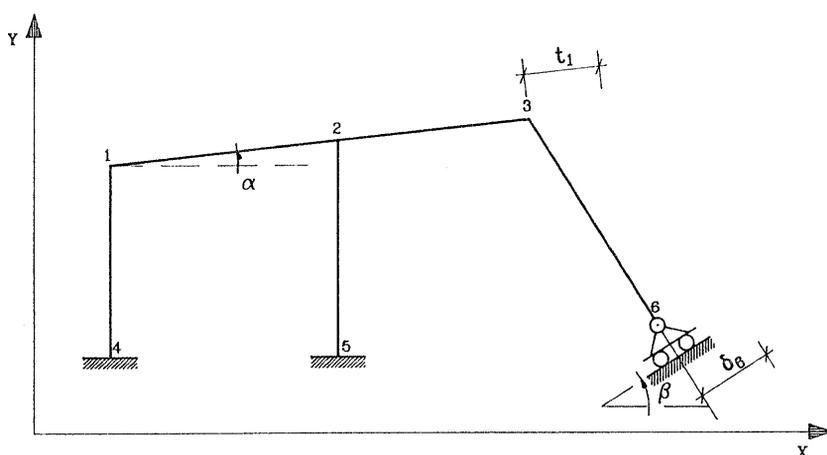


Fig. 3.10 — Schema con carrello inclinato e traverso inestensibile non orizzontale

In tutto il testo verrà mantenuta la prima impostazione, assumendo sempre come incognite le componenti di traslazione in direzione degli assi coordinati. La teoria sviluppata non viene però inficiata da questa limitazione; nel corso dell'esposizione si mostreranno quindi le variazioni applicative che si dovrebbero effettuare per rimuoverla.

4. Relazione tra incognite, componenti di movimento dei nodi e componenti di movimento degli estremi delle aste

Per quanto detto nel paragrafo precedente, le componenti di movimento del generico nodo i sono nulle (se impedito da un vincolo) oppure coincidenti con una delle incognite. Esiste quindi una relazione lineare tra il vettore componenti di movimento del nodo \mathbf{r}_i ed il vettore spostamenti nodali \mathbf{r} , che può esprimersi mediante una matrice di corrispondenza \mathbf{a}_i con

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{a}_i \mathbf{r} \quad (3.6)$$

Ad esempio, per lo schema di figura 3.8 si ha

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_4 = \mathbf{a}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Per l'impostazione adottata, tutti i termini delle matrici \mathbf{a}_i sono nulli oppure unitari. Inoltre, può essere diverso da zero solo un termine per ogni riga della matrice. Per questi motivi, nelle applicazioni concrete mediante elaboratori elettronici le informazioni fornite dalla matrice \mathbf{a}_i possono essere contenute, con un minor ingombro di memoria, in un vettore \mathbf{n}_i , avente lo stesso numero di righe (*vettore di corrispondenza*). L'unico termine di

ciascuna riga assume il valore 0 se tutti i termini della riga di \mathbf{a}_i sono nulli, ovvero il valore k , se k è il numero d'ordine della colonna che contiene il valore 1, cioè se l'incognita corrispondente alla componente di movimento in questione è in posizione k nel vettore \mathbf{r} . Nel caso in esame i vettori di corrispondenza sono

$$\mathbf{n}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{n}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{n}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{n}_4 = \mathbf{n}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Questa semplificazione non è invece attuabile quando si ammettono come incognite le componenti di traslazione in direzione inclinata rispetto agli assi. Ad esempio, per lo schema di figura 3.10 la matrice \mathbf{a}_1 vale

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e contiene i termini $\sin \alpha$ e $\cos \alpha$, perché la traslazione t_1 contribuisce in tale proporzione agli spostamenti in direzione x ed y ; inoltre la seconda riga contiene due termini non nulli, perché sia t_1 che $v_{y,1}$ provocano spostamento verticale.

Poiché la connessione nodo-asta è rigida, le componenti di movimento (nel riferimento globale) degli estremi di un'asta coincidono con le componenti di movimento dei nodi di estremità. Per la generica asta j , che collega i nodi i e k , si può scrivere quindi la relazione

$$\mathbf{s}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_i \\ \mathbf{r}_k \end{bmatrix}$$

che impone la congruenza tra gli estremi dell'asta j ed i nodi i e k . Da questa, utilizzando la (3.6) si ricava la relazione tra le componenti di movimento degli estremi dell'asta e le incognite

$$\mathbf{s}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_i \\ \mathbf{a}_k \end{bmatrix} \mathbf{r}$$

che può essere estesa all'intero insieme di aste, ottenendo

$$\mathbf{s} = \mathbf{a} \mathbf{r} \tag{3.7}$$

La matrice \mathbf{a} è costituita dalle coppie $\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_k$ relative a tutte le aste che compongono la struttura, nell'ordine definito dalla loro numerazione. Essa indica quale incognita corrisponde a ciascuna componente di movimento di estremità di un'asta ed impone quindi globalmente la congruenza tra estremi delle aste e nodi; per tale motivo è detta *matrice di congruenza*.

Nell'esempio già citato, in base alla tabella di incidenza mostrata nella figura 3.7 e valida anche per lo schema a traversi inestensibili della figura 3.8, si ottiene

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_4 \\ \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_5 \end{bmatrix}$$

5. Le azioni nodali

Per il generico nodo i dello schema strutturale si è definito il vettore \mathbf{R}_i , che contiene le componenti nel riferimento globale delle azioni ad esso applicate dall'esterno, o trasmesse dalle aste che vi confluiscono. Prescindendo per un attimo dalla presenza di vincoli esterni o mutui, questa definizione può essere estesa all'intero insieme di nodi, introducendo un vettore azioni nodali \mathbf{R}

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \dots \\ \mathbf{R}_i \\ \dots \\ \mathbf{R}_n \end{bmatrix}$$

che racchiude le azioni applicate a tutti i nodi della struttura, nell'ordine definito dalla numerazione dei nodi stessi.

Non tutte le azioni nodali sono però rilevanti ai fini della scrittura del sistema di equazioni che regola l'equilibrio dello schema. In presenza di vincoli esterni, non ha senso prendere in esame quelle azioni che vengono assorbite direttamente dai vincoli. Il vettore azioni nodali conterrà quindi solo le azioni non corrispondenti ai vincoli, cioè le azioni duali delle componenti di movimento incognite.

Ad esempio, per lo schema di figura 3.7 il vettore \mathbf{R} contiene 8 elementi, corrispondenti agli 8 gradi di libertà ammessi

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} F_{x1} \\ M_{z1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ M_{z2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \\ M_{z3} \end{bmatrix}$$

La presenza di vincoli mutui tra i nodi, come quelli provocati da impalcanti orizzontali planimetricamente indeformabili e da traversi inestensibili, riduce ulteriormente il numero di elementi del vettore azioni nodali. Si osserva infatti che all'equilibrio di un traverso partecipano contemporaneamente tutte le forze orizzontali applicate ai nodi che ad esso appartengono. Il vettore azioni nodali conterrà quindi direttamente la loro somma e sarà costituito da

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{R}'_1 \\ \dots \\ \dots \\ \mathbf{R}'_n \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

avendo indicato con \mathbf{T} il vettore che contiene le somme delle forze orizzontali applicate ai nodi dei traversi, nell'ordine a questi attribuito, e con $\mathbf{R}'_1 \dots \mathbf{R}'_n$ le componenti di azioni nodali non corrispondenti a vincoli esterni o mutui.

Così, per lo schema di figura 3.8 si indica con T_1 la somma delle forze orizzontali F_{x1} , F_{x2} , F_{x3} e si ha

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} T_1 \\ M_{z1} \\ F_{y2} \\ M_{z2} \\ F_{y3} \\ M_{z3} \end{bmatrix}$$

Le azioni racchiuse nel vettore definito dalla (3.8) possono essere sia applicate ai nodi direttamente dall'esterno che trasmesse ad essi dalle aste. Nel seguito si utilizzerà il simbolo \mathbf{R} per indicare l'azione totale esercitata,

ed i simboli \mathbf{R}_e ed \mathbf{R}_a per indicare rispettivamente le azioni esterne e quelle derivanti dalle aste. Si ha pertanto

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_e + \mathbf{R}_a \quad (3.9)$$

6. Relazione tra azioni nodali ed azioni agli estremi delle aste

Le componenti delle azioni applicate al generico nodo i , contenute nel vettore \mathbf{R}_i , possono essere assorbite direttamente da un vincolo oppure contribuire ad una delle componenti delle azioni nodali \mathbf{R} . Il contributo di \mathbf{R}_i ad \mathbf{R} è fornito da una relazione lineare che può essere espressa mediante una matrice. Si può facilmente constatare che tale matrice è la trasposta della matrice di corrispondenza \mathbf{a}_i definita nel paragrafo 4. Si può scrivere quindi

$$\mathbf{R}' = \mathbf{a}_i^T \mathbf{R}_i \quad (3.10)$$

Al primo membro di questa relazione si è utilizzato il simbolo \mathbf{R}' (anziché \mathbf{R}), per evidenziare che le azioni fornite dal prodotto $\mathbf{a}_i^T \mathbf{R}_i$ sono solo un'aliquota delle azioni nodali \mathbf{R} .

Se si applica la (3.10) al nodo 1 dello schema di figura 3.8, per il quale

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} T_1 \\ M_{z1} \\ F_{y2} \\ M_{z2} \\ F_{y3} \\ M_{z3} \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_1^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_{z1} \end{bmatrix}$$

si constata che F_{x1} ed M_{z1} contribuiscono rispettivamente alla prima ed alla seconda delle azioni nodali, mentre F_{y1} non dà alcun contributo perché assorbita direttamente dal carrello.

Le azioni esercitate agli estremi delle aste sono sempre azioni mutue tra asta e nodo; quelle esplicate dal nodo sull'asta sono quindi uguali in valore e di verso opposto rispetto alle azioni esercitate dall'asta sul nodo. Se si indica con \mathbf{R}_{aji} l'azione esercitata dall'asta j sul nodo i , per un'asta di estremi i e k si ha

$$\mathbf{S}_j = - \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{aji} \\ \mathbf{R}_{ajk} \end{bmatrix}$$

nella quale il segno meno sta proprio ad indicare la differenza di segno tra azioni dell'asta sul nodo e del nodo sull'asta.

Il contributo dell'asta j alle azioni nodali \mathbf{R}'_a è somma delle aliquote dovute a $\mathbf{R}_{a_j i}$ ed $\mathbf{R}_{a_j k}$, pari rispettivamente ad $\mathbf{a}_i^T \mathbf{R}_{a_j i}$ ed $\mathbf{a}_k^T \mathbf{R}_{a_j k}$, ed è quindi fornito dalla relazione

$$\mathbf{R}'_a = - \begin{bmatrix} \mathbf{a}_i^T & \mathbf{a}_k^T \end{bmatrix} \mathbf{S}_j$$

nella quale si indica con $\begin{bmatrix} \mathbf{a}_i^T & \mathbf{a}_k^T \end{bmatrix}$ la matrice ottenuta unendo in sequenza le due matrici \mathbf{a}_i^T ed \mathbf{a}_k^T .

Il contributo complessivo di tutte le aste è pari alla somma dei singoli contributi, e pertanto

$$\mathbf{R}_a = -\mathbf{a}^T \mathbf{S} \quad (3.11)$$

essendo \mathbf{a}^T la matrice contenente le trasposte delle coppie $\mathbf{a}_i \mathbf{a}_k$ relative a tutte le aste e quindi essa stessa la trasposta della matrice \mathbf{a} definita nel paragrafo 4.

Questa relazione si sarebbe potuta ricavare immediatamente dalla (3.7) per il principio di dualità dimostrato nel capitolo precedente.

7. Relazione tra carichi, azioni nodali e spostamenti nodali

La relazione (3.3) mostrata nel paragrafo 2 indica che le azioni \mathbf{S} esercitate dai nodi alle estremità delle aste sono somma di una aliquota che insorge per effetto dei carichi interni alle aste quando il movimento dei loro estremi è impedito ed un'altra linearmente proporzionale agli spostamenti di tali punti. Accoppiando ad essa le espressioni (3.7) e (3.11) è possibile trovare una analoga relazione tra azioni nodali esercitate dalle aste, carichi interni e spostamenti nodali. Si ha

$$\mathbf{R}_a = -\mathbf{a}^T \mathbf{S} = -\mathbf{a}^T \bar{\mathbf{S}} - \mathbf{a}^T \mathbf{k} \mathbf{a} \mathbf{r}$$

e quindi sinteticamente

$$\mathbf{R}_a = \bar{\mathbf{R}}_a - \mathbf{K} \mathbf{r} \quad (3.12)$$

avendo indicato con $\bar{\mathbf{R}}_a$ il *vettore azioni nodali di incastro perfetto*, cioè l'insieme di azioni che vengono trasmesse dalle aste ai nodi bloccati in conseguenza ai carichi interni alle aste

$$\bar{\mathbf{R}}_a = -\mathbf{a}^T \bar{\mathbf{S}} \quad (3.13)$$

e con \mathbf{K} la matrice di proporzionalità lineare tra spostamenti nodali ed azioni nodali che viene denominata *matrice di rigidezza della struttura*

$$\mathbf{K} = \mathbf{a}^T \mathbf{k} \mathbf{a} \quad (3.14)$$

In forma esplicita, per uno schema con h componenti di movimento incognite la (3.12) diviene

$$\begin{bmatrix} R_{a1} \\ \dots \\ R_{ap} \\ \dots \\ R_{ah} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{R}_{a1} \\ \dots \\ \bar{R}_{ap} \\ \dots \\ \bar{R}_{ah} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{11} & \dots & \dots & K_{1q} & \dots & K_{1h} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{p1} & \dots & \dots & K_{pq} & \dots & K_{ph} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{h1} & \dots & \dots & K_{hq} & \dots & K_{hh} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_1 \\ \dots \\ r_q \\ \dots \\ r_h \end{bmatrix}$$

e la generica riga p si scrive

$$R_{ap} = \bar{R}_{ap} - (K_{p1} r_1 + \dots + K_{pq} r_q + \dots + K_{ph} r_h)$$

Il termine K_{pq} della matrice di rigidezza rappresenta quindi l'azione p -esima esercitata dal nodo alle aste (e , cambiando il segno, dalle aste al nodo) per effetto dello spostamento q -esimo unitario, in assenza di carichi e con tutti gli altri spostamenti nulli. Esso racchiude i contributi di tutte le aste che sono in grado di esercitare l'azione p in conseguenza allo spostamento q , ovvero delle aste che collegano i nodi cui si riferiscono l'azione e lo spostamento. Se questi sono relativi ad uno stesso nodo, i contributi sono forniti da tutte le aste che convergono in esso; se sono relativi a due nodi non collegati direttamente da aste, il termine K_{pq} è nullo.

In una qualsiasi struttura, ciascun nodo è collegato solo a pochi altri nodi. Di conseguenza i termini della matrice di rigidezza non nulli sono pochi (rispetto al numero totale di termini) e la loro posizione dipende dalla numerazione delle incognite. Il criterio assunto nel paragrafo 3 è basato sostanzialmente sulla numerazione dei nodi. Di conseguenza, se i nodi di una struttura sono conteggiati in modo che per ogni asta i nodi di estremità abbiano numeri prossimi tra loro, i termini non nulli della matrice di rigidezza si troveranno racchiusi in una ristretta banda a cavallo della diagonale principale (fig.3.11). Si denomina *ampiezza di banda* il massimo numero di termini di una riga racchiusi tra il primo e l'ultimo non nullo (estremi compresi). Con *ampiezza della semibanda* si indica invece il numero di termini compreso tra la diagonale principale e l'ultimo (o il primo) termine non nullo.

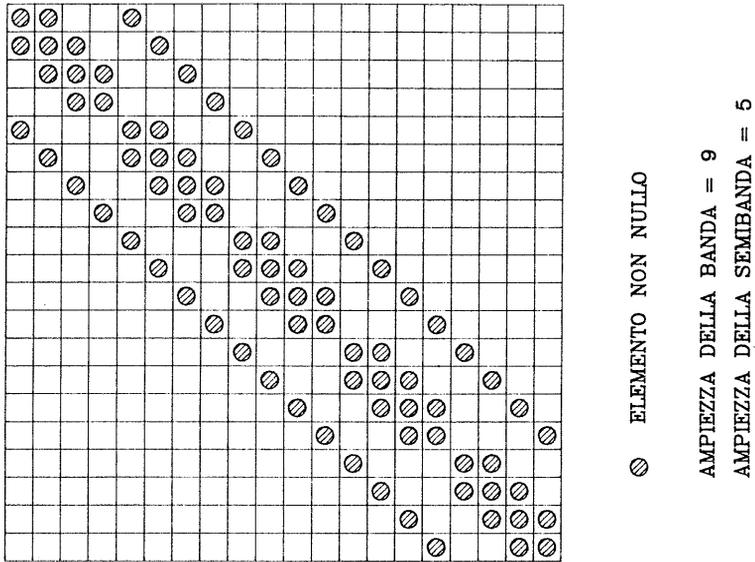


Fig. 3.11 — Matrice di rigidezza a banda

La presenza di traversi inestensibili comporta una riorganizzazione delle incognite, effettuata ponendo innanzi a tutte gli spostamenti di tali traversi. In conseguenza a ciò la matrice di rigidezza presenta ulteriori termini non nulli in due fasce laterali, lungo il bordo sinistro e quello superiore (fig.3.12), e a rigore non può più essere denominata matrice a banda. Se però si considera il vettore spostamenti nodali idealmente diviso in due gruppi, \mathbf{r}_t ed \mathbf{r}_a

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_t \\ \mathbf{r}_a \end{bmatrix}$$

che contengono rispettivamente gli spostamenti dei traversi e tutte le altre incognite, e corrispondentemente la matrice di rigidezza scomposta in quattro sottomatrici, \mathbf{K}^{tt} , \mathbf{K}^{ta} , \mathbf{K}^{at} e \mathbf{K}^{aa} , si può notare che mentre le prime tre sono sostanzialmente matrici piene (cioè con termini non nulli disposti un po' ovunque), la \mathbf{K}^{aa} è inequivocabilmente una matrice a banda.

La matrice di rigidezza della struttura risulta inoltre essere:

- quadrata, cioè caratterizzata da un ugual numero di righe e di colonne, perché il numero di spostamenti nodali è esattamente pari al numero di azioni nodali.
- non singolare, e quindi invertibile, purché lo schema non sia labile.

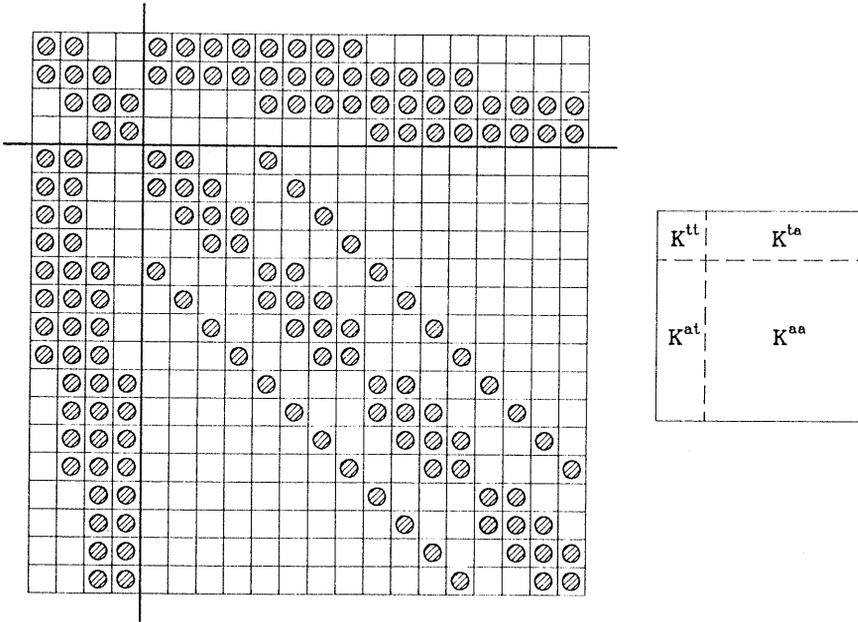


Fig. 3.12 — Scomposizione della matrice di rigidezza nel caso di vincoli mutui tra i nodi (traversi inestensibili)

La relazione lineare $\mathbf{K} \mathbf{r}$ associa a ciascun insieme di spostamenti un insieme di azioni, ed in particolare al vettore spostamenti nullo il vettore azioni nullo; d'altro canto, per il principio di unicità della soluzione del problema dell'equilibrio elastico, ad ogni insieme di azioni deve corrispondere un solo insieme spostamenti, e la relazione è pertanto biunivoca ed invertibile.

- simmetrica rispetto alla diagonale principale, cioè tale che $K_{pq} = K_{qp}$. Questo può essere ricavato immediatamente dal teorema di Betti; applicando infatti alla struttura gli spostamenti r_p e r_q unitari, il lavoro di K_{pq} (azione provocata in p da r_q) per r_p deve essere uguale al lavoro di K_{qp} (provocata in q da r_p) per r_q , ed essendo uguali gli spostamenti anche le due azioni devono avere uguale entità. La simmetria di \mathbf{K} può essere dimostrata anche a partire dalla sua definizione (3.14).

Si ha infatti

$$\mathbf{K}^T = (\mathbf{a}^T \mathbf{k} \mathbf{a})^T = \mathbf{a}^T \mathbf{k}^T \mathbf{a}$$

e poiché $\mathbf{k}^T = \mathbf{k}$ deve essere anche $\mathbf{K}^T = \mathbf{K}$.

- definita positiva, cioè tale che per ogni \mathbf{r} non nullo la forma quadratica

$(\mathbf{K} \mathbf{r})^T \mathbf{r}$ è maggiore di zero. Ciò deriva immediatamente dal fatto che il prodotto anzidetto rappresenta il lavoro di un insieme di azioni nodali $\mathbf{K} \mathbf{r}$ per gli spostamenti corrispondenti, che deve essere necessariamente positivo.

8. Equilibrio nodale e risoluzione del problema

Per l'equilibrio dei nodi, o dei traversi inestensibili, è necessario che siano nulle le azioni complessive su essi agenti, somma di un'aliquota \mathbf{R}_e applicata direttamente ed un'altra \mathbf{R}_a trasmessa dalle aste. Utilizzando la (3.12) la condizione di equilibrio si scrive

$$\mathbf{R}_e + \bar{\mathbf{R}}_a - \mathbf{K} \mathbf{r} = 0$$

ovvero

$$\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{K} \mathbf{r} \quad (3.15)$$

avendo indicato con

$$\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R}_e + \bar{\mathbf{R}}_a \quad (3.16)$$

il vettore contenente le azioni complessive prodotte dai carichi esterni, sia applicati direttamente ai nodi che sulle aste, in presenza di vincoli che impediscono spostamenti e rotazioni dei nodi. La relazione (3.15) indica che poiché tali vincoli non sono in realtà presenti, i nodi devono subire dei cedimenti \mathbf{r} di entità tale da generare un insieme di azioni $\mathbf{K} \mathbf{r}$ in grado di equilibrare le azioni esterne prima bilanciate dai vincoli. Questa spiegazione fisica della condizione di equilibrio è stata sfruttata in passato da numerosi procedimenti di risoluzione del problema iperstatico, che si indicano genericamente come metodi di rilassamento. Essi sono tutti basati sull'idea di rimuovere iterativamente un singolo vincolo, scrivendo per esso la condizione di equilibrio e ricavando lo spostamento, o la rotazione, necessari per rispettare tale condizione. Caratteristica di questi metodi è quindi la scrittura diretta delle equazioni di equilibrio e la loro risoluzione iterativa. L'impostazione seguita in questo testo porta ovviamente, a parità di ipotesi di partenza, allo stesso sistema di equazioni, ottenuto però per via matriciale. Coerentemente, la soluzione è fornita da

$$\mathbf{r} = \mathbf{K}^{-1} \bar{\mathbf{R}} \quad (3.17)$$

mediante l'inversione della matrice \mathbf{K} . Questa operazione può essere effettuata mediante procedimenti di calcolo numerico che richiedono un numero

finito, noto a priori, di operazioni, come mostrato nella seconda parte del testo. Più frequentemente, gli stessi procedimenti vengono utilizzati per effettuare direttamente la risoluzione del sistema senza passare attraverso l'inversione della matrice ed il successivo prodotto per il vettore azioni esterne. Nel caso di sistemi di ordine molto elevato è però ancora conveniente l'uso di procedimenti di risoluzione iterativi, sostanzialmente analoghi a quelli usati nelle impostazioni non matriciali.

Il procedimento da seguire per la risoluzione del problema iperstatico appare quindi concettualmente ben delineato. Occorre innanzitutto definire la matrice di rigidezza della struttura \mathbf{K} ed il vettore $\bar{\mathbf{R}}$. Determinati mediante la (3.17) gli spostamenti nodali, è possibile risalire da essi alle componenti di movimento degli estremi delle aste nel riferimento globale mediante la (3.7). Utilizzando le relazioni presentate nel capitolo precedente, si passa, per ciascuna asta, da queste alle corrispondenti componenti nel sistema di riferimento locale ed infine alle caratteristiche di sollecitazione agli estremi e nei punti interni dell'asta.

9. Determinazione diretta della matrice di rigidezza

Le relazioni (3.13) e (3.14), che consentono di ricavare le azioni di incastro perfetto e la matrice di rigidezza della struttura a partire dalle corrispondenti entità relative all'insieme di aste, sono molto utili concettualmente, perché estremamente sintetiche. Esse si adattano invece meno bene alle applicazioni numeriche, perché forniscono $\bar{\mathbf{R}}_a$ e \mathbf{K} mediante operazioni che coinvolgono matrici molto più grandi di quelle che si vogliono ottenere. Ad esempio, per lo schema di figura 3.8, che presenta 6 incognite, le matrici \mathbf{a} e \mathbf{k} sono costituite rispettivamente da 24×6 e 24×24 elementi, mentre $\bar{\mathbf{R}}_a$ e \mathbf{K} sono di dimensioni 6×1 e 6×6 .

Una modalità operativa più semplice scaturisce dal constatare che, essendo la matrice \mathbf{a} costituita da soli 0 ed 1, i prodotti matriciali indicati hanno come unico effetto il posizionare in maniera opportuna gli elementi del vettore azioni di incastro e della matrice di rigidezza di ciascun'asta rispettivamente nel vettore e nella matrice della struttura.

Per meglio comprendere il significato di quanto ora detto, si consideri una struttura costituita da m aste ed n nodi, che presenta h spostamenti incogniti. Come spiegato in precedenza, la matrice \mathbf{a} è composta da m blocchi, uno per asta, ciascuno di 6 righe ed h colonne (fig.3.13). Si indichino con r e c i numeri d'ordine (compresi tra 1 e 6) di due generiche componenti di movimento di estremità dell'asta j e con r' e c' le righe di \mathbf{a}

ad esse corrispondenti: $r' = 6(j-1) + r$, $c' = 6(j-1) + c$. Se la componente r è bloccata da un vincolo, tutti gli elementi della riga r' di \mathbf{a} devono essere nulli. In caso contrario, la componente in esame deve corrispondere ad uno degli spostamenti nodali incogniti, che indicheremo con p . L'unico elemento non nullo della riga anzidetta sarà in tal caso quello in colonna p , $a_{r'p}$. Analogamente, se q è lo spostamento nodale corrispondente alla componente di movimento c l'unico elemento non nullo della riga c' sarà quello in colonna q , $a_{c'q}$. Quanto detto per le righe r' e c' di \mathbf{a} vale ovviamente anche per le colonne r' e c' di \mathbf{a}^T , con esse coincidenti, che avranno come unici elementi non nulli $a_{pr'}^T$ e $a_{qc'}^T$.

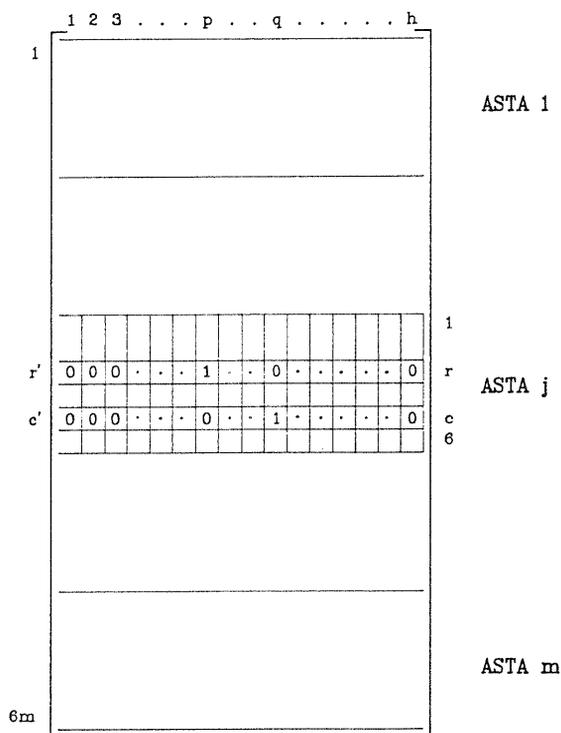


Fig. 3.13 — Matrice di congruenza \mathbf{a}

Anche il vettore $\bar{\mathbf{S}}$, costruito assemblando i vettori di incastro perfetto $\bar{\mathbf{S}}_j$ delle aste, è composto da m blocchi di 6 elementi; $\bar{\mathbf{S}}_{r'}$ coincide con $\bar{\mathbf{S}}_{jr}$ e rappresenta l'azione di incastro r -esima per l'asta j . Nell'effettuare il prodotto $\mathbf{a}^T \bar{\mathbf{S}}$ (fig.3.14), per ottenere a meno del segno il generico \bar{R}_{ai} gli elementi della riga i di \mathbf{a}^T vengono moltiplicati per i corrispondenti elementi di $\bar{\mathbf{S}}$. In tal modo, gli elementi della colonna r' vengono moltiplicati per

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{R}}_a &= -\mathbf{a}^T \bar{\mathbf{S}} \\ \bar{R}_{a_i} &= -\sum_{k=1}^{6m} a_{ik}^T \bar{S}_k \\ \bar{R}_{a_p} &= -\sum_{k=1}^{6m} a_{pk}^T \bar{S}_k = \dots - a_{pr'}^T \bar{S}_{r'} - \dots \end{aligned}$$

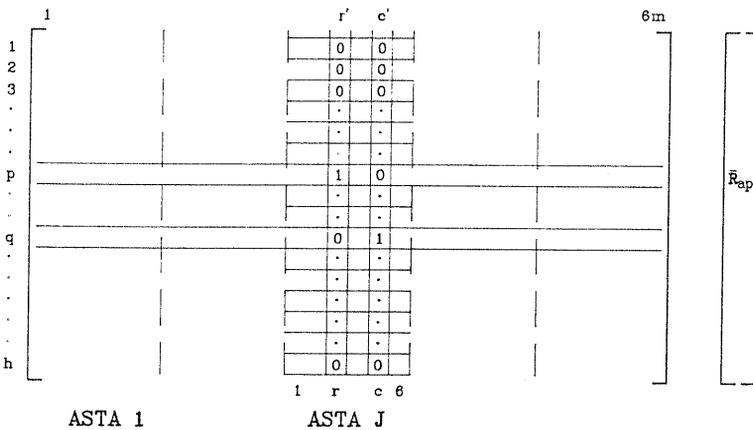
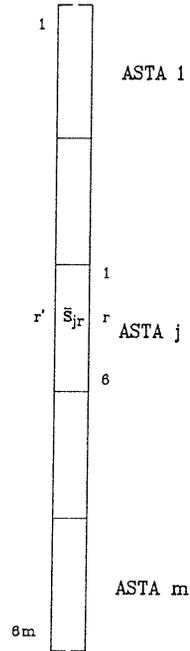


Fig. 3.14 — Prodotto matriciale $\mathbf{a}^T \bar{\mathbf{S}}$

\bar{S}_{jr} . Poiché essi sono tutti nulli, tranne al più $a_{pr'}^T$, \bar{S}_{jr} contribuisce alla valutazione del solo termine \bar{R}_{ap} .

Analogamente, la matrice \mathbf{k} relativa all'insieme di aste è stata costruita

disponendo lungo la diagonale le m matrici di rigidezza delle aste. Il suo elemento $k_{r',c'}$ coincide quindi con k_{jrc} della matrice di rigidezza dell'asta j nel riferimento globale. Nel valutare \mathbf{K} mediante la (3.14), il primo prodotto matriciale, $\mathbf{a}^T \mathbf{k}$, fornisce una matrice \mathbf{M} con un numero di righe pari a quello di \mathbf{a}^T (e quindi h , quanti sono gli spostamenti incogniti) ed un numero di colonne pari a quello di \mathbf{k} ($6m$). Nell'effettuare il prodotto vengono moltiplicati tra loro gli elementi corrispondenti di una riga di \mathbf{a}^T e di una colonna di \mathbf{k} . Il termine $k_{r',c'} = k_{jrc}$ viene quindi moltiplicato per gli elementi della colonna r' di \mathbf{a}^T , tutti nulli ad eccezione di $a_{pr'}^T$; esso contribuisce pertanto solo all'elemento $M_{pc'}$ (fig.3.15). Col secondo prodotto matriciale, $\mathbf{M} \mathbf{a}$, il termine $M_{pc'}$ viene moltiplicato per gli elementi della riga c' di \mathbf{a} , anch'essi tutti nulli ad eccezione di $a_{c'q}$. Di conseguenza esso, e quindi k_{jrc} , contribuisce solo alla valutazione del termine K_{pq} (fig.3.16). Se lo spostamento r (o c) è impedito dai vincoli esterni la riga r' (o c') è tutta nulla e quindi il termine k_{jrc} non interviene nella matrice di rigidezza della struttura.

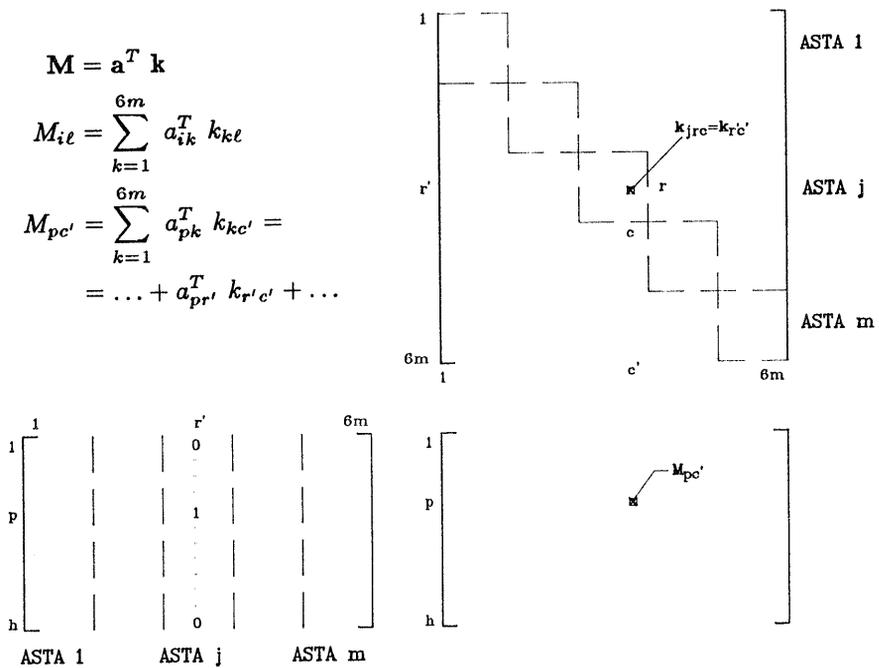


Fig. 3.15 — Prodotto matriciale $\mathbf{a}^T \mathbf{k}$

I posizionamenti effettuati mediante le (3.13) e (3.14) hanno un preciso significato fisico. Poiché l'azione r -esima esercitata agli estremi dell'asta j

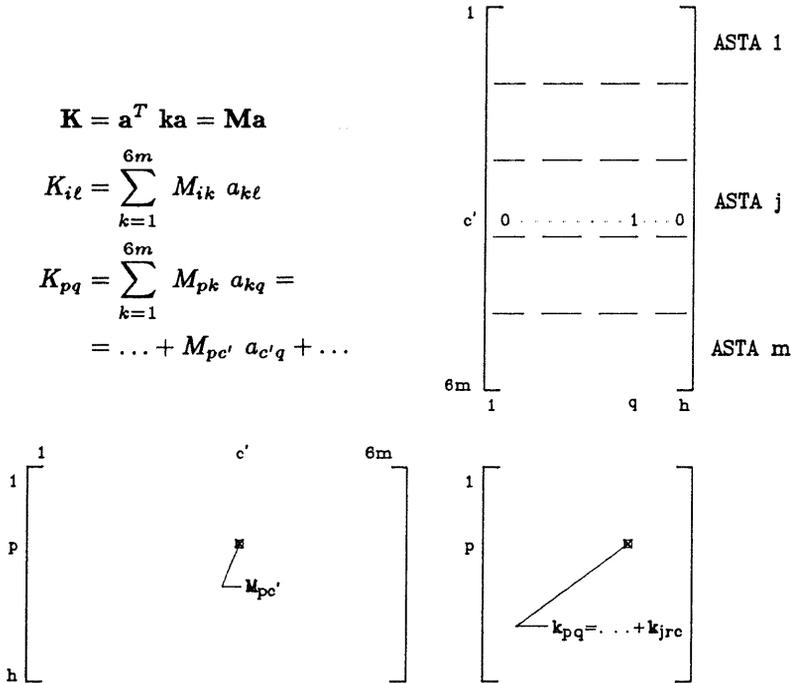


Fig. 3.16 — Prodotto matriciale $\mathbf{M} \mathbf{a}$

corrisponde all'azione nodale p -esima, il termine \bar{S}_{jr} che indica tale azione sull'asta in assenza di movimento nodale rappresenta l'aliquota dovuta all'asta j dell'azione nodale d'incastro p -esima ed interviene quindi nella valutazione di \bar{R}_{ap} . Inoltre, poiché lo spostamento c -esimo dell'asta j coincide con lo spostamento nodale q -esimo, il termine k_{jrc} che indica l'azione r -esima agli estremi dell'asta j per effetto di uno spostamento c -esimo unitario degli estremi, rappresenta l'aliquota dovuta all'asta j dell'azione nodale p -esima conseguente ad uno spostamento q -esimo unitario ed interviene nella valutazione di K_{pq} .

Operativamente, si può evitare di costruire la matrice di congruenza \mathbf{a} , essendo ad essa equivalenti i vettori di corrispondenza \mathbf{n} definiti nel paragrafo 4 insieme alla tabella di incidenza delle aste. Per determinare $\bar{\mathbf{R}}_a$, si possono passare in rassegna tutte le aste, con le relative azioni di incastro, valutando mediante la tabella di incidenza ed i vettori di corrispondenza il numero d'ordine p dello spostamento nodale associato alla componente di movimento r , che esiste solo se quest'ultima non è impedita da un vicolo. In tal caso l'azione \bar{S}_{jr} viene aggiunta, con segno negativo, all'azione di incastro \bar{R}_{ap} . Per determinare \mathbf{K} , si possono passare in rassegna tutte le

aste, con le relative matrici di rigidezza nel riferimento globale, determinare per ciascuna coppia di azioni e componenti di movimento di estremità r e c le corrispondenti azioni e spostamenti nodali p e q e, se queste esistono, aggiungere il valore di k_{jrc} al termine K_{pq} della matrice di rigidezza della struttura. Questo modo di procedere è detto *metodo di determinazione diretta della matrice di rigidezza della struttura* o, con termine inglese, *direct stiffness method*.

CAPITOLO QUARTO

L'INSIEME SPAZIALE DI TELAI PIANI

1. Macroelementi e sottostrutture

Nel primo capitolo si è definita struttura un insieme di nodi rigidi collegati da elementi deformabili. Si è quindi preso in esame in particolare l'elemento asta, monodimensionale, con le sue numerose varianti (asta con cerniere, trave su suolo elastico alla Winkler, asta con tratti rigidi di estremità coassiali e non coassiali). Più in generale l'analisi matriciale può prevedere una vasta gamma di elementi: elementi bidimensionali piani, triangolari o quadrilateri, soggetti ad azioni e deformazioni nel piano (lastre) o fuori piano (piastre); elementi bidimensionali spaziali, come quadrilateri sghembi o gusci; elementi tridimensionali. L'importante è conoscere per ciascuno di essi la relazione tra le azioni applicate nei punti di estremità e le corrispondenti componenti di movimento (*matrice di rigidezza dell'elemento*) e le azioni di estremità che insorgono per effetto dei carichi interni all'elemento quando i suoi estremi sono bloccati (*azioni di incastro perfetto*).

Andando ancora avanti nella stessa ottica, si può sentire il bisogno di elementi ancora più complessi. Ad esempio, nell'analizzare un edificio in muratura farebbe comodo un elemento capace di rappresentare un'intera parete, con le aperture in essa presenti, dotato di un elevato numero di nodi di estremità per consentirne una buona connessione con altri elementi analoghi (fig. 4.1). Nello studiare i problemi di interazione tra struttura

in elevazione, trave di fondazione e terreno sarebbe utile poter considerare l'intera struttura in elevazione come un unico elemento, in cui i nodi di estremità sono rappresentati dai punti da collegare con la fondazione (fig.4.2). Nel calcolare uno schema spaziale costituito da telai piani collegati da impalcati indeformabili sarebbe comodo considerare come elemento base il singolo telaio piano, nel quale i nodi da connettere ad altri elementi sono costituiti dai traversi inestensibili dotati ciascuno di un solo grado di libertà (fig.4.3).

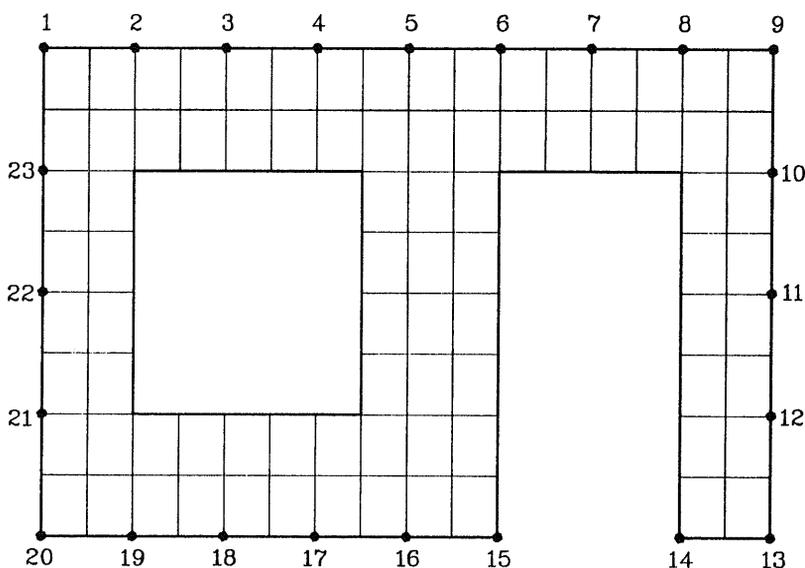


Fig. 4.1 — Macroelemento che rappresenta la parete di un edificio in muratura

Elementi tanto complessi possono essere denominati *macroelementi*. La determinazione della matrice di rigidezza e delle azioni di incastro perfetto potrebbe essere effettuata anche per essi mediante lo studio della meccanica del continuo. Così ad esempio la parete dell'edificio in muratura potrebbe ricadere nell'ambito della trattazione teorica delle lastre forate. In genere però questa via è molto complicata, mentre risulta sicuramente più agevole valutare il comportamento del macroelemento scomponendolo in parti più semplici: la parete in elementi lastra (o piastra, a seconda del carico), il telaio in elementi trave. In tal modo esso va visto a sua volta come una struttura e può essere esaminato mediante algoritmi dell'algebra lineare; lo si indica quindi più propriamente col termine *sottostruttura*, per evidenziarne contemporaneamente sia la composizione che l'appartenenza ad un insieme più complesso.

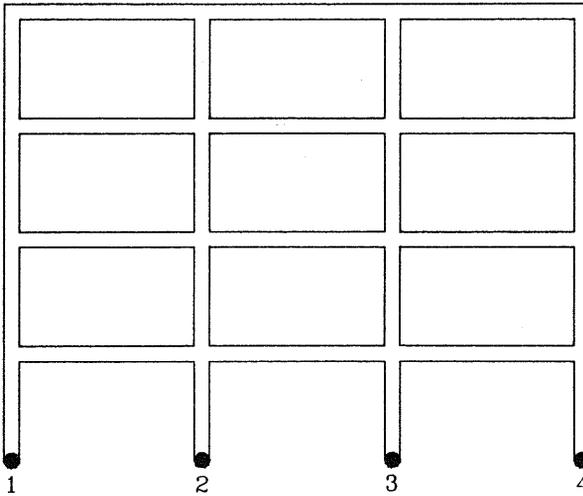


Fig. 4.2 — Macroelemento che rappresenta un telaio piano da connettere alla trave di fondazione

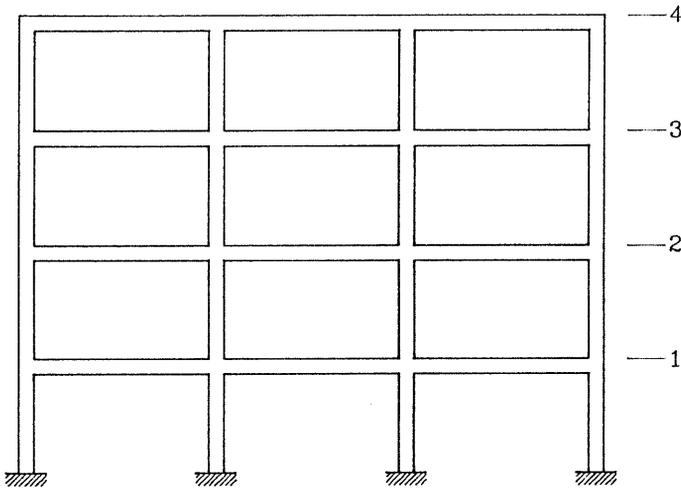


Fig. 4.3 — Macroelemento che rappresenta un telaio piano da connettere ad altri telai in corrispondenza dei traversi

Ribadendo quanto innanzi esposto, si definisce sottostruttura un insieme di nodi rigidi collegati da elementi deformabili del quale interessa mettere in evidenza la relazione tra azioni e componenti di movimento di un insieme ridotto di punti nodali e l'entità delle azioni che insorgono in tali punti per effetto dei carichi quando essi (solo essi e non anche gli altri nodi) sono bloccati, in modo da poter considerare questo insieme come macroelemento

in una struttura più complessa. Nei paragrafi che seguono viene mostrato come ricavare queste informazioni a partire dalla matrice di rigidezza e dal vettore azioni di incastro dell'insieme, operazione indicata col termine *condensazione* perché condensa tale matrice e vettore in un'altro di dimensioni minori. Questo modo di procedere viene poi particolarizzato per il caso di telaio piano visto come costituente di un insieme spaziale di telai, mostrando anche come procedere all'assemblaggio delle informazioni relative a ciascun telaio per ottenere la matrice di rigidezza ed il vettore azioni di incastro dell'insieme spaziale.

2. Condensazione della matrice di rigidezza e del vettore azioni di incastro

Nel capitolo precedente si è ricavata la relazione generale che fornisce le azioni \mathbf{R} sui nodi di una struttura come somma di un'aliquota $\overline{\mathbf{R}}$ dovuta alle azioni ad essi direttamente applicate ed ai carichi sugli elementi, in assenza di movimento dei nodi, ed un'altra dovuta alle componenti di movimento nodale \mathbf{r} e linearmente dipendente da queste mediante la matrice di rigidezza \mathbf{K}

$$\mathbf{R} = \overline{\mathbf{R}} - \mathbf{K} \mathbf{r} \quad (4.1)$$

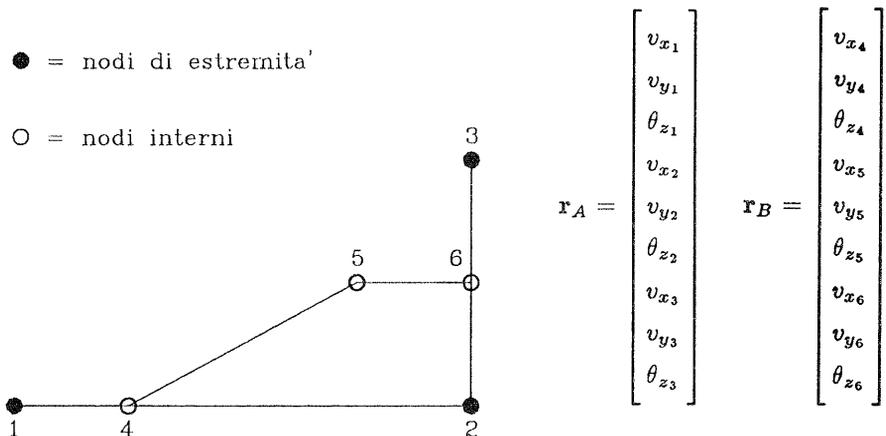


Fig. 4.4 — Sottostruttura che rappresenta il complesso costituito da trave a ginocchio, trave di piano e pilastro

Si prende ora in esame una generica sottostruttura, ad esempio l'insieme di aste mostrato in figura 4.4. Le sue componenti di movimento nodale possono essere divise in due gruppi, A e B , a seconda che esse appartengono rispettivamente ai nodi di estremità del macroelemento o ai nodi interni.

Nel numerare tali componenti è sempre possibile individuare prima quelle appartenenti ad A e poi quelle di B , in modo da poter considerare il vettore \mathbf{r} come diviso nei due sottoinsiemi \mathbf{r}_A ed \mathbf{r}_B . In maniera analoga il vettore azioni nodali risulta scomposto nei vettori \mathbf{R}_A ed \mathbf{R}_B e la matrice di rigidezza nelle quattro sottomatrici \mathbf{K}_{AA} , \mathbf{K}_{AB} , \mathbf{K}_{BA} , \mathbf{K}_{BB} . La relazione (4.1) può in tal caso scriversi

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_A \\ \mathbf{R}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{R}}_A \\ \bar{\mathbf{R}}_B \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{AA} & \mathbf{K}_{AB} \\ \mathbf{K}_{BA} & \mathbf{K}_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_A \\ \mathbf{r}_B \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

ovvero

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_A &= \bar{\mathbf{R}}_A - \mathbf{K}_{AA} \mathbf{r}_A - \mathbf{K}_{AB} \mathbf{r}_B \\ \mathbf{R}_B &= \bar{\mathbf{R}}_B - \mathbf{K}_{BA} \mathbf{r}_A - \mathbf{K}_{BB} \mathbf{r}_B \end{aligned} \quad (4.3)$$

In analogia a quanto fatto per la singola asta, si possono indicare con \mathbf{S} le azioni trasmesse al macroelemento nei nodi di estremità e con \mathbf{s} le componenti di movimento di questi nodi.

Si valuta innanzitutto l'entità delle azioni di estremità che nascono in conseguenza al movimento dei nodi di estremità ($\mathbf{r}_A = \mathbf{s}$) in assenza di carichi ($\bar{\mathbf{R}}_A = \bar{\mathbf{R}}_B = 0$). Le azioni \mathbf{R}_A sui nodi esterni sono uguali ed opposte a quelle trasmesse al macroelemento ($\mathbf{R}_A = -\mathbf{S}$) mentre quelle sui nodi interni devono essere nulle perché questi possano essere in equilibrio ($\mathbf{R}_B = 0$). Dalle (4.3) si ha

$$\begin{aligned} -\mathbf{S} &= -\mathbf{K}_{AA} \mathbf{s} - \mathbf{K}_{AB} \mathbf{r}_B \\ 0 &= -\mathbf{K}_{BA} \mathbf{s} - \mathbf{K}_{BB} \mathbf{r}_B \end{aligned}$$

e ricavando \mathbf{r}_B dalla seconda relazione e sostituendolo nella prima si ottiene la relazione lineare

$$\mathbf{S} = (\mathbf{K}_{AA} - \mathbf{K}_{AB} \mathbf{K}_{BB}^{-1} \mathbf{K}_{BA}) \mathbf{s}$$

ovvero

$$\mathbf{S} = \mathbf{k} \mathbf{s}$$

dove

$$\mathbf{k} = \mathbf{K}_{AA} - \mathbf{K}_{AB} \mathbf{K}_{BB}^{-1} \mathbf{K}_{BA} \quad (4.4)$$

rappresenta la *matrice di rigidezza condensata* della sottostruttura. Il significato fisico di questa relazione può essere compreso osservando che la sottomatrice di rigidezza \mathbf{K}_{AA} fornisce le azioni di estremità conseguenti

ai movimenti dei nodi di estremità quando i nodi interni sono bloccati, mentre \mathbf{k} fornisce le azioni che insorgono quando questi ultimi sono liberi. Il termine $-\mathbf{K}_{AB} \mathbf{K}_{BB}^{-1} \mathbf{K}_{BA}$ deve quindi rappresentare la variazione di rigidità, ovvero la variazione delle azioni dei nodi di estremità conseguente al movimento dei nodi interni.

Si considera poi ciò che avviene per effetto dei carichi applicati ai nodi interni o agli elementi della sottostruttura quando i nodi di estremità sono bloccati ($\mathbf{r}_A = 0$), mentre quelli interni sono liberi di spostarsi e ruotare. Per l'equilibrio dei nodi interni deve essere anche in questo caso $\mathbf{R}_B = 0$, mentre le azioni sui nodi di estremità sono uguali ed opposte alle azioni di incastro perfetto $\bar{\mathbf{S}}$ della sottostruttura, o *azioni di incastro condensate* ($\mathbf{R}_A = -\bar{\mathbf{S}}$). Dalle (4.3) si ha

$$\begin{aligned} -\bar{\mathbf{S}} &= \bar{\mathbf{R}}_A - \mathbf{K}_{AB} \mathbf{r}_B \\ 0 &= \bar{\mathbf{R}}_B - \mathbf{K}_{BB} \mathbf{r}_B \end{aligned}$$

ed operando come nel caso precedente si ottiene l'espressione del vettore azioni di incastro condensate della sottostruttura

$$\bar{\mathbf{S}} = -\bar{\mathbf{R}}_A + \mathbf{K}_{AB} \mathbf{K}_{BB}^{-1} \bar{\mathbf{R}}_B \quad (4.5)$$

La relazione complessiva tra azioni di estremità, componenti di movimento e carichi è infine fornita, per il macroelemento come già per la singola asta, dalla relazione

$$\mathbf{S} = \bar{\mathbf{S}} + \mathbf{k} \mathbf{s} \quad (4.6)$$

Mediante le (4.4) e (4.5) è possibile ricavare tutte le informazioni relative al macroelemento a partire da quelle relative allo stesso visto come una struttura autonoma, determinabili seguendo l'impostazione illustrata nel capitolo precedente. La semplicità formale delle espressioni non mette però in evidenza la complessità operativa, costituita soprattutto dalla necessità di invertire la matrice \mathbf{K}_{BB} che è di ordine tanto maggiore quanto più numerosi sono i nodi interni della sottostruttura. Lo stesso risultato può ottenersi con minor onere computazionale utilizzando il procedimento di riduzione Gaussiana descritto in dettaglio nel terzo capitolo della seconda parte del testo. La relazione matriciale (4.2) può essere riscritta per la sottostruttura evidenziando che le azioni sui nodi esterni sono opposte a quelle trasmesse da questi al macroelemento ($\mathbf{R}_A = -\mathbf{S}$) mentre quelle sui nodi interni sono nulle ($\mathbf{R}_B = 0$)

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{S} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{R}}_A \\ \bar{\mathbf{R}}_B \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{AA} & \mathbf{K}_{AB} \\ \mathbf{K}_{BA} & \mathbf{K}_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{r}_B \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Questa relazione è in effetti costituita da un insieme di equazioni in numero pari al totale delle componenti di movimento dei nodi (interni o di estremità). La riduzione Gaussiana consiste nell'effettuare combinazioni lineari delle equazioni in maniera tale da azzerare parte dei coefficienti della matrice \mathbf{K} e trasformare questa in una matrice triangolare (cioè nella quale sono nulli tutti i termini al di sopra o al di sotto della diagonale principale). Nel caso in esame la triangularizzazione può essere arrestata quando si è azzerata la matrice \mathbf{K}_{AB} ed il triangolo superiore della \mathbf{K}_{BB} . Si può constatare che nel far ciò il vettore al primo membro della (4.7) non viene modificato, e la relazione matriciale diventa quindi

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{S} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{R}}'_A \\ \overline{\mathbf{R}}'_B \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{K}'_{AA} & 0 \\ \mathbf{K}'_{BA} & \mathbf{K}'_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{r}_B \end{bmatrix}$$

ovvero

$$\mathbf{S} = -\overline{\mathbf{R}}'_A + \mathbf{K}'_{AA} \mathbf{s}$$

$$0 = \overline{\mathbf{R}}'_B - \mathbf{K}'_{BA} \mathbf{s} - \mathbf{K}'_{BB} \mathbf{r}_B$$

La prima espressione confrontata con la (4.6) mostra che il vettore $\overline{\mathbf{R}}'_A$ (a meno del segno) e la matrice \mathbf{K}'_{AA} forniti dalla riduzione rappresentano proprio il vettore azioni di incastro e la matrice di rigidezza del macroelemento

$$\overline{\mathbf{S}} = -\overline{\mathbf{R}}'_A \quad (4.8)$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{K}'_{AA}$$

La seconda espressione può anche scriversi

$$\mathbf{K}'_{BB} \mathbf{r}_B = \overline{\mathbf{R}}'_B - \mathbf{K}'_{BA} \mathbf{s} \quad (4.9)$$

e da essa è possibile ricavare le componenti di movimento dei nodi interni \mathbf{r}_B in funzione dei carichi e delle componenti di movimento di estremità, mediante il procedimento di sostituzione all'indietro descritto nella seconda parte del libro.

3. Matrice di rigidezza traslante di un telaio piano

Una sottostruttura particolarmente interessante ai fini applicativi è il telaio piano, visto come costituente di un insieme spaziale di telai. Esso

viene descritto utilizzando un sistema di riferimento locale $x'y'$, con l'asse x' orizzontale ed orientato verso destra, l'asse y' verticale ed orientato verso l'alto (fig.4.5). I nodi di estremità sono costituiti dai traversi inestensibili, che nella trattazione qui svolta verranno per semplicità supposti orizzontali. Ciascuno di essi è dotato di un unico grado di libertà, la traslazione nella direzione del traverso. I vettori azioni di estremità \mathbf{S} e componenti di movimento di estremità \mathbf{s} racchiudono quindi rispettivamente le forze orizzontali applicate ai traversi e gli spostamenti orizzontali di questi.

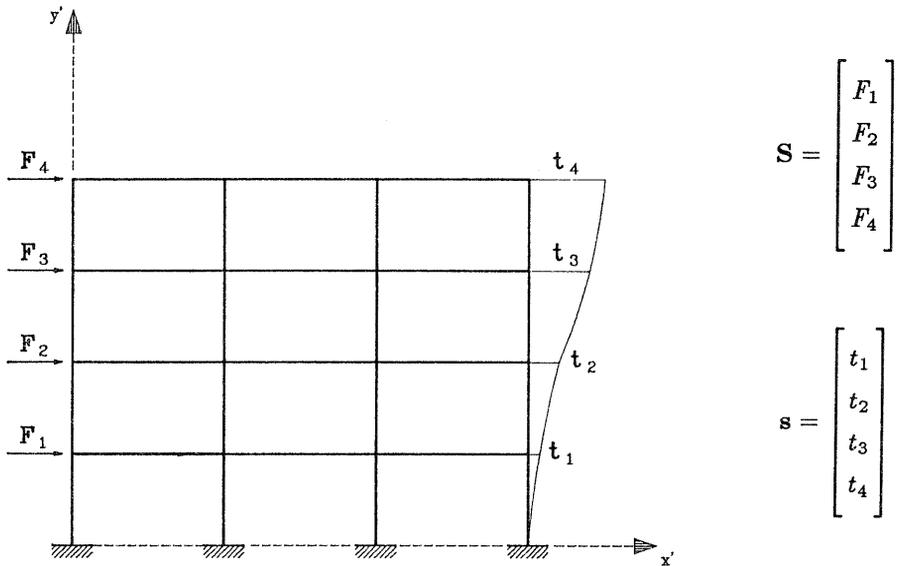


Fig. 4.5 — Sistema di riferimento locale per un telaio piano; azioni e componenti di movimento di estremità

Il criterio di numerazione delle incognite adottato nel capitolo precedente rispetta già il requisito di scindere le componenti di movimento in due gruppi, \mathbf{r}_t ed \mathbf{r}_a , che contengono rispettivamente le traslazioni dei traversi e le componenti di movimento dei nodi interni (fig. 4.6). Corrispondentemente la matrice di rigidezza globale del telaio è stata suddivisa nelle quattro sottomatrici \mathbf{K}^{tt} , \mathbf{K}^{ta} , \mathbf{K}^{at} , \mathbf{K}^{aa} .

Mediante le operazioni matriciali indicate dalla (4.4) o col procedimento di riduzione Gaussiana che conduce alla (4.8) si determina la matrice di rigidezza \mathbf{k} della sottostruttura; essa esprime la relazione lineare esistente tra forze orizzontali e traslazioni dei traversi e per tale motivo è denominata matrice di rigidezza traslante del telaio piano. Il generico termine k_{ij} di questa matrice rappresenta l'azione orizzontale F_i conseguente alla

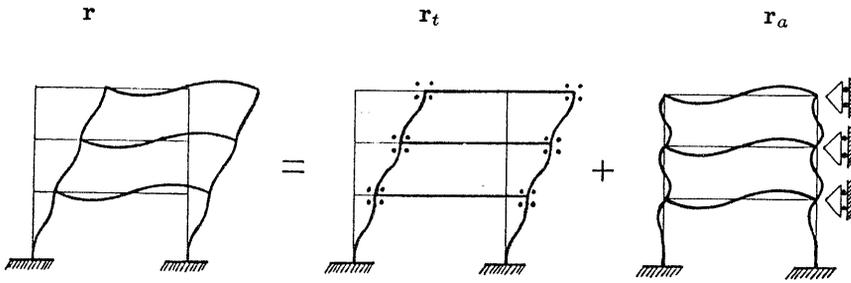


Fig. 4.6 — Componenti di movimento di estremità ed interne

traslazione t_j unitaria, quando gli spostamenti orizzontali degli altri traversi sono impediti (fig. 4.7 a). La matrice di rigidità traslante, analogamente a quella globale della struttura, è simmetrica, definita positiva e non singolare. La sua inversa è denominata matrice di flessibilità traslante f ed il suo generico termine f_{ij} rappresenta lo spostamento t_i conseguente all'azione orizzontale F_j unitaria, in assenza di altre azioni applicate al telaio (fig. 4.7 b). Sfruttando il significato fisico dei termini della matrice di rigidità o flessibilità traslante qui mostrato, alcuni autori hanno proposto nel passato la determinazione di tali matrici mediante ripetute risoluzioni dello schema di telaio a nodi fissi con uno spostamento impresso o a nodi spostabili con una forza applicata. Una simile impostazione può essere considerata interessante dal punto di vista didattico, perché rende visivamente chiara l'essenza delle matrici, ma è sicuramente obsoleta dal punto di vista computazionale e comporterebbe complicazioni e non semplificazioni operative.

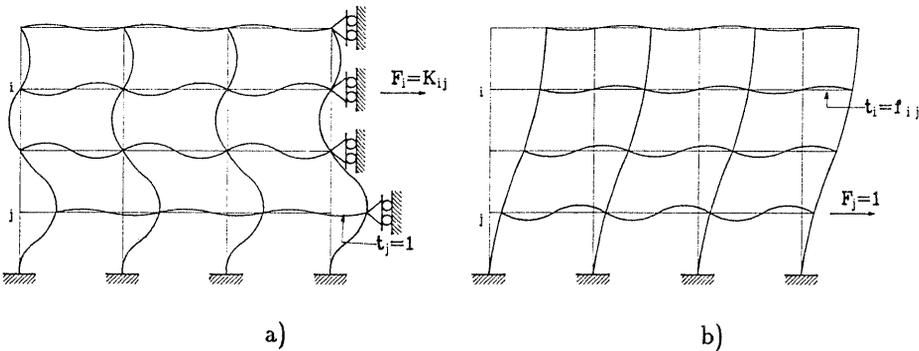


Fig. 4.7 — Significato fisico dei termini delle matrici di rigidità e flessibilità traslante

In maniera analoga, mediante la (4.5) o con la riduzione Gaussiana e la (4.8) si determina il vettore azioni di incastro \bar{S} della sottostruttura. Il generico termine \bar{S}_i di esso rappresenta l'azione orizzontale F_i che insorge per effetto dei carichi applicati alle aste o ai nodi interni del telaio quando i traversi sono impediti di spostarsi (fig.4.8).

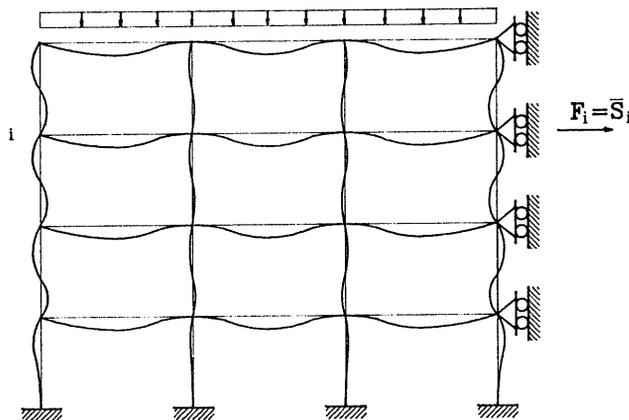


Fig. 4.8 — Significato fisico dei termini del vettore azioni di incastro

4. Matrice di rigidezza traslante di un telaio piano nel riferimento spaziale

Lo studio del comportamento traslante di un telaio piano è finalizzato ad considerarlo come componente di un insieme spaziale di telai piani collegati da impalcati indeformabili planimetricamente. Per descrivere un tale insieme si userà come riferimento una terna ortogonale destrorsa xyz con gli assi x ed y orizzontali e l'asse z verticale ed orientato verso l'alto (fig.4.9). Essa viene denominata *sistema di riferimento globale* dello schema spaziale, per distinguerla dal riferimento locale utilizzato per il singolo telaio.

Nella trattazione qui svolta si ipotizza per semplicità che sia i traversi dei telai piani che gli impalcati dello schema spaziale siano tali da costituire un vincolo mutuo allo spostamento orizzontale dei nodi da essi collegati. Occorre a tale proposito osservare che un'asta inestensibile impone che i nodi di estremità traslino della stessa quantità nella direzione del suo asse; si ha l'uguaglianza dello spostamento orizzontale in due casi: quando l'asta è orizzontale o quando lo spostamento verticale dei nodi è impedito, per esempio per la presenza di pilastri indeformabili assialmente. In numerosi casi

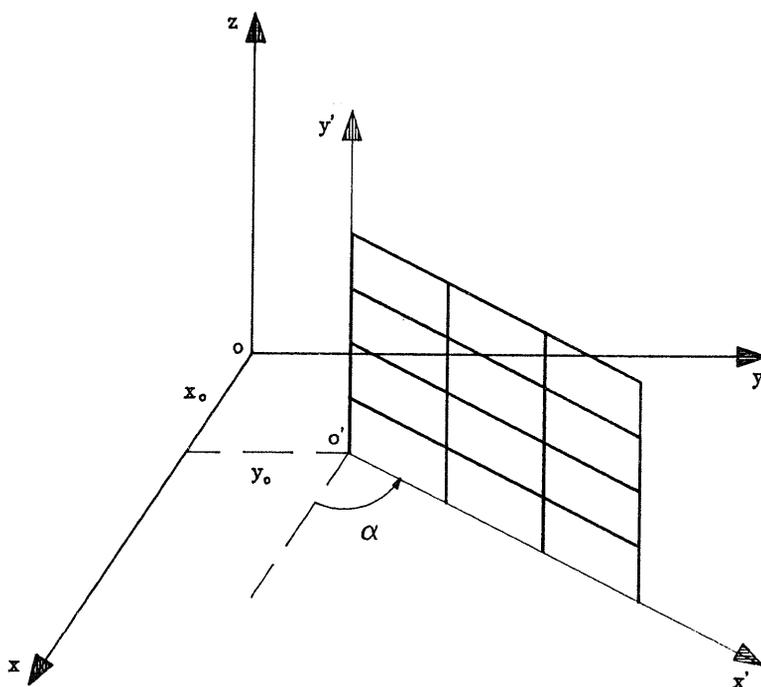


Fig. 4.9 — Sistema di riferimento globale per un insieme spaziale di telai piani

l'ipotesi può però essere formulata in via approssimata, se l'inclinazione è modesta o gli spostamenti verticali sono piccoli rispetto a quelli orizzontali.

Coerentemente con la definizione richiamata all'inizio, l'insieme spaziale di telai piani è una struttura che ha come nodi rigidi gli impalcati e come elementi deformabili i telai piani. Il generico impalcato i , indeformabile nel suo piano, possiede tre gradi di libertà. Le componenti che ne descrivono il movimento sono costituite dalle traslazioni v_{xi} e v_{yi} di un suo punto P (positive se concordi con gli assi) e dalla rotazione intorno all'asse verticale θ_{zi} (positiva se nel verso che porta l'asse x su y). Il punto P può essere scelto arbitrariamente, ed in particolare lo si considera coincidente con l'intersezione dell'asse z col piano dell'impalcato. In maniera duale le azioni ad esso applicate possono essere ricondotte alle forze F_{xi} e F_{yi} in P ed al momento M_{zi} .

Per ciascuna sottostruttura "telaio piano" si possono quindi definire i vettori azioni e componenti di movimento di estremità nel riferimento globale, S_g e s_g . Nel raggruppare in S_g le azioni si preferisce disporre ordinatamente prima tutte le forze F_x , poi le F_y ed infine le M_z ; S_g può

quindi considerarsi composto da tre vettori

$$\mathbf{S}_g = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{g_x} \\ \mathbf{S}_{g_y} \\ \mathbf{S}_{g_z} \end{bmatrix}$$

dove per un telaio con n traversi si ha

$$\mathbf{S}_{g_x} = \begin{bmatrix} F_{x_1} \\ F_{x_2} \\ \dots \\ F_{x_n} \end{bmatrix} \quad \mathbf{S}_{g_y} = \begin{bmatrix} F_{y_1} \\ F_{y_2} \\ \dots \\ F_{y_n} \end{bmatrix} \quad \mathbf{S}_{g_z} = \begin{bmatrix} M_{z_1} \\ M_{z_2} \\ \dots \\ M_{z_n} \end{bmatrix}$$

In maniera duale si ha per gli spostamenti

$$\mathbf{s}_g = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{g_x} \\ \mathbf{s}_{g_y} \\ \mathbf{s}_{g_z} \end{bmatrix}$$

con

$$\mathbf{s}_{g_x} = \begin{bmatrix} v_{x_1} \\ v_{x_2} \\ \dots \\ v_{x_n} \end{bmatrix} \quad \mathbf{s}_{g_y} = \begin{bmatrix} v_{y_1} \\ v_{y_2} \\ \dots \\ v_{y_n} \end{bmatrix} \quad \mathbf{s}_{g_z} = \begin{bmatrix} \theta_{z_1} \\ \theta_{z_2} \\ \dots \\ \theta_{z_n} \end{bmatrix}$$

Per valutare il contributo del telaio piano allo schema spaziale occorre riesaminare le relazioni elastiche, definite per esso nel paragrafo precedente con riferimento al sistema locale $x'y'$, riconducendole a relazioni tra azioni e componenti di movimento degli impalcati nel riferimento spaziale.

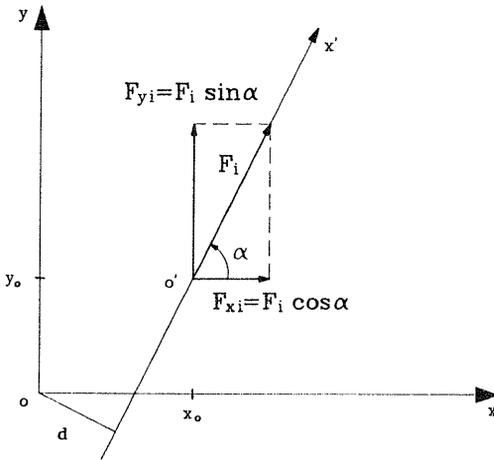
Nel definire i sistemi di riferimento, si è implicitamente supposto che l'asse y' del sistema locale sia parallelo ed equiverso all'asse z del riferimento globale e l'asse x' appartenga al piano xy (ma potrebbe appartenere anche ad un piano parallelo ad esso, senza che ciò infici la trattazione del problema). La posizione della terna locale rispetto alla globale è individuata mediante le coordinate x_0, y_0 dell'origine e l'angolo α formato dall'asse x' rispetto all'asse x (positivo se nel verso che porta x su y).

All'azione F_i applicata al traverso i del telaio piano corrispondono nello schema spaziale le tre azioni F_{x_i} , F_{y_i} , M_{z_i} , legate ad essa, all'inclinazione α dell'asse x' ed alla sua distanza d dall'origine mediante le relazioni (fig. 4.10)

$$F_{x_i} = F_i \cos \alpha$$

$$F_{y_i} = F_i \sin \alpha$$

$$M_{z_i} = F_i d$$



$$M_{z_i} = F_{y_i} x_o - F_{x_i} y_o = F_i d$$

$$\text{con } d = x_o \sin \alpha - y_o \cos \alpha$$

Fig. 4.10 — Trasformazione dell'azione su un traverso dal sistema di riferimento locale a quello globale

Queste possono essere estese a tutti i traversi ed espresse in forma matriciale per rappresentare il legame tra azioni nel riferimento locale \mathbf{S} e azioni nel riferimento globale \mathbf{S}_g . Si ha

$$\begin{aligned} S_{g_x} &= \cos \alpha \quad \mathbf{S} \\ S_{g_y} &= \sin \alpha \quad \mathbf{S} \\ S_{g_z} &= d \quad \mathbf{S} \end{aligned}$$

ovvero

$$\mathbf{S}_g = \mathbf{T} \mathbf{S} \quad (4.10)$$

avendo indicato con \mathbf{T} la matrice di trasformazione

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \mathbf{I} \\ \sin \alpha & \mathbf{I} \\ d & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

e con \mathbf{I} la matrice identità di ordine n (cioè una matrice quadrata avente i termini della diagonale principale pari ad 1 e tutti gli altri nulli).

In maniera duale si ricava lo spostamento t_i del traverso conseguente alle componenti di movimento dell'impalcato

$$t_i = v_{x_i} \cos \alpha + v_{y_i} \sin \alpha + \theta_z d$$

ed estendendo la relazione a tutti i traversi

$$\mathbf{s} = \cos \alpha \mathbf{s}_{g_x} + \sin \alpha \mathbf{s}_{g_y} + d \mathbf{s}_{g_z}$$

ovvero

$$\mathbf{s} = \mathbf{T}^T \mathbf{s}_g \quad (4.12)$$

Utilizzando le (4.10) e (4.12), insieme alla relazione tra azioni, carichi e componenti di movimento nel riferimento locale (4.6), si ottiene l'analogia relazione valida per il sistema di riferimento globale

$$\mathbf{S}_g = \mathbf{T} \mathbf{S} = \mathbf{T}(\bar{\mathbf{S}} + \mathbf{k} \mathbf{s}) = \mathbf{T} \bar{\mathbf{S}} + \mathbf{T} \mathbf{k} \mathbf{T}^T \mathbf{s}_g$$

ovvero

$$\mathbf{S}_g = \bar{\mathbf{S}}_g + \mathbf{k}_g \mathbf{s}_g \quad (4.13)$$

avendo indicato rispettivamente con \mathbf{k}_g la matrice di rigidezza traslante e con $\bar{\mathbf{S}}_g$ il vettore azioni di incastro del telaio nel riferimento globale

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_g &= \mathbf{T} \mathbf{k} \mathbf{T}^T \\ \bar{\mathbf{S}}_g &= \mathbf{T} \bar{\mathbf{S}} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Le (4.14) possono essere esplicitate utilizzando la definizione (4.11) della matrice di trasformazione; si ottiene così

$$\mathbf{k}_g = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha \mathbf{K} & \sin \alpha \cos \alpha \mathbf{K} & d \cos \alpha \mathbf{K} \\ \sin \alpha \cos \alpha \mathbf{K} & \sin^2 \alpha \mathbf{K} & d \sin \alpha \mathbf{K} \\ d \cos \alpha \mathbf{K} & d \sin \alpha \mathbf{K} & d^2 \mathbf{K} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

$$\bar{\mathbf{S}}_g = \begin{bmatrix} \cos \alpha \bar{\mathbf{S}} \\ \sin \alpha \bar{\mathbf{S}} \\ d \bar{\mathbf{S}} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Si osservi che la trasformazione effettuata è perfettamente analoga a quella mostrata nel secondo capitolo come passaggio dagli insiemi fondamentali di azioni e componenti di movimento agli stessi espressi nel riferimento globale. Anche in questo caso gli insiemi S_g ed s_g sono "sovraabbondanti" e la loro relazione con gli insiemi fondamentali S ed s non è biunivoca; ad esempio, a ciascuna terna $v_x v_y \theta_z$ corrisponde un unico spostamento t , ma esistono infinite terne cui corrisponde lo stesso t che differiscono tra loro per una rotazione con centro appartenente all'asse x' . La relazione tra S_g ed s_g , espressa dalla matrice di rigidezza k_g , non è quindi invertibile e ciò corrisponde fisicamente al fatto che è possibile assegnare agli impalcati spostamenti arbitrari e ricavare le azioni sul telaio a essi conseguenti, ma non ha senso applicare forze arbitrarie e valutare la corrispondente deformazione del telaio perché esso può sopportare solo forze agenti nel suo piano.

5. Matrice di rigidezza dell'insieme spaziale di telai

Esaminando le tipologie di edifici per i quali è possibile adottare il modello di insieme spaziale di telai piani, si possono evidenziare situazioni nelle quali un impalcato non collega tutti i telai. Ciò si ha per esempio nel caso di edifici a piani sfalsati, esaminato numericamente nella terza parte del testo. Per descrivere lo schema spaziale occorre quindi fornire una tabella di corrispondenza tra traversi ed impalcati, che indichi il numero d'ordine dell'impalcato cui appartiene ciascun traverso. Si esclude invece la possibilità che un traverso non sia collegato ad alcun impalcato. Un tale traverso dovrebbe essere conteggiato non tra i nodi di estremità del macroelemento ma tra quelli interni e la relativa forza o spostamento dovrebbe scomparire nella condensazione.

Per quanto detto, l'insieme delle azioni o delle componenti di movimento degli impalcati si presenta in generale più ampio rispetto all'insieme delle azioni o componenti di movimento del singolo telaio nel riferimento spaziale, coincidendo con questo solo nel caso (invero molto frequente) in cui gli impalcati collegano tutti i telai. Si indica con \mathbf{R} il vettore azioni e con \mathbf{r} il vettore componenti di movimento, e si ordinano in essi gli elementi rispettando il criterio definito per il singolo telaio, consentendo così di evidenziare i tre sottoinsiemi $\mathbf{R}_x \mathbf{R}_y \mathbf{R}_z$ e $\mathbf{r}_x \mathbf{r}_y \mathbf{r}_z$ che contengono rispettivamente le azioni (o traslazioni) in direzione x , quelle in direzione y e i momenti (o rotazioni).

La ricerca di relazioni valide per l'insieme spaziale di telai piani, a partire da quelle del singolo telaio, procede allo stesso modo di quanto

fatto nel capitolo precedente per l'insieme piano di aste. Si giunge quindi all'espressione, formalmente identica

$$\mathbf{R} = \bar{\mathbf{R}} - \mathbf{K} \mathbf{r} \quad (4.17)$$

Il vettore $\bar{\mathbf{R}}$ contiene le azioni complessive sugli impalcati esercitate dai carichi, applicati sia direttamente ad essi che su aste e nodi interni dei telai, quando il movimento degli impalcati è impedito. Lo si può determinare con facilità seguendo il metodo di determinazione diretta già presentato: per ciascun telaio, il generico termine del vettore azioni di incastro $\bar{\mathbf{S}}_g$ corrispondente ad una direzione d ed un traverso t viene aggiunto al termine di $\bar{\mathbf{R}}$ che corrisponde alla stessa direzione d ed all'impalcato i cui appartiene t (cambiandone il segno, perché $\bar{\mathbf{S}}_g$ contiene le azioni sul telaio mentre $\bar{\mathbf{R}}$ quelle sugli impalcati); ad $\bar{\mathbf{R}}$ si aggiungono poi le azioni esterne applicate direttamente agli impalcati.

La matrice di rigidezza dell'insieme spaziale \mathbf{K} è valutata in maniera analoga. Per ciascun telaio il termine corrispondente ad una direzione d che rappresenta l'interazione tra due traversi t_1 e t_2 viene sommato al termine di \mathbf{K} corrispondente alla stessa direzione d e che rappresenta l'interazione tra gli impalcati i_1 ed i_2 cui appartengono t_1 e t_2 .

6. Equilibrio degli impalcati e risoluzione del problema

Per l'equilibrio degli impalcati è necessario che siano nulle le azioni \mathbf{R} su essi complessivamente esercitate. Dalla (4.17) si ha quindi

$$\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{K} \mathbf{r} \quad (4.18)$$

dalla quale si ottiene la soluzione del problema iperstatico

$$\mathbf{r} = \mathbf{K}^{-1} \bar{\mathbf{R}} \quad (4.19)$$

Anche in questo caso conviene risolvere direttamente il sistema di equazioni (4.18), con i procedimenti illustrati nella seconda parte del testo, anziché effettuare l'inversione della matrice \mathbf{K} .

Il procedimento da seguire per l'analisi di un insieme spaziale di telai appare quindi concettualmente ben delineato. Occorre innanzitutto esaminare il singolo telaio piano, costruirne la matrice di rigidezza ed il vettore azioni di incastro globali ed effettuarne la condensazione per ricavare la matrice di rigidezza ed il vettore azioni di incastro traslanti. Utilizzando

le informazioni fornite dalla tabella di corrispondenza traversi-impalcati si assemblano le matrici ed i vettori dei singoli telai costruendo quelle relative all'insieme spaziale. La soluzione del sistema (4.18) fornisce i valori delle componenti di movimento degli impalcati, dalle quali si ricavano gli spostamenti dei traversi dei singoli telai. Noti questi, mediante la (4.9) si possono determinare le componenti di movimento dei nodi interni e da queste infine le caratteristiche di sollecitazione nelle aste.

Nel concludere, è opportuno ribadire i limiti di validità dello schema esaminato. I singoli telai sono del tutto indipendenti l'uno dall'altro, tranne che per gli spostamenti orizzontali dei traversi. Il modello non tiene quindi conto dell'accoppiamento flessionale e torsionale di travi di telai distinti incidenti in un unico punto, né della congruenza verticale dei nodi comuni a due telai. In particolare non ha senso utilizzarlo in una analisi che riunisca insieme telai in elevazione ed un graticcio di travi in fondazione, per la quale la congruenza verticale è essenziale. Nonostante ciò, lo schema risulta adottabile in un'ampia gamma di situazioni, perché i problemi innanzi citati sono spesso trascurabili. Inoltre, il criterio di scomporre una struttura in sottostrutture più semplici ha una potenzialità applicativa ancora più vasta perché consente di proporre ed analizzare con facilità numerosi altri modelli strutturali.

