

# APPENDICE



# IL PROBLEMA DELLA VERIFICA DEGLI IMPALCATI NEGLI EDIFICI IN ZONA SISMICA

*Aurelio Ghersi, Pietro Lenza*

## Sommario.

Si esamina il problema della verifica di resistenza e rigidità degli impalcati di edifici in zona sismica, necessaria per confermare il corretto impiego del modello di telaio spaziale a piani rigidi nell'analisi del fabbricato. Si propone l'esame sia della nuda struttura intelaiata che della stessa irrigidita da tompagnature, evidenziando problemi di interazione locale e globale.

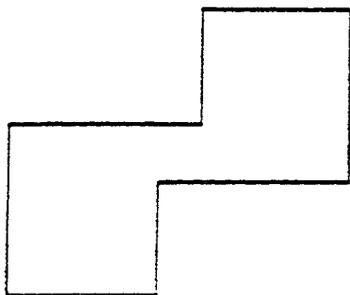
## 1. Introduzione.

Durante un terremoto, il movimento del terreno alla base di un fabbricato provoca accelerazioni in ogni massa presente in esso. L'edificio subisce un moto rigido di trascinamento che lo obbliga a seguire lo spostamento del terreno ed un moto di deformazione relativa, rispetto alla base fondale, dovuto all'elasticità del sistema [15]. Il sistema può quindi essere considerato in ogni istante equivalente ad un insieme di carichi orizzontali diffusi, pari alle forze d'inerzia.

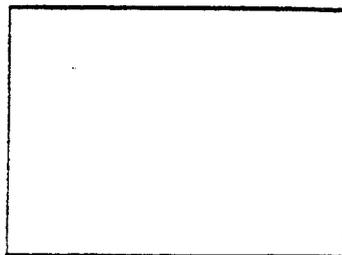
Nel definire il modello oggettivo dell'edificio, si prevede usualmente che esso sia dotato di impalcati orizzontali, continui e indeformabili nel loro piano, tali da costituire un vincolo mutuo tra i nodi della struttura. Grazie a tale ipotesi, nell'effettuare il calcolo del complesso spaziale è pos-

sibile considerare agente ad ogni livello direttamente l'azione complessiva, proporzionale alla massa totale ivi disposta.

Per accettare i risultati in tal modo conseguiti è però necessario controllare "a posteriori" l'attendibilità delle ipotesi formulate. La continuità è una caratteristica che dipende esclusivamente dalla geometria dell'impalcato, ed è quindi immediatamente riscontrabile. L'indefornabilità è invece legata anche ai carichi su esso agenti e richiede uno specifico controllo.



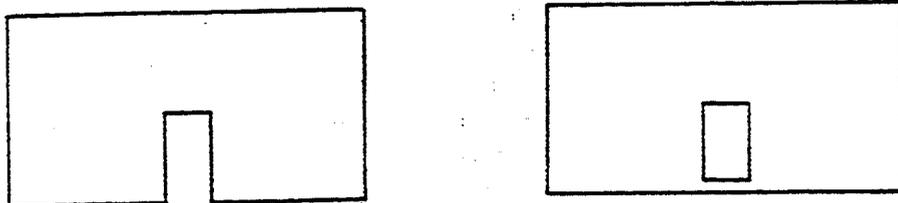
a) impalcato planimetricamente debole



b) impalcato compatto

FIG.1

Da un punto di vista puramente qualitativo, appare importante innanzitutto la forma planimetrica dell'impalcato. Nel caso di piante caratterizzate da sensibili restringimenti, come quella mostrata in figura 1a, l'ipotesi appare meno attendibile; infatti la deformazione, sia pure limitata alla zona più debole, può produrre anche notevoli variazioni di forma dell'intero impalcato; perché essa sia valida è quindi necessario che la distribuzione degli elementi resistenti verticali e dei carichi sia tale da non indurre sollecitazioni elevate nella zona più debole e che questa sia contemporaneamente ben rafforzata. Molto più idonee sono invece le forme compatte, come quella mostrata nella figura 1b. Nell'esprimere un giudizio sulle piante rettangolari allungate, spesso adottate dai progettisti architettonici, occorre tener presente che le rampe della scala sono elementi posti al di fuori del piano dell'impalcato, che presenta quindi in corrispondenza ad esse un sensibile restringimento (fig.2a). Un valido accorgimento per tali casi è proposto da A.Giliberti [11,14], che consiglia di realizzare la scala mediante una soletta rampante, che scarica su una trave di testata collegata mediante pilastri ad una trave posta alla stessa quota dei solai. La presenza di questa trave a livello del piano (fig.2b) aumenta infatti in misura rilevante la rigidità e la resistenza flessionale dell'impalcato (nel parlare di flessione si sottintende un modello di trave che, pur se non perfettamente rispondente alla realtà, può essere adottato quando la pianta è sensibilmente allungata).



a) impalcato con scala normale. FIG.2 b) impalcato con scala alla Giliberti

Ugualmente rilevante è la distribuzione degli elementi resistenti verticali. Tensioni e deformazioni nell'impalcato sono tanto minori quanto più diffusa ed uniforme è la presenza di irrigidimenti. L'ipotesi di impalcato indeformabile è quindi più attendibile nel caso di strutture intelaiate, mentre è più facile che cada in difetto per strutture dotate di un numero limitato di pareti in cemento armato o di tompagnature molto robuste e ben ammassate alla struttura intelaiata.

Per quanto utile, un esame qualitativo non è sufficiente per accertare la validità delle ipotesi. Occorre quindi verificare quantitativamente la rigidità dell'impalcato, cioè controllare che le deformazioni provocate dai carichi su esso agenti siano trascurabili rispetto alle deformazioni del complesso spaziale. Occorre però verificarne anche la resistenza, cioè controllare che le tensioni provocate da tali carichi siano ammissibili per il calcestruzzo e che sia ovunque disposta una armatura idonea ad assorbire gli sforzi di trazione.

Per effettuare le verifiche anzidette, occorre definire per l'impalcato uno schema geometrico e di carico. Col termine impalcato si indica in generale il complesso di solai e travi. Nei confronti di azioni orizzontali, quali quelle sismiche, esso è schematizzabile come una lastra nervata; la soletta del solaio ne rappresenta l'elemento principale, mentre travetti del solaio, travetti di ripartizione e travi ne costituiscono le nervature. Nel caso di piante molto allungate è possibile adottare, in alternativa a quello di lastra, il modello di trave alla De Saint Venant. La rispondenza teorica è minore, perché le due dimensioni della sezione sono nettamente differenti tra loro, ma i risultati ottenuti sono in genere accettabili, purché nel calcolare gli spostamenti si tenga conto anche della deformabilità tagliante.

Nel definire lo schema di carico è necessario far riferimento all'azione provocata dalla singola massa, e quindi schematizzare il sisma come un carico distribuito. Poiché usualmente le masse hanno una disposizione planimetrica regolare, si ottengono risultati sufficientemente corretti supponendo che esse siano distribuite uniformemente in pianta. Si valuterà in tal caso un carico sismico a metro quadro, come rapporto tra la forza totale

e la superficie dell'impalcato. Tale carico è bilanciato dalle azioni taglianti trasmesse dagli elementi verticali (pilastri ed eventualmente tompagni). A tale proposito, si noti che la presenza di tompagnature è stata trascurata nel calcolo dell'ossatura spaziale perché in genere essa comporta una riduzione globale delle sollecitazioni in travi e pilastri (anche se localmente può esservi un aggravio dello stato tensionale). Essa però comporta allo stesso tempo una variazione di distribuzione delle azioni taglianti che può invece risultare più gravosa per l'impalcato. Nel verificare quest'ultimo è quindi opportuno utilizzare più schemi di carico, corrispondenti alla assenza ed alla presenza di tompagnature.

## 2. Ossatura intelaiata priva di tompagni.

La risoluzione dello schema intelaiato tridimensionale fornisce i valori del taglio in tutti i pilastri. Sezionando la struttura in modo da isolare un impalcato (fig.3), questo può essere considerato come una lastra libera nello spazio, soggetta ad un insieme di carichi equilibrati: un carico distribuito equivalente al sisma ed azioni concentrate pari alla differenza tra i tagli dei pilastri superiori e di quelli inferiori. Si noti che per l'equilibrio alla rotazione sono necessari anche i tagli che nascono nei telai perpendicolari alla direzione dell'azione sismica.

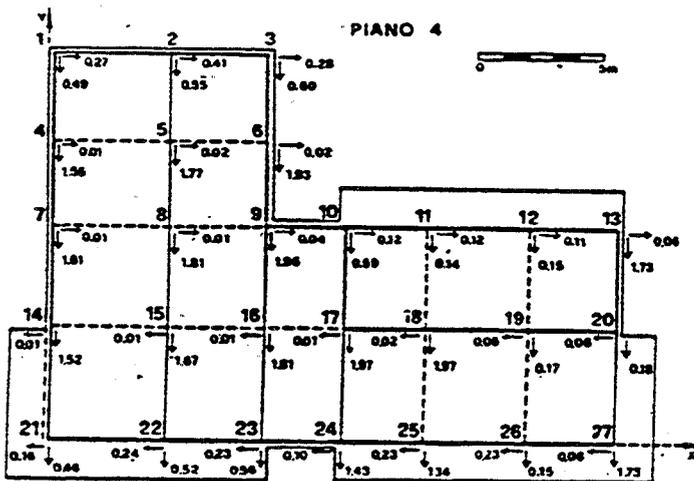


FIG.3 Sollecitazioni negli impalcati degli edifici.

Con riferimento al fabbricato esaminato in [13] si considera il quarto impalcato soggetto ai tagli trasmessi dai ritti superiori ed inferiori che complessivamente equilibrano l'azione sismica di piano (analisi statica, sisma in direzione y) considerata uniformemente distribuita sull'impalcato.

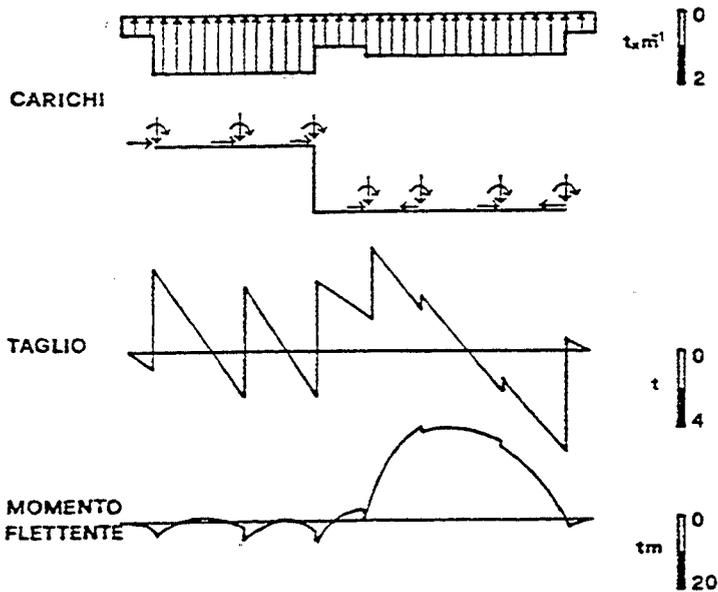


FIG.4a I diagrammi del taglio e del momento flettente per l'impalcato mostrato in fig.3 sono stati ottenuti assimilando l'impalcato ad una trave disposta nella fibra baricentrica, ove si trasportano le singole azioni taglianti con i relativi momenti.

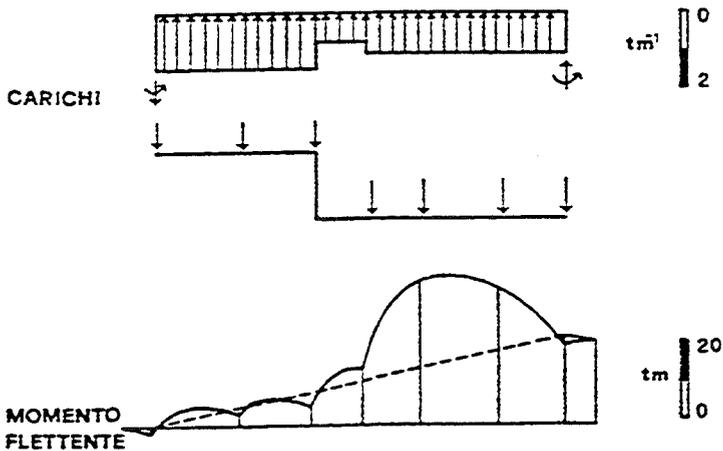


FIG.4b Se si trascura il contributo dei telai ortogonali alla direzione del sisma il momento squilibrato può approssimativamente considerarsi distribuito uniformemente lungo l'asse dell'impalcato; ciò corrisponde ad uno spostamento della fondamentale del diagramma (linea tratteggiata).

Nel caso di pianta di forma allungata, se per l'impalcato si utilizza il modello di trave l'entità del carico distribuito sarà ottenuta per ciascuna sezione moltiplicando il carico a metro quadro per la larghezza dell'impalcato. Tale carico è bilanciato da forze concentrate, poste in corrispondenza dei telai paralleli al sisma e pari alla somma algebrica dei tagli dei pilastri di ciascun telaio, e da momenti dovuti alle azioni taglianti ortogonali al sisma (fig.4a). Con una discreta approssimazione questi momenti possono essere sostituiti da un carico flettente uniformemente distribuito lungo l'asse della trave (fig.4b).

Deformazioni e sollecitazioni saranno tanto maggiori quanto più elevato è il carico sismico. Poiché le accelerazioni, e quindi le forze, dovute al terremoto sono massime ai piani superiori, le condizioni più gravose per tale schema si avranno quasi sempre nell'ultimo impalcato.

### 3. Ossatura intelaiata con tompagni.

La valutazione dell'effettivo contributo di un tompagno inserito in una maglia di un telaio presenta notevole complessità. La sua presenza infatti non altera l'integrità e la continuità della struttura intelaiata, ma può elasticamente contrastare l'avvicinamento dei vertici della maglia nella quale è inserito, mentre non esplica alcuna azione nel caso di allontanamento (vincolo interno unilaterale). Inoltre, se gli elementi in muratura non sono inizialmente ben ammorinati alla maglia del telaio in cemento armato l'interazione può verificarsi solo dopo deformazioni a volte cospicue.

Nelle applicazioni pratiche si utilizzano schematizzazioni semplificate. Il pannello può essere considerato come una lastra collegata ai nodi della struttura; in tal caso è però problematico tener conto della unilateralità del vincolo. Più semplicemente, e forse con maggior efficacia, può essere schematizzato come una coppia di pendoli che collegano i nodi diagonalmente opposti senza alterare l'integrità del telaio. Tali pendoli contrastano, come si è detto, solo l'avvicinamento dei relativi estremi. Per azioni orizzontali è quindi attivo in genere solo uno dei due.

Studi sperimentali svolti dal 1962 al 1977 da B.Stafford Smith [1], [2], [3], [5], [6] mostrano che la rigidità globale del complesso telaio-pannello dipende, oltre che dalle caratteristiche della muratura e dallo spessore del tompagno, anche dalla estensione della zona di contatto, e quindi sia dal rapporto base/altezza del pannello che dalla rigidità relativa dei due elementi. La larghezza  $B$  da assegnare alla sezione del pendolo può essere ottenuta come aliquota della lunghezza della diagonale del pannello  $l_d$ . Al

variare dei fattori anzidetti  $B$  è compresa tra 0.15 e 0.30  $l_d$ . In base a tali considerazioni, la normativa per le riparazioni ed il rafforzamento degli edifici danneggiati dal sisma nelle Regioni Basilicata, Campania e Puglia [7], [8] consiglia di assumere cautelativamente una larghezza  $B = 0.10 l_d$ . M. Pagano [4], [9] propone invece di mettere in relazione la larghezza del pendolo con l'area  $A$  del pannello:  $B = 0.5 A/l_d$ . Tale espressione equivale a  $B = 0.5 \sin \alpha \cos \alpha l_d$ , dove  $\alpha$  è l'angolo formato dalla diagonale con l'orizzontale. Per gli usuali rapporti base/altezza dei pannelli questa fornisce per  $B$  un valore compreso tra 0.20 e 0.25  $l_d$ , comparabile con quelli ottenuti da Stafford Smith ma sensibilmente maggiore di quanto proposto dalla normativa.

Ancora più complesso è il caso di tompagni con aperture. Una modellazione abbastanza attendibile può essere ottenuta discretizzando il pannello mediante un insieme di lastre, con i problemi già citati relativi alla difficoltà di tener conto dell'unilateralità del vincolo. Ugualmente valido può essere lo schema di pendolo, purché la sezione venga opportunamente ridotta rispetto al caso del pannello non forato. Mancano però precise indicazioni bibliografiche sull'entità della riduzione, che andrà quindi effettuata sulla base dell'esperienza o di considerazioni semplificative.

Le incertezze evidenziate possono essere superate adottando un criterio di fascia di comportamento, cioè risolvendo più schemi limite, che massimizzano e minimizzano il contributo delle tompagnature. Adottando lo schema di pendolo, nel caso di pannelli pieni si potranno considerare come valori estremi per la sua larghezza quelli proposti da Pagano e dalla normativa citata. I tompagni dotati di aperture potranno essere considerati del tutto irrilevanti, oppure equivalenti, a meno di modeste riduzioni, ai pannelli pieni (fig.5).

Ulteriori problemi nascono per il fatto che la collaborazione statica dei tompagni è limitata sia dalla resistenza della muratura, caratterizzata da rottura fragile, sia dall'instabilità euleriana del pendolo (fuori dal piano del pannello). Entrambi i fenomeni producono, in pratica, la messa fuori uso dell'elemento resistente, con conseguente redistribuzione del tagliante assorbito.

Occorre infine ricordare gli effetti locali provocati dalla collaborazione dei tompagni sulle strutture intelaiate. L'azione del pannello, solo macroscopicamente schematizzabile come agente lungo la fibra diagonale, investe in realtà un certo tratto del ritto e del trasverso del telaio in prossimità del nodo (fig.6a). Essa induce quindi in entrambi azioni taglianti e flettenti, che hanno entità rilevante, nonostante l'ampiezza limitata della zona interessata.

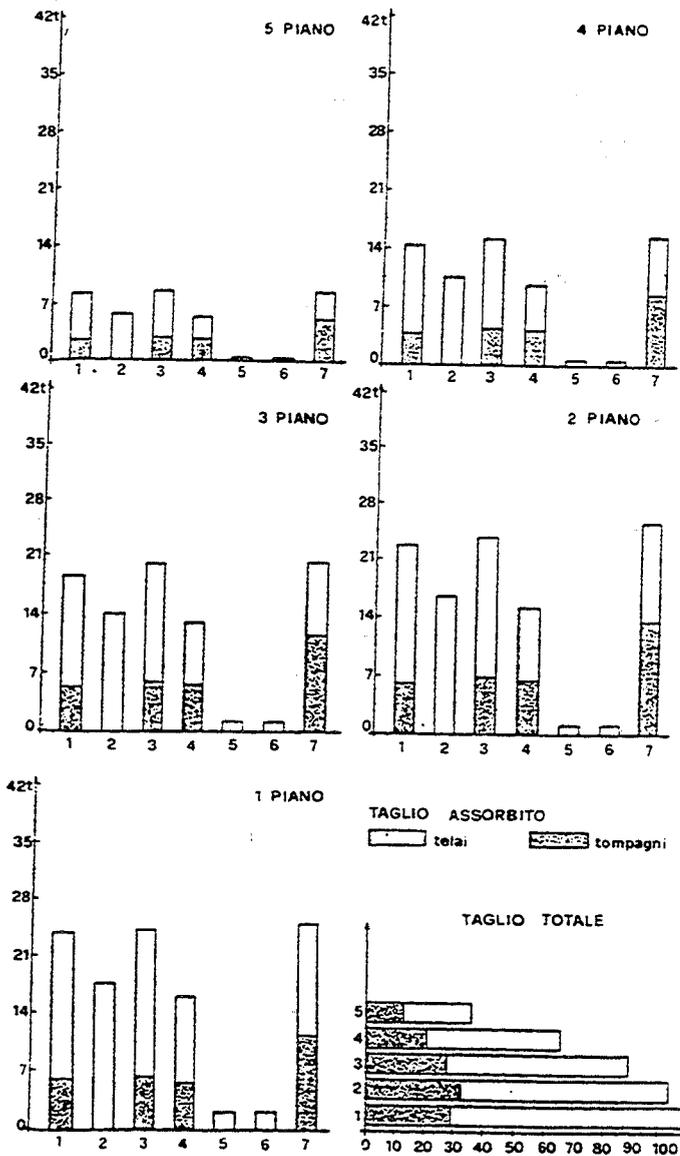


FIG.5 Con riferimento al fabbricato esaminato in [13] si considera il contributo dei tompagni all'assorbimento dell'azione sismica. I tompagni sono realizzati con doppia fodera di mattoni forati.

a) Viene trascurato il contributo dei tompagni dotati di aperture. La lunghezza del pendolo equivalente è calcolata con la formula proposta da M.Pagano.

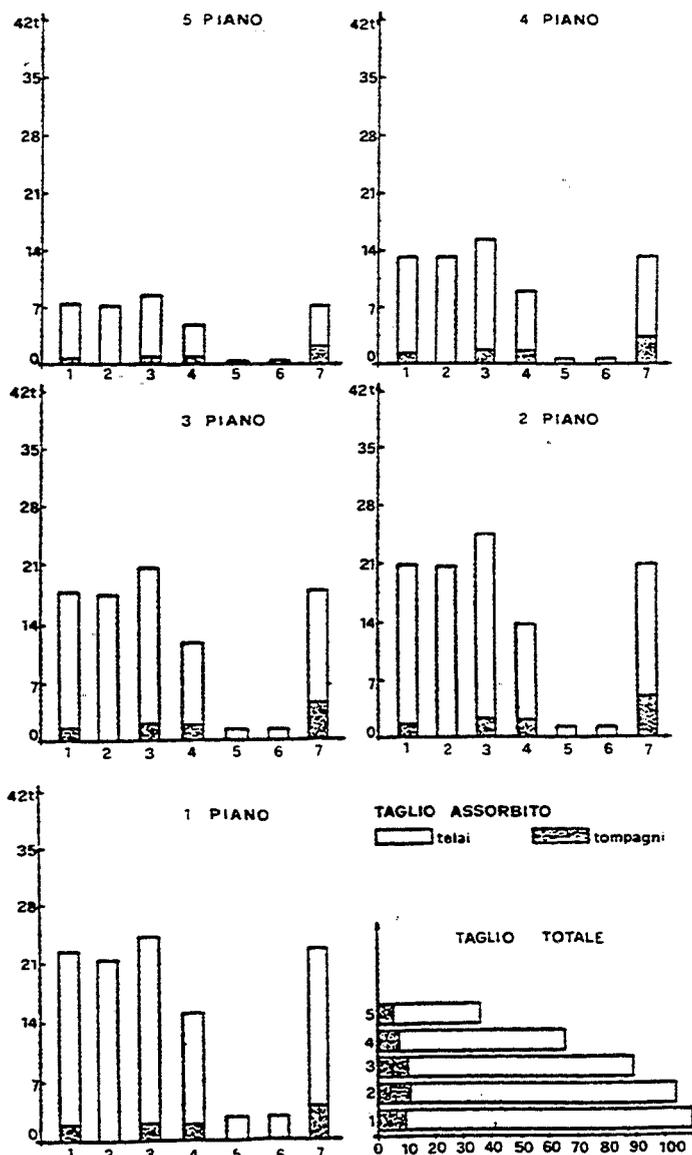


FIG.5b Viene trascurato il contributo dei tompagni dotati di aperture. La lunghezza del pendolo equivalente è calcolata con la formula proposta dalla normativa.

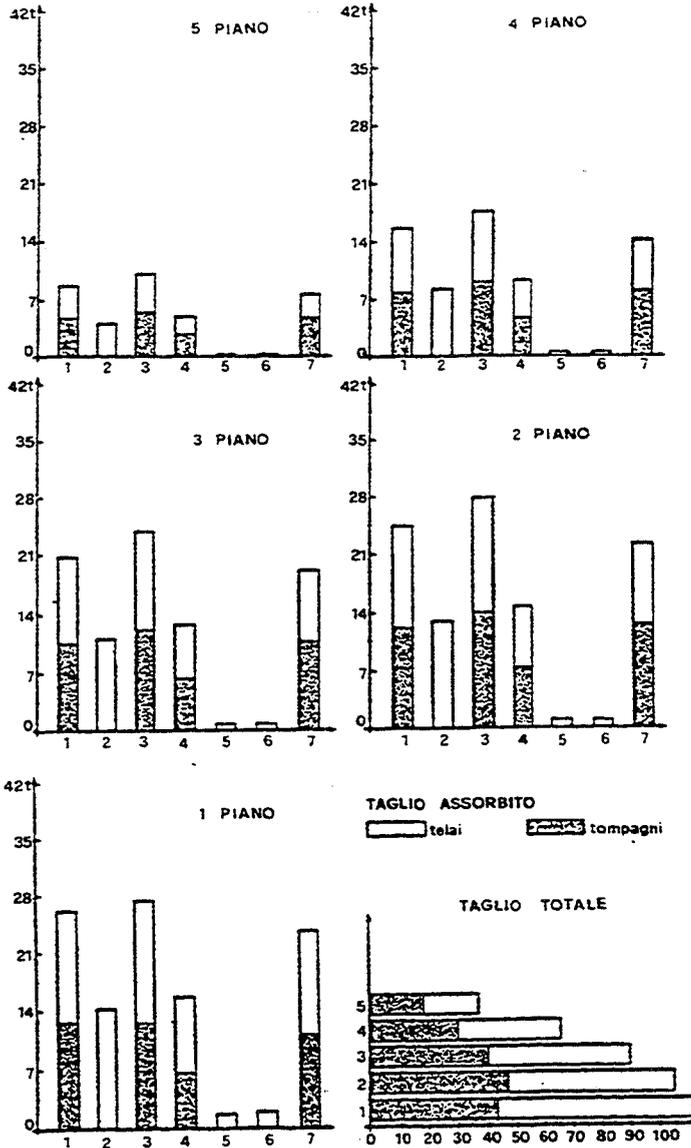


FIG.5c La rigidezza dei tompagni dotati di aperture è posta pari a  $\frac{2}{3}$  (nel caso di finestra) e  $\frac{1}{3}$  (in caso di porta-finestra) di quella di un analogo tompagno privo di aperture. La lunghezza del pendolo equivalente è calcolata con la formula proposta da M.Pagano.

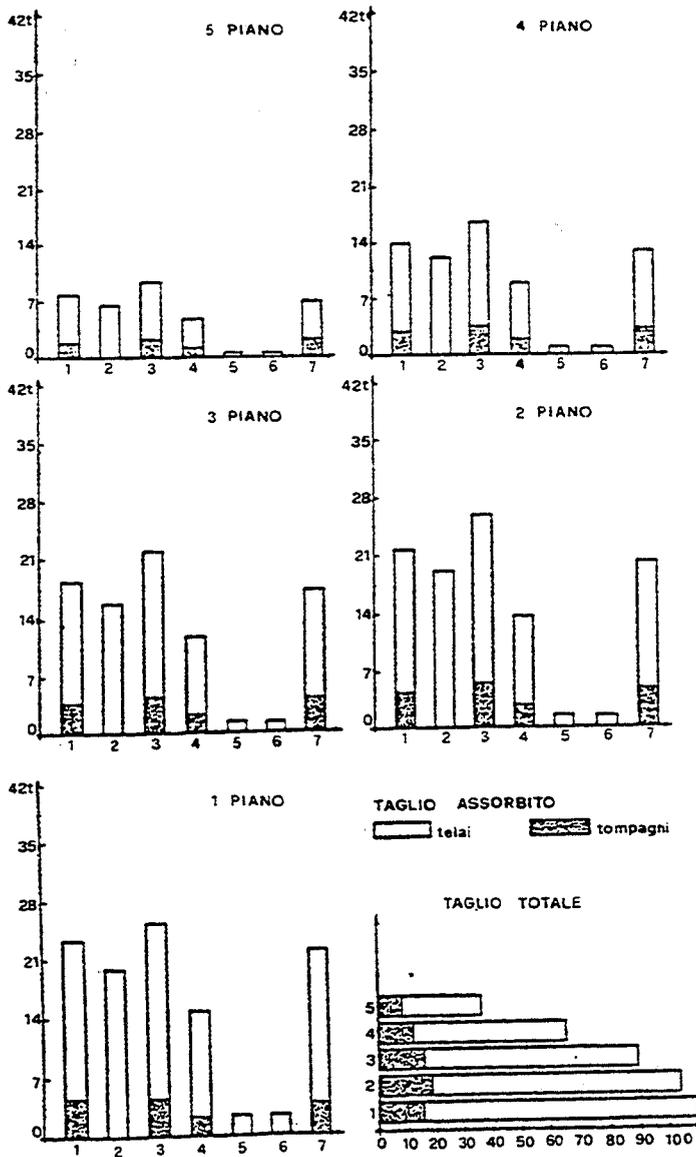
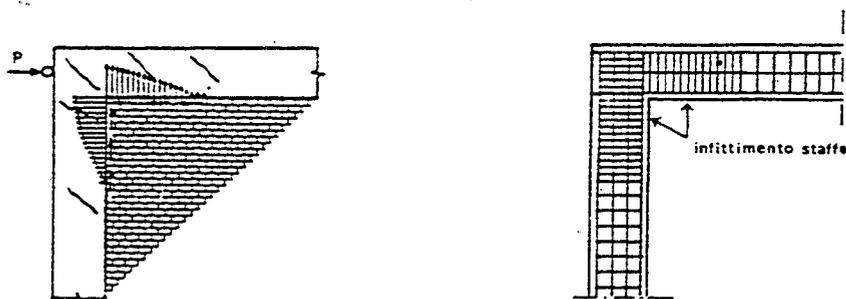


FIG.5d La rigidezza dei tompagni dotati di aperture è posta pari a  $\frac{2}{3}$  (nel caso di finestra) e  $\frac{1}{3}$  (in caso di porta-finestra) di quella di un analogo tompagno privo di aperture. La lunghezza del pendolo equivalente è calcolata con la formula proposta dalla normativa.

L'azione tagliante  $T$  può essere stimata pari alla componente orizzontale (per i ritti) o verticale (per le travi) dello sforzo normale nel pendolo. L'azione flettente  $M$  può convenzionalmente essere valutata mediante l'espressione  $M = Tl/10$ , avendo indicato con  $l$  la lunghezza dell'asta del telaio. La presenza di queste azioni è un'ulteriore motivazione della particolare considerazione che merita la staffatura dei nodi e dei tratti terminali delle travi e dei pilastri negli edifici in zona sismica (fig.6b). Nel valutare lo sforzo normale ai fini di una verifica globale del ritto occorre ovviamente tenere conto anche dell'azione assiale, di compressione o trazione, indotta dalle tempagnature.



a) azioni locali sul pilastro

b) infittimento delle staffe

FIG.6

#### 4. Schemi limite di comportamento in presenza di tempagni.

La collaborazione dei tempagni all'assorbimento dell'azione sismica è gravosa per l'impalcato, perché le tensioni e deformazioni che esso presenta durante un terremoto sono tanto maggiori quanto meno diffusi sono gli elementi resistenti verticali. Una valutazione immediata, a vantaggio di statica, delle condizioni dell'impalcato è quindi possibile ipotizzando che l'intera azione orizzontale venga bilanciata dai telai tempagnati. Si può addirittura supporre che risultino efficaci solo alcuni tra i tempagni, scelti in modo da massimizzare le sollecitazioni nell'impalcato. Gli schemi così ottenuti rappresentano un comportamento limite più gravoso e in genere molto distante da quello effettivo. Se però la deformazione da essi risultante è trascurabile rispetto agli spostamenti relativi degli impalcati e le tensioni sono modeste, tali da non richiedere un sensibile aumento dell'armatura disposta nella soletta, è ovviamente inutile effettuare una analisi più precisa.

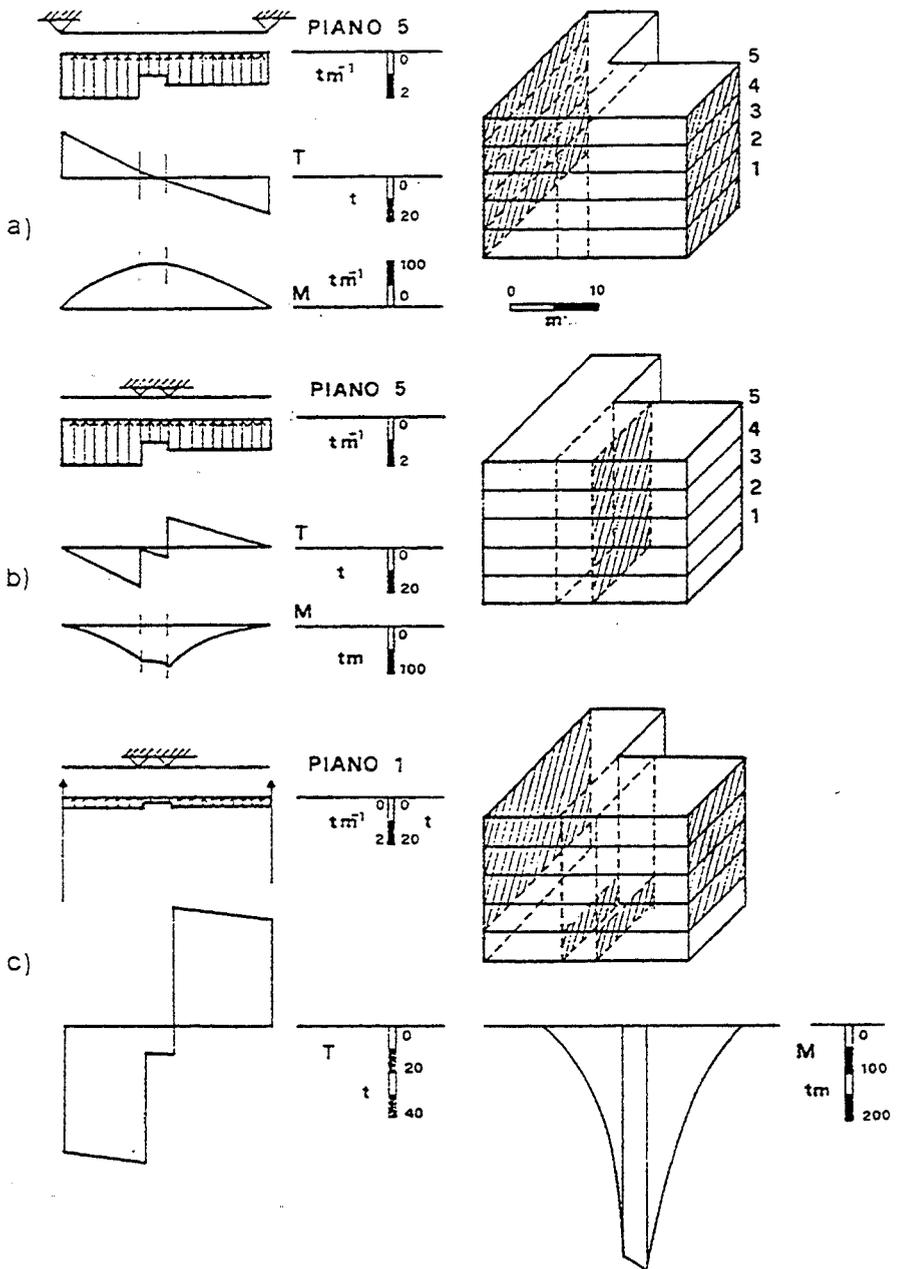


FIG.7 Alcuni schemi limite per l'edificio esaminato in [13], irrigidito da tompagnature rispettivamente nei telai laterali (a), in quelli del corpo scala (b) e per una combinazione assai sfavorevole dei due casi precedenti. Le sollecitazioni sono state determinate per ciascun caso al piano più sollecitato.

La scelta degli schemi limite deve essere effettuata da ciascun progettista, esaminando la pianta del fabbricato da calcolare. Come esempio, si prenda in considerazione un edificio di forma allungata (fig.7), in cui i rompagnani sono disposti lungo il contorno ed in corrispondenza della scala. Un primo schema limite si ottiene trascurando i rompagnani del vano scala ed ipotizzando che tutta l'azione sismica sia assorbita dai telai rompagnati perimetrali (fig.7a). L'impalcato può in tal caso essere riguardato come una trave appoggiata all'estremità. Un secondo schema corrisponde invece al trascurare i rompagnani perimetrali ed ipotizzare che il sisma sia assorbito esclusivamente dal vano scala (fig.7b). Entrambi questi schemi provocano sollecitazioni e deformazioni massime dove le forze sismiche sono più elevate, cioè in genere all'ultimo impalcato.

La variazione della rompagnatura lungo l'altezza dell'edificio può portare a ulteriori schemi limite, ancora più gravosi perché coinvolgono la totalità delle forze sismiche anziché quelle relative ad un solo piano.

Tra le varie configurazioni vincolari, si esaminano a titolo di esempio due casi. Il primo è quello di un edificio avente rompagnani perimetrali rigidi solo ad un piano, come ad esempio avviene nei cantinati quando le pareti esterne fungono anche da contenimento per il terreno. Anche in questo caso, analogamente alla situazione mostrata in figura 7a, si può ipotizzare che l'azione sismica venga assorbita interamente dai telai irrigiditi da tali pareti. In particolare, al carico orizzontale distribuito agente sul primo impalcato occorre però aggiungere i tagli trasmessi dai pilastri del secondo ordine che equilibrano globalmente l'azione sismica di tutti gli altri impalcati (dal secondo all'ultimo). Se, nello spirito di una valutazione rapida ma sufficientemente approssimata, si assimilano tali forze concentrate ad un carico distribuito, il primo impalcato potrà essere schematizzato come una lastra (o trave) semplicemente appoggiata agli estremi e soggetta ad un carico distribuito complessivamente pari all'intera azione sismica agente sul fabbricato.

Una situazione diversa si ha negli edifici dotati di robuste rompagnature lungo il perimetro esterno ed il corpo scala, nel caso che ad un piano il rompagnano perimetrale sia molto più debole che agli altri livelli; questa situazione si verifica ad esempio quando il piano terra è adibito a negozi, dotati di ampie vetrine (fig.7c). In questo caso l'azione sismica, che agli altri ordini è equilibrata dai rompagnani perimetrali e del vano scala, è assorbita a quel livello solo da questi ultimi. Lo stato tensionale dell'impalcato è quindi aggravato dal fatto che l'azione sismica relativa ai piani superiori si concentra all'estremità di esso. Una situazione del genere è poi globalmente più pericolosa per la struttura perché la presenza di un piano più debole (piano soffice) ne diminuisce la duttilità, rendendo inadeguate le azioni sismiche convenzionalmente prescritte dalla normativa.

## 5. Verifica di rigidezza.

Per controllare la rigidezza dell'impalcato, occorre valutarne la deformazione conseguente a ciascuno degli schemi individuati. Sia col modello di lastra che con quello di trave, si ipotizza che l'impalcato sia costituito da materiale omogeneo con modulo di elasticità pari a quello del calcestruzzo, trascurando la possibilità di parzializzazione per trazione, cioè ipotizzando la presenza di armature idonee ad assorbire tali tensioni.

Per quanto l'impalcato possa essere rigido, è inevitabile una sua deformazione, che comporta la variazione degli spostamenti dei telai piani costituenti la struttura rispetto a quanto previsto nel calcolo. Verificare l'attendibilità dell'ipotesi di impalcato indeformabile vuol dire quindi semplicemente controllare che le variazioni siano tali da non comportare cambiamenti apprezzabili dello stato tensionale di travi e pilastri. Occorrerebbe a tal fine confrontare la variazione di deformazione di due impalcati consecutivi con lo spostamento relativo fornito dalla risoluzione del telaio spaziale. Cautelativamente, si può esaminare la deformazione del singolo impalcato e considerarla accettabile se risulta essere almeno 10-20 volte minore dello spostamento relativo anzidetto.

Nei rari casi in cui l'ipotesi risulta non accettabile è possibile procedere iterativamente: si variano per tentativi gli spostamenti dei telai, in maniera congruente con la deformazione degli impalcati e rispettosa dell'equilibrio; si determina un nuovo insieme di tagli conseguente a questi spostamenti; si calcolano quindi i nuovi valori della deformazione. In genere la prima iterazione è sufficiente per una valutazione globale del fenomeno. Si osservi inoltre che l'impalcato tende sempre a deformarsi in maniera tale da ridurre gli spostamenti in corrispondenza degli elementi più rigidi, che risultano pertanto sgravati, ed incrementandoli per quelli più esili, che danno così un contributo maggiore (fig.8).

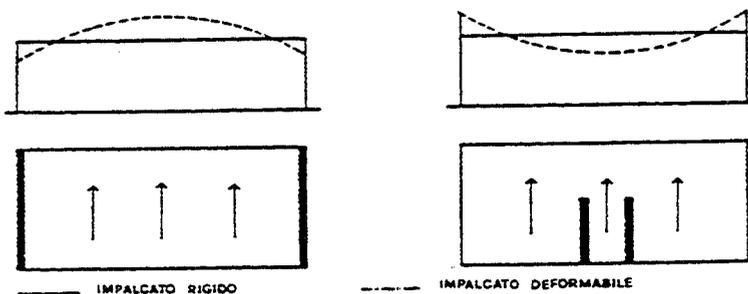


FIG.8 Diagramma degli spostamenti

## 6. Verifica di resistenza e armatura dell'impalcato.

Indipendentemente dal fatto di essere considerati infinitamente rigidi oppure deformabili, gli impalcato di un edificio antisismico hanno essenzialmente il compito di ripartire l'azione sismica tra i telai che compongono l'ossatura spaziale. Perché possano assolvere con efficacia a tale funzione, è necessario che essi siano in grado di sopportare le sollecitazioni che ne conseguono. Occorre pertanto verificare che la tensione di compressione risulti accettabile per il calcestruzzo e che l'armatura disposta nella soletta sia idonea ad assorbire la trazione (fig.9).

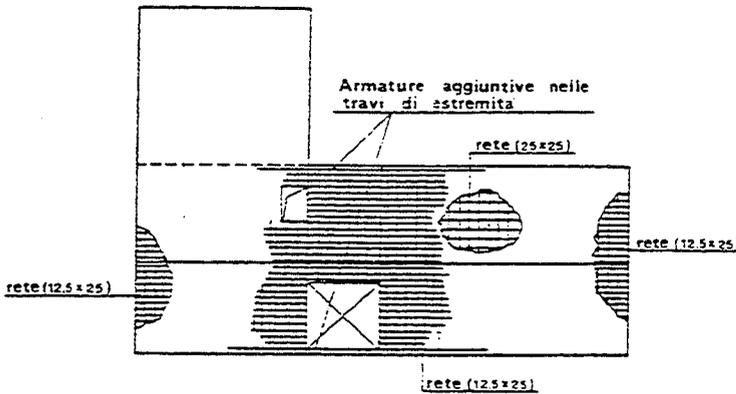


FIG.9 Armatura dell'impalcato.

La rete ordinariamente disposta ( $\phi 8/25 \times 25$ ) viene infittita nelle sezioni più sollecitate. Armature suppletive possono essere necessarie nelle travi per la verifica della sezione più debole dell'impalcato.

Se nell'analizzare l'impalcato si è adottato il modello di lastra, occorre determinare in un numero sufficiente di punti le direzioni principali di trazione e compressione ed utilizzare per la verifica i valori corrispondenti delle tensioni.

Si può operare allo stesso modo anche se si è utilizzato il modello di trave. Dalle tensioni  $\sigma$  e  $\tau$ , valutate in base alla flessione e al taglio, si può infatti risalire alle direzioni e tensioni principali.

In alternativa si può seguire fino in fondo il modello di trave, verificando a flessione e taglio le sezioni più pericolose, corrispondenti in genere

ai punti di attacco con gli elementi più rigidi (telai tompagnati o con pareti in c.a.) ed alle zone di minor ampiezza dell'impalcato (vano scala). Per coerenza con l'ipotesi di materiale omogeneo, le verifiche andrebbero effettuate considerando il materiale interamente reagente, e quindi con riferimento alla sezione geometrica dell'impalcato, costituita dalla soletta e dagli altri elementi longitudinali in calcestruzzo quali travi e travetti di ripartizione (fig.10). È comunque possibile, in alternativa, tener conto della parzializzazione della sezione o utilizzare schemi approssimati che affidino tutta la resistenza flessionale agli elementi più eccentrici.

Anche se complessivamente equivalenti, i diversi modelli di comportamento e di verifica possono portare a differenti disposizioni delle armature atte ad assorbire la trazione. In particolare, mentre la determinazione delle tensioni principali o lo schema di trave a sezione interamente reagente comportano la necessità di una armatura diffusa, il considerare la parzializzazione della sezione nella verifica a flessione spinge a concentrare l'armatura all'estremità.

È infine opportuno notare che la trazione che insorge in corrispondenza di travi poste alle estremità della sezione dell'impalcato andrebbe combinata con le sollecitazioni flessionali indotte dai carichi verticali su esse agenti; tali travi andrebbero quindi, più correttamente, verificate a tenso o pressoflessione.

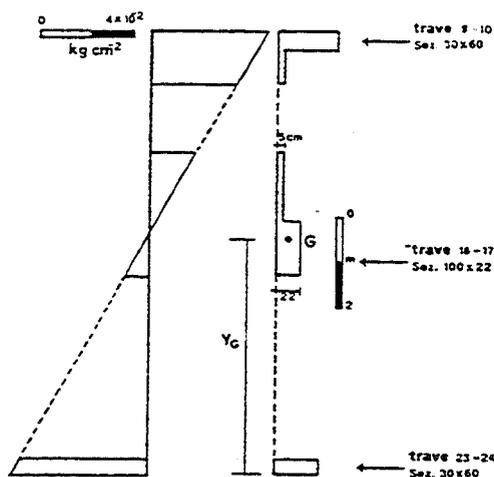


FIG.10 Sollecitazioni flessionali indotte da una coppia unitaria ( $M = 1 \text{ tm}$ ) nella sezione trasversale più debole del fabbricato, in corrispondenza del vano scala e del foro dell'ascensore, nell'ipotesi che la scala a soletta rampante presenti una trave di testata a livello di piano [11,14]. La sezione è considerata di materiale omogeneo e resistente a trazione.

### Bibliografia.

- [1] B.Stafford Smith, *Lateral stiffness of infilled frames*, Journal of structural division, ASCE, 1962.
- [2] B.Stafford Smith, *The composite behaviour of infilled frames*, Symposium on tall buildings, Southampton, 1966.
- [3] B.Stafford Smith, C.Carter, *A method of analysis for infilled frames*, Proc. ICE, 1969.
- [4] M.Pagano, *L'irrigidimento dei telai sottoposti a forze orizzontali*, Qualità e costi degli edifici in relazione ai materiali e ai sistemi di costruzione, 1969.
- [5] J.R.Riddington, B.Stafford Smith, *Analysis of infilled frames subject to racking with design recommendations*, The structural engineer, 1977.
- [6] B.Stafford Smith, J.R.Riddington, *The design of masonry infilled steel frames for bracing structures*, The structural engineer, 1978.
- [7] D.M. 2.7.1981, *Normativa per la riparazione ed il rafforzamento degli edifici danneggiati dal sisma nelle regioni Basilicata, Campania e Puglia*.
- [8] *Istruzioni relative alla normativa tecnica per la riparazione ed il rafforzamento degli edifici in cemento armato ed a struttura metallica danneggiati dal sisma*, 1981.
- [9] M.Pagano, *Teoria degli edifici*, vol.3°, tomo 2°, Liguori, Napoli, 1981.
- [10] A.Parducci, A.Checchi, *Interazione dei pannelli di muratura con i telai di cemento armato: comportamento del sistema strutturale per azioni complanari*, L'industria italiana del cemento, 1982.
- [11] A.Giliberti, *Progettare scale in zona sismica*, L'ingegnere italiano, 1983.
- [12] A.Carpinteri, *Effetto delle tamponature nelle strutture intelaiate sottoposte a sollecitazione sismica*, L'industria italiana del cemento, 1985.
- [13] A.Gherzi, *Edifici antisismici con struttura intelaiata in c.a.*, I edizione, CUEN, Napoli, 1986.
- [14] A.Giliberti, *Una più razionale struttura della scala per edifici in zona sismica*, CUEN, Napoli, 1987.
- [15] P.Lenza, *Analisi dinamica di telai spaziali sottoposti ad eccitazione sismica del suolo*, dal volume Teoria degli edifici, vol.3°, tomo 3°, Liguori, Napoli, 1988.
- [16] M.De Matteo ed altri, *Sulla deformabilità dell'impalcato negli edifici in c.a. in zona sismica*, Industria italiana del cemento, in corso di stampa.

# ORIENTAMENTI NELLA PROGETTAZIONE DELLE STRUTTURE DI FONDAZIONE DI EDIFICI IN ZONA SISMICA

*Aurelio Ghersi, Pietro Lenza*

## Sommario.

Si esaminano i principali sistemi di fondazione evidenziando le differenze con gli analoghi sistemi adottati in zona non sismica. Si valuta l'influenza della deformabilità dei vincoli di base dei telai sullo stato di sollecitazione della struttura in elevazione, generalmante trascurata in fase di dimensionamento; si indicano le procedure computazionali da adottare per tener conto del fenomeno.

## 1. Introduzione.

Le fondazioni di un edificio trasmettono al terreno il carico portato dai pilastri. La loro area di impronta è più ampia della sezione di quest'ultimi, perché il terreno è in genere capace di sopportare sollecitazioni molto minori di quelle accettabili per il materiale che costituisce i pilastri.

La scelta tra le diverse tipologie di fondazione è quindi dettata dalle caratteristiche meccaniche del terreno, che devono essere definite da una apposita relazione geotecnica. Per terreni via via peggiori, la scelta passa dai plinti isolati alle travi rovesce, ai reticoli di travi ed infine alle platee. Se il terreno è tanto scadente da rendere impossibile, o antieconomico, il ricorso a una fondazione di tipo diretto, si opta per le fondazioni su pali, in genere costituite da singoli plinti, ma se necessario anche da travi o platee

su pali.

Nel caso di edifici siti in zona sismica, alla precedente si affianca un'altra motivazione molto importante, legata all'essenza stessa dell'evento sismico.

Causa prima dei terremoti sono i lenti movimenti delle zolle di crosta terrestre, ipotizzati all'inizio del secolo da Wegener (deriva dei continenti) e definitivamente accettati negli anni '70 col modello di tettonica a zolle crostali. Lo scorrimento mutuo tra le rocce di zolle adiacenti, lungo le linee di contatto dette faglie, è frenato dall'attrito. Le rocce sono quindi costrette a deformarsi, accumulando elevatissime energie elastiche. L'improvvisa frattura delle rocce porta a scorrimenti tra i lati opposti della faglia che possono raggiungere l'entità di parecchi metri. Il moto si trasmette dal punto in cui ha avuto inizio (ipocentro) con onde elastiche di compressione e di taglio. Queste vibrazioni possono a loro volta causare ulteriori movimenti di masse di terreno, specialmente in zone franose.

I danni riscontrati a seguito di un terremoto sono dovuti essenzialmente a due motivazioni diverse. Una prima causa è l'oscillazione del terreno su cui poggia l'edificio, considerato come un blocco unico. Gran parte delle problematiche relative al "calcolo di edifici in zona sismica" vertono proprio sui modelli da utilizzare nello schematizzare e valutare l'effetto di tale moto sul fabbricato.

La seconda causa è invece il movimento relativo di parti del terreno su cui poggia uno stesso edificio. Appare evidente la necessità di evitare costruzioni in prossimità di una faglia, o in zone dichiaratamente franose. È però in ogni caso indispensabile realizzare un sistema di fondazioni tali da impedire movimenti relativi tra i pilastri del fabbricato. A tal fine la normativa richiede che le fondazioni siano collegate tra loro mediante travi in grado di sopportare forze di trazione o compressione pari a un decimo del carico verticale trasmesso dai pilastri.

Un'analisi accurata del complesso costituito da terreno, fondazioni e struttura in elevazione richiederebbe schematizzazioni complesse. Le fondazioni adottate nella pratica professionale sono però spesso molto meno deformabili della struttura in elevazione, consentendo di ipotizzare che quest'ultima sia perfettamente incastrata alla base.

Grazie a questa ipotesi, la determinazione dello stato tensionale in travi e pilastri risulta molto più agevole ed indipendente dal dimensionamento della fondazione, che può essere effettuato "a posteriori" (cioè dopo il calcolo della struttura in elevazione), considerando agenti su essa le azioni di incastro della struttura spaziale. Per poter accettare i risultati ottenuti, è però necessario controllare la validità dell'ipotesi, cioè valutare l'effetto provocato sull'elevazione dalle inevitabili deformazioni della fondazione.

## 2. Reticolo di travi di fondazione.

La presenza di consistenti azioni orizzontali sulla struttura in elevazione comporta per la fondazione una variazione nella distribuzione dei carichi verticali trasmessi e la presenza di momenti flettenti. Nel caso di fabbricati a struttura intelaiata, specialmente quando non vi sono grandi differenze di sezione tra i pilastri, le azioni flettenti sono distribuite con uniformità ed hanno entità tale da non risultare particolarmente rilevanti per le travi di fondazione. Il dimensionamento di queste può quindi essere effettuato seguendo i criteri validi per edifici siti in zona non sismica. Le sezioni che in tal modo si ottengono presentano normalmente una rigidezza flessionale e tagliante nettamente superiore a quella delle aste della struttura intelaiata. L'ipotesi che essa sia incastrata alla base appare quindi sostanzialmente corretta. Un controllo può comunque essere effettuato determinando abbassamenti e rotazioni dei punti di innesto dei pilastri. Se la loro entità non è molto elevata, è possibile valutare il momento flettente che insorgerebbe nelle travi per un cedimento relativo  $\delta$  degli estremi ( $M = 6EI\delta/l^2$ ) o nei pilastri per effetto della rotazione  $\varphi$  ( $M = 4EI\varphi/l$ ) in assenza di altre deformazioni e sommare tale stato di sollecitazione a quello ottenuto nella risoluzione dello schema spaziale. Tale procedura, certamente non rigorosa, è cautelativa poiché induce a considerare nella struttura in elevazione tensioni, dovute alla deformabilità del complesso terreno-opere di fondazione, localmente maggiori di quelle effettive. In presenza di rotazioni e cedimenti differenziali rilevanti, occorrerebbe un calcolo più complesso, che tenga conto della effettiva integrazione tra fondazione e sovrastruttura. È però da notare che il reale effetto di abbassamenti anche elevati, che avvengano in un lungo periodo, è sensibilmente minore di quanto prevedibile con una analisi elastica, a causa degli adattamenti plastici della struttura in elevazione.

La situazione è completamente diversa nel caso di fabbricati che presentano irrigidimenti concentrati, come pareti in cemento armato. I momenti flettenti che insorgono in tali elementi sono infatti di entità molto elevata e condizionano decisamente la scelta delle dimensioni della fondazione. Anche l'ipotesi di incastro alla base risulta spesso poco attendibile. Essa va pertanto verificata sempre con molta accuratezza e se necessario rimossa.

Si presti inoltre attenzione ad un problema frequentemente riscontrato in tali casi. L'elemento di fondazione delle pareti viene dimensionato in base alle azioni che esso deve assorbire durante il sisma, cioè in un momento particolare e di durata molto breve rispetto alla vita della struttura. Esso è quindi nettamente sovradimensionato rispetto alla situazione corrente, in

cui sono presenti solo i carichi verticali. Le fondazioni dei pilastri, che in un edificio con pareti in cemento armato sono scarsamente sollecitati dal terremoto, sono invece dimensionate senza larghezza. Questa differenza può portare a cedimenti relativi non previsti, e conseguentemente a danni almeno agli elementi di tamponatura.

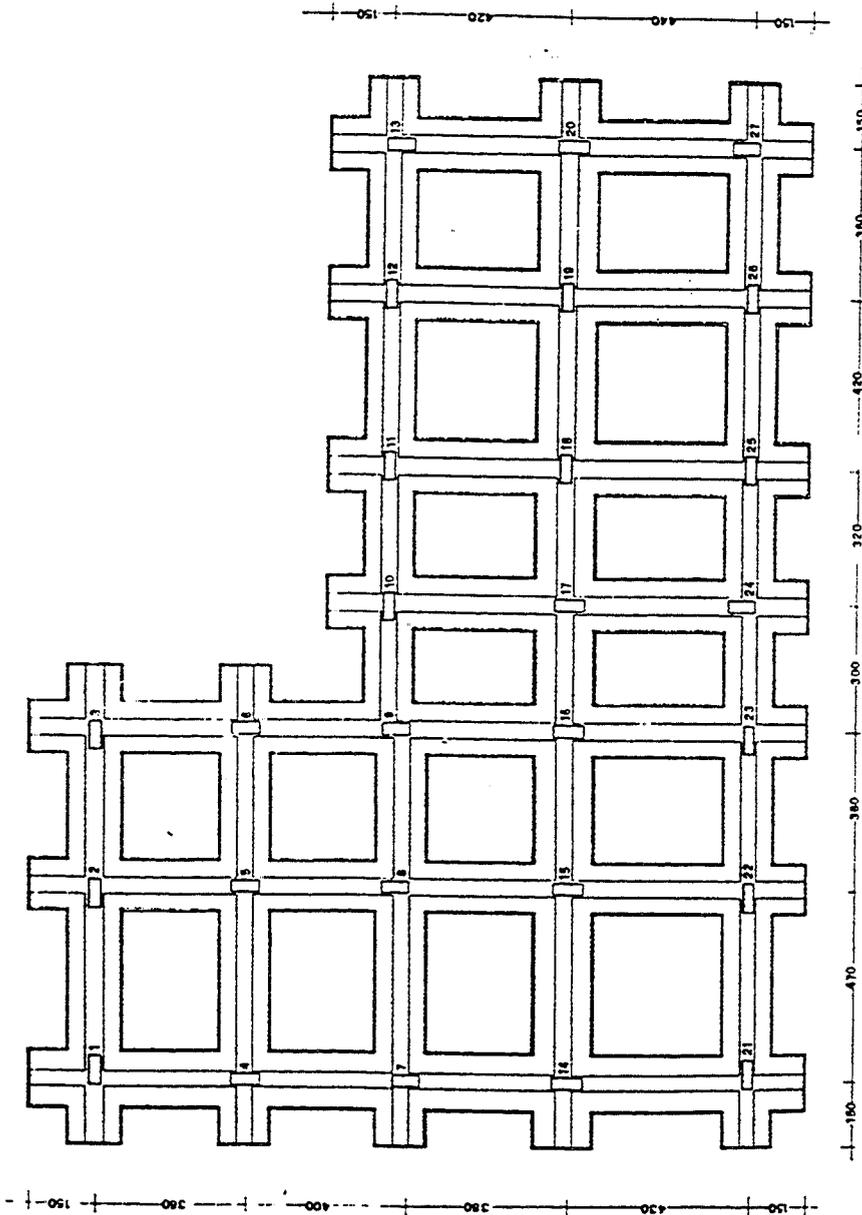


FIG.1 Reticolo di travi e fondazione

### 3. Plinti diretti.

Per verificare un plinto diretto occorre assegnarne le dimensioni e poi valutare il carico limite sopportabile, funzione delle caratteristiche del terreno, delle dimensioni del plinto ed anche dell'eccentricità e dell'inclinazione del carico su esso gravante. È però ancora comune tra gli strutturisti il ricorso al modello di Winkler, come relazione tra carichi e abbassamenti, e al concetto di "carico ammissibile" inteso come proprietà del terreno. In realtà l'effettivo carico ammissibile si ottiene dividendo il carico limite per un coefficiente di sicurezza; non si avrà quindi per esso un valore unico, bensì più valori dipendenti dai diversi fattori innanzi indicati.

Come si è appena detto, nel dimensionare i plinti diretti non si può trascurare l'eccentricità del carico, cioè l'effetto del momento flettente. Nell'ipotesi di risultante comunque contenuta nel nocciolo d'inerzia, secondo il modello di Winkler per una fondazione infinitamente rigida la massima tensione di esercizio sul terreno per un plinto di pianta rettangolare di lato  $h$  ed area  $A$  vale:

$$\sigma = \frac{N}{A} \left( 1 + \frac{6e}{h} \right)$$

cioè è incrementata rispetto alla tensione media di una aliquota dipendente dal rapporto tra eccentricità e dimensione del plinto. Il dimensionamento può quindi essere effettuato basandosi sulla tensione media, assumendo per essa un valore opportunamente ridotto (in genere di circa il 30%).

Poiché i plinti di un fabbricato sito in zona sismica sono sempre collegati tra loro da travi, nell'effettuare la verifica occorrerebbe conoscere in che modo il momento flettente, agente alla base del pilastro, si ripartisce tra plinto e travi. La rigidezza del primo dipende ovviamente dalle caratteristiche del terreno ed è tanto minore quanto più esso è deformabile. Terreni molto cedevoli hanno però contemporaneamente anche caratteristiche meccaniche scadenti, ed i plinti in essi realizzati hanno dimensioni maggiori. La rigidezza dei plinti è quindi spesso nettamente prevalente rispetto a quella delle travi di collegamento. Almeno in prima approssimazione si può quindi verificare ciascun plinto ipotizzando che esso assorba la totalità del momento flettente. Nel verificare le travi si assumerà invece cautelativamente che esse sopportino almeno il 50% dell'azione flettente.

Per una valutazione più precisa dell'interazione tra plinti, travi di collegamento e struttura in elevazione si può utilizzare il modello di telaio, inserendo in esso le travi e schematizzando i plinti come vincoli elasticamente cedevoli, aventi un legame lineare tra forza verticale e abbassamento

e tra momento flettente e rotazione:

$$N = K'y \quad ; \quad M = K''\theta.$$

Se il terreno è schematizzato come un semispazio elastico alla Bousinesq, le costanti elastiche sono fornite dalle espressioni:

$$K' = \frac{\beta_y \sqrt{BHE}}{(1 - \nu^2)}$$

$$K'' = \frac{BH^2 E}{I_\theta (1 - \nu^2)}$$

nelle quali  $B$  ed  $H$  sono le dimensioni del plinto,  $E$  e  $\nu$  il modulo elastico ed il coefficiente di Poisson del terreno,  $\beta_y$  e  $I_\theta$  due coefficienti adimensionali dipendenti dal rapporto  $B/H$ , tabellati da Lee, Whitman e Richart (fig.2).

Se si utilizza invece per il terreno il modello di Winkler, le costanti elastiche sono fornite da:

$$K' = cA$$

$$K'' = cI$$

essendo  $A$  ed  $I$  l'area ed il momento d'inerzia della base del plinto e  $c$  la costante di sottofondo del terreno.

(Lee, 1963; Whitman and Richart, 1967)

H/B	0.1	0.2	0.5	1	1.5	2	$\infty$
$I_\theta$	1.59	2.29	3.53	3.7	4.12	4.38	5.1

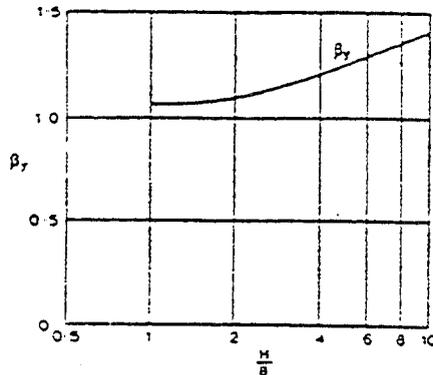


FIG.2

(Whitman and Richart, 1967).

Per il tipo di analisi innanzi descritto occorre adottare una procedura di calcolo che consideri tutti i gradi di libertà della struttura, cioè gli spostamenti orizzontali e verticali e le rotazioni dei nodi. Se si ha invece a disposizione un programma di calcolo che considera come incognite cinematiche solo gli spostamenti orizzontali dei traversi e le rotazioni dei nodi, si può simulare almeno in parte l'effetto del plinto con l'inserimento di ulteriori aste verticali. Più precisamente, il complesso di elementi di fondazione può essere schematizzato aggiungendo un piano inferiore, con spostamenti orizzontali impediti, i cui traversi sono costituiti dalle travi di collegamento ed i ritti hanno altezza e sezione tale da essere flessionalmente equivalenti ai plinti. Se  $h$  è l'altezza dell'interpiano aggiunto ed  $I$  il momento d'inerzia della sezione di un ritto, il legame momento-rotazione è espresso da:

$$M = 4 \frac{EI}{h} \theta$$

e per l'equivalenza dovrà quindi essere:

$$4 \frac{EI}{h} = K''$$

cioè

$$I = \frac{hK''}{4E}$$

In questo modo non è però possibile valutare l'effetto della cedevolezza verticale del plinto.

È evidente che entrambi tali approcci possono essere adottati fin dall'inizio del processo di verifica del fabbricato, consentendo di esaminare il comportamento globale del complesso costituito da telai in elevazione, reticolo di travi di collegamento, terreno ed opere di fondazione. Diventa in tal caso indispensabile predefinire interamente la geometria strutturale ed in particolare le dimensioni della fondazione. Per tale motivo nella prassi operativa si usa posticipare tale verifica globale. Essa peraltro non rende di norma necessarie modifiche delle sezioni in elevazione. Analisi numeriche, effettuate nel campo di variabilità dei parametri meccanici del terreno per fabbricati con travi di collegamento di sezione non molto dissimile da quella delle aste del telaio, hanno evidenziato solo modeste variazioni dello stato tensionale nei ritti e traversi della struttura in elevazione, a fronte di vistose variazioni nella ripartizione tra travi di collegamento e plinti; tali elementi quindi, nel campo delle geometrie usualmente adottate, costituiscono complessivamente un vincolo effettivamente prossimo all'incastro (fig.3).

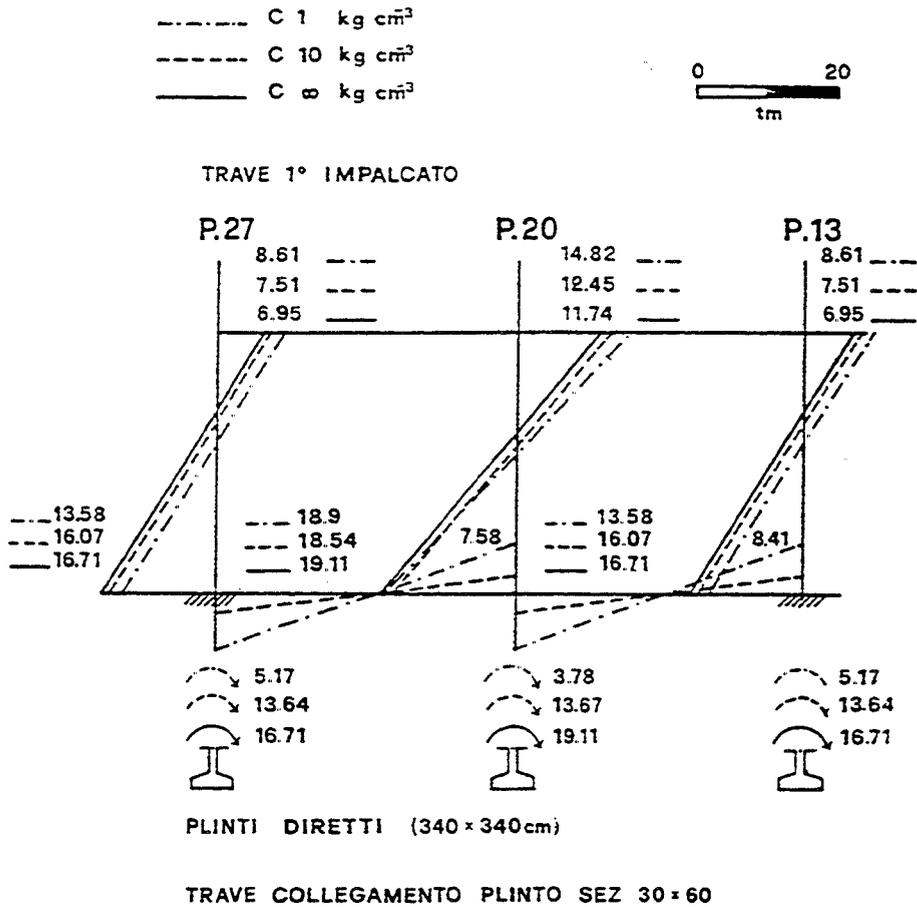


FIG.3 Analisi dell'interazione tra telaio, plinti e travi di collegamento.  
 Con riferimento al telaio 7y dell'edificio esaminato in [13] sottoposto a forze orizzontali da sinistra, si tiene conto della deformabilità angolare del vincolo di base, nell'ipotesi che le fondazioni siano costituite da plinti diretti, variando la costante di sottofondo ( $c = 1 - 10 - \infty \text{ kg cm}^{-3}$ ).

## 4. Plinti su pali.

Nel caso di fondazioni su pali, il dato di base per la verifica è il carico limite del palo, che, diviso per un adeguato coefficiente di sicurezza, fornisce il carico ammissibile, cioè il carico massimo che si ritiene accettabile per esso. Nel caso di plinti soggetti solo ad azioni verticali, il carico di esercizio sul singolo palo è ottenuto immediatamente come rapporto tra carico totale e numero di pali. In presenza di azioni flettenti occorrerà tener conto dell'incremento di carico dovuto al momento. Ad esempio, nel caso di un plinto a quattro pali si ha:

$$P = \frac{N}{4} + \frac{M}{2d} = \frac{N}{4} \left( 1 + \frac{2e}{d} \right)$$

essendo  $d$  la distanza tra i pali, in genere pari a tre volte il loro diametro. Si può quindi effettuare il dimensionamento basandosi su un carico medio opportunamente ridotto rispetto al valore ammissibile (in genere di circa il 30%) ed utilizzare poi formule analoghe a quella su riportata per la verifica.

Anche nel caso di plinti su pali, la presenza di travi di collegamento renderebbe necessaria una ripartizione delle azioni flettenti tra plinti e travi. Essendo in genere i primi più rigidi delle seconde, è ancora possibile assegnare, a vantaggio di sicurezza, il 100% del momento ai plinti ed il 50% alle travi.

Per una valutazione più precisa dell'azione mutua, il plinto può essere schematizzato come un vincolo cedevole, le cui costanti elastiche  $K'$  e  $K''$  dipendono dalla deformabilità  $k$  del palo ( $y = kP$ ). Per un plinto a quattro pali, posti a una distanza  $d$ , si ha:

$$K' = \frac{4}{k}$$

$$K'' = \frac{d^2}{k}$$

Nel caso di pali che lavorano per attrito laterale la deformabilità  $k$  dipende sia dalle dimensioni del palo che dalle caratteristiche del terreno e può essere ricavata mediante una prova di carico dopo la realizzazione della palificata. Se invece il palo lavora di punta, poggiando su un banco di roccia o di terreno molto compatto, essa è pari alla deformabilità estensionale:

$$k = \frac{l}{EA}$$

Anche per tale tipo di fondazioni sono possibili procedure di analisi che tengano conto dell'interazione tra struttura in elevazione, reticoli di collegamento e plinti di fondazione. Il problema è però più complesso perché a rigore occorre tener conto anche della cedevolezza orizzontale dei pali, che è un dato geotecnico di difficile valutazione. Sul piano operativo non vi sono difficoltà se si opera con un modello che tenga conto di tutti i gradi di libertà della struttura. Operando invece col modello di telaio flessionale con vincoli fissi è possibile tener conto solo della cedevolezza angolare del plinto, con la procedura già descritta nel paragrafo precedente (fig.4).

### Bibliografia.

- [1] S.Chamecki, *Structural rigidity in calculating settlements*, Journal Soil Mech. Found. Div., Proc. ASCE, 1956.
- [2] H.G.Poulos, D.Claps, *Elastic solutions for soil and rock mechanics*, Wiley, 1974.
- [3] A.Chirugi, M.Merli, *Interazione terreno-struttura in condizioni di sollecitazioni statiche*, Atti dell'istituto di Scienza delle Costruzioni, Politecnico di Torino, 1977.
- [4] E.Santucci De Magistris, C.Viggiani, *Modelli di interazione terreno-fondazione in campo statico e dinamico*, VIII ciclo annuale di conferenze dedicate alla Mecc. dei terreni ed alla Ing. delle fondazioni, Politecnico di Torino, 1977.
- [5] C.Viggiani, *Alcune considerazioni sull'interazione statica fra terreno, fondazione e sovrastruttura*, XIII Convegno nazionale di geotecnica, Merano, 1978.
- [6] M.Bolton, *A guide to soil mechanics*, 1979.

TRAVE 1° IMPALCATO

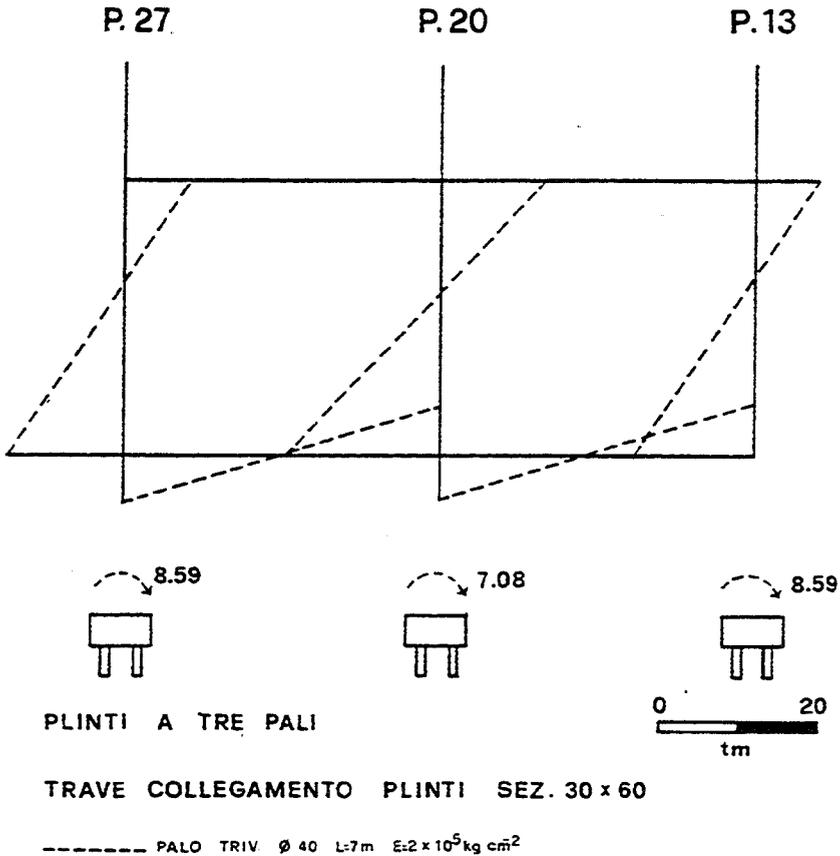


FIG.4 Analisi dell'interazione tra telaio, plinti e travi di collegamento.  
 Con riferimento al telaio 7y dell'edificio esaminato in [13] sottoposto a forze orizzontali da sinistra, si tiene conto della deformabilità angolare del vincolo di base, nell'ipotesi che le fondazioni siano costituite da plinti a castello a 3 pali, di deformabilità assiale  $EA/L = 359 \text{ t cm}^{-1}$ ).



## FONDAZIONI SU PALI NEGLI EDIFICI IN ZONA SISMICA

*Mario De Matteo*

### Sommario.

Si affronta il problema della ripartizione di sforzi normali accompagnati da momenti e di sforzi orizzontali tra un gruppo di pali. Le azioni orizzontali possono derivare da sisma, vento, pressione dell'acqua, spinta di terreni. Con riferimento all'edificio in zona sismica, ogni pilastro scarica sulla fondazione, per ogni condizione di carico, uno sforzo normale  $N$ , un momento  $M_{xx}$ , un taglio  $T_x$ , un momento  $M_{xy}$  e un taglio  $T_y$ . Per azioni orizzontali, agenti ad esempio in direzione  $x$ , sono prevalenti  $M_{xx}$  e  $T_x$  rispetto a  $M_{xy}$  e  $T_y$  derivanti da soli carichi verticali. Con riferimento ad un gruppo di pali (plinto singolo e/o platea) si ripartiscono tra i pali le azioni trasmesse dai pilastri. In quanto segue si fa l'ipotesi che l'elemento di fondazione che collega i pali sia infinitamente rigido e che quindi sia valida l'ipotesi di conservazione delle sezioni piane. Per quanto concerne la definizione della portanza del singolo palo, il comportamento dei pali in gruppo, le interazioni palo-terreno e tutte le altre considerazioni di natura geotecnica si rinvia alla bibliografia specifica in materia.

## 1. Ripartizione di un sistema generico di carichi.

### 1.1. Baricentro di un sistema di masse.

Assegnato un sistema di  $m$  masse  $m_i$  e le coordinate  $(X_i, Y_i)$  di ognuna rispetto ad un sistema di assi cartesiani  $(O, X, Y)$  si ricercano le coordinate  $(X_G, Y_G)$  del baricentro  $G$  delle masse suddette.

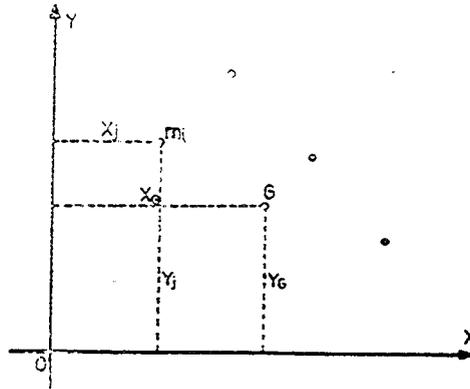


FIG.1

Per l'equilibrio alla rotazione intorno all'asse Y si ha:

$$\sum_{i=1}^m m_i X_i = X_G \sum_{i=1}^m m_i$$

$$X_G = \frac{\sum_{i=1}^m m_i \cdot X_i}{\sum_{i=1}^m m_i} \quad (1)$$

Analogamente si ricerca l'ordinata del baricentro delle masse imponendo l'equilibrio alla rotazione intorno all'asse X:

$$Y_G = \frac{\sum_{i=1}^m m_i \cdot Y_i}{\sum_{i=1}^m m_i} \quad (2)$$

### 1.2. Centro di sollecitazione.

Assegnato un sistema di carichi  $(P_j, M_{jx}, M_{jy})$  e note le coordinate  $(X_j, Y_j)$  del punto di applicazione rispetto al sistema  $(O, X, Y)$  prima assunto, si ricerca il baricentro  $P$  di detti carichi, ossia il centro di sol-

lecitazione, come l'intersezione degli assi di sollecitazione paralleli rispettivamente agli assi X e Y.

Per l'equilibrio alla rotazione intorno all'asse Y si ha:

$$\sum_{j=1}^m P_j \cdot X_j + \sum_{j=1}^m M_{jz} = X_P \sum_{j=1}^m P_j$$

$$X_P = \frac{\sum_{j=1}^m P_j \cdot X_j + \sum_{j=1}^m M_{jz}}{N}$$

Analogamente per l'equilibrio alla rotazione intorno all'asse X si ha:

$$Y_P = \frac{\sum_{j=1}^m P_j \cdot Y_j + \sum_{j=1}^m M_{jy}}{N}$$

Nelle precedenti si è posto:  $N = \sum_{j=1}^m P_j$

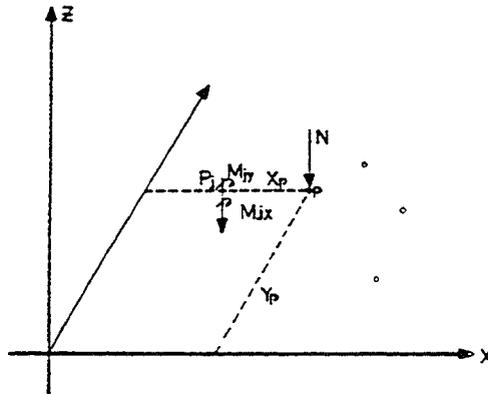


FIG.2

Se il sistema è del tipo  $(T_{jx}, T_{jy})$  come in figura 3, analogamente si ricavano le coordinate del centro P di sollecitazione:

$$X_P = \frac{\sum_{j=1}^m T_{jy} \cdot X_j}{T_y}$$

$$Y_P = \frac{\sum_{j=1}^m T_{jx} \cdot Y_j}{T_x}$$

Nelle precedenti si sono posti:

$$\sum_{j=1}^m T_{jy} = T_y = \text{Risultante in direzione } y$$

$$\sum_{j=1}^m T_{jx} = T_x = \text{Risultante in direzione } x$$

La risultante vale:  $T = \sqrt{T_x^2 + T_y^2}$

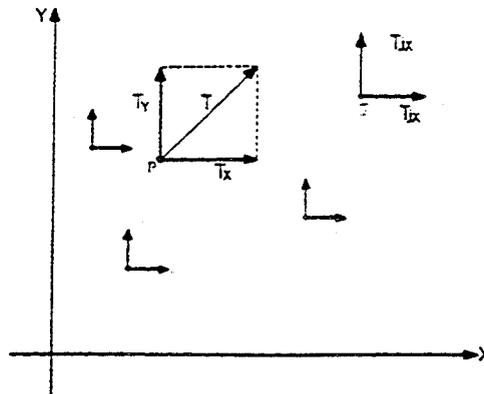


FIG.3

### 1.3. Ripartizione di uno sforzo verticale eccentrico $N$ .

Si vuole ripartire tra un insieme di masse e/o rigidezze  $m_i$  uno sforzo verticale  $N$  applicato nel centro di sollecitazione  $P(X_P, Y_P)$  diverso dal loro baricentro  $G(X_G, Y_G)$ . Per il principio di conservazione delle sezioni piane e per gli equilibri alla traslazione parallelamente all'asse  $Z$  e alla rotazione intorno agli assi  $Y$  e  $X$  si ha:

$$N_i = N \cdot m_i \left[ \frac{1}{\sum_{i=1}^m m_i} + \frac{(X_P - X_G)}{\sum_{i=1}^m m_i \cdot (X_i - X_G)^2} \cdot (X_i - X_G) + \frac{(Y_P - Y_G)}{\sum_{i=1}^m m_i \cdot (Y_i - Y_G)^2} \cdot (Y_i - Y_G) \right] \quad (3)$$

Se il carico  $N$  è eccentrico in una sola direzione, ad esempio  $X$ , risulta  $Y_P - Y_G = 0$ ; nella precedente si annulla il terzo termine in parentesi.

Se assumiamo il sistema di riferimento con origine nel baricentro  $G$  delle masse, risultando  $X_G = 0$  e  $Y_G = 0$ , la precedente diventa:

$$N_i = N \cdot m_i \left( \frac{1}{\sum_{i=1}^m m_i} + \frac{X_P \cdot X_i}{\sum_{i=1}^m m_i \cdot X_i^2} + \frac{Y_P \cdot Y_i}{\sum_{i=1}^m m_i \cdot Y_i^2} \right)$$

1.4. Ripartizione di uno sforzo orizzontale  $T$ .

Si vuole ripartire lo sforzo orizzontale  $T$  applicato nel centro di sollecitazione  $P(X_P, Y_P)$ , diverso dal baricentro delle masse e/o rigidezze  $G(X_G, Y_G)$ , detto centro di torsione (fig.4).

Assumendo il principio di conservazione delle sezioni piane e imponendo gli equilibri alla traslazione orizzontale nella direzione di  $T$  e alla rotazione intorno alla retta per  $G$  parallela all'asse  $z$  si ottiene:

1) equilibrio alla traslazione  $T_i^t = \frac{T}{\sum_{i=1}^m m_i} \cdot m_i$  (4)

2) equilibrio alla rotazione  $T_i^r = \frac{T \cdot e}{\sum_{i=1}^m m_i \cdot d_i^2} \cdot m_i \cdot d_i$  (5)

Nelle precedenti espressioni si è indicato con  $d_i$  la distanza della massa  $m_i$  dal centro di torsione  $G$ , che vale:

$$d_i = \sqrt{(X_i - X_G)^2 + (Y_i - Y_G)^2}$$

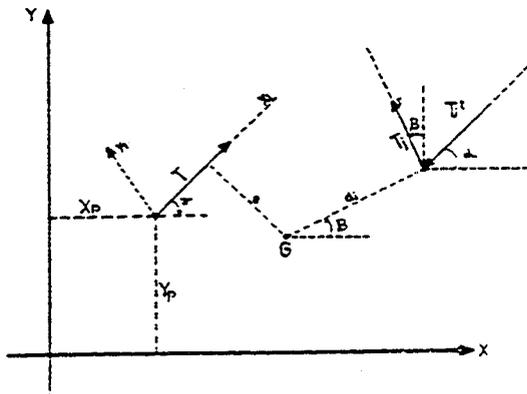


FIG.4

Lo sforzo tagliante  $T_i$  assorbito dalla massa  $m_i$  sarà la risultante degli sforzi  $T_i^t$  e  $T_i^r$ ; si noti che  $T_i^t$  ha direzione parallela allo sforzo  $T$  mentre  $T_i^r$  ha direzione ortogonale alla congiungente la massa  $m_i$  e il centro di torsione  $G$ .

Assumiamo un sistema locale con origine in  $P$ , asse  $X'$  concorde con  $T$ , asse  $Y'$  tale che il sistema  $(P, X', Y')$  sia concorde con il sistema  $(O, X, Y)$ . Definiamo l'angolo  $\alpha$  di inclinazione dello sforzo  $T$  come l'angolo che l'asse  $X'$  deve compiere in senso orario per portarsi in posizione parallela e concorde con l'asse  $X$ .

Assumiamo inoltre l'eccentricità  $e$  positiva se il momento  $T_x \cdot e$  è orario e le componenti dello sforzo sul palo positive se dirette nel verso contrario a quello assunto come positivo per gli assi  $X$  e  $Y$ .

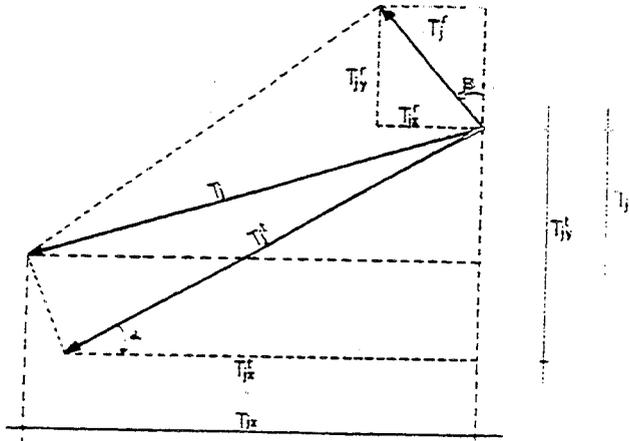


FIG.5

Detto  $\beta$  l'angolo di inclinazione della congiungente il centro di torsione con la massa  $m_i$  si calcolano in valore e segno le quantità:

$$\sin \beta = \frac{(Y_i - Y_G)}{d_i} \quad (6)$$

$$\cos \beta = \frac{(X_i - X_G)}{d_i} \quad (7)$$

Le componenti dello sforzo sul palo valgono:

$$T_{iz} = T_{iz}^t + T_{iz}^r = T_i^t \cos \alpha + T_i^r \sin \beta$$

$$T_{iy} = T_{iy}^t - T_{iy}^r = T_i^t \sin \alpha - T_i^r \cos \beta$$

Sostituendo nelle precedenti le espressioni (4), (5), (6) e (7), si ottiene:

$$T_{ix} = \frac{T \cdot \cos \alpha}{\sum_{i=1}^m m_i} \cdot m_i + \frac{T \cdot e}{\sum_{i=1}^m m_i \cdot d_i^2} \cdot m_i \cdot (Y_i - Y_G) \quad (8)$$

$$T_{iy} = \frac{T \cdot \sin \alpha}{\sum_{i=1}^m m_i} \cdot m_i - \frac{T \cdot e}{\sum_{i=1}^m m_i \cdot d_i^2} \cdot m_i \cdot (X_i - X_G) \quad (9)$$

Note le componenti secondo gli assi  $X$  e  $Y$  si valuta lo sforzo risultante:

$$T_i = \sqrt{T_{ix}^2 + T_{iy}^2}$$

## 2. Platea su pali.

Il sistema di carichi ( $P_j, M_{jx}, M_{jy}$ ) considerato al paragrafo 1 rappresenta l'insieme degli sforzi normali, dei momenti agenti nel piano  $Z-X$  e dei momenti agenti nel piano  $Z-Y$ , trasmessi dai pilastri alla struttura di fondazione; analogamente il sistema di carichi ( $T_{jx}, T_{jy}$ ) rappresenta l'insieme degli sforzi di taglio paralleli agli assi  $X$  e  $Y$ , trasmessi dai pilastri alla struttura di fondazione.

I due sistemi di sforzi innanzi citati sono in numero pari alle condizioni di carico considerate per la struttura in elevazione.

Nel caso di fabbricato in zona sismica risultano generalmente trascurabili, per azioni sismiche in direzione  $X$ ,  $M_{jy}$  e  $T_{jy}$  mentre, per azioni sismiche in direzione  $Y$ ,  $M_{jx}$  e  $T_{jx}$ .

### 2.1. Ripartizione degli sforzi normali.

Ricerche come prima detto la risultante  $N$  degli sforzi normali  $P_j$  e le coordinate del centro di sollecitazione  $P(X_P, Y_P)$ , si sostituisce nelle (1), (2), (3) alle masse  $m_i$  le rigidzze assiali  $W_i$  dei singoli pali ottenendo così le coordinate del baricentro delle rigidzze e lo sforzo normale nel palo generico.

La rigidzza assiale  $W_i$  deve essere determinata sperimentalmente, come rapporto tra lo sforzo applicato sul palo ed il corrispondente accorciamento.

Detto accorciamento è pari alla deformazione elastica del palo se quest'ultimo lavora esclusivamente di punta; in detta ipotesi si può assumere  $W_i = K \cdot E_i \cdot A_i / l_i$ .

Nell'ipotesi che  $K, E_i, l_i$  siano costanti ed essendo  $A_i = \pi D_i^2 / 4$  si può assumere  $W_i = K_1 \cdot D_i^2$ .

In tal caso le coordinate del baricentro delle rigidzze (centro elastico della palificata) e lo sforzo sul palo diventano:

$$X_G = \frac{\sum_{i=1}^m D_i^2 \cdot X_i}{\sum_{i=1}^m D_i^2} \quad (1')$$

$$Y_G = \frac{\sum_{i=1}^m D_i^2 \cdot Y_i}{\sum_{i=1}^m D_i^2} \quad (2')$$

$$N_i = N \cdot D_i^2 \left[ \frac{1}{\sum_{i=1}^m D_i^2} + \frac{(X_P - X_G) \cdot (X_i - X_G)}{\sum_{i=1}^m D_i^2 \cdot (X_i - X_G)^2} + \frac{(Y_P - Y_G) \cdot (Y_i - Y_G)}{\sum_{i=1}^m D_i^2 \cdot (Y_i - Y_G)^2} \right] \quad (3')$$

Nel caso di platea su pali dello stesso diametro le precedenti si semplificano ulteriormente e diventano:

$$X_G = \frac{\sum_{i=1}^m X_i}{m} \quad (1'')$$

$$Y_G = \frac{\sum_{i=1}^m Y_i}{m} \quad (2'')$$

$$N_i = N \cdot \left[ \frac{1}{m} + \frac{(X_P - X_G) \cdot (X_i - X_G)}{\sum_{i=1}^m (X_i - X_G)^2} + \frac{(Y_P - Y_G) \cdot (Y_i - Y_G)}{\sum_{i=1}^m (Y_i - Y_G)^2} \right] \quad (3'')$$

Nel caso lo sforzo  $N$  cada sulla retta per  $G$ , parallela all'asse  $Y$ , ossia  $X_P = X_G$ , si ha:

$$N_i = N \cdot \left[ \frac{1}{m} + \frac{(Y_P - Y_G) \cdot (Y_i - Y_G)}{\sum_{i=1}^m (Y_i - Y_G)^2} \right]$$

Analogamente se  $N$  cade sulla retta per  $G$  parallela all'asse  $X$ , risultando  $Y_P = Y_G$ , si ottiene:

$$N_i = N \cdot \left[ \frac{1}{m} + \frac{(X_P - X_G) \cdot (X_i - X_G)}{\sum_{i=1}^m (X_i - X_G)^2} \right]$$

Gli ultimi due casi si verificano generalmente per fabbricati in zona sismica e per azioni sismiche agenti rispettivamente in direzione  $Y$  ed in direzione  $X$ , se i momenti derivanti dalla direzione ortogonale per soli carichi verticali sono nulli.

## 2.2. Ripartizione di uno sforzo orizzontale.

Nota la risultante  $T$  degli sforzi di taglio e le coordinate del centro di sollecitazione  $P(X_P, Y_P)$ , si sostituisce nelle (1); (2), (4), (5) la rigidezza tagliante del palo alla grandezza  $m_i$ , ottenendo così le coordinate del baricentro delle rigidezze (centro di torsione) e i valori di  $T_i^t$  e  $T_i^r$ .

La rigidezza tagliante  $W_i^o$  deve essere determinata sperimentalmente, come rapporto tra la forza orizzontale applicata in testa al palo ed il corrispondente spostamento orizzontale.

Detto spostamento orizzontale è funzione delle caratteristiche del terreno, della condizione di vincolo della testa del palo, del diametro e della lunghezza del palo. Per maggiori dettagli sulla definizione della rigidezza tagliante si rinvia alla bibliografia.

Nel caso particolare che i pali abbiano tutti le stesse caratteristiche geometriche ed il terreno sia omogeneo, la rigidezza dei pali è costante e si ha:

$$X_G = \frac{\sum_{i=1}^m X_i}{m} \quad (1''')$$

$$Y_G = \frac{\sum_{i=1}^m Y_i}{m} \quad (2''')$$

$$T_i^t = \frac{T}{m} \quad (4')$$

$$T_i^r = \frac{T \cdot e}{\sum_{i=1}^m d_i^2} \cdot d_i \quad (5')$$

Nell'ipotesi che i pali abbiano tutti la stessa rigidezza e lo sforzo  $T$  sia parallelo ad uno degli assi  $X$  e  $Y$ , come usualmente avviene nel caso di fabbricati siti in zona sismica, si ottiene:

per  $T//X$ :

$$T_{ix} = \frac{T}{m} + \frac{T \cdot (Y_P - Y_G) \cdot (Y_i - Y_G)}{\sum_{i=1}^m d_i^2} \quad (8')$$

$$T_{iy} = -\frac{T \cdot (Y_P - Y_G) \cdot (X_i - X_G)}{\sum_{i=1}^m d_i^2} \quad (9')$$

per  $T//Y$ :

$$T_{ix} = -\frac{T \cdot (X_P - X_G) \cdot (Y_i - Y_G)}{\sum_{i=1}^m d_i^2} \quad (8'')$$

$$T_{iy} = \frac{T}{m} + \frac{T \cdot (X_P - X_G) \cdot (X_i - X_G)}{\sum_{i=1}^m d_i^2} \quad (9'')$$

### 2.3. Conclusioni e considerazioni particolari relative a fabbricati in zona sismica.

Nel caso di fabbricato in zona sismica risulta:

$N$  = peso del fabbricato

$T$  = sommatoria di tutte le forze sismiche di piano

Se le rigidezze taglianti e assiali dei pali sono proporzionali, il centro elastico della palificata coincide con il centro di torsione. Detta coincidenza si verifica in particolare se tutti i pali hanno la stessa rigidezza assiale e la stessa rigidezza tagliante, ossia nel caso di pali uguali.

Le formule per la ripartizione di uno sforzo normale e di uno sforzo orizzontale, esplicitate per la platea, valgono ovviamente anche nel caso di plinti isolati.

Nel caso di plinti collegati, bisogna invece considerare la presenza di detti collegamenti e, nel caso conferiscano alla struttura di fondazione rigidezza sufficiente a far traslare e ruotare la stessa come un corpo rigido, la ripartizione deve essere effettuata, tenendo conto dello sforzo tagliante relativo a tutto il fabbricato, tra i pali dell'intera fondazione.

Dette considerazioni valgono anche nel caso che due o più plinti si comportino come un corpo rigido. In quest'ultima ipotesi si consiglia, ai fini del calcolo del massimo sforzo di taglio in testa al palo, di operare la ripartizione nella ipotesi di plinti operanti in gruppo e di plinti isolati; tra i due valori di  $T$ , così calcolati si sceglie, ai fini della verifica del palo, il maggiore.

Noti per ogni palo e per ogni condizione di carico lo sforzo assiale  $N_i$  e l'azione orizzontale  $T_i$  da applicare in testa al palo, conviene, prima di procedere alla verifica di resistenza ed al calcolo delle armature, verificare che lo sforzo  $N_i$  risulti minore o uguale del carico ammissibile sul palo.

Quando  $N_i$  in uno o più pali risulta maggiore del carico ammissibile si devono adottare uno o più dei provvedimenti seguenti:

- a) aumentare il numero dei pali;
- b) aumentare la sezione del palo;
- c) variare il posizionamento dei pali.

È molto importante il posizionamento dei pali che dovrebbe tendere ad una ripartizione uniforme dello sforzo  $N$  e dello sforzo  $T$  tra i pali, ottenendo così la palificata più economica. Per ottenere ciò, si deve fare in modo che la risultante dei carichi verticali e la risultante dei carichi orizzontali siano applicate nel baricentro della palificata; in tale ipotesi i pali si caricano uniformemente. In presenza di più schemi di carico, con riferimento al fabbricato in zona sismica, tale condizione può ottenersi per uno solo degli schemi; in tal caso conviene ottenere la uniformità di carico sui pali per la condizione di soli carichi verticali sul fabbricato.

Nota per ogni palo la coppia  $(N_i, T_i)$  per ogni condizione di carico, si devono tracciare i diagrammi del momento e del taglio lungo il palo ed effettuarne quindi la verifica a pressoflessione.

Per quanto concerne la definizione della funzione momento e della funzione taglio lungo il palo, dipendenti dalle caratteristiche del terreno e del palo nonché del vincolo in testa al palo, si rinvia alla bibliografia sull'argomento.

### 3. Plinto a $m$ pali uguali disposti lungo una circonferenza.

Si vuole operare la ripartizione di uno sforzo normale, momento e taglio tra  $m$  pali uguali disposti lungo una circonferenza.

I pali sono disposti a distanza mutua  $l$  e l'angolo al centro, corrispondente alla corda tra due pali successivi, vale:

$$\alpha = \frac{360^\circ}{m}$$

Il legame  $R - l$  risulta:

$$R = \frac{l/2}{\sin \alpha/2}$$

Detto  $\beta_0$  l'angolo che il raggio per il primo palo forma con l'asse Y e  $\beta_i$  l'angolo che il palo  $i$  forma con lo stesso asse Y, tra i vari  $i$  valgono le seguenti relazioni:

$$\beta_1 = \beta_0$$

$$\beta_2 = \beta_1 + \alpha$$

⋮

$$\beta_m = \beta_{m-1} + \alpha$$

Si è assunto un sistema di assi con origine nel centro della circonferenza, ossia nel baricentro dei pali.

Le coordinate del palo  $i$ , con le posizioni innanzi fatte, valgono:

$$X_i = R \sin \beta_i$$

$$Y_i = R \cos \beta_i$$

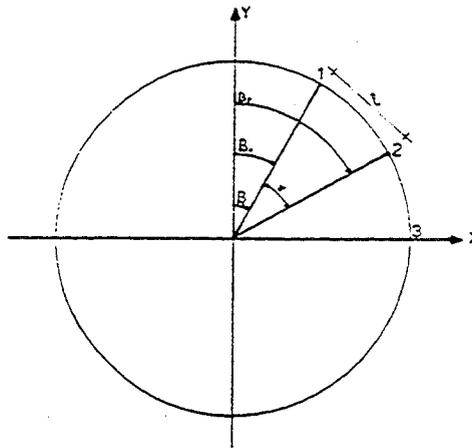


FIG.6

In presenza di uno sforzo normale  $N$ , di un momento  $M_{zy}$  e di un taglio  $T_y$ , detta  $H$  l'altezza del plinto, essendo

$$Y_P = \frac{M_{zy} + T_y \cdot H}{N}, X_P = 0, X_G = 0, Y_G = 0$$

dalla (3'') si ricava<sup>1</sup>:

$$N_i = \frac{N}{m} + \frac{N \cdot Y_P \cdot Y_i}{\sum_{i=1}^m Y_i^2} = \frac{N}{m} + \frac{N \cdot Y_P}{R^2 \cdot \sum_{i=1}^m \cos^2 \beta_i} \cdot R \cos \beta_i =$$

$$= \frac{N}{m} + \frac{N \cdot Y_P}{R \cdot m/2} \cdot \cos \beta_i = \frac{N}{m} \left( 1 + \frac{2 \cdot Y_P \cos \beta_i}{R} \right) \quad (10)$$

Lo sforzo di taglio nel palo  $i$ , essendo il baricentro dei pali coincidente con il centro di sollecitazione, risulta dalle (8'') e (9''):

$$T_{ix} = 0$$

$$T_{iy} = \frac{T_y}{m} \quad (11)$$

$$T_i = \frac{T_y}{m}$$

In presenza di uno sforzo  $N$ , di un momento  $M_{zx}$  e di un taglio  $T_x$ , analogamente al caso precedente, si ricavano:

$$X_P = \frac{M_{zx} + T_x \cdot H}{N}, \quad Y_P = 0, \quad X_G = 0, \quad Y_G = 0$$

$$N_i = \frac{N}{m} \left( 1 + \frac{2 \cdot X_P}{R} \cdot \sin \beta_i \right) \quad (12)$$

$$T_i = \frac{T_x}{m} \quad (13)$$

Si semplificano nel seguito le espressioni (10), (11), (12) e (13) con riferimento ai plinti a 2, 3, 4, 5, 6 pali.

<sup>1</sup>Per  $m$  intero  $\geq 3$ , qualunque sia  $\beta_0$  si verifica:

$$\sin^2 \beta_1 + \sin^2 \beta_2 + \dots + \sin^2 \beta_m = \frac{m}{2}$$

$$\cos^2 \beta_1 + \cos^2 \beta_2 + \dots + \cos^2 \beta_m = \frac{m}{2}$$

3.1. Plinto a due pali.

Nel caso di plinto a due pali risulta:

$$\begin{aligned} m &= 2 \\ \alpha &= 180^\circ \\ R &= l/2 \\ \beta_0 &= 0^\circ \\ \beta_1 &= 0^\circ \\ \beta_2 &= 180^\circ \end{aligned}$$

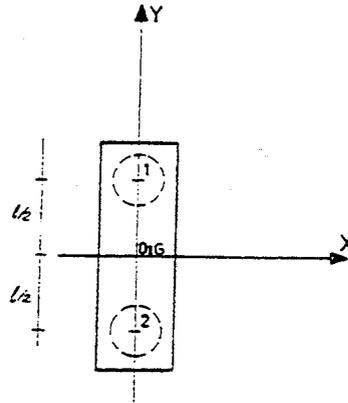


FIG. 7

In presenza di  $N, M_{zy}, T_y$  e tenuto conto che  $\sum_{i=1}^m \cos^2 \beta_i = 2$ , si ha:

$$\begin{aligned} N_i &= \frac{N}{2} + \frac{N \cdot Y_P}{R^2 \cdot \sum_{i=1}^m \cos^2 \beta_i} \cdot R \cos \beta_i = \frac{N}{2} \left( 1 + \frac{Y_P}{R} \cdot \cos \beta_i \right) = \\ &= \frac{N}{2} \left( 1 + \frac{2 \cdot Y_P}{l} \cos \beta_i \right) \end{aligned}$$

Tenuto conto che  $\cos \beta_1 = 1$  e  $\cos \beta_2 = -1$  si ha:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{N}{2} \cdot \left( 1 + \frac{2 \cdot Y_P}{l} \right) \\ N_2 &= \frac{N}{2} \cdot \left( 1 - \frac{2 \cdot Y_P}{l} \right) \end{aligned}$$

In presenza di  $N, M_{zx}, T_x$  e tenuto conto che  $\sum_{i=1}^m \sin^2 \beta_i = 0$ , si ha:

$$N_i = \frac{N}{2} + \frac{N \cdot X_P}{R^2 \cdot 0} \cdot R \cdot 0 \quad (\text{indeterminata})$$

$$T_i = \frac{T_x}{2}$$

Il plinto a due pali non in grado di fronteggiare un momento  $M_{xx}$  per cui in direzione  $X$  è indispensabile la presenza di una trave di collegamento.

### 3.2. Plinto a tre pali.

Nel plinto a tre pali risulta:

$$m = 3$$

$$\alpha = 120^\circ$$

$$R = \frac{l/2}{\sin 60^\circ} = l \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\beta_0 = 0^\circ$$

$$\beta_1 = 0^\circ$$

$$\beta_2 = 120^\circ$$

$$\beta_3 = 240^\circ$$

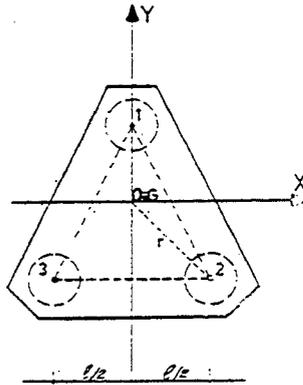


FIG. 8

In presenza di  $N$ ,  $M_{xy}$ ,  $T_y$  dalle (10) e (11) si ottiene:

$$N_i = \frac{N}{3} \cdot \left( 1 + \frac{2 \cdot Y_P}{l \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} \cdot \cos \beta_i \right)$$

$$T_i = \frac{T_y}{3}$$

Gli sforzi nei singoli pali, tenuto conto del relativo valore di  $\cos \beta_i$ , risultano:

$$N_1 = \frac{N}{3} \cdot \left( 1 + \frac{2 \cdot Y_P \sqrt{3}}{l} \right)$$

$$N_2 = N_3 = \frac{N}{3} \cdot \left( 1 - \frac{Y_P \cdot \sqrt{3}}{l} \right)$$

In presenza di  $N, M_{xx}, T_x$  dalle (12) e (13) si ottiene:

$$N_i = \frac{N}{3} \left( 1 + \frac{2 \cdot X_P}{l \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} \cdot \sin \beta_i \right)$$

$$T_i = \frac{T_x}{3}$$

Gli sforzi nei singoli pali valgono:

$$N_1 = \frac{N}{3}$$

$$N_2 = \frac{N}{3} \cdot \left( 1 + \frac{3 \cdot X_P}{l} \right)$$

$$N_3 = \frac{N}{3} \cdot \left( 1 - \frac{3 \cdot X_P}{l} \right)$$

### 3.3. Plinto a quattro pali.

Risultano in questo caso:

$$m = 4$$

$$\alpha = 90^\circ$$

$$R = \frac{l/2}{\sin 45^\circ} = l \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\beta_0 = 45^\circ$$

$$\beta_1 = 45^\circ$$

$$\beta_2 = 135^\circ$$

$$\beta_3 = 225^\circ$$

$$\beta_4 = 315^\circ$$

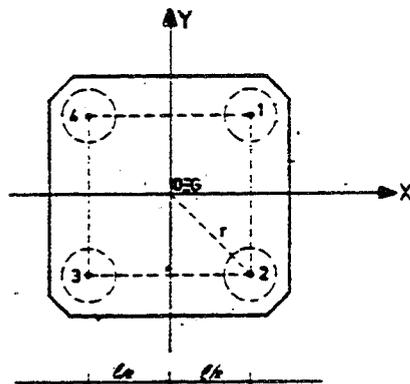


FIG.9

In presenza di  $N, M_{zy}, T_y$  si ha:

$$N_i = \frac{N}{4} \cdot \left( 1 + \frac{2 \cdot Y_P}{l \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot \cos \beta_i \right)$$

$$T_i = \frac{T_y}{4}$$

Gli sforzi nei singoli pali, valgono:

$$N_1 = N_4 = \frac{N}{4} \cdot \left( 1 + \frac{2 \cdot Y_P}{l} \right)$$

$$N_2 = N_3 = \frac{N}{4} \cdot \left( 1 - \frac{2 \cdot Y_P}{l} \right)$$

In presenza di  $N, M_{zx}, T_x$  si ottiene :

$$N_i = \frac{N}{4} \cdot \left( 1 + \frac{2 \cdot X_P}{l} \cdot \sin \beta_i \right)$$

$$T_i = \frac{T_x}{4}$$

Gli sforzi nei singoli pali valgono:

$$N_1 = N_2 = \frac{N}{4} \cdot \left( 1 + \frac{2 \cdot X_P}{l} \right)$$

$$N_3 = N_4 = \frac{N}{4} \cdot \left( 1 - \frac{2 \cdot X_P}{l} \right)$$

3.4. Plinto a cinque pali.

In questo caso risultano:

$$m = 5$$

$$\alpha = 72^\circ$$

$$R = \frac{l/2}{\sin(72^\circ/2)} = 0.85l$$

$$\beta_0 = 0^\circ$$

$$\beta_1 = 0^\circ$$

$$\beta_2 = 72^\circ$$

$$\beta_3 = 144^\circ$$

$$\beta_4 = 216^\circ$$

$$\beta_5 = 288^\circ$$

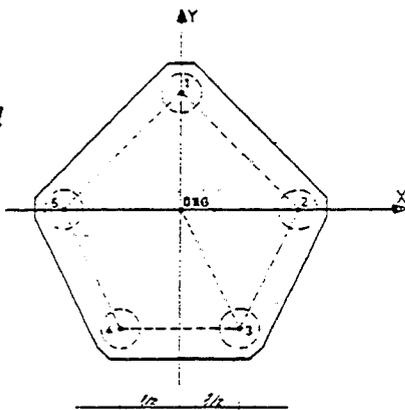


FIG.10

In presenza di  $N, M_{xy}, T_y$  si ha:

$$N_i = \frac{N}{5} \left( 1 + \frac{2 \cdot Y_P}{0.85 \cdot l} \cdot \cos \beta_i \right)$$

$$T_i = \frac{T_y}{5}$$

Gli sforzi nei singoli pali valgono:

$$N_1 = \frac{N}{5} + \frac{N \cdot Y_P}{2.125 \cdot l}$$

$$N_2 = N_5 = \frac{N}{5} + \frac{N \cdot Y_P \cdot 0.31}{2.125 \cdot l}$$

$$N_3 = N_4 = \frac{N}{5} - \frac{N \cdot Y_P \cdot 0.81}{2.125 \cdot l}$$

In presenza di  $N, M_{zz}, T_x$  si ha:

$$N_i = \frac{N}{5} \left( 1 + \frac{2 \cdot X_P}{0.85 \cdot l} \cdot \sin \beta_i \right)$$

$$T_i = \frac{T_x}{5}$$

Gli sforzi nei singoli pali valgono:

$$N_1 = \frac{N}{5}$$

$$N_2 = \frac{N}{5} + \frac{N \cdot X_P \cdot 0.95}{2.125 \cdot l}$$

$$N_3 = \frac{N}{5} + \frac{N \cdot X_P \cdot 0.59}{2.125 \cdot l}$$

$$N_4 = \frac{N}{5} - \frac{N \cdot X_P \cdot 0.59}{2.125 \cdot l}$$

$$N_5 = \frac{N}{5} - \frac{N \cdot X_P \cdot 0.95}{2.125 \cdot l}$$

3.5. Plinto a sei pali.

In questo caso risultano:

$$m = 6$$

$$\alpha = 60^\circ$$

$$R = l$$

$$\beta_0 = 30^\circ$$

$$\beta_1 = 30^\circ$$

$$\beta_2 = 90^\circ$$

$$\beta_3 = 150^\circ$$

$$\beta_4 = 210^\circ$$

$$\beta_5 = 270^\circ$$

$$\beta_6 = 330^\circ$$

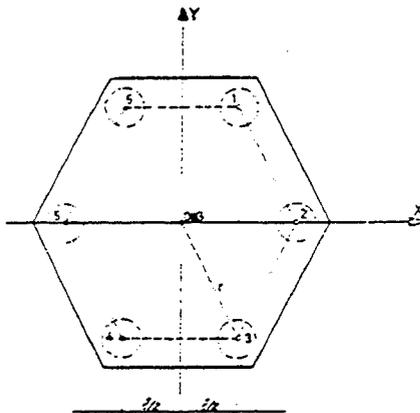


FIG.11

In presenza di  $N, M_{zy}, T_y$  si ha:

$$N_i = \frac{N}{6} \left( 1 + \frac{2 \cdot Y_P}{l} \cdot \cos \beta_i \right)$$

$$T_i = \frac{T_y}{6}$$

Gli sforzi nei singoli pali valgono:

$$N_1 = N_6 = \frac{N}{6} \left( 1 + \frac{Y_P}{l} \sqrt{3} \right)$$

$$N_2 = N_5 = \frac{N}{6}$$

$$N_3 = N_4 = \frac{N}{6} \left( 1 - \frac{Y_P}{l} \sqrt{3} \right)$$

In presenza di  $N, M_{zx}, T_x$  si ha :

$$N_i = \frac{N}{6} \left( 1 + \frac{2 \cdot X_P}{l} \cdot \sin \beta_i \right)$$

$$T_i = \frac{T_x}{6}$$

Gli sforzi nei singoli pali risultano:

$$N_1 = N_3 = \frac{N}{6} \left( 1 + \frac{X_P}{l} \right)$$

$$N_2 = \frac{N}{6} \left( 1 + \frac{2 \cdot X_P}{l} \right)$$

$$N_4 = N_6 = \frac{N}{6} \left( 1 - \frac{X_P}{l} \right)$$

$$N_5 = \frac{N}{6} \left( 1 - \frac{2 \cdot X_P}{l} \right)$$

#### 4. Progetto dei plinti su pali.

Nel seguito si fa riferimento esplicito, per il progetto e le verifiche, al caso del plinto a due pali potendosi, con opportune modifiche, utilizzare le stesse formule per i plinti con più di due pali.

##### 4.1. Progetto a flessione.

Si fa l'ipotesi di plinto di normale altezza, ossia di plinto per il quale sia ipotizzabile un comportamento a trave e sia quindi schematizzabile come due mensole incastrate a filo pilastro e caricate dalla reazione dei pali.

Con riferimento alla figura 12 il momento a filo pilastro risulta:

$$M = P \cdot d$$

Si può progettare l'altezza del plinto con la seguente:

$$h = r \cdot \sqrt{\frac{M}{b}} \quad (14)$$

essendo  $r$  funzione delle sollecitazioni ammissibili nel calcestruzzo e nelle armature nonché del rapporto  $E_f/E_c$  e  $b = (D + 10 + 10)$ .

Definita l'altezza del plinto si calcola l'armatura a flessione da disporre inferiormente a filo pilastro:

$$A_f = \frac{M}{0.9 h \sigma_f} = \frac{P \cdot d}{0.9 h \sigma_f} \quad (15)$$

#### 4.2. Progetto a punzonamento e a taglio.

Il diagramma della caratteristica tagliante è costante e vale  $T = P$ .

Si assume la sollecitazione tangenziale costante e pari al valore massimo:

$$\tau = \frac{P}{0.9 b h}$$

##### a) punzonamento

Con riferimento alla sezione A-B di fig.12 lo sforzo di trazione vale:

$$F_1 = \frac{\tau b h}{\sqrt{2}} = \frac{P}{0.9 b h} \cdot \frac{b h}{\sqrt{2}} = \frac{P}{0.9 \sqrt{2}}$$

L'area dei sagomati da disporre nella sezione A-B vale:

$$A_f^{(2)} = \frac{F_1}{\sigma_f} = \frac{P}{0.9 \sqrt{2} \sigma_f} \quad (16)$$

##### b) taglio

Con riferimento alla sezione A-C di fig.12 lo sforzo di trazione vale:

$$F_2 = \tau b d \sqrt{2} = \frac{P}{0.9 b h} \cdot b d \sqrt{2} = \frac{P d \sqrt{2}}{0.9 h}$$

L'area dei sagomati da disporre nella sezione A-C vale:

$$A_f^{(3)} = \frac{F_2}{\sigma_f} = \frac{P d \sqrt{2}}{0.9 h \sigma_f} \quad (17)$$

Detta area deve essere presente in tutte le sezioni parallele alla sezione A-C ed è relativa alla lunghezza  $d \cdot \sqrt{2}$ .

Ricerchiamo l'area a punzonamento da disporre nel tratto generico  $\Delta z$  (pari al rapporto tra  $A_f^{(2)}$  e la lunghezza  $h/\sqrt{2}$  moltiplicato per la lunghezza  $\Delta z$ ):

$$A_f^{(2)}(\Delta z) = \frac{P}{0.9\sqrt{2}\sigma_f} \cdot \frac{1}{h/\sqrt{2}} \cdot \Delta z = \frac{P\Delta z}{0.9h\sigma_f} \quad (16')$$

Si ricerca analogamente l'area a taglio da disporre nel tratto generico  $\Delta z$ :

$$A_f^{(3)}(\Delta z) = \frac{Pd\sqrt{2}}{0.9h\sigma_f} \cdot \frac{1}{d\sqrt{2}} \cdot \Delta z = \frac{P\Delta z}{0.9h\sigma_f} \quad (17')$$

Confrontando le espressioni (16') e (17') si evince che, con riferimento al tratto generico  $\Delta z$  inclinato di  $45^\circ$  rispetto all'orizzontale, l'area di sagomati è la stessa a punzonamento e a taglio, per cui si può calcolare detta area con un'unica formula.

Si può concludere che, per ogni valore  $\Delta z$ , qualunque sia la sua posizione, bisogna intercettare la stessa area di sagomati, per cui è opportuno disporre uniformemente le armature e quindi, a parità, di diametro a distanza costante.

Ponendo  $\Delta z = 100$  cm ed esprimendo  $P$  in kg,  $h$  in cm e  $\sigma_f$  in  $\text{kg cm}^{-2}$ , l'area di sagomati a metro lineare diventa:

$$A_{f\text{ sag}} = \frac{P \cdot 100}{0.9h\sigma_f} \quad (18)$$

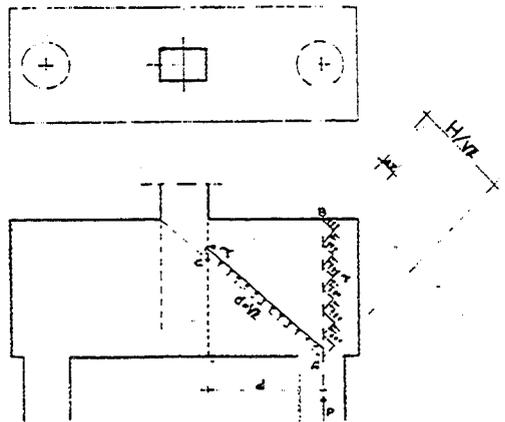


FIG.12

4.3. Progetto a rottura.

Quando l'altezza del plinto cresce, circostanza che generalmente si verifica per conferire al plinto la capacità di comportarsi come un corpo rigido e ripartire, in presenza di solo sforzo normale, equamente tra i pali lo sforzo, il modello che meglio interpreta il comportamento effettivo del plinto è quello a rottura.

Il modello (fig.13) è costituito da puntoni in calcestruzzo (elementi 1 e 2) e tirante di base in acciaio (elemento 3).

I puntoni, in analogia con le lesioni che si osservano a rottura, presentano rispetto all'orizzontale una inclinazione variabile tra  $45^\circ$  e  $90^\circ$ .

In particolare l'inclinazione vale  $45^\circ$  in presenza di solo taglio, vale  $90^\circ$  in presenza di sola flessione e assume valori compresi tra  $45^\circ$  e  $90^\circ$  in presenza contemporanea di flessione e taglio.

Detta inclinazione si pone generalmente in funzione del rapporto  $\varphi = M / T H$  e assume i valori limiti  $45^\circ$  per  $\varphi = 0$  e  $90^\circ$  per  $\varphi = \infty$ .

Nel caso del plinto per rendere trascurabile il regime flessionale rispetto a quello tagliante si fa in modo che risulti  $d_1 \leq h$  (per  $d_1 = h$  risulta  $\varphi = 1$ ).

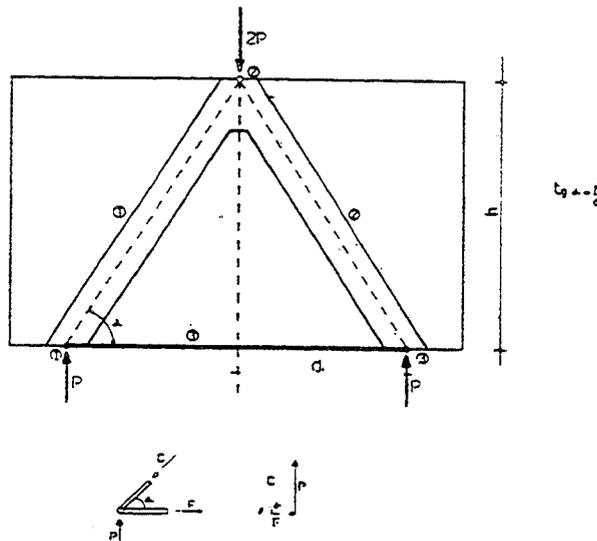


FIG.13

Per semplicità i singoli elementi vengono considerati incernierati agli estremi.

Per l'equilibrio del nodo 1 si ha:

$$C = \frac{P}{\sin \alpha}$$

$$F = \frac{P}{\tan \alpha} = \frac{P d_1}{h}$$

Dalla precedente si evince che al crescere del rapporto  $d_1/h$  cresce lo sforzo nel tirante; per  $d_1/h < 1$  risulta  $F < P$ , per  $d_1/h = 1$  risulta  $F = P$  e per  $d_1/h > 1$  risulta  $F > P$ .

L'ultima possibilità  $d_1/h > 1$  comporterebbe una inclinazione del puntone  $< 45^\circ$  in contrasto con la circostanza ormai acquisita che la inclinazione assume il valore minimo di  $45^\circ$ ; per  $d_1/h > 1$  il modello a rottura cade in difetto.

Perché il modello a rottura sia applicabile deve risultare  $d_1/h \leq 1$  e quindi  $h \geq d_1$ .

Lo sforzo nel tirante per quanto sopra assume valori  $\leq P$

L'area del tirante risulta:

$$A_f = \frac{F}{\sigma_f} = \frac{P d_1}{h \sigma_f} \quad (\text{valore max } P/\sigma_f) \quad (19)$$

Si noti come per  $d_1 = d/0.9$  l'area del tirante risulta eguale ad  $A_f$  calcolata a flessione nella sezione a filo pilastro.

Per  $d_1 = h$  detta area assume il valore massimo  $A_f = P/\sigma_f$ , cioè è pari al rapporto tra il taglio e la  $\sigma_f$ ; essa è proprio l'area da disporre inferiormente nelle travi semplicemente appoggiate, prevista al paragrafo 5.3.3 delle "Norme Tecniche ....." decreto 1/4/1983 del Ministero LL.PP.

#### 4.4. Conclusioni.

Con le considerazioni finora esposte si possono trarre le seguenti conclusioni relativamente al progetto dell'altezza del plinto e delle sue armature.

##### a) progetto altezza

- a flessione

$$h = r \cdot \sqrt{\frac{M}{b}}$$

- a taglio e/o punzonamento

$$h = \frac{P}{0.9 b \tau}$$

- a rottura

$$h \geq d_1$$

Tra i tre valori precedenti di  $h$  si adotta il maggiore.

b) progetto armature

- a flessione

$$A_f^{(1)} = \frac{P d}{0.9 h \sigma_f} \quad \left( \text{superflua per } d_1 \geq \frac{d}{0.9} \right)$$

- a rottura

$$A_f = \frac{P d_1}{h \sigma_f} \quad \left( \text{a vantaggio di statica si può assumere } A_f = \frac{P}{\sigma_f} \right)$$

- a taglio o punzonamento

$$A_{f \text{ sag}} = \frac{P \cdot 100}{0.9 h \sigma_f}$$

In termini applicativi le fasi sono le seguenti:

- calcolare l'area dei sagomati a metro lineare e disporli uniformemente;
- calcolare l'area a rottura e disporla diritta inferiormente;
- calcolare l'area a flessione a filo pilastro e confrontarla con quella a rottura; per  $h \geq d_1$  le differenze sono lievi ed anche se l'area a flessione risultasse maggiore di quella a rottura, comunque la presenza di sagomati oltre il filo pilastro sarebbe sufficiente ad integrare quest'ultima.

### Bibliografia.

- [1] M.Pagano, *Teoria degli edifici*, Liguori, Napoli.
- [2] M.Como, G.Lanni, *Elementi di costruzioni antisismiche*, Cremonese, Roma.
- [3] C.Cestelli Guidi, *Geotecnica e tecnica delle fondazioni*, Hoepli, Milano.
- [4] G.Menditto, *Esercitazioni di tecnica delle costruzioni*, Liguori, Napoli.
- [5] M.De Matteo, *Ricerca teorico-sperimentale sulla rottura in regime fles-sotagliante di travi in c.a.*, Industria italiana del cemento, Roma, luglio-agosto 1984.

## DOMINI DI RESISTENZA M-N.

Assegnata una sezione soggetta a pressoflessione, è possibile valutare, per ciascuna coppia delle caratteristiche di sollecitazione momento flettente  $M$  e sforzo normale  $N$ , l'ammissibilità delle conseguenti tensioni. L'insieme delle coppie di valori accettabili costituisce, nel piano  $M-N$ , un dominio, delimitato da una curva che verrà indicata col termine "curva limite nel piano  $M-N$ " o più sinteticamente "diagramma  $M-N$ ".

La valutazione di ammissibilità può essere fatta con riferimento sia alle tensioni di rottura del calcestruzzo e snervamento dell'acciaio (nel qual caso si parlerà di domini limite a rottura) che alle tensioni ammissibili. Nella verifica delle strutture in zona sismica si farà sempre riferimento a questo secondo caso, essendo per esse attualmente esclusa la possibilità di un calcolo a rottura:

L'uso dei diagrammi  $M-N$  può rendere più rapida la verifica a pressoflessione delle sezioni dei pilastri dell'edificio. Lo stato tensionale sarà infatti accettabile se il punto che rappresenta la coppia  $M-N$  si trova all'interno o sulla frontiera del dominio.

La maggiore utilità si riscontra, però, non tanto nella verifica quanto nella scelta delle armature da disporre in una assegnata sezione. Se per essa si determinano i domini corrispondenti a quantità diverse di armatura, si ottiene nel piano  $M-N$  un insieme di curve, che delimitano ciascun dominio. Per ciascuna coppia delle caratteristiche di sollecitazione si può allora individuare graficamente quale sia la quantità di armatura necessaria perché il punto che rappresenta tale coppia sia all'interno del dominio. Diventa inoltre facile valutare visivamente quale tra le numerose coppie  $M-N$  che

sollecitano la sezione sia la più gravosa.

Nel caso di sezioni rettangolari in c.a. con armatura simmetrica, che usualmente si adottano per i pilastri, il dominio è simmetrico rispetto all'asse  $N$ .

Per ciascuna curva limite si possono individuare più tratti. Da sinistra verso destra si ha:

- a) un tratto rettilineo, corrispondente alla sezione tutta tesa;
- b) un tratto teoricamente curvilineo, ma ai fini pratici quasi indistinguibile dal precedente, corrispondente alla sezione parzializzata, quando in essa l'acciaio va in crisi prima del calcestruzzo;
- c) un punto di cuspide, in corrispondenza del quale entrambi i materiali raggiungono contemporaneamente i valori limite delle tensioni;
- d) un tratto curvilineo, corrispondente alla sezione parzializzata, quando in essa il calcestruzzo va in crisi prima dell'acciaio;
- e) un tratto rettilineo, corrispondente alla sezione tutta compressa; è stata indicata con linea tratteggiata la parte finale di esso, che corrisponde a tensioni medie nel calcestruzzo superiori al 70% di quella limite, e quindi a coppie  $M-N$  comunque non conformi al regolamento.

Nelle pagine che seguono sono riportati i diagrammi  $M-N$  relativi ad alcune tra le sezioni più frequentemente utilizzate nella progettazione.

