

Appendice: risoluzione del telaio spaziale

Il modello meccanico di telaio spaziale a piani rigidi si caratterizza per i seguenti gradi di libertà che, nell'ambito risolutivo del metodo delle deformazioni, vengono assunti come incognite cinematiche:

- le rotazioni dei nodi, espresse ciascuna nei due piani verticali ortogonali $\varphi_{i,xz}$ e $\varphi_{i,yz}$;
- il moto rigido orizzontale dell'impalcato che, come vedremo, potrà essere espresso da tre parametri.

Nel caso di ritri deformabili assialmente vanno considerati anche gli spostamenti verticali dei nodi.

Il moto dell'impalcato, inteso come corpo rigido, può essere espresso dalle due componenti orizzontali dello spostamento – assoluto oppure relativo (rispetto cioè al piano inferiore) – di un generico punto del piano e dalla rotazione intorno al suddetto punto arbitrario. Possiamo ad esempio definire con $\delta_{Ox,r}$ e $\delta_{Oy,r}$ lo spostamento relativo del punto O del generico piano r e con Φ_r la rotazione relativa dell'impalcato. Lo spostamento di ogni punto P del piano può essere espresso in funzione dei parametri assunti

$$\begin{aligned}\delta_{Px,r} &= \delta_{Ox,r} + \Phi_r (y_P - y_O) \\ \delta_{Py,r} &= \delta_{Oy,r} - \Phi_r (x_P - x_O)\end{aligned}\tag{A.1}$$

ove il segno meno deriva dalla necessità di adottare una convenzione dei segni anche per le rotazioni (ad esempio positive se orarie).

Il moto (relativo) dell'impalcato è stato quindi espresso dalla traslazione rigida di un generico punto e dalla rotazione intorno a tale punto. Il centro C di rotazione è il punto che, nel moto dell'impalcato, non subisce traslazione; esso può essere individuato utilizzando le (A-1) eguagliando a zero gli spostamenti

$$\begin{aligned}y_C &= y_O - \frac{\delta_{Ox,r}}{\Phi_r} \\ x_C &= x_O + \frac{\delta_{Oy,r}}{\Phi_r}\end{aligned}\tag{A.2}$$

I tre parametri che individuano il moto dell'impalcato potrebbero quindi anche essere le due coordinate del centro di rotazione e la rotazione Φ_r . Generalmente il centro di rotazione si trova fuori dell'impalcato e questo mostra come sia inesatta l'espressione comunemente usata da alcuni strutturisti che affermano che l'impalcato ruota intorno al cosiddetto centro delle rigidità (di cui parleremo più avanti).

A titolo di esempio un edificio con 30 pilastri e 6 piani presenta 360 incognite cinematiche costituite dalle rotazioni dei nodi e da 6×3 incognite relative al moto rigido dell'impalcato.

I gradi di libertà dinamici sono invece quelli legati alle azioni inerziali associate ai gradi di libertà cinematici; nella pratica tecnica il sistema di masse dell'edificio si considera, per semplicità, consistente in una massa traslazionale distribuita uniformemente sull'impalcato. Tale sistema si configura come una massa traslazionale risultante applicata nel baricentro delle masse (che usualmente si considera coincidente con il centro geometrico dell'impalcato) ed una massa rotazionale fornita dal momento di inerzia polare della distribuzione di masse rispetto a quel punto. Le azioni inerziali possono comunque essere “trasportate” in qualsiasi altro punto generico del piano dell'impalcato. I gradi di libertà dinamici del telaio spaziale a piani rigidi sono quindi i tre gradi di libertà cinematici di ogni impalcato. I modi di vibrare sono di conseguenza $3n$, essendo n il numero dei piani; essi possono dividersi in tre gruppi in ciascuno dei quali prevale rispettivamente la traslazione secondo la direzione x o y ovvero prevale la rotazione. Nell'ambito di ciascun gruppo il modo superiore si caratterizza per una inversione nel segno delle rotazioni di piano. Nel caso di edificio con perfetta simmetria geometrica e meccanica, i tre gruppi di modi di vibrare sono completamente disaccoppiati, nel senso che si presenta rispettivamente solo una traslazione ovvero la rotazione.

Risoluzione del sistema esteso di equazioni di equilibrio

Procedendo con il “metodo delle deformazioni” possiamo determinare le incognite cinematiche mediante la scrittura e la risoluzione di un sistema lineare di equazioni di equilibrio di ordine pari al numero delle incognite. Facciamo qui riferimento ad un sistema costituito da telai ortogonali con aste deformabili solo per flessione e trascurando la sollecitazione torsionale (ipotesi di aste infinitamente deformabili per torsione). Ricordiamo le incognite cinematiche:

- rotazioni dei nodi, $\varphi_{i,xz}$ e $\varphi_{i,yz}$ per ogni nodo i ;
- traslazione e rotazione dei piani, $\delta_{Ox,r}$, $\delta_{Oy,r}$ e Φ_r per ogni piano r .

Ricordiamo ancora le relazioni tra i momenti all'estremità dell'asta i,k e le incognite cinematiche

$$\text{travi:} \quad M_{i,k} = \overline{M}_{i,k} + 4 w'_{i,k} \varphi_i + 2 w'_{i,k} \varphi_k \quad (\text{A.3a})$$

$$\text{ritti nel piano } xz: \quad M_{i,k} = 4 w'_{i,k} \varphi_i + 2 w'_{i,k} \varphi_k - 6 w'_{i,k} \frac{\delta_{Ox,r} + \Phi_r (y_P - y_O)}{h_r} \quad (\text{A.3b})$$

$$\text{ritti nel piano } yz: \quad M_{i,k} = 4 w'_{i,k} \varphi_i + 2 w'_{i,k} \varphi_k - 6 w'_{i,k} \frac{\delta_{Oy,r} - \Phi_r (x_P - x_O)}{h_r} \quad (\text{A.3c})$$

In queste relazioni è:

$\overline{M}_{i,k}$ il momento d'incastro perfetto delle travi prodotto dai carichi distribuiti;

$$w'_{i,k} = \frac{E I_{i,k}}{l_{i,k}} \text{ un indice di rigidezza dell'asta.}$$

L'equazione di equilibrio alla rotazione dei nodi si esprime simbolicamente nel modo seguente

$$\sum_k M_{i,k} = 0 \quad (\text{A.4})$$

ove la sommatoria si estende a tutte le aste concorrenti nel nodo i che diano un contributo flessionale. Avendo ipotizzato telai ortogonali ed aste deformabili a torsione la sommatoria è composta al massimo da 4 termini e le incognite cinematiche che compaiono esplicitamente sono le rotazioni del nodo i , quelle dei nodi adiacenti ed appartenenti al piano considerato ed i parametri del moto dell'impalcato cui appartiene il nodo i e quello immediatamente superiore.

Le equazioni di equilibrio alla traslazione dei piani (due per ogni impalcato) sono così strutturate

$$Q_r + \sum_r \frac{M_{i,k} + M_{k,j}}{h_r} = 0 \quad (\text{A.5})$$

I termini della sommatoria sono pari al numero dei ritti rispettivamente nelle direzioni x ed y ; nell'equazione compaiono esplicitamente le rotazioni dei nodi in testa ed al piede dei ritti del piano r appartenenti ai telai in direzione x (ovvero y), la traslazione del piano r nella direzione x (ovvero y) e la rotazione dell'impalcato al piano r .

L'equazione di equilibrio alla rotazione intorno ad un asse verticale passante per il punto arbitrario O prescelto si configura nel modo seguente

$$M_r + \sum_r (y_P - y_O) \frac{M_{i,k} + M_{k,j}}{h_r} - \sum_r (x_P - x_O) \frac{M_{i,k} + M_{k,j}}{h_r} = 0 \quad (\text{A.6})$$

ove M_r rappresenta il momento delle forze esterne applicate al disopra del piano r rispetto al prescelto punto O e le due sommatorie sono estese ai ritti del piano r nelle due direzioni; le incognite che compaiono esplicitamente nell'equazione sono dunque le rotazioni (nei due piani) dei ritti, in testa ed al piede del piano r , ed i tre parametri del moto dell'impalcato r .

Se facciamo riferimento ad un telaio spaziale costituito da 6 piani e 30 pilastri (quindi 60 ritti) il sistema di equazioni sarà costituito da 378 equazioni con egual numero di incognite; in realtà le equazioni di equilibrio alla rotazione dei nodi conterranno esplicitamente al massimo 9 incognite, quelle di equilibrio alla traslazione dei piani 62 incognite e quelle di equilibrio alla rotazione degli impalcati 123 incognite.

Se immaginiamo la matrice dei coefficienti del sistema (denominata anche matrice di rigidezza del sistema) otteniamo una matrice molto estesa (378×378 elementi nell'esempio che stiamo immaginando) ma piena di zeri. Possiamo anche renderci conto che l'accoppiamento tra le diverse equazioni dipende in primo luogo dalle rotazioni degli impalcati. Se infatti si annullassero i coefficienti

Equilibrio	$\varphi_{i,xz}$	$\delta_{Ox,r}$	$\varphi_{i,yz}$	$\delta_{Oy,r}$	Φ_r
Rotazione nodi xz					
Traslazione piani x					
Rotazione nodi yz					
Traslazione piani y					
Rotazione piani intorno a z					

Fig. A.1. Equazioni di equilibrio del sistema

relativi a tali incognite il sistema esteso si disaccoppierebbe in due sistemi di equazioni rappresentativi dei due telai piani (treni di telai) costituiti dalla sequenza dei telai in direzione x ed y ; ciascuno dei due sistemi avrebbe dimensioni pari a 186 equazioni.

Se fossero nulli (o trascurabili) anche i coefficienti relativi alle traslazioni dei piani i due sotto-sistemi si disaccoppierebbero in tanti ulteriori sottosistemi pari al rispettivo numero di telai piani e ciascuno sarebbe rappresentativo del comportamento flessionale del singolo telaio a piani fissi.

Nella figura A.1 si è cercato di riassumere la struttura del sistema esteso di equazioni.

La risoluzione del sistema di equazioni può ottenersi in forma chiusa (metodo di sostituzione di Gauss e successive modifiche) o per via iterativa (metodo di Gauss-Seidel ad iterazione composta, che corrisponde ai tradizionali metodi di rilassamento impiegati nel calcolo manuale). Nelle applicazioni professionali quotidiane si devono quindi impostare e risolvere sistemi di equazioni lineari di notevole ordine, ricorrendo generalmente a programmi di calcolo automatici; tuttavia la particolare struttura del sistema rende, con i tradizionali metodi di rilassamento, non impossibile persino una risoluzione manuale.

Condensazione del sistema di equazioni mediante le matrici di rigidezza laterali

Il secondo approccio computazionale che presentiamo brevemente consente l'analisi del medesimo modello meccanico mediante una procedura articolata in più fasi successive che comporterà la risoluzione di sistemi di equazioni di ordine molto minore del sistema esteso esaminato precedentemente. Tale procedura utilizza le cosiddette matrici di rigidezza laterale dei telai piani.

Immaginiamo di imporre ad un telaio piano uno spostamento relativo unitario dell'impalcato r (e di quelli ad esso superiori), e di risolvere lo schema a piani fissi sollecitato da questa distorsione imposta; ad ogni piano potremo de-

$\mathcal{Q}_{xx} = \sum \mathcal{Q}_{xi}$	$\mathcal{Q}_{xy} = 0$	$\mathcal{Q}_{x\varphi} = \sum \mathcal{Q}_{xi}(y_i - y_o)$
$\mathcal{Q}_{yx} = \mathcal{Q}_{xy}$	$\mathcal{Q}_{yy} = \sum \mathcal{Q}_{yi}$	$\mathcal{Q}_{y\varphi} = \sum \mathcal{Q}_{yi}(x_o - x_i)$
$\mathcal{Q}_{\varphi x} = \mathcal{Q}_{x\varphi}$	$\mathcal{Q}_{\varphi y} = \mathcal{Q}_{y\varphi}$	$\mathcal{Q}_{\varphi\varphi} = \sum \mathcal{Q}_{xi}(y_i - y_o)^2 + \sum \mathcal{Q}_{yi}(x_o - x_i)^2$

Fig. A.2. Matrice di rigidezza della struttura

terminare i tagli nei ritti e di conseguenza il tagliante di piano che costituisce la reazione elastica che il telaio esercita per ritornare alla posizione indeformata. Potremo definire con $Q_{i,j}$ il tagliante al piano i che nasce per uno spostamento relativo unitario al piano j . $Q_{i,j}$ costituisce il generico elemento della matrice di rigidezza laterale del telaio piano; essa è ovviamente quadrata, simmetrica e di ordine pari al numero dei piani n . Le righe della matrice esprimono i coefficienti delle equazioni lineari di equilibrio alla traslazione tra le azioni esterne imposte Q_r e le suddette reazioni elastiche espresse in funzione degli spostamenti di piano δ_r . Per determinare la matrice di rigidezza laterale di un telaio piano ad n piani occorre risolvere pertanto n schemi a piani fissi.

La conoscenza di tali matrici consente successivamente di costruire la matrice dei coefficienti (ovvero di rigidezza) di un telaio spaziale a piani rigidi, formata quindi dai coefficienti delle relazioni lineari che esprimano l'equilibrio tra le tre azioni esterne ad ogni piano ed i corrispondenti parametri di moto dell'impalcato. Il risultato di tale assemblaggio è ancora una matrice quadrata, simmetrica di ordine $3n$, essendo n il numero dei piani (Fig. A.2).

Con riferimento all'edificio di 30 pilastri e 6 piani il sistema di equilibrio spaziale risulterebbe condensato in un sistema di sole 18 equazioni. Occorre però sottolineare, al fine di un confronto di convenienza computazionale tra i due approcci finora esaminati, che a monte della risoluzione di questo sistema occorre predeterminare le matrici di rigidezza laterali di tutti i telai (quindi n schemi a piani fissi per ogni telaio piano) ed a valle occorre ancora calcolare le sollecitazioni corrispondenti agli spostamenti di piano di ciascun telaio (un ulteriore schema a piani fissi per ogni telaio).

Risoluzione approssimata dell'equilibrio mediante ripartizione dell'azione sismica

Il terzo approccio che si presenta è sicuramente, sotto il profilo formale, il meno limpido ed efficace per l'aspetto computazionale. Tuttavia è a tale approccio che si dedicherà maggiore spazio. Il motivo di questa anomalia è duplice: da un lato

infatti questo metodo, approssimato ed iterativo, consente di recuperare una continuità storica con i primi tentativi di calcolo sismico, valorizzandone anche il lessico tradizionale (ripartizione dell'azione sismica, centro delle rigidezze, eccentricità tra centro delle rigidezze e centro delle masse, etc.); dall'altro deve riconoscersi in questo approccio una maggiore capacità di comprensione del comportamento meccanico della struttura che si rivelerà particolarmente utile in sede di progettazione.

L'approccio storico cercava di "ripartire" preventivamente il tagliante sismico globale tra i diversi telai resistenti in maniera da limitare l'analisi a singoli telai piani (all'epoca accessibili al calcolo anche se non senza difficoltà); era intuitivo che il tagliante si sarebbe distribuito tra i telai in funzione della rigidezza di ciascuno di essi e l'attenzione si focalizzava proprio su tale (problematica) definizione. Immaginiamo infatti di "saggiare" la deformazione laterale di un assegnato telaio piano mediante un arbitrario sistema di azioni orizzontali applicate ai traversi; ottenuta la deformazione laterale si può definire "rigidezza laterale" al generico piano r il rapporto tra il tagliante e lo spostamento relativo di piano

$$K_r = \frac{Q_r}{\delta_r} \quad (\text{A.7})$$

La rigidezza laterale così definita però non è una caratteristica intrinseca della geometria meccanica del telaio. In effetti essa infatti è indipendente dall'intensità dell'azione tagliante ma non dalla distribuzione delle forze ai piani superiori; una diversa distribuzione di tali forze produrrebbe infatti, a parità di taglio globale, una diversa deformazione laterale.

Poiché la distribuzione delle forze ai vari piani sui diversi telai è proprio la nostra incognita è evidente che la rigidezza così definita non può che rappresentare un parametro provvisorio ed approssimato da utilizzare nei calcoli, con la possibilità di migliorarne l'approssimazione con una procedura iterativa. Si tratta quindi di una rigidezza laterale "apparente" o "provvisoria".

Nel caso di traversi infinitamente rigidi (schema alla Grinter) tale rigidezza diviene "esatta" ed è noto che essa è direttamente proporzionale alle inerzie dei pilastri. A tale ipotesi facevano spesso riferimento, con approssimazioni molto spinte, gli ingegneri delle passate generazioni.

Si consideri dunque un telaio spaziale ad n piani costituito da l telai paralleli all'asse x ed m all'asse ortogonale y ; si trascura la deformabilità assiale e tagliante delle aste mentre si considera praticamente infinita quella torsionale. Immaginiamo di aver ricavato per i singoli telai i valori delle "rigidezze laterali apparenti" $K_{i,r}^x$ e $K_{j,r}^y$, ove r indica il generico piano ed i e j il generico telaio piano rispettivamente disposti nella direzione x ($i = 1, \dots, l$) ed y ($j = 1, \dots, m$), come indicato ulteriormente dagli apici. Nel seguito vedremo come razionalizzare la determinazione di tali rigidezze provvisorie.

Come illustrato nei paragrafi precedenti il moto rigido dell'impalcato può essere espresso mediante la traslazione di un generico punto e la rotazione intorno ad esso. Negli sviluppi di questo approccio sarà utile scegliere come punto di riferimento il "baricentro delle rigidezze" (x_{wr} ed y_{wr}). Ricordando le (A.1) ed indicando con y_i ed x_j rispettivamente le ordinate e le ascisse delle due serie di telai piani otteniamo gli spostamenti dei singoli telai

$$\begin{aligned}\delta_{ix,r} &= \delta_{wx,r} + \Phi_r (y_i - y_{wr}) \\ \delta_{jy,r} &= \delta_{wy,r} - \Phi_r (x_j - x_{wr})\end{aligned}\quad (A.8)$$

I taglianti assorbiti dai singoli telai saranno quindi pari a

$$\begin{aligned}Q_{i,r}^x &= K_{i,r}^x [\delta_{wx,r} + \Phi_r (y_i - y_{wr})] \\ Q_{j,r}^y &= K_{j,r}^y [\delta_{wy,r} - \Phi_r (x_j - x_{wr})]\end{aligned}\quad (A.9)$$

Occorre allora esplicitare le incognite cinematiche tramite le equazioni di equilibrio alla traslazione ed alla rotazione. Se indichiamo con Q_{xr} , Q_{yr} , ed M_r i taglianti esterni applicati al piano r nel baricentro delle rigidezze con il relativo momento di trasporto, le equazioni di equilibrio alla traslazione si esprimono

$$\begin{aligned}Q_{x,r} &= \sum_i Q_{i,r}^x = \delta_{wx,r} \sum_i K_{i,r}^x \\ Q_{y,r} &= \sum_j Q_{j,r}^y = \delta_{wy,r} \sum_j K_{j,r}^y\end{aligned}\quad (A.10)$$

Come si vede nelle equazioni di equilibrio alla traslazione non compare la rotazione dell'impalcato. Questo disaccoppiamento delle equazioni dipende dalla particolare scelta del punto di riferimento (baricentro delle rigidezze); è infatti nullo il momento statico delle rigidezze rispetto al suo baricentro. Eguale vantaggio si ottiene sviluppando l'equazione di equilibrio alla rotazione

$$\begin{aligned}M_r &= \sum_i Q_{i,r}^x (y_i - y_{wr}) - \sum_j Q_{j,r}^y (x_j - x_{wr}) \\ M_r &= \Phi_r \left[\sum_i K_{i,r}^x (y_i - y_{wr})^2 + \sum_j K_{j,r}^y (x_j - x_{wr})^2 \right]\end{aligned}\quad (A.11)$$

I due equilibri, completamente indipendenti, consentono di esprimere la "ripartizione del tagliante sismico" mediante una semplice formula binomia

$$\begin{aligned}Q_{i,r}^x &= Q_{xr} \frac{K_{i,r}^x}{\sum_i K_{i,r}^x} + M_r \frac{K_{i,r}^x (y_i - y_{wr})}{\sum_i K_{i,r}^x (y_i - y_{wr})^2 + \sum_j K_{j,r}^y (x_j - x_{wr})^2} \\ Q_{j,r}^y &= Q_{yr} \frac{K_{j,r}^y}{\sum_j K_{j,r}^y} - M_r \frac{K_{j,r}^y (x_j - x_{wr})}{\sum_i K_{i,r}^x (y_i - y_{wr})^2 + \sum_j K_{j,r}^y (x_j - x_{wr})^2}\end{aligned}\quad (A.12)$$

Il centro delle rigidezze non è dunque il punto intorno al quale ruota l'impalcato, come pure impropriamente si dice nel linguaggio comune tra tecnici "militanti", bensì è solo il punto la cui traslazione non altera l'equilibrio alla rotazione. Si può invece affermare dalla (A.11) che in un edificio "in linea" la coincidenza tra il baricentro delle masse e quello delle rigidezze assicura l'assenza di rotazione degli impalcati.

Le espressioni (A.12) che sembrano, con straordinaria sintesi, risolvere il complesso problema dell'equilibrio del sistema spaziale, si basano su valori di rigidezze laterali sicuramente "provvisori" perchè dipendono dalla stessa ripartizione sismica che pretendono di determinare.

Ovviamente l'approssimazione del metodo può essere migliorata (quanto si vuole) innescando un procedimento iterativo che utilizzi valori aggiornati delle rigidezze laterali apparenti sulla base della distribuzione delle forze restituita dall'iterazione precedente. È importante dunque partire da valori delle rigidezze ragionevoli. A tal fine si suggerisce di considerare inizialmente due schemi piani costituiti da tutti i telai paralleli rispettivamente ad x ed y , considerati collegati da pendoli inestensibili, e soggetti all'intero tagliante sismico; tale schema viene chiamato "treno di telai" ovvero "telaio globale traslante". Esso corrisponde all'effettivo comportamento globale del sistema spaziale nei casi in cui la rotazione degli impalcati sia effettivamente nulla (o comunque irrilevante).

Il "treno di telai" costituisce quindi innanzitutto un primo modello globale (anche se non spaziale) del sistema utile per le prime verifiche tensionali di massima a valle dei predimensionamenti delle sezioni; inoltre consente una valutazione "decorosa" delle rigidezze laterali per una valutazione di massima della rotazione dell'impalcato. Ragionare infine in termini di "rigidezze laterali" e di eccentricità tra il baricentro delle rigidezze e quello delle masse (ove sono applicate le risultanti delle azioni sismiche) consente di individuare anche solo qualitativamente la qualità dell'impostazione strutturale assunta e di orientarne razionalmente le modifiche.

Esaminando infatti le piante a T, ad L ed a C, nell'ipotesi di masse e rigidezze uniformemente distribuite, possiamo prevedere una fisiologica (o naturale) eccentricità tra il baricentro delle masse e quello delle rigidezze legata appunto alla forma. Per quanto riguarda il centro delle rigidezze possiamo orientativamente prevederne la posizione sulla base del centro di taglio della figura. È evidente quindi che in sede di progettazione sarà utile, al fine di ridurre le rotazioni d'impalcato, orientare i pilastri rettangolari in maniera che la loro maggiore inerzia tenda a correggere tale situazione facendo diminuire tale eccentricità; anche un'opportuna scelta della rigidezza delle travi (a spessore o emergente) nelle campate dei telai perimetrali può essere utile a questo scopo.