

4.3 2 - Armature costituite solo da barre diritte.

Superano una buona parte di queste difficoltà i sistemi più semplici di armatura, adottati specialmente all'estero, costituiti da ferri dritti disposti solo superiormente ed inferiormente e collegati da staffe. Essi però non sono soddisfacenti per quanto riguarda l'assorbimento delle sollecitazioni di trazione derivanti dal taglio; che non può essere completamente assorbito localmente dalle sole staffe, e presentano difficoltà pratiche di posizionamento e di ancoraggio delle barre inferiori che s'interrompono lungo la trave per seguire l'andamento decrescente del diagramma dei momenti flettenti positivi (*).

A prescindere da questi inconvenienti, l'adozione di tali sistemi è giustificata, sotto il profilo economico, nei Paesi in cui è più basso il valore del rapporto tra costo del materiale (acciaio) e costo della mano d'opera, includendo in questa anche quella a livello direzionale, che diminuisce con la semplicità del sistema adottato (**).

Comunque, al diminuire, anche presso di noi, di questo rapporto, appare chiara l'opportunità di prendere in considerazione questi sistemi più semplici di armatura, purché, assicurino una completa efficienza statica.

(*) D'altra parte se le barre inferiori si assumono filanti lungo tutta la trave si ha agli estremi una esuberanza di armatura in relazione all'assorbimento delle caratteristiche flessionali.

(**) È di difficile e forse soggettiva, soluzione il problema economico di stabilire le condizioni che rendono conveniente un sistema rispetto all'altro.

È importante l'osservazione che essi sono certamente più opportuni nel caso di una lavorazione artigianale perché riducendo il grado di precisione svicolano il manufatto finale dalle più probabili deficienze di lavorazione di una mano d'opera saltuaria e meno qualificata. In definitiva le soluzioni più semplici (anche se apparentemente e per poco ancora più costose) realizzano maggiore celerità di esecuzione, diminuzione di ingegno tecnico ad ogni livello e come risultato finale maggiori garanzie di una buona esecuzione.

Al lume di tutte queste considerazioni appare soddisfacente la disposizione proposta (*) dalle figure 4-8 L e 4-13 L costituita solo da barre diritte piegate a squadro agli estremi. Essa in sostanza raggiunge lo scopo di eliminare ogni vincolo rigido che leghi la posizione delle armature superiori con quella delle armature inferiori (fig. 4-9).

Del resto l'aumento delle quantità di acciaio impiegato è modesto specie se considerato percentualmente rispetto al fabbisogno totale di un edificio ed è comunque certamente minore di quanto non possa risultare da un semplice computo di pesi. Infatti nel pieno rispetto dei calcoli statici, si ha con questa soluzione la possibilità di disporre aree metalli che resistenti esattamente corrispondenti a quelle richieste a flessione sia dai momenti positivi (barre inferiori) che dai momenti negativi (barre superiori) e dal taglio (barre di parete e staffe) eliminando quegli sprechi di progetto che sono inevitabili in caso di interdipendenza delle armature superiori ed infe

(*) MICHELE PAGANO "Una più semplice disposizione dei ferri nelle travi in cemento armato" Rivista Ordine Ingegneri di Napoli 1963.

riori. Inoltre, la riduzione delle lunghezze massime delle barre e la presenza di numerose barre corte, conseguente alla eliminazione dei sagomati, comporta una diminuzione degli sprechi dovuti, nel sistema tradizionale, alle differenze tra le lunghezze delle barre utilizzate e le lunghezze commerciali.

E' in corso un'adeguata sperimentazione di questo sistema, dalla quale si spera di trarre risposta soddisfacente a tutti gli interrogativi statici che esso puo' porre; in attesa, le barre inferiori (fig. 4-8 e 4-13 L), corrispondenti all'area necessaria in mezzeria, hanno tutte la lunghezza della luce libera piu' lo spessore dei due pilastri adiacenti e si ancorano a squadra, in corrispondenza della faccia del pilastro non adiacente alla campata servita (fig. 4-8).

I ferri superiori, disposti per assorbire gli sforzi di trazione derivanti da momenti negativi, sono realizzati con barre diritte che interessano l'intero spessore del pilastro e si prolungano nelle due campate adiacenti in modo tale che il piu' lungo di essi abbia l'intero ancoraggio in zona compressa (figura 4-14) ed i successivi vadano al di la' della sezione in cui sono richiesti dal calcolo, di un tratto sufficiente per l'ancoraggio. Ad eccezione dei reggi staffe, che sono continui, tutte le barre superiori hanno lunghezze variabili a scalare, secondo quanto richiesto dalla necessita' di ricoprire il diagramma del momento, oltre un idoneo ancoraggio.

E' opportuno inoltre, non cedere per il momento alla tentazione di eliminare anche l'uncinatura terminale, nel caso che le barre di acciaio siano ad aderenza migliorata. Infatti la uncinatura terminale

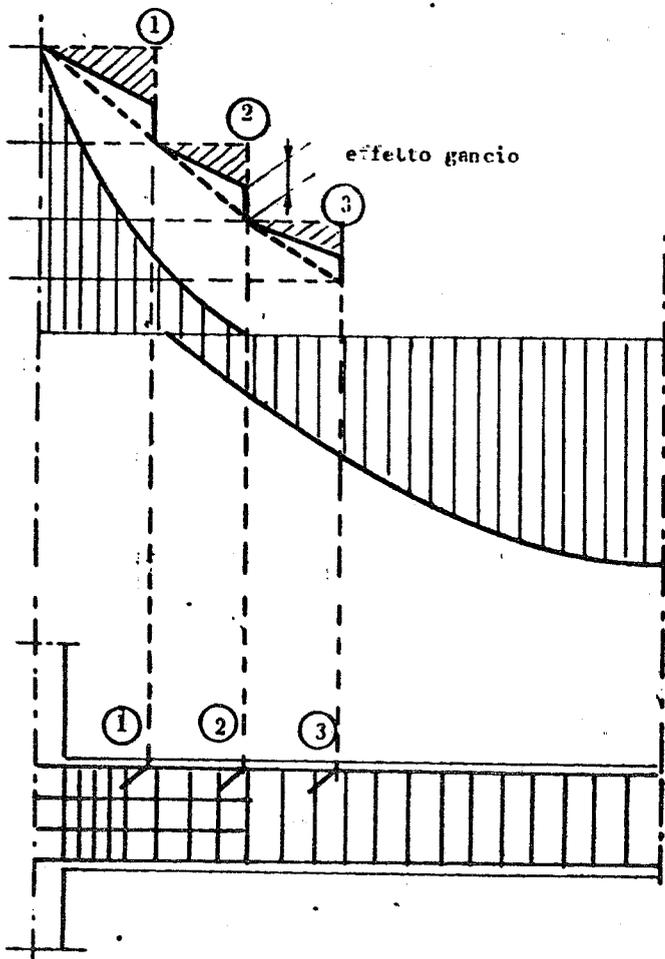
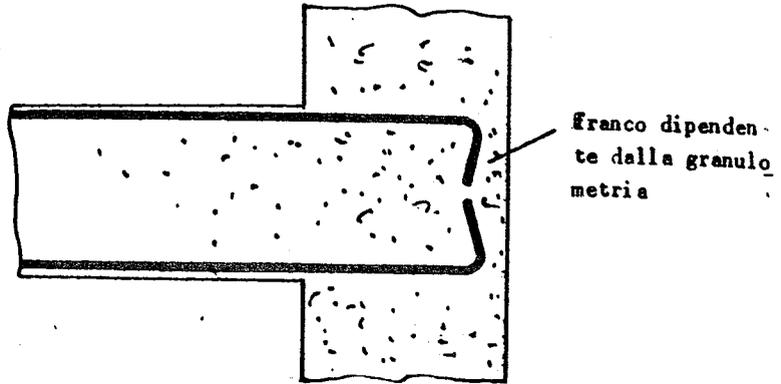


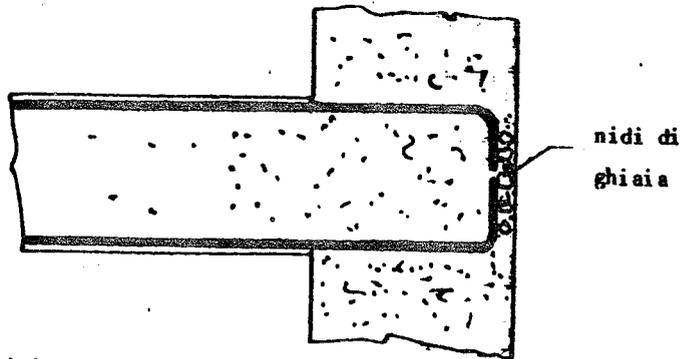
Fig. 4-14

realizzata con piegatura a squadra e' opportuna in ogni caso perche' va ad interessare il nucleo piu' interno del conglomerato della trave, il che e' indispensabile per barre poste in prossimita' della superficie esterna della trave, dove non si puo' garantire la assenza di difetti essendo il conglomerato piu' esposto' agli agenti esterni.

Puo' essere adottata in particolare la forma indica



a) disposizione corretta dei ganci



b) disposizione errata

Fig. 4-15

ta in fig. 4-15 che consente, con una semplice lavorazione, un minor ostacolo al costipamento del conglomerato e la unificazione completa di tutte le barre.

L'assorbimento del taglio e' affidato alle staffe ed ai ferri (di parete) disposti ad altezza intermedia, opportunamente diffusi lungo la parete (*). Anche le barre superiori ed' inferiori, esuberanti a flessione, possono essere chiamate ad assorbire il taglio, ma solo se e in quanto esuberanti e per l'aliquota di area che competerebbe alla zona da loro direttamente servi

(*) Una disposizione ideale dovrebbe creare, con le staffe ed i ferri di parete, una rete a maglie quadrate.

ta: cio' secondo il criterio di rinunciare alla possibilita' di provvedere solo con poche barre, concentrate in alcuni punti, all'assorbimento (globale) del taglio agente uniformemente nella sezione (*).

L'area delle staffe e dei ferri di parete si determina ispirandosi al criterio di assorbire le tensioni principali di trazione, il che porta, come e' noto, alla seguente formula che fornisce l'area metallica resistente per unita' di lunghezza sia in orizzontale (staffe) che in verticale (ferri di parete):

$$a_f = \frac{I}{\alpha n^* \sigma_f} \text{ cm}^2 \text{ cm}^{-1} \quad (\text{con } \alpha \geq 1)$$

La relazione e' valida sia per le staffe che per i ferri di parete: l'area totale di ferri orizzontali di parete vale pertanto:

$$A_p = \frac{I}{\sigma_f} \quad (\text{avendo posto } h^* = h \text{ e } \alpha = 1)$$

Le esperienze sembrano suggerire che nelle suddette formule il coefficiente α potrebbe assumersi anche maggiore di uno. Tuttavia e' opportuno, in attesa che la bibliografia diventi pacifica ed uniforme, riferirsi al limite inferiore ($\alpha = 1$).

Per chiudere questo argomento si vuole infine far presente che, con riferimento alle azioni esterne, il sistema di armatura con "ferri diritti" si presenta particolarmente vantaggioso quando, per la presenza di

(*) Un siffatto assorbimento globale con poche barre non distribuite, per realizzarsi effettivamente, richiederebbe la preventiva profonda fessurazione delle zone non armate (o armate insufficientemente) in modo che le bielle di conglomerato intervengano secondo il solito meccanismo.

numerose condizioni di carico, i momenti, e talora anche i tagli, assumono in piu' sezioni valori di segno opposto, il che avviene, ad esempio, nelle ossature di edifici posti in zona sismica.

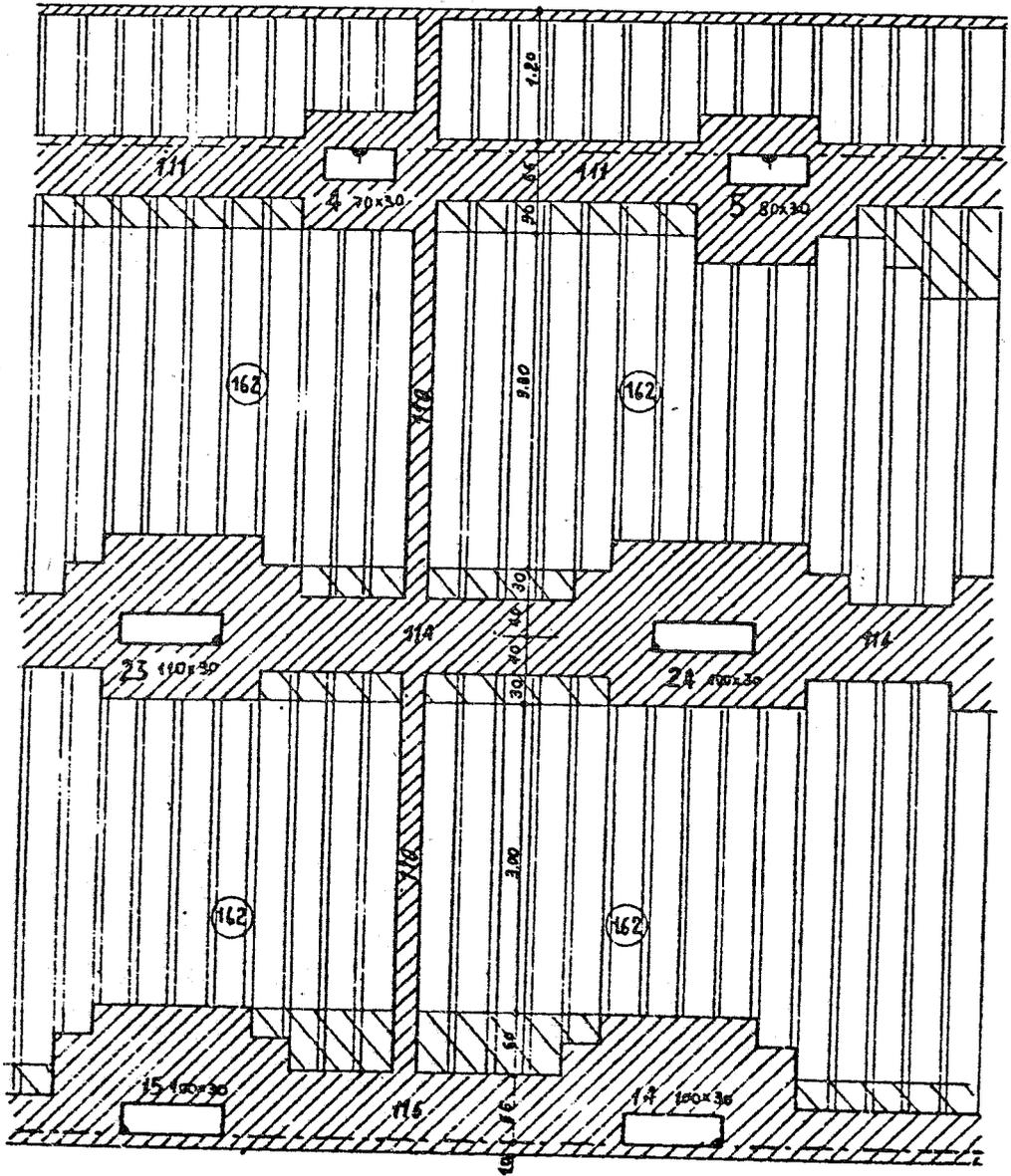
Inoltre particolari vantaggi si hanno nel caso di schemi strutturali geometricamente complessi quali, ad esempio, i reticoli di travi (graticci, cassettonati, solai rovesci di fondazione); in numerosi incroci la flessibilita' del sistema si dimostra molto utile.

4.4 - Travi a spessore .

Passiamo ora a descrivere la morfologia delle travi a spessore. Giova subito dire che per esse, appare, almeno per il momento, piu' opportuno adottare solo l'armatura tradizionale con barre sagomate; essendo in genere ridotti gl'inconvenienti (gia' enunciati per le travi emergenti e dipendenti da limitazioni della larghezza) che determinano la preferenza di un sistema con ferri dritti.

Per una trave di spina la pianta si presenta come in fig. 4-16; la larghezza e' variabile in funzione dell'andamento del momento flettente; se il solaio portato dalla trave e' misto a laterizi, la larghezza varia con discontinuita' in funzione delle dimensioni (in pianta) dei singoli blocchi.

Le barre che costituiscono l'armatura longitudinale si dispongono, ravvicinate tra loro, in corrispondenza della congiungente gli assi dei pilastri (asse della trave), in modo che, possibilmente, tutte le barre siano contenute in una larghezza pari alla dimensione



trasversale del pilastro (*); la larghezza della staffa che abbraccia le barre longitudinali e' quindi somma dei loro diametri e degli interferri prescritti. Non e' affatto opportuno distribuire uniformemente le barre su tutta la larghezza della trave quando questa e' piu' grande della dimensione del pilastro; anzi conviene, se mai, incrementare il diametro delle singole barre, pur di ridurre la larghezza della staffa nei limiti su indicati.

Tale disposizione e' consigliata dal fatto che il flusso delle tensioni osservanti alla flessione e dal taglio, interessa principalmente le fibre della trave che intersecano il pilastro, e cio' specialmente in prossimita' dei pilastri stessi dove, sono maggiori gli effetti del taglio. Infatti, se alla trave a spessore si pensa di pervenire attraverso la progressiva riduzione dell'altezza dell'anima di una trave emergente, si comprende piu' facilmente che il taglio, in particolare, e' trasmesso dalla trave al pilastro in massima parte attraverso il lato del pilastro normale all'asse della trave. In regime parzializzato, esso e' trasmesso dalle armature metalliche (sagomate e diritte) che cuciono al pilastro la sezione trasversale di attacco della trave al pilastro stesso. Alla parte centrale della trave a spessore e' essenzialmente affidata, cioe', la funzione di resistere al taglio, mentre, anche alle fasce laterali esterne al pilastro, e' affidata, sia pur in misura sempre decrescente, la funzione di assorbire lo sforzo di compressione, derivante dalla flessione, a guisa di suola di una trave ideale a T.

(*) Al piu' incrementata dello spessore della trave.

Volendo disporre l'armatura anche nelle fasce che eccedono la larghezza del pilastro, occorre disporre su questo un'armatura suppletiva trasversale, capace di riportare al pilastro stesso l'aliquota di sforzo tagliante che compete, presumibilmente, alle barre esterne al pilastro. Anche empiricamente e' pero' intuitivo che queste armature metalliche esterne, essendo piu' lontane, sono meno sollecitate di quelle centrali che s'innestano direttamente nel pilastro (*).

Anche nel caso che la trave sia di sponda, lo stesso ragionamento, per il quale alla sezione trasversale della trave a spessore si perviene riducendo progressivamente l'altezza dell'anima di una trave emergente ad L, consiglia di disporre le armature in modo da intersecare la sezione di attacco della trave al pilastro.

A vantaggio di statica, la verifica della resistenza della sezione corrente andrebbe fatta a flessione deviata, cosi' come e' prescritto per una trave ad L isolata, considerando cioe' "collaborante con la striscia centrale, larga quanto i pilastri, una zona piena laterale larga sei volte lo spessore del solaio stesso. Tenendo pero' conto del vincolo trasversale alla

(*) La legge di distribuzione trasversale dei momenti e dei tagli e' paragonabile qualitativamente a quella che si attribuisce in un solaio a "fungo" alla trave ideale che s'individua nella soletta. Il criterio di distribuire trasversalmente l'armatura in tutta la larghezza trova, forse, giustificazione nella sensazione, che si riceve da un esame della pianta della carpenteria, che le zone esterne della trave siano sguarnite di armatura. In realta' tali zone, in senso trasversale, partecipando allo schema statico del solaio sono dotate di armature trasversali, determinate nell'ipotesi che l'appoggio del solaio sia ubicato in asse alla trave a spessore. Quindi la suddetta sensazione non corrisponde ad una effettiva deficienza.

deformazione, costituito dal solaio, appare sufficiente una verifica a flessione retta lasciando ferma la estensione su indicata per la suola collaborante. Per le travi perimetrali intervengono anche problemi di impianti tecnici. La disposizione delle armature in una striscia ristretta adiacente al perimetro dell'edificio, facilita la realizzazione di fori per il passaggio dei servizi verticali che siano ubicati in adiacenza al perimetro interno del compagno perché non interferirebbero con il fascio delle barre di armatura. Se le dimensioni dei fori non sono molto grandi, non occorre una apposita verifica statica della trave ma basta disporre spezzoni di armatura (intorno ai fori) meccanicamente equivalente all'area resistente di conglomerato che viene a mancare

4 - 5 - Il calcolo di verifica delle travi.

4.5.1 - Introduzione.

Per la verifica delle travi i ragionamenti sono del tutto analoghi a quelli già svolti in precedenza per i solai; qualche piccola differenza è imposta dalla diversa funzione di questo elemento strutturale.

Si procede anche qui alla creazione di schemi limite che racchiudano la fascia in cui è contenuto il comportamento reale. La "schematizzazione" è, come in precedenza, un "operatore" che consente di effettuare la verifica della struttura: la trave inflessa e lo schema base per il quale occorre innanzitutto individuare tutte le condizioni di vincolo e di carico che si de-

terminano durante il procedimento costruttivo, dallo atto della esecuzione dell'impalcato, al quale le travi appartengono fino alla messa in servizio dell'opera. I limiti di tali vincoli e carichi individuano i limiti stessi della schematizzazione ovvero la " fascia" che essi racchiudono.

4.5.2 - Primo schema limite.

All'atto del disarmo (*) la trave deve spesso essere già in grado di sopportare il peso proprio delle strutture del piano superiore.

In questa fase costruttiva, il conglomerato delle membrature del piano superiore (pilastri, travi e solette) ha caratteristiche meccaniche minori di quelle della trave in oggetto, a causa della più giovane età. Inoltre i pilastri del piano inferiore ai quali si ancora la trave non sono ancora sottoposti allo sforzo normale definitivo, bensì ad un valore così piccolo da potersi ritenere praticamente nullo; di modo che i pilastri, essendo soggetti solo a flessione, facilmente si parzializzano.

In definitiva tutte le strutture superiori ed i pilastri inferiori hanno, in questa fase, rigidità molto minori di quelle finali. Il primo schema limite può quindi configurarsi assumendo nulla la rigidità

(*) Il disarmo dovrebbe aver luogo non prima di ventotto giorni dal getto; l'uso di cementi ad alta resistenza consente oggi di anticipare anche di molto tale operazione.

di tutte le strutture a cui e' collegata la trave e supponendola sottoposta al peso proprio della trave stessa e del solaio che essa sostiene, sia del piano che si considera che del piano superiore, nonchè della cassaforma che sostiene quest'ultimo. Può facilmente controllarsi che generalmente questo carico e' dell'ordine di grandezza di quello totale che in condizioni di servizio grava ad un sol piano sulla trave stessa.

Allora il primo limite della fascia e' lo schema di trave continua su appoggi semplici (ovvero con tutti i pilastri privi di rigidita' flessionale) sottoposta al carico totale di servizio (fig. 4-17 c) e d).

Passiamo ora alla fase di servizio. La schematizzazione su indicata si conserva aderente al vero con ottima approssimazione per le travi dei piani superiori, perche' in sommita' dell'edificio i pilastri sono in genere piuttosto sottili e quindi molto deformabili.

Lo schema limite di trave continua su semplici appoggi, sottoposta ai carichi di servizio, diventa quindi valido per le travi di tutti i piani, dall'esecuzione alla fase di servizio. Eliminando l'aggettivo totale "si e' allargata la "fascia" perche' i sovraccarichi accidentali, in quanto tali, debbono disporsi in tutte le possibili posizioni.

Si considerano qui noti i metodi di calcolo della trave continua. Nel caso di numerose campate, per ridurre la laboriosita' di calcolo, dipendente dal considerare tutte le possibili disposizioni del sovraccarico si puo' procedere in via approssimata, nel modo seguente. Si considera dapprima lo schema con sovrac-

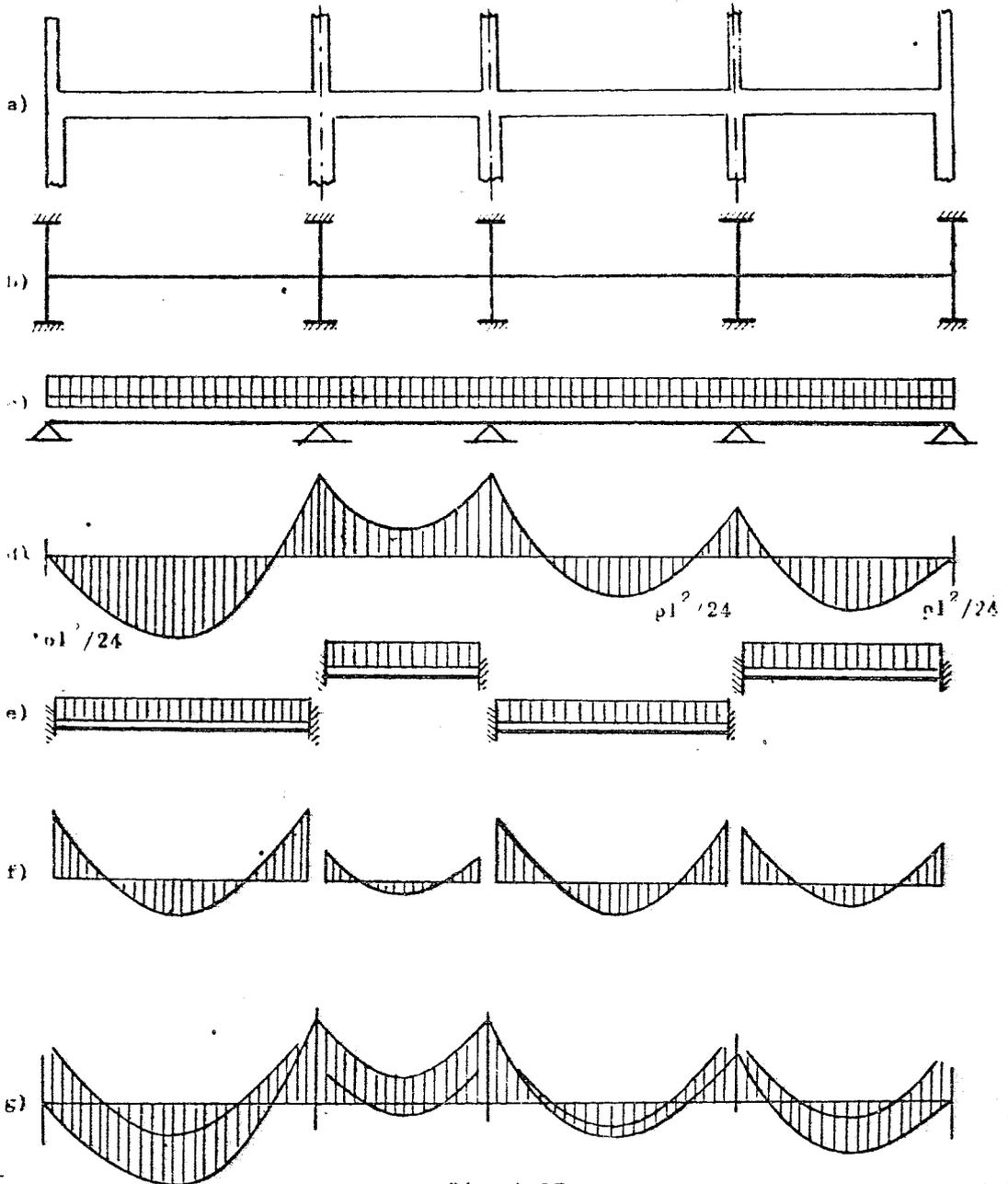


Fig 4-17

a) struttura

b) schema di telaio

c) 1° schema limite

d) momenti relativi al 1° schema limite

e) 2° schema limite

f) momenti relativi al 2° schema limite

g) fascia

carico esteso a tutte le campate e lo si assume valido per la determinazione dei massimi momenti negativi (*).

Per la determinazione del massimo positivo nella campata generica si aggiunge al valore del momento positivo relativo allo schema innanzi considerato (con sovraccarico su tutta la campata), il valore $p_j l_j^2 / 24$, essendo p_j il sovraccarico utile nella campata j ed l_j la sua luce (valutata tra gli assi dei pilastri del piano piu' alto). Questo criterio sarebbe rigoroso solo per la campata intermedia di una trave (ideale) continua costituita da infinite (numerose) campate tutte eguali tra loro, sottoposte a valori eguali dei sovraccarichi utili. Esso e' invece generalmente approssimato per eccesso nel caso di un numero finito di campate, anche diseguali e, in particolare, per le campate di estremita' (fig. 4 17 a)).

Comunque, nella mezzeria di una qualsiasi campata intermedia e' conveniente controllare, alla fine che il momento positivo non sia in ogni caso inferiore a $q_i l_i^2 / 18$, q_i essendo il carico totale agente su tale campata. Questo ulteriore allargamento della fascia corrisponde alla possibilita' che la schematizzazione di trave continua cada in difetto a causa di fenomeni che pregiudichino la continuita' stessa del materiale (quali fessurazioni dovute a ritiro, a variazioni termiche, a riprese di getto male eseguite alla stessa parzializzazione e cosi' via). L'impossibilita' di valutare con esattezza l'influenza di tali fenomeni in-

(*) In via approssimata si puo' ritenere che l'incremento corrispondente alle disposizioni di sovraccarico che forniscono il massimo teorico equivalga al decremento che corrisponde alla spuntatura del diagramma a filo dei pilastri.

duce a limitare nelle mezzerie effetti troppo sentiti della ipotesi di "continuità" che contiene implicitamente anche quella della "integrità" strutturale della trave (fig 4-17 d).

4 5 3 Secondo schema limite

Per la individuazione dell'altro schema con il quale delimitare la fascia, nella quale sono comprese le effettive sollecitazioni, si considerano quelle fasi della costruzione e quelle zone dell'edificio per le quali la rigidità dei pilastri risulta più elevata, il che avviene, ovviamente ai piani inferiori di edifici alti ed in condizioni di servizio. Tale rigidità, in contrapposizione al primo limite, si considera molto maggiore di quella delle travi, sia in fase costruttiva che di servizio; le travi peraltro nel tratto di intersezione con il pilastro non possono più considerarsi con la loro sezione trasversale corrente bensì con sezione avente convenzionalmente rigidità infinita.

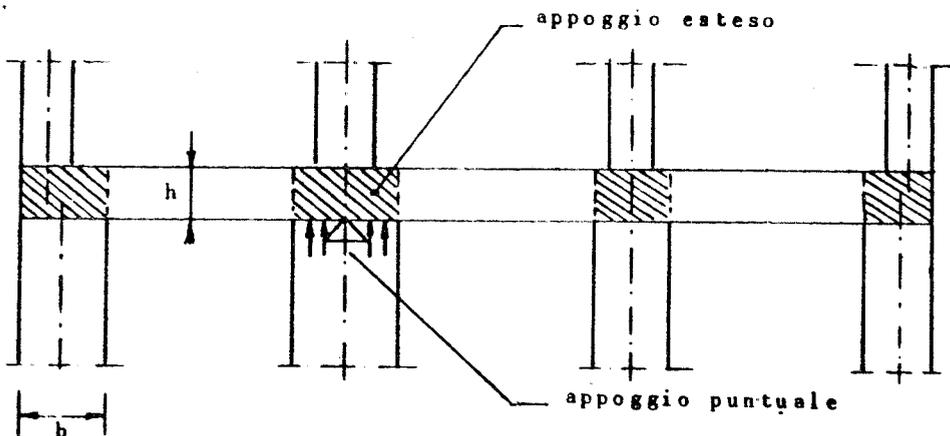


Fig. 4-18

Ai piani inferiori, infatti, i pilastri hanno dimensioni notevoli in rapporto alle luci delle travi e quindi, alla ipotesi di appoggi **puntuali** relativi al primo schema limite di trave continua, si sostituisce al limite opposto, quella di vincoli **estesi** di larghezza pari a quella dei pilastri (fig. 4-18).

Una schematizzazione a **"telaio con aste rettilinee a sezione costante"** cadrebbe quindi in difetto e si dovrebbe considerare invece un **"telaio con pilastri estesi e con traversi a sezione variabile"** con tratti di estremità di inerzia molto maggiore del tratto di mezzeria.

Possono superarsi le difficoltà connesse con la analisi di un siffatto schema, osservando che esso si comporta, al limite, come se il traverso fosse scisso in singole campate, separate tra loro ed incastrate perfettamente agli estremi, di luce pari alla distanza (netta) tra i fili interni dei pilastri.

Si è pervenuti così al secondo schema limite (con trapposto al primo di trave continua): ovvero allo schema di **campate separate perfettamente incastrate** che non costituisce, quindi, un criterio semplicistico, ma il risultato logico di un esame critico, condotto al limite, del comportamento della struttura reale; limite dello schema di telaio con aste a sezione variabile, con nodi rigidi ed estesi e pilastri molto rigidi (*) (fig. 4-17 e) ed f)).

(*) Si osservi in particolare che per campate di piccola luce comprese tra campate di luce più grande, questo secondo limite comporta per il momento in mezzeria un valore positivo, che è invece assente nello schema di trave continua. Ciò avviene ad esempio, per la seconda campata dello schema della fig. 4-18 dove il valore del momento in mezzeria positivo è pari a $ql^2/24 < ql^2/18$ che si è assunto come limite positivo.

Si osservi ancora che per edifici bassi (due o tre piani), i pilastri non assumono mai rigidità elevate ed il secondo schema limite non ha ragione di esistere.

4.5.4 - Conclusioni.

Gli schemi limite innanzi indicati racchiudono tutti gli schemi statici ai quali ogni trave puo' essere ricondotta ai vari piani dell'edificio e definiscono quindi la "fascia" flessionale gia' piu' volte menzionata (fig. 4-17'g)).

Si ricorda che tutto cio' e' valido solo per edifici, per i quali siano prevalenti i carichi verticali e siano modesti i valori di eventuali carichi orizzontali, ovvero questi siano affidati ad apposite strutture di controvento di rigidita' molto piu' elevata dell'ossatura nuda (pareti sismiche o di controvento). Le schematizzazioni assunte sono invece insufficienti quando carichi orizzontali elevati devono essere assorbiti dall'insieme delle travi e dei pilastri ("telai"). Lo studio delle travi si riconduce allora a quello di un telaio spaziale, irrigidito ad ogni piano dai solai, che costituiscono diaframmi rigidi (*).

5- PILASTRI.

5.1 - Premessa.

Vale anche qui la ormai solita osservazione che non avrebbe senso un esame statico dei pilastri avul-

(*) Si esamina nel quarto volume come e' possibile affrontare il calcolo di questo schema spaziale considerato unitariamente o spezzato in telai piani. Si considerera' anche il caso in cui sono irrigidite alcune maglie dei telai con pannelli pieni oppure con diagonali, il caso cioe' di "pareti rigide" particolarmente adatte ad assorbire forze orizzontali.

si dallo schema complessivo dell'edificio.

Infatti i valori dello sforzo normale, del momento flettente (in due direzioni), del taglio e del momento torcente dovrebbero determinarsi tenendo conto che essi fanno parte di una struttura spaziale. Tuttavia nel seguito, per edifici sottoposti prevalentemente a carichi verticali, si determineranno separatamente, attraverso fasce di opportuna ampiezza, le singole caratteristiche della sollecitazione (*).

3.2 - Considerazioni sull'analisi dei carichi.

Consideriamo innanzitutto lo sforzo normale, che è indubbiamente la caratteristica fondamentale per i pilastri di usuali edifici, che abbiano un numero limitato di piani (non superiore a 7-8) e che non si trovino in zona sismica o particolarmente ventosa.

Si suppone valida l'ipotesi (limite) che il piano di posa sia (infinitamente) rigido e che quindi gli appoggi restino allo stesso livello negli schemi già indicati per il calcolo dei solai e delle travi. Potrebbe sembrare, a prima vista, ovvio che lo sforzo assiale nei pilastri debba ottenersi sommando le reazioni di tali appoggi cioè, per gli schemi dei solai

.....
./.. Dal calcolo di telaio spaziale, generalmente suddiviso in telai piani, si ottiene allora il regime di momenti, tagli e sforzi normali nelle travi e nei pilastri.
.....

(*) Il caso di edifici sottoposti a prevalenti carichi orizzontali (in zona sismica o notevolmente ventosa) sarà trattato nel quarto volume.

e delle travi, i tagli che ad ogni piano trasmettono ai pilastri. Un approfondimento del problema porta invece a conclusioni diverse; infatti, sia sotto l'aspetto della sicurezza, che della convenienza, e' piu' opportuno che l'analisi dei carichi sui pilastri segua un binario indipendente.

Per renderci conto di cio' procediamo innanzitutto ad un esame critico dei vari carichi (verticali) che gravano sui pilastri

a) Il peso proprio dei solai e' in genere sufficientemente definito sia in valore che in distribuzione (praticamente uniforme). Puo' uniformizzarsi anche il peso dovuto ad eventuali travetti di ripartizione e, si puo' invece tener conto separatamente di eventuali fasce piene o semipiene adiacenti alla trave, attribuendone il peso alla trave stessa (*).

(*) Si puo' ad esempio in via approssimata (in genere per difetto) considerare, come indicato in figura, due volte il peso del volume di intersezione del solaio con la trave (ovvero sia nella valutazione del peso del solaio che di quello della trave).

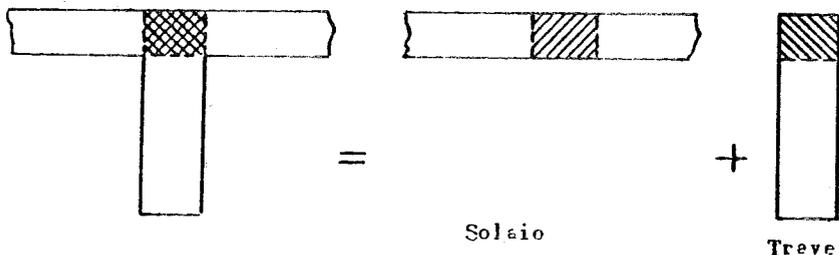


Fig. 5-1

b) I sovraccarichi permanenti corrispondenti al pavimento, all'intonaco e analoghi sono anch'essi praticamente distribuiti uniformemente e facilmente valutabili.

I relativi pesi unitari vanno però effettivamente determinati volta per volta con attenzione, perché possono variare entro limiti molto ampi: ad esempio, il peso di un pavimento oscilla tra un minimo di 50-60 kgm^{-2} (se di legno o gomma, compreso il sottofondo) ad un massimo di 120-130 kgm^{-2} (se di marmo, compreso sempre il sottofondo); anche il peso unitario dell'intonaco dipende dalla sua qualità e spessori (25 ÷ 50 kgm^{-2}).

c) I carichi corrispondenti ai tramezzi, in un edificio per civili abitazioni, sono invece concentrati secondo linee disposte in modo molto variabile. Il loro contributo, se considerato distribuito convenzionalmente sull'area di solaio che li sostiene, è variabile in limiti molto ampi.

Ad esempio, per un pilastro di angolo raramente esiste un contributo di carico fornito dai tramezzi ed il carico convenzionale corrispondente è quindi nullo. Viceversa, nelle zone dei servizi si hanno addensamenti dei tramezzi che possono equivalere anche ad un carico distribuito di 300 Kgm^{-2} . Il carico convenzionale distribuito, corrispondente ai tramezzi, può cioè variare tra 0 e 300 kgm^{-2} .

Nella normativa italiana si trovano in proposito alcune disposizioni che consigliano, nel caso che i tramezzi non siano ben definiti in pianta, di adottare un valore uniformemente distribuito di 100 kgm^{-2} . Questa disposizione non può però considerarsi vali-

da per l'analisi dei carichi sui pilastri, ma solo per il calcolo dei solai, per i quali ha evidentemente lo scopo di semplificare lo schema di carico. In questo ultimo caso essa e' accettabile anche se l'entita' effettiva del carico dei tramezzi e' localmente maggiore, perche' interviene in compenso il sovraccarico utile che, nel calcolo dei solai, va disposto con il suo massimo valore nelle posizioni piu' sfavorevoli. In definitiva il carico dei tramezzi, valutato in 100 Kg m^{-2} , con il sovraccarico utile ed i pesi propri costituisce per il solaio uno "schema convenzionale" di carico che ha il duplice scopo, da un lato, di rendere il solaio idoneo a sopportare le reali sollecitazioni (corrispondenti cioe' all'effettiva condizione di carico) e, dall'altro lato, di rendere ragionevolmente semplice il procedimento di calcolo.

Per la valutazione del carico assiale sui pilastri occorre, invece, procedere ad una realistica ed effettiva valutazione dei pesi, separati dal sovraccarico utile, con un diverso criterio di associazione. Il peso dei tramezzi va considerato nella sua effettiva entita' mentre l'entita' del sovraccarico utile, intervenendo ai vari piani di una stessa verticale, va invece assunta in base a considerazioni probabilistiche.

d) Il sovraccarico utile accidentale, negli schemi di calcolo del solaio, si assume di $200 \div 250 \text{ kg m}^{-2}$; ma questo valore, in realta', puo' raggiungersi solo occasionalmente ed in limitate zone del solaio e deve essere ridotto quando occorre determinare il carico che effettivamente grava sui pilastri. Sul solaio, occasionalmente e localmente, possono agire anche sovraccarichi maggiori di quello indicato dovuti, ad esem-

pio, ad un particolare arredamento (armadi, cassaforti) oppure a riunioni (Balli, funerali) ed e' giusto che si tenga conto nel calcolo di ogni solaio di un sovraccarico uniforme generale di $200 \div 250 \text{ kgm}^{-2}$ (*). Ma tali eventualita' non possono di certo sussistere contemporaneamente su tutta l'area di ogni singolo piano e contemporaneamente a tutti i piani, proprio in considerazione della accidentalita' temporale e spaziale.

Sono interpreti di tali considerazioni le stesse istruzioni del C.N.R., che suggeriscono progressive riduzioni in verticale per la determinazione del carico sui pilastri e sulle fondazioni. Esse consigliano di assumere per gli ultimi due piani il valore totale del sovraccarico e di apportare progressivamente riduzioni dal 10% al 50% per i cinque piani sottostanti, mantenendo poi costante la riduzione del 50% per tutti gli altri piani inferiori. Per un piccolo numero di piani la riduzione che si ottiene e' piccola, ma, per un elevato numero di piani, il sovraccarico medio si riduce quasi alla meta' del sovraccarico totale.

e) In conclusione, da tutto quanto detto, resta accertato che i carichi adottati in precedenza, per il

(*) Per tener conto delle disuniformita' dei sovraccarichi su descritti e dei tramezzi sono prescritte per il solaio armature di ripartizione trasversale, in grado di "ripartire" punte locali anche molto piu' grandi dei valori uniformi considerati.

Appare cosi' di nuovo evidente che il sovraccarico utile ripartito di $200-250 \text{ kgm}^{-2}$ (oltre 100 di tramezzi) rappresenta solo una ipotesi "convenzionale" di carico atto a conferire al solaio una robustezza adeguata a sopportare le effettive distribuzioni di carico, senza incidere eccessivamente sulla laboriosita' del calcolo.

calcolo delle strutture orizzontali, non corrispondono affatto a quelli effettivi, perche' del tutto convenzionali e validi solo per la loro verifica e che l'approximazione e' giustificata dalla semplicita' di calcolo che ne deriva e dal fatto che i solai, cosi' calcolati, risultano idonei a sopportare le disparate condizioni di carico che vi gravano effettivamente .

Per l'analisi dei carichi sui sostegni verticali, la probabilita' di presenza dei singoli pesi e sovraccarichi e' del tutto diversa ed occorre tener conto innanzitutto dei pesi propri e dei sovraccarichi fissi, con la migliore approssimazione possibile, mentre, nello stesso spirito, i sovraccarichi utili possono essere progressivamente ridotti.

f) Considerazioni analoghe valgono per gli altri carichi che insistono sulle travi. Ad esempio, il carico dovuto ai muri di compagno, si considera uniformemente distribuito negli schemi utilizzati per il loro calcolo, prescindendo cioe' da riduzioni per vuoti, e da incrementi locali, dovuti, ad esempio, ad irregolarita' della pianta. Così pure si uniformizza, generalmente, il carico corrispondente a balconi di forma variabile capricciosamente in pianta. Talora si incrementano opportunamente carichi concentrati o dissimmetrici, quando si introducono nello schema di calcolo della trave che li porta. In questo stesso spirito carichi agenti solo su alcuni tratti della luce si uniformizzano e si maggiorano con criteri che tengono solo conto della finalita' (dello schema in cui vengono introdotti) di servire alla verifica flessione tagliante della trave. Infatti lo schema, come si e' detto, e' un operatore o meglio uno strumento flessibile nelle mani

del progettista.

In conclusione ancora una volta si riconosce che si tratta di schemi convenzionali di carico spessopiu gravosi, a vantaggio di statica, di quelli effettivi aventi solo lo scopo operativo di determinare un regime di momenti flettenti e tagli, che sia valido per la verifica della trave.

Queste approssimazioni non sono piu' tollerabili quando occorra valutare lo sforzo normale dei pilastri. Ne basterebbe a tale fine rettificare solo le suddette analisi dei carichi, affrontando l'assurdo aggravio di tempo che corrisponderebbe ad adottare schemi di carico rigorosi per il calcolo dei solai e delle travi perche' occorrerebbe tener anche separati i carichi fissi dal sovraccarico utile per poter gradualmente ridurre quest ultimo ai piani inferiori.

Quindi, in ogni caso l'analisi dei carichi delle travi andrebbe rifatta piano per piano e tanto vale affrontare fin dall'inizio i due problemi secondo vie piu' congeniali ai fini che si propongono; per i pilastri, cioe' determinare direttamente i carichi che realmente agiscono, indipendentemente dagli schemi convenzionali di carico che si utilizzano per le strutture orizzontali.

g) Una valutazione realistica dei carichi agenti sui pilastri e' del resto indispensabile anche in considerazione della loro rilevante importanza statica. Infatti richiamandosi a concetti gia' espressi a proposito dei fori nei solai, esiste una gerarchia portante tra i vari elementi costruttivi, dalla quale consegue che una deficienza che si manifesti in qualche solaio o in una trave (che sono alla base di tale piramide)

seppure spiacevole, e' quasi sempre facilmente riparabile, mentre conseguenze molto piu' gravi, sotto ogni aspetto (economico, della incolumita', ecc.), comporta la deficienza di un pilastro, (specie se dei piani inferiori) che ha il compito di portare il carico di tutti gli elementi costruttivi dell'edificio.

La separazione delle schematizzazioni puo' inoltre comportare notevole vantaggio di semplicita' per il calcolo delle strutture orizzontali; ad esempio, per una zona dell'impalcato di difficile schematizzazione o di particolare delicatezza statica, diventa possibile assumere schemi strutturali e di carico volutamente e sensibilmente piu' gravosi di quello reale, perche' cio non comporta piu', per tale indipendenza, un aggravio di carico sulle strutture verticali (fino alle fondazioni), ingiustificato se le difficulta' e le indeterminazioni non riguardano l'entita' del carico sopportato, ma solo la portanza delle strutture orizzontali.

Non sono trascurabili altri vantaggi sul piano operativo. Tra questi, la possibilita' di eseguire l'analisi dei carichi sui pilastri, in base alla sola definizione morfologica delle carpenterie e delle orditure, prima, cioe, di iniziare effettivamente il calcolo esecutivo delle singole membrature; l'ordine cronologico delle fasi di progettazione concorda cosi' con quello delle fasi di esecuzione.

Inoltre la notevole semplificazione e riduzione delle operazioni numeriche di calcolo, con minore probabilita' di commettere errori. E' anzi consigliabile in ogni ulteriore esplicazione di dettaglio dell'analisi dei carichi sui pilastri, cercare di ottenere, nel modo piu' semplice, valori dei carichi aderenti alla re

alta' adottando ogni accorgimento operativo che consenta di ridurre al minimo il rischio di commettere errori. Pertanto nel seguito, anche a rischio di apparire pedanti su un problema concettualmente elementare, si descrive dettagliatamente una prassi delle singole operazioni giustificata dall'importanza fondamentale che i pilastri hanno per la statica dell'edificio.

5.3 - Dettaglio del procedimento.

Il disegno preliminare della carpenteria del piano tipo rappresenta i pilastri, le travi e le orditure dei solai, in modo da fornire la visione degli schemi strutturali prescelti per il calcolo dei solai e delle travi.

In questa prima fase di impostazione strutturale dell'edificio, pilastri, solai e travi generalmente sono solo organizzati con un dimensionamento di massima, prescindendo dal calcolo dettagliato dei singoli schemi e controllando solo che lo schema complessivo sia congruente con la funzionalità dell'edificio; ad esempio che la posizione dei pilastri, l'allineamento delle travi e le orditure dei solai siano in accordo con la distribuzione funzionale dell'edificio, che si suppone già prefissata. Anche in una progettazione integrata, in cui lo strutturista sia chiamato ad esprimersi fin dall'inizio, questa ipotesi può considerarsi valida in una fase intermedia della progettazione. Infatti nella prima fase lo strutturista partecipa all'opera creativa e quindi la struttura e la distribuzione co-

stituiscono ancora un problema di reciproca armonizzazione, senza precondizionamenti; in questo caso, la carpenteria strutturale nasce attraverso successivi approcci e dimensionamenti di massima, che si concretano, alla fine, in quel disegno preliminare che si è considerato prima come inizio della fase di calcolo della struttura.

Nella carpenteria preliminare i vari elementi (travi e pilastri) non hanno ancora le dimensioni definitive, ma sono già stabiliti ed espressi i vincoli formali ad essi imposti dalle varie esigenze: ad esempio, il vincolo che i pilastri di perimetro siano contenuti nei muri esterni con assegnati "franchi", che altri pilastri abbiano forma rettangolare allungata, che le travi emergenti possano innestarsi ai pilastri, la loro congruenza con i divisorii interni e con le compagneature perimetrali, i fori per gli impianti (ascensori, infissi esterni e così via).

A tale scopo conviene munire ogni pilastro di almeno un "punto" di riferimento ("punto fisso") posto opportunamente in evidenza (ad es., annerito come in fig. 5-2), che individui la generatrice (o eventualmente le generatrici) obbligata a mantenersi, ai diversi piani, su una stessa verticale delle suddette esigenze statiche ed architettoniche.

Conviene riferire le quote di posizionamento dei pilastri ai **punti fissi** per renderle indipendenti dalla variabilità delle dimensioni dei pilastri ai vari piani (*); si disegna cioè una carpenteria unica valida per tutti i piani, ovvero la **carpenteria del piano tipo**.

(*) Questa può essere espressa attraverso una tabella separata ("tabella dei pilastri").

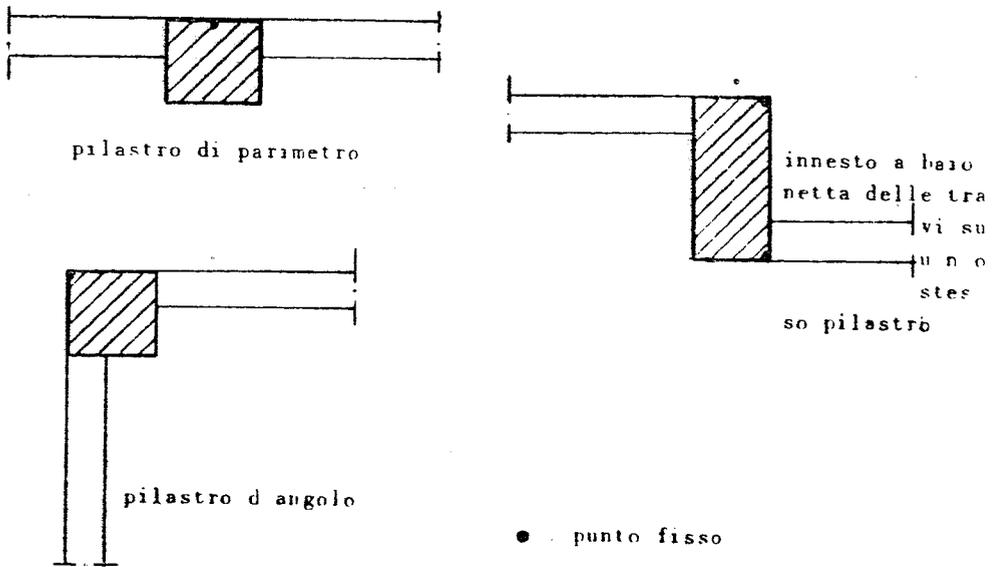


fig 5 2

E' opportuno, in questa organizzazione iniziale, numerare i pilastri, partendo da un vertice della pianta, seguendo poi, in senso orario, tutto il perimetro e, successivamente, proseguendo all'interno con lo stesso criterio. (fig. 5-3).

E', cosi', agevole la individuazione, in pianta dei singoli pilastri e la separazione di essi in due gruppi: pilastri "perimetrali" (da 1 fino a 10 nella fig. 5 3) e "interni" (i successivi con numero d'ordine maggiore di 10). La distinzione e' utile anche per i controlli finali di alcune caratteristiche comuni (ad esempio, la presenza delle voci "balcone" e "tompagni esterni" che sono ammissibili solo per i pilastri "perimetrali").

L'analisi dei carichi si svolge compilando una tabella per il piano tipo secondo lo schema riportato il PAGANO - Teoria degli edifici.

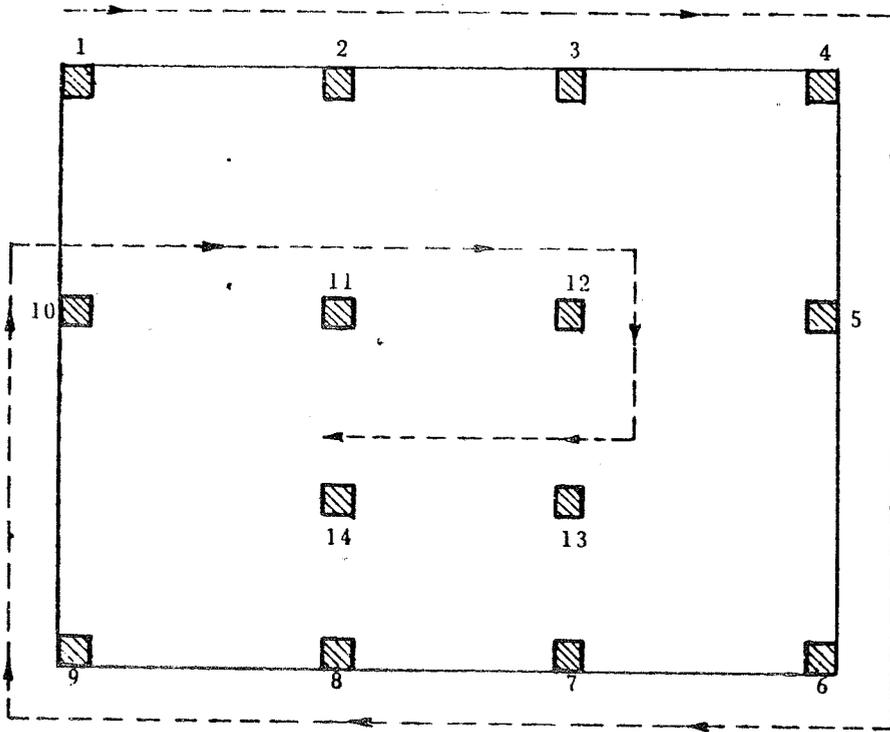


fig. 5.3

nella pagina seguente.

Si riportano, nella prima colonna, i numeri di ordine dei pilastri ed, in quelle ordinatamente successive, i dati relativi alle seguenti voci:

- a) solai
- b) compagni esterni
- c) balconi
- d) scale
- e) travi
- f) tramezzi
- g) doppi tramezzi

Ogni colonna si suddivide in sottocolonne, in modo da avere per ogni voce:

1 - il dettaglio geometrico dei dati con l'indicazione delle operazioni da farsi;

- 2 - i risultati parziali e totali (in m, m² o m³) delle operazioni;
- 3 - il prodotto delle quantità totali del punto 2 per i carichi unitari, ovvero il carico corrispondente a quella voce.

È utile osservare che mentre i valori delle misure che legano tra loro in pianta le posizioni dei pilastri, per evidenti ragioni di tracciamento devono essere matematicamente esatti fino alla frazione di centimetro, per l'analisi dei carichi sui pilastri possono essere senz'altro arrotondati al decimetro, sempre per eccesso..

Nella tabella, cioè, s'introducono valori approssimati delle misure lette direttamente sul grafico con scalimetro ed arrotondate in eccesso, a vantaggio di statica.

Questo sistema di misura può diventare anzi uno strumento molto efficace e rapido per tener implicitamente conto del modo in cui risegano i pilastri, per "mediare" (con adeguata esuberanza) aree di forma irregolare, per accettare, in caso di incertezze del progetto, anche eventuali sovrapposizioni delle aree d'influenza relative a pilastri contigui.

L'operatore, rilevando le misure, può utilizzare il grado di approssimazione come strumento di calcolo. Anzi, nel riportare le misure relative all'area d'influenza del generico pilastro, egli deve anche introdurre coefficienti correttivi (φ , ϵ , ecc.) che tengano conto degli incrementi di carico che lo schema statico rappresentato dalla carpenteria, induce su quel pilastro.

Ad esempio, se la struttura è continua, l'area di

solajo che grava su un pilastro intermedio e' maggiore di quella che si ottiene dimezzando i valori delle luci adiacenti al pilastro stesso; i valori di questi coefficienti amplificativi si conoscono dalle teorie (*).

Il risultato finale rappresenta l'"area d'influenza" di ciascun pilastro.

Analogamente per i compagni si tiene conto dello alleggerimento per i vuoti (finestre e balconi) introducendo coefficienti riduttivi variabili (da 0,9 a 0,5) da valutarsi volta per volta per campioni.

Per i tramezzi le misure si effettuano, con adeguata approssimazione, sulla pianta architettonica corrispondente alla carpenteria, addebitandone il peso ai diversi pilastri con criteri analoghi a quelli innanzi illustrati. E' cosi' possibile, se e dove e' necessario, tener conto di una eventuale variabilita' della distribuzione; tuttavia e' facile rendersi conto che per pilastri disposti nelle zone dei servizi, per quelli d'angolo e per quelli di scala, e' quasi sempre invariabile l'entita' del carico dovuto ai tramezzi, in conseguenza della invariabilita' delle posizioni di questi ultimi nelle suddette zone.

5.4) Proposta di un "carico convenzionale tipo".

Abbiamo fin qui svolto un esame critico dei termini che nell'analisi dei carichi sui pilastri, sono costanti a tutti i piani. Restano ora da esaminare il sovraccarico utile ed il peso proprio dei pilastri che

(*) In genere si trascurano eventuali decrementi e si arrotondano i coefficienti maggiorativi (ad es. 1,10; 1,20; 1,30 ecc.)

sono di entita' variabile . . . ogni piano. Per il primo si puo' far riferimento ad una indicazione del C.N.R. che suggerisce una legge di variabilita' da adottare; per il peso proprio dei pilastri la variabilita' dipende da quella del carico assiale che essi devono sopportare. Questo e' somma di un numero crescente di addendi tra loro eguali, corrispondenti ai pesi propri e sovraccarichi fissi dei piani superiori, di un numero crescente di addendi tra loro diversi corrispondenti ai sovraccarichi utili dei piani superiori e, infine degli addendi costituiti dagli stessi pesi propri (ovviamente tra loro diversi) dei pilastri sovrastanti, compreso quello del piano che si considera.

Orbene, qui si propone di "tipizzare" questi due termini variabili e di pervenire, quindi, ad un "carico convenzionale tipo", costante a tutti i piani, valido solo ai fini del dimensionamento dei pilastri e della fondazione.

Si discutono il grado di approssimazione ed i vantaggi di questo criterio di progettazione.

5.4.1) Sovraccarico utile

Per il sovraccarico utile si propone di assumere, in luogo della variabilita' proposta dal C.N.R., un valore costante che sia la media dei sovraccarichi (variabili) ottenuti con le menzionate riduzioni consentite piano per piano (*).

Ad esempio, per dieci piani, tale valore costante sarebbe:

$$(p + p + 0,9p + 0,8p + 0,7p + 0,6p + 0,5p + 0,5p + 0,5p + 0,5p) / 10 = 0,7p \quad ./.$$

In questo modo, il contributo del sovraccarico allo sforzo assiale risulta, a tutti i piani, escluso il piano terra, minore di quello che corrisponderebbe alla rigorosa applicazione delle citate norme del C.N.H. Tuttavia l'approssimazione, in pratica, e' accettabile, sia perche' ai piani piu' alti (dove la differenza e' percentualmente maggiore e per ragioni tecnologiche e per salvaguardarsi dalla instabilita'), si devono sempre adottare dimensioni dei pilastri molto maggiori di quelle che corrisponderebbero all'area strettamente necessaria ad assorbire lo sforzo normale, sia perche' essa e', almeno in parte, compensata dall'altra approssimazione, che si propone nel successivo paragrafo per uniformizzare, sempre ai fini della valutazione dello sforzo assiale, il peso proprio dei pilastri.

5.4.2) Il peso proprio dei pilastri per edifici multipiani con "piano tipo".

Per conglobare, nel "carico convenzionale tipo" di piano, anche il peso proprio della pilastrata - che ha invece dimensioni logicamente variabili lungo l'al

.....
./.. dove p rappresenta il valore del sovraccarico accidentale assunto per il calcolo del solaio tipo.

Per semplicita', spesso, nell'analisi dei carichi anche il solaio di copertura e del piano terra si assimilano in questa analisi a quello "tipo", salvo a tener conto separatamente delle differenze quando l'incidenza dei sovraccarichi utili e' particolarmente elevata (carico utile $> 600 \text{ kgm}^{-2}$). In questo caso conviene tener conto a parte dei carichi che eccedono quello del piano tipo.

tezza si propone di assumere ad ogni piano il peso (costante) che corrisponderebbe ad una pilastrata di sezione costante lungo tutta l'altezza dell'edificio, equipesante, a quella che deriverebbe da un'analisi differenziata ad ogni piano.

Con questa trasformazione si trasferisce, quindi, una parte del carico verso l'alto, con effetto opposto a quello provocato dalla uniformizzazione del sovraccarico utile, come è illustrato qualitativamente dalla fig. 5-4. Il criterio comporta una doppia approssi-

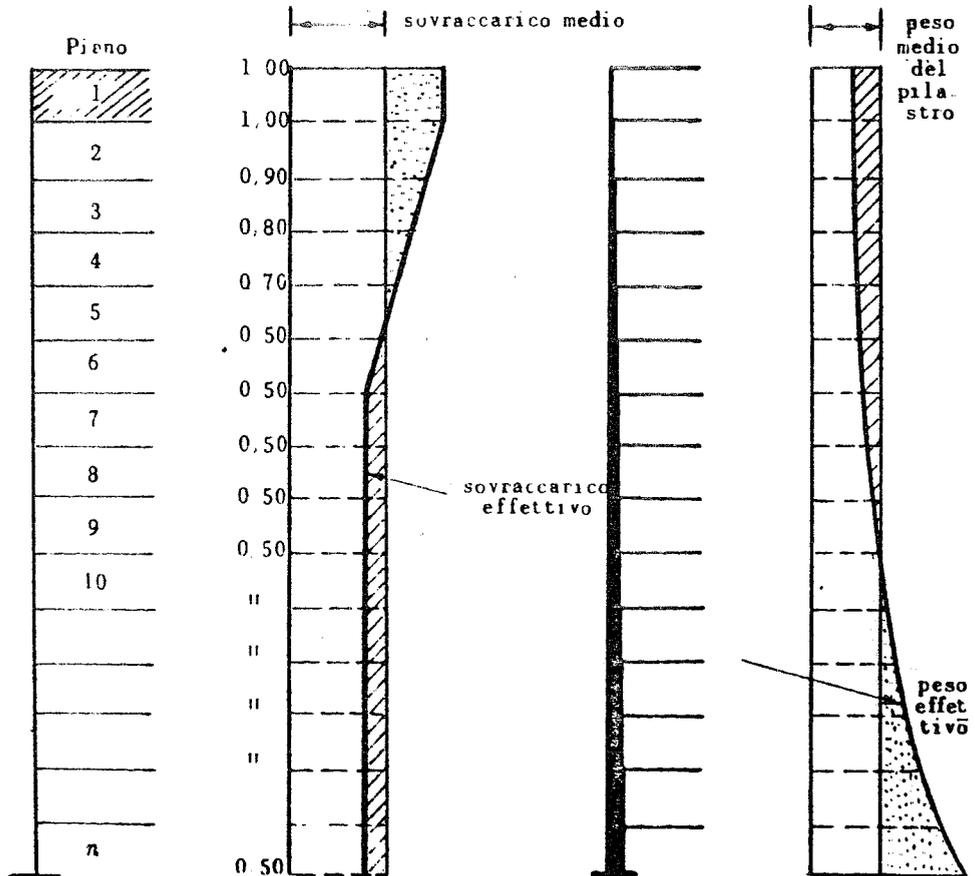


Fig. 5.4

mazione: la prima insita nel fatto stesso di uniformizzare carichi variabili, la seconda derivante dal fatto che i pesi propri assunti si riferiscono alla variabilità effettivamente necessaria e non a quella che si ottiene dimensionando i pilastri in base ai carichi così determinati.

5.4.2.1) Primo criterio per la valutazione del peso proprio.

Stabilito concettualmente il criterio di uniformizzazione e i suoi limiti di approssimazione, occorre ora determinare il contributo, ad ogni piano, della pilastrata equipesante a quella staticamente necessaria.

Se tale contributo è costante può introdursi come incremento percentuale del peso portato P , anch'esso costante ad ogni piano.

Supponiamo che l'edificio sia costituito da n piani tipo, contati a partire dall'alto; in testa al primo pilastro il carico P rappresenta anche lo sforzo normale al piede e' somma di P e del peso proprio G_1 del pilastro stesso. Esso inizialmente non è noto ma può essere determinato facilmente, in modo diretto, dalla relazione:

$$G_1 = (P + G_1) \frac{\gamma h}{\sigma_c} = K (P + G_1)$$

essendo γ il peso specifico del materiale, h l'altezza dell'interpiano e σ_c la sollecitazione am

missibile nel conglomerato.

Si ottiene:

$$G_1 = \frac{K}{1-K} P \quad \text{ed} \quad N_1 = P + G_1 = \frac{1}{1-K} P = \lambda P$$

Allo stesso risultato si perviene anche in modo iterativo (*).

(*) Nella prima approssimazione si suppone che lo sforzo assiale sia P, e si suppone cioè, nullo il peso incognito del pilastro. L'area della sezione, necessaria perché il pilastro sostenga lo sforzo normale P vale $A_p^1 = P / \sigma_c$.

All'area A_p^1 corrisponde un peso del pilastro pari a

$$G_1^1 = \frac{P}{\sigma_c} \cdot \gamma \cdot b = K P$$

L'area A_p^1 e quindi G_1^1 sono chiaramente minori dei valori effettivamente necessari, perché sono stati determinati senza tener conto, nel computo dello sforzo assiale, del peso proprio del pilastro.

Nella seconda approssimazione, alla base del pilastro si considera aggiunto allo sforzo P il peso G_1^1 ottenuto, nella prima approssimazione; a questo primo incremento, di sforzo assiale deve allora corrispondere un incremento della sezione del pilastro, tale da sopportare G_1^1 . Ripetendo per G_1^1 lo stesso ragionamento già svolto per P si deduce che tale incremento vale $A^1 = G_1^1 / \sigma_c$ a cui corrisponde un incremento di peso del pilastro

$$G_1^1 = \frac{G_1^1}{\sigma_c} \gamma b = K G_1^1 = K^2 P,$$

del quale non si è ancora tenuto conto nella valutazione dello sforzo assiale.

Iterando infinite volte e sommando si ottiene lo sforzo normale effettivo al piede del primo pilastro, corrispondente cioè al piano più alto dell'edificio e si ottiene

$$N_1 = P + K P + K^2 P + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} K^n P = \frac{1}{1-K} P = \lambda P$$

./.

Il coefficiente χ (maggiore di 1) e' un fattore correttivo che incrementa il carico P del valore corrispondente al peso proprio del pilastro.

In testa al pilastro del piano sottostante (secondo a partire dalla sommita') il primo pilastro trasmette la forza χP , il secondo la forza P; in totale in testa, si ha uno sforzo assiale che vale $P + \chi P$ (invece di P che agiva in testa al pilastro del primo piano). Pertanto, ragionando analogamente, si ottiene uno sforzo normale totale, al piede del pilastro del secondo piano, pari a

$$N_2 = \chi (P + \chi P) = \chi P + \chi^2 P$$

e per il piano n^o (sempre contato a partire dall'alto)

$$N_n = \chi P + \chi^2 P + \dots + \chi^n P = \sum_{i=1}^n \chi^i P.$$

Poiche' χ e' un numero maggiore di 1 si ha:

$$\begin{aligned} N_n &= \sum_{i=1}^n P \cdot \chi^i = \chi P (1 + \chi + \dots + \chi^{n-1}) = \chi P \frac{\chi^n - 1}{\chi - 1} = \\ &= \beta_n P \end{aligned}$$

essendo

$$\beta_n = \frac{\chi^n - 1}{\chi - 1} \chi$$

.....

./.

avendo supposto $K < 1$ ed essendo

$$\chi = \frac{1}{1-K}$$