

CAPITOLO SECONDO.

INFLUENZA DI TRATTI RIGIDI E DEFORMABILITÀ A TAGLIO NEL CALCOLO DEI TELAI SPAZIALI.

Aurelio Ghersi

Sommario.

Si generalizza il procedimento proposto per la risoluzione iterativa di telai spaziali per edifici. Lo schema geometrico considerato prevede ancora un doppio ordine di telai a maglie rettangolari, ortogonali tra loro, mutamente collegati da impalcati indeformabili nel loro piano. La presenza di aste aventi dimensioni della sezione non trascurabili rispetto alla lunghezza viene presa in considerazione schematizzando con tratti infinitamente rigidi le zone di asta interne al nodo, non più puntiforme. Si tiene inoltre conto della deformazione dovuta al taglio.

Summary.

The solution technique for iterative analysis of tridimensional building frames is here generalized. The geometrical scheme still consists of two sets of vertical plane frames, acting in orthogonal directions, connected by rigid floor diaphragms. Beams and columns having greater depths are handled as members with rigid zones at ends. Shear deformation is also taken into account.

2.1. Introduzione.

Per poter analizzare il comportamento di un edificio e determinare lo stato tensionale in esso provocato da un assegnato insieme di carichi è necessario descriverne la struttura mediante un modello matematico (schema), che necessariamente introduce numerose semplificazioni rispetto alla realtà.

Un modello frequentemente adottato è quello di telaio spaziale regolare, che considera la struttura composta da un doppio ordine di telai piani a maglie rettangolari, mutuamente collegati da impalcati indeformabili nel loro piano. Esso può essere risolto col metodo degli spostamenti, assumendo come incognite le rotazioni dei nodi (φ_i) e le tre componenti di movimento relativo degli impalcati (δ_{Grx} , δ_{Gry} , Φ_i).

Lo schema di telaio, piano o spaziale, prevede aste monodimensionali (cioè la cui sezione abbia dimensioni nettamente inferiori rispetto alla lunghezza) convergenti nei punti nodali (fig. 2.1). In realtà, la presenza di riseghe dei pilastri e la non uniformità di sezione delle travi fa sì che spesso gli assi delle aste non convergono in un unico punto (fig. 2.2). Inoltre, le dimensioni stesse della sezione delle aste, per quanto modeste, non sono mai trascurabili, e a volte possono rendere la luce netta sensibilmente differente dalla distanza tra i nodi (fig. 2.3).

Questi problemi, in genere non troppo rilevanti per le strutture intelaiate, diventano oltremodo importanti quando in esse sono inserite aste la cui sezione abbia dimensioni elevate, come nel caso di telai-pareti (*walled frames*) o di pareti di taglio (*shear walls*), molto comuni per edifici di maggior altezza.

In presenza di tali situazioni la ricerca di uno schema rigorosamente valido si presenta alquanto complessa, poiché il modello di trave alla De Saint Venant non è più valido nelle zone nodali non puntiformi. È fisicamente evidente che il tratto di asta interno ad esse abbia una rigidezza

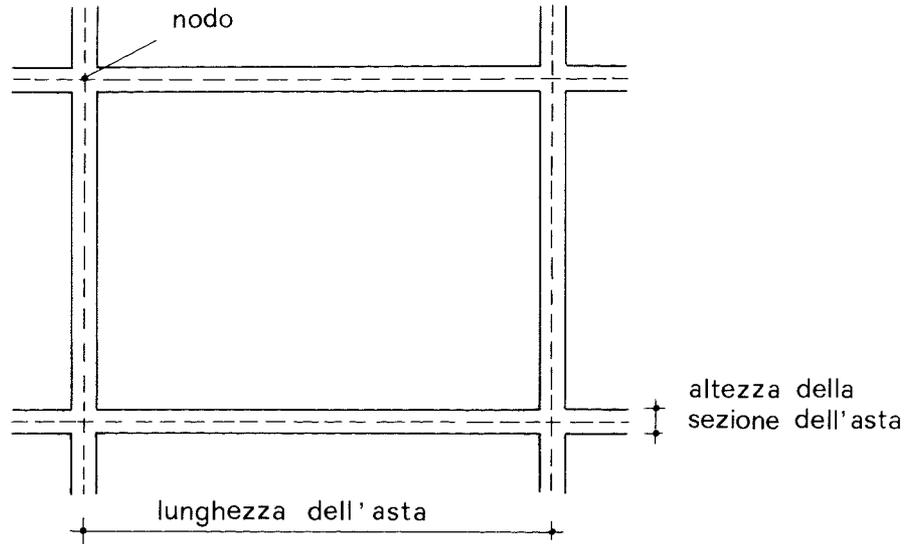


Figura 2.1. Telaio: aste con dimensioni della sezione piccole rispetto alla luce.

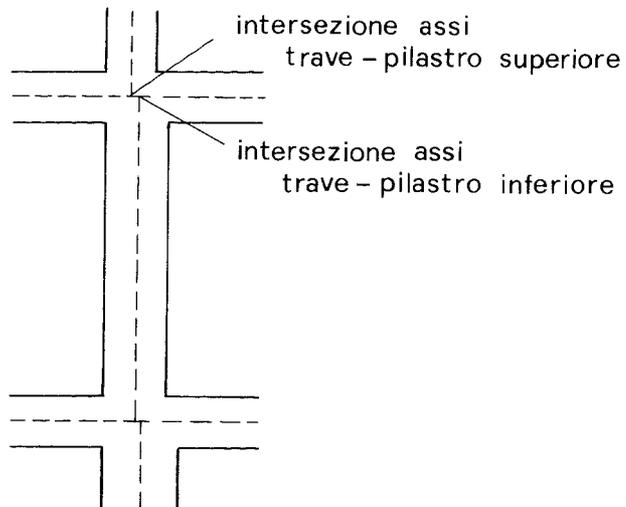


Figura 2.2. Pilastro con risega non simmetrica.

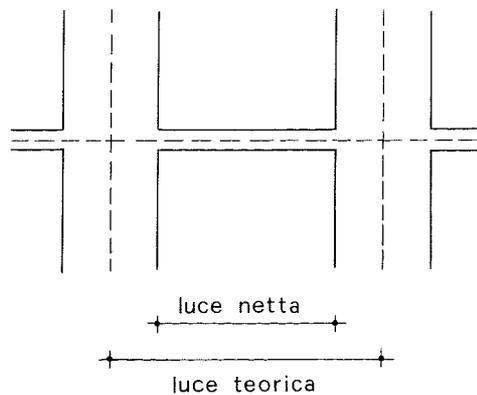


Figura 2.3. Pilastri con sezione di dimensioni non trascurabili rispetto alla luce.

superiore a quella dei tratti esterni. Nell'impossibilità pratica di quantizzare tale differenza, si ricorre frequentemente ad uno schema limite che considera tale tratto infinitamente rigido (fig. 2.4), come mostrato più in dettaglio nel paragrafo seguente. Per analizzare questo modello occorre quindi rimuovere l'ipotesi, usualmente adottata, di aste a sezione costante.

L'esistenza di aste con sezione di notevole altezza richiede una ulteriore generalizzazione del procedimento. In presenza di azioni flettenti e taglianti le aste di un telaio subiscono deformazioni, che possono essere distinte in due aliquote, una dovuta al momento flettente ed una dovuta al taglio. Nelle relazioni in genere utilizzate si tiene conto esclusivamente della prima, cioè di un incurvamento dell'asse nel rispetto della planarità della sezione trasversale (fig. 2.5). Sotto l'azione del taglio, invece, le fibre longitudinali della trave subiscono degli scorrimenti γ , correlati mediante la legge di Hook alle corrispondenti tensioni tangenziali τ e quindi variabili lungo l'altezza della sezione trasversale, che di conseguenza si ingobbisce (fig. 2.6). L'asse geometrico dell'asta viene deviato rispetto alla posizione primitiva di un angolo γ_m , legato al taglio ed alle caratteristiche geometriche ed elastiche della sezione mediante la relazione:

$$\gamma_m = \frac{\chi T}{GA} \quad (1)$$

in cui G è il modulo di elasticità tangenziale, T/A il valore medio delle tensioni tangenziali e χ , detto *fattore di taglio*, un coefficiente che tiene conto del discostarsi delle τ dal valore medio.

2.2. Schematizzazione.

2.2.1. Telai-parete (*walled frames*).

Con tale denominazione si indicano telai con travi alte (ad esempio che comprendono il parapetto sottostante una finestra) e pilastri larghi (che includono buona parte della parete). Questa tipologia (fig. 2.7), in realtà non molto diffusa in Italia, presenta un grande incremento di rigidità e resistenza rispetto ai normali telai, che la rende notevolmente economica e razionale per l'assorbimento delle azioni sismiche. Le esigenze architettoniche ne condizionano però fortemente l'adottabilità, spesso limitata alle sole pareti perimetrali.

La notevole altezza della sezione di travi e pilastri rende necessario il ricorso allo schema di aste con tratti rigidi agli estremi (fig. 2.8). La valutazione delle dimensioni da assegnare a tali tratti non è ovviamente semplice, non essendo più valido nella zona di intersezione il principio del De Saint Venant. Studi sperimentali svolti da K. Muto [3], compendiate nelle *norme per il calcolo di strutture in cemento armato* dell'Istituto di Architettura del Giappone, consigliano di porre il limite del tratto rigido ad una distanza dal filo di travi o pilastri pari a un quarto dell'altezza della sezione dell'asta (fig. 2.9). Nella risoluzione dello schema così definito non è, inoltre, più possibile trascurare l'aliquota di deformazione dovuta al taglio.

Ulteriori studi sperimentali hanno mostrato che la schematizzazione innanzi descritta mantiene una buona aderenza al reale comportamento strutturale finché l'area dell'apertura è superiore al 20% della superficie delimitata dagli assi delle aste. Nel caso di aperture minori è invece più corretto considerare l'elemento strutturale come una parete forata.

2.2.2. Pareti di taglio (*shear walls*).

Pareti piene di cemento armato sono frequentemente utilizzate nel caso di edifici di notevole altezza. Una parete isolata (fig. 2.10) può

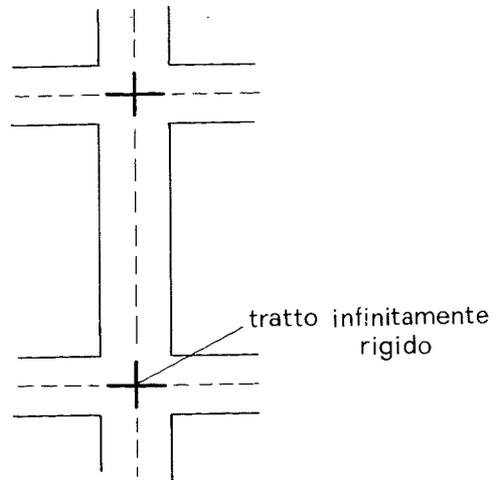


Figura 2.4. Tratti infinitamente rigidi all'estremità delle aste.

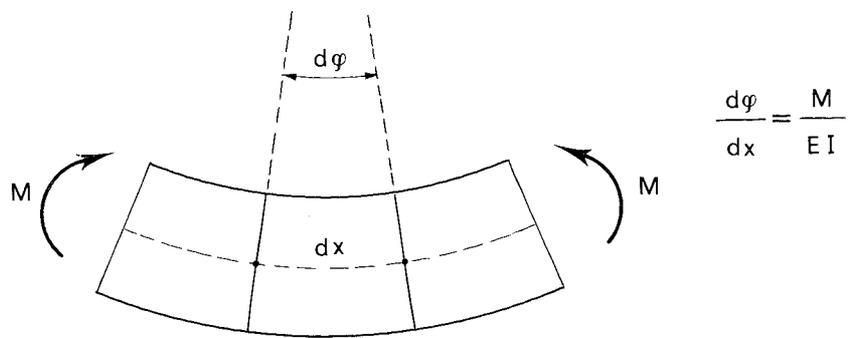


Figura 2.5. Deformazione da flessione.

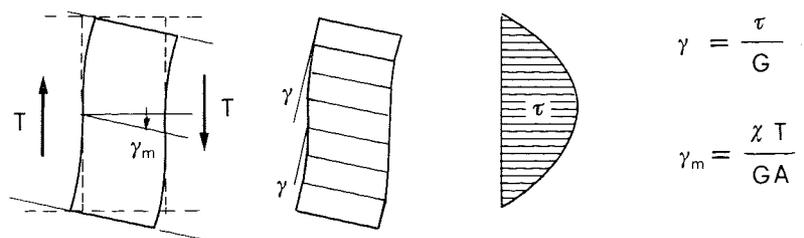


Figura 2.6. Deformazione da taglio.

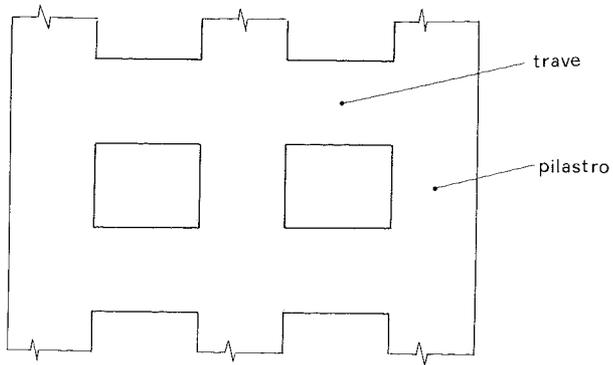


Figura 2.7. Telaio-parete.

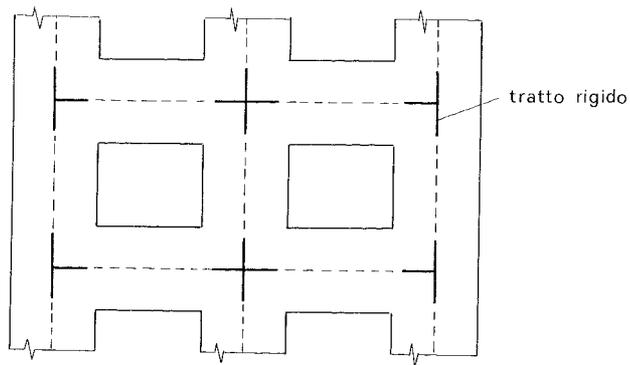


Figura 2.8. Schematizzazione di un telaio-parete.

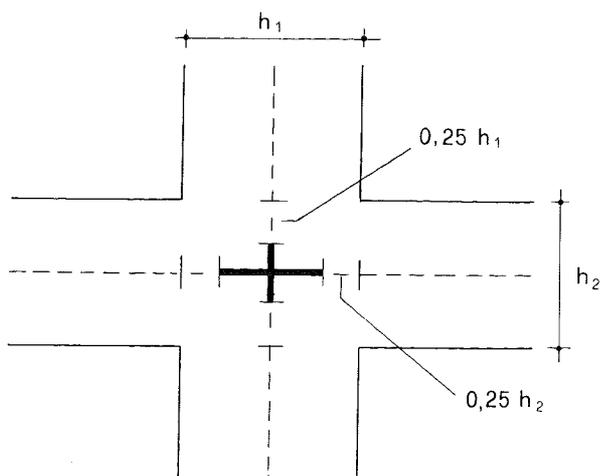


Figura 2.9. Dimensioni dei tratti rigidi.

essere schematizzata come una mensola, vincolata dall'impalcato a spostarsi in maniera congruente con i restanti telai dell'edificio. Il vincolo alla base può essere considerato un incastro solo se la fondazione è effettivamente in grado di impedirne la rotazione alla base. In caso contrario

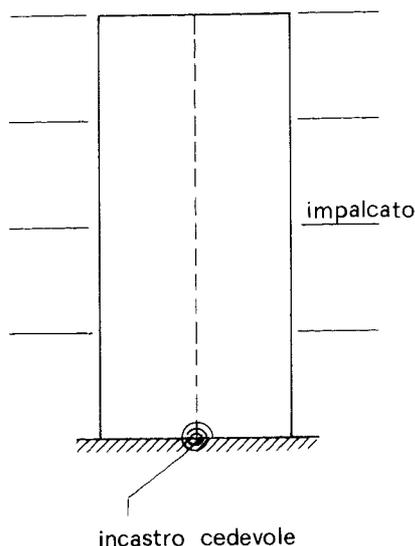


Figura 2.10. Parete di taglio isolata.

è indispensabile tener conto della cedevolezza del vincolo per non sopravvalutare la rigidità dell'elemento. In ogni caso è sempre necessario prendere in considerazione la deformabilità a taglio, che in questo caso è sicuramente predominante rispetto a quella flessionale.

Nel caso di pareti accoppiate tra loro (fig. 2.11) o collegate ad altri pilastri (fig. 2.12) è più corretto ricorrere allo schema di telaio, tenendo conto della deformabilità a taglio e considerando presenti tratti infinitamente rigidi all'estremità delle travi.

Infine, in presenza di pareti forate si può ricorrere alla schematizzazione già descritta per i telai-parete quando le dimensioni della aperture non sono modeste. In caso contrario, è stato sperimentalmente mostrato come sia più corretto considerare la parete integra, valutandone il momento di inerzia al netto del foro e riducendone la rigidità tagliante di un fattore k pari a:

$$k = 1 - 1.25 \sqrt{\frac{A_f}{A_p}}$$

avendo indicato con A_f l'area del foro e A_p la superficie di parete racchiusa tra le linee d'asse di travi e pilastri ideali (fig. 2.13).

2.3. Azioni agli estremi delle aste.

L'analisi del modello di telaio spaziale richiede preliminarmente la definizione dei legami elastici tra componenti di movimenti ed azioni agli estremi delle aste e la valutazione dei momenti di incastro perfetto corrispondenti ai carichi distribuiti. Ciò viene fatto in linea generale nel presente paragrafo, per essere applicato in seguito ai casi particolari di aste con tratto rigido e con deformabilità a taglio.

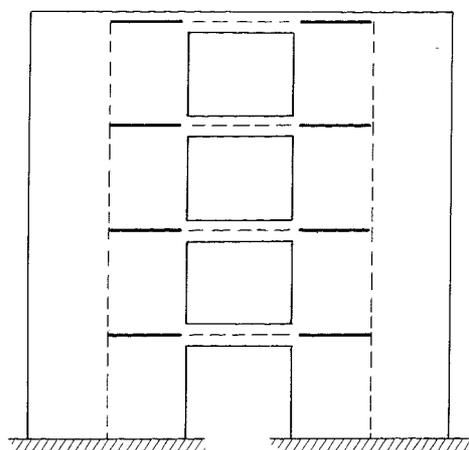


Figura 2.11. Pareti di taglio accoppiate.

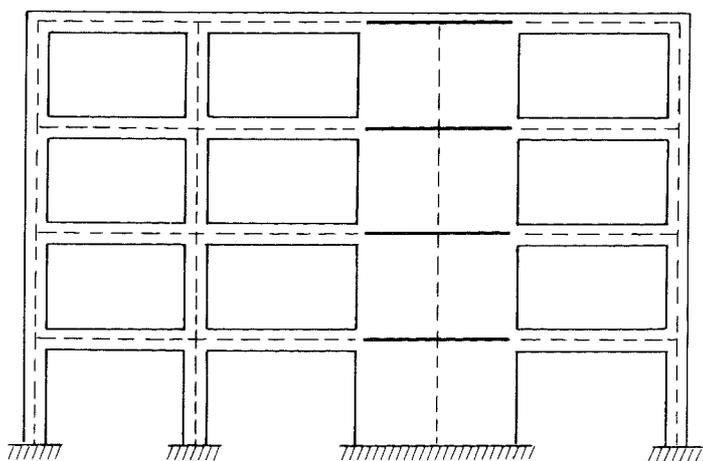


Figura 2.12. Parete di taglio inserita in un telaio.

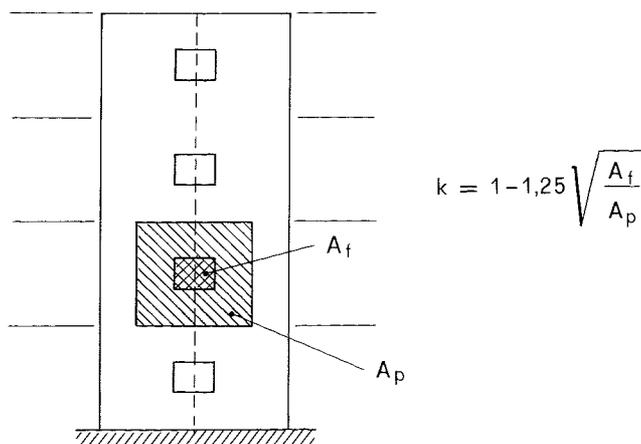


Figura 2.13. Parete di taglio forata.

2.3.1 Relazione tra azioni flettenti e rotazioni dei nodi.

Il primo passo per la determinazione del legame tra azioni flettenti e rotazioni è sempre l'esame di uno schema isostatico. Con riferimento ad una trave semplicemente appoggiata di luce l , occorre determinare le rotazioni φ_i e φ_k provocate in tale schema da una coppia flettente M_i applicata ad un suo estremo (fig. 2.14). Nel caso di trave a sezione

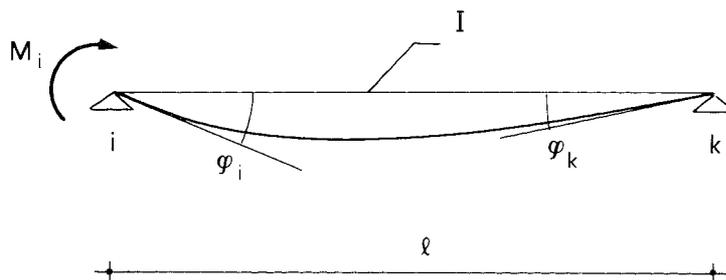


Figura 2.14

costante con un momento d'inerzia I , costituita da materiale di modulo elastico E , trascurando l'effetto della deformazione tagliante le rotazioni sono fornite dalle note espressioni:

$$\varphi_i = \frac{M_i l}{3 E I} ; \quad \varphi_k = - \frac{M_i l}{6 E I} .$$

Tali relazioni considerano positive le rotazioni e le coppie flettenti orarie. Il segno negativo nella seconda corrisponde appunto alla circostanza che ad un momento M_i positivo (orario) corrisponde una rotazione φ_k negativa (antioraria).

In un caso più generale, è sempre possibile esprimere le rotazioni in funzione dei valori innanzi indicati, mediante opportuni coefficienti correttivi U_{ik} e $V_{(ik)}$ che rappresentano il rapporto tra la rotazione che si ottiene nel caso esaminato e quella che si avrebbe per lo schema di base:

$$\varphi_i = \frac{M_i l}{3 E I} U_{ik} ; \quad \varphi_k = - \frac{M_i l}{6 E I} V_{(ik)} . \quad (2')$$

Allo stesso modo, se si applica la coppia M_k al secondo estremo si può scrivere:

$$\varphi_i = - \frac{M_k l}{6 E I} V_{(ik)} ; \quad \varphi_k = \frac{M_k l}{3 E I} U_{ki} . \quad (2'')$$

2.3.2. Determinazione delle rigidezze di nodo e di piano.

Una volta noto il legame tra azioni flettenti e rotazioni nello schema isostatico, si può analizzare lo schema iperstatico di asta con rotazione ad un estremo (che fornisce la rigidezza alla rotazione, o rigidezza di nodo), o con spostamento relativo degli estremi (che fornisce la rigidezza alla traslazione, che può essere detta rigidezza di piano perché solo i ritti di un interpiano possono presentare tale deformazione).

Si prenda innanzitutto in esame lo schema di trave appoggiata ed incastrata, per determinare l'entità della coppia M_i che occorre applicare

per ottenere una rotazione φ_i (fig. 2.15). Per far ciò si può sostituire il vincolo di incastro con un appoggio aggiungendo una coppia M_k tale da

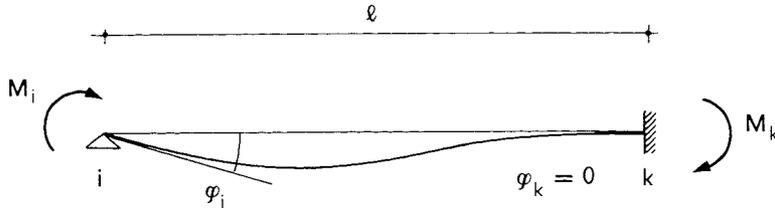


Figura 2.15

annullare la rotazione dell'estremo k. Imponendo questa condizione di congruenza e sfruttando le espressioni determinate in precedenza si ottiene:

$$M_k = \frac{M_i}{2} \frac{V_{(ik)}}{U_{ki}}$$

Si può quindi ricavare la rotazione φ_i come somma dell'effetto di M_i e M_k ed esprimere quindi tali momenti flettenti in funzione di essa:

$$M_i = 4 \frac{EI}{l} \frac{3 U_{ki}}{4 U_{ik} U_{ki} - V_{(ik)}^2} \varphi_i \quad (3)$$

$$M_k = 2 \frac{EI}{l} \frac{3 V_{(ik)}}{4 U_{ik} U_{ki} - V_{(ik)}^2} \varphi_i$$

Si passi poi all'esame dello schema di trave con nodi impediti di ruotare, soggetti ad uno spostamento relativo δ , positivo se la rotazione dell'asta ad esso conseguente è oraria (fig. 2.16). È possibile sostituire i

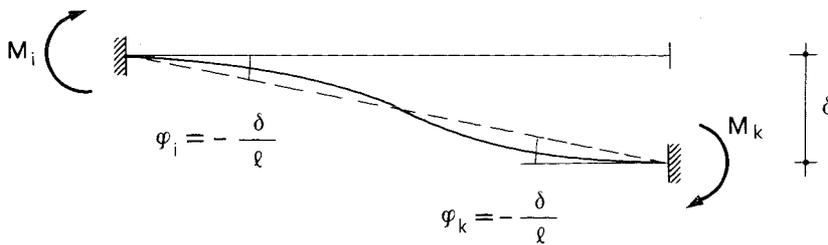


Figura 2.16

vincoli di incastro con appoggi, aggiungendo in corrispondenza di essi le coppie flettenti M_i e M_k tali da rendere nulla la rotazione. Esse devono quindi provocare ad entrambi gli estremi rotazioni, valutate rispetto alla congiungente i nodi, pari $-\delta/l$. Esprimendo questa condizione di congruenza si ottiene un sistema di due equazioni in due incognite la cui risoluzione fornisce i valori:

$$M_i = -6 \frac{EI}{l} \frac{V_{(ik)} + 2 U_{ki}}{4 U_{ik} U_{ki} - V_{(ik)}^2} \frac{\delta}{l} \quad (4)$$

$$M_k = -6 \frac{EI}{l} \frac{V_{(ik)} + 2 U_{ik}}{4 U_{ik} U_{ki} - V_{(ik)}^2} \frac{\delta}{l}$$

2.3.3. Momento flettente e taglio agli estremi di un'asta.

Utilizzando le espressioni innanzi trovate, si può esprimere il momento flettente M_{ik} all'estremo i dell'asta ik in funzione del momento di incastro perfetto \bar{M}_{ik} , della rotazione dei nodi (φ_i, φ_k) e dell'asta ($\psi_{(ik)} = \delta_{ji}/l_{(ik)}$), dell'indice di rigidezza $w'_{(ik)} = (EI/l)_{(ik)}$. La relazione può essere scritta:

$$M_{ik} = \bar{M}_{ik} + w''_{(ik)} (4 A_{ik} \varphi_i + 2 B_{(ik)} \varphi_k - 6 C_{ik} \psi_{(ik)}) \quad (5)$$

avendo posto:

$$\begin{aligned} A_{ik} &= \frac{3 U_{ki}}{U_{ik} + U_{ki} + V_{(ik)}} \\ B_{(ik)} &= \frac{3 V_{(ik)}}{U_{ik} + U_{ki} + V_{(ik)}} \\ C_{ik} &= \frac{2 U_{ki} + V_{(ik)}}{U_{ik} + U_{ki} + V_{(ik)}} \\ w''_{(ik)} &= \frac{U_{ik} + U_{ki} + V_{(ik)}}{4 U_{ik} U_{ki} - V_{(ik)}^2} w'_{(ik)} \end{aligned} \quad (6)$$

Se si indica con T_{ik}^* il taglio che insorgerebbe all'estremo i dell'asta ik per effetto dei carichi ad essa applicati, qualora essa fosse incernierata agli estremi, il taglio effettivo è espresso in generale da:

$$T_{ik} = T_{ik}^* + \frac{M_{ik} + M_{ki}}{l_{(ik)}}$$

Per i ritzi, per i quali $T_{ik}^* = \bar{M}_{ik} = \bar{M}_{ki} = 0$, l'espressione diventa:

$$T_{ik} = \frac{(4 A_{ik} + 2 B_{(ik)}) \varphi_i + (4 A_{ki} + 2 B_{(ik)}) \varphi_k - 6 (C_{ik} + C_{ki}) \psi_{(ik)}}{h_r} w''_{(ik)}$$

In base alla definizione innanzi fatta di A_{ik} , $B_{(ik)}$ e C_{ik} si ha però:

$$4 A_{ik} + 2 B_{(ik)} = 6 C_{ik}$$

$$C_{ik} + C_{ki} = 2$$

e quindi:

$$T_{ik} = \frac{6 (C_{ik} \varphi_i + C_{ki} \varphi_k) - 12 \psi_{(ik)}}{h_r} w''_{(ik)} \quad (7)$$

2.3.4. Momento di incastro perfetto.

Nell'espressione del momento flettente innanzi riportata compare il momento d'incastro perfetto corrispondente al carico agente sulla trave. Supponendolo per semplicità uniformemente distribuito, nel caso di asta a sezione costante si ha:

$$\bar{M}_{ik} = -\frac{q l^2}{12}; \quad \bar{M}_{ki} = \frac{q l^2}{12}.$$

Il segno di questi momenti è riportato in base alla convenzione assunta per le azioni flettenti agli estremi delle aste, considerate positive se orarie.

Più in generale, si potrà esprimere il momento d'incastro in funzione di tali valori con opportuni coefficienti correttivi Z_{ik} e Z_{ki} , mediante le espressioni:

$$\bar{M}_{ik} = -\frac{q l^2}{12} Z_{ik}; \quad \bar{M}_{ki} = \frac{q l^2}{12} Z_{ki} \quad (8)$$

2.4. Equazioni di equilibrio.

2.4.1. Equilibrio del nodo.

Sostituendo nella condizione di equilibrio alla rotazione del generico nodo l'espressione (5) del momento flettente M_{ik} in funzione delle componenti di movimento dei nodi e dei piani, si ottiene:

$$\sum_k \bar{M}_{ik} + \sum_k 4 A_{ik} w''_{(ik)} \varphi_i + \sum_k 2 B_{(ik)} w''_{(ik)} \varphi_k - \sum_k 6 C_{ik} w''_{(ik)} \frac{\delta_{jr}}{h_r} = 0$$

in cui l'ultima sommatoria è estesa ai soli ritti.

Risolvendo in funzione di φ_i , che per la congruenza è indipendente dall'asta e può quindi essere messo in evidenza nella sommatoria, si ha:

$$\varphi_i = - \left[\sum_k \bar{M}_{ik} + \sum_k 2 B_{(ik)} w''_{(ik)} \varphi_k - \sum_k 6 C_{ik} w''_{(ik)} \frac{\delta_{jr}}{h_r} \right] \frac{1}{\sum_k 4 A_{ik} w''_{(ik)}} \quad (9)$$

2.4.2. Equilibrio del piano alla traslazione.

Sostituendo nella condizione di equilibrio alla traslazione della parte di telaio sovrastante l'interpiano r l'espressione (7) del taglio T_{ik} , si ottiene:

$$Q_r + \sum_r 6 w''_{(ik)} \frac{C_{ik} \varphi_i + C_{ki} \varphi_k}{h_r} - \sum_r 12 w''_{(ik)} \frac{\delta_{jr}}{h_r^2} = 0$$

Esprimendo lo spostamento relativo dei traversi δ_{jr} in funzione dello spostamento relativo δ_{Gr} del punto G_r (baricentro degli indici di rigidezza $w''_{(ik)}$ dei ritti dell'interpiano r) e della rotazione relativa tra gli impalcati Φ_r , e risolvendo in funzione di δ_{Gr} , si ha:

$$\delta_{Gr} = \left[Q_r + \sum_r 6 \frac{w''_{(ik)}}{h_r} (C_{ik} \varphi_i + C_{ki} \varphi_k) \right] \frac{1}{\sum_r 12 \frac{w''_{(ik)}}{h_r^2}} \quad (10)$$

2.4.3. Equilibrio del piano alla rotazione.

Sostituendo nella condizione di equilibrio alla rotazione della parte di telaio sovrastante l'interpiano r l'espressione (7) di T_{ik} in funzione delle componenti di movimento, si ottiene:

$$M_r + \sum_r 6 w''_{(ik)} \frac{C_{ik} \varphi_i + C_{ki} \varphi_k}{h_r} d_{jr} - \sum_r 12 w''_{(ik)} \frac{\delta_{jr}}{h_r^2} d_{jr} = 0$$

Esprimendo δ_{jr} in funzione δ_{Gr} e Φ_r , e risolvendo in funzione di Φ_r , si ha:

$$\Phi_r = \left[M_r + \sum_r 6 \frac{w''_{(ik)}}{h_r} (C_{ik} \varphi_i + C_{ki} \varphi_k) d_{jr} \right] \frac{1}{\sum_r 12 \frac{w''_{(ik)}}{h_r^2} d_{jr}^2} \quad (11)$$

2.5. Tratto rigido all'estremità delle aste.

2.5.1. Relazione tra azioni flettenti e rotazioni dei nodi.

Si prenda in esame lo schema isostatico di trave semplicemente appoggiata di luce l , avente agli estremi tratti infinitamente rigidi di lunghezza $s l$ e $t l$ ed una zona centrale la cui sezione ha momento d'inerzia I (fig. 2.17).

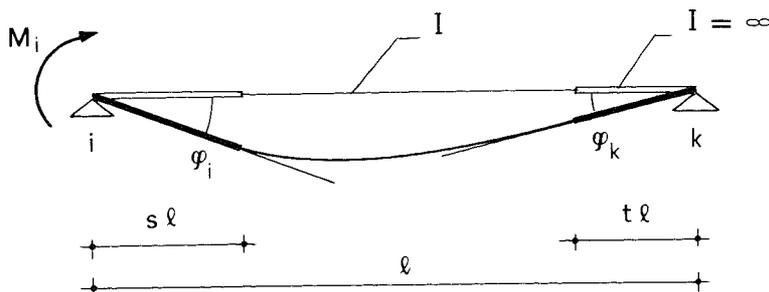


Figura 2.17 Asta con tratti rigidi.

Occorre determinare le rotazioni φ_i e φ_k provocate in tale schema da una coppia flettente M_i applicata ad un suo estremo. Una via molto semplice consiste nell'utilizzare i corollari di Mohr, che mettono in relazione le rotazioni cercate con le reazioni fornite da uno schema equivalente (in questo caso proprio coincidente) caricato con un carico distribuito proporzionale al momento flettente nello schema base attraverso il coefficiente divisivo $E I$. Nel caso in esame il carico è nullo in corrispondenza dei tratti infinitamente rigidi (per i quali $I = \infty$) ed ha un andamento trapezoidale nella zona centrale (fig. 2.18). Imponendo le condizioni di equilibrio si ottiene:

$$\varphi_i = \frac{M_i l}{3 E I} U_{ik}; \quad \varphi_k = -\frac{M_i l}{6 E I} V_{(ik)};$$

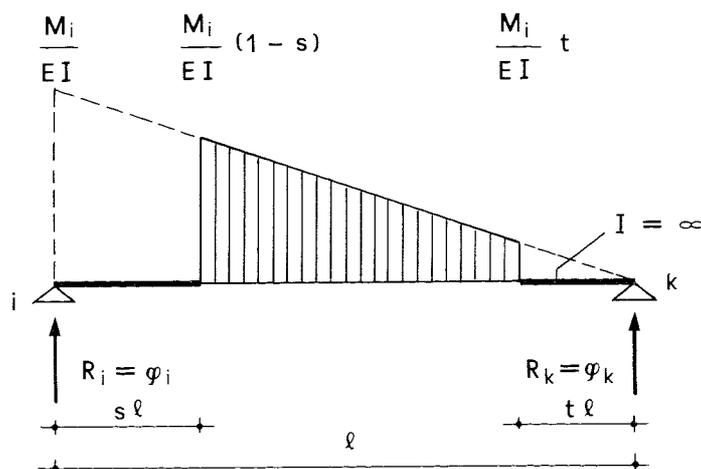


Figura 2.18. Determinazione delle rotazioni mediante i corollari di Mohr.

avendo posto:

$$\begin{aligned} U_{ik} &= (1-s)^3 - t^3; \\ V_{(ik)} &= 1 - 3(s^2 + t^2) + 2(s^3 + t^3) \end{aligned} \quad (12')$$

Allo stesso modo, applicando la coppia M_k al secondo estremo si ottiene:

$$\varphi_i = -\frac{M_k l}{6 E I} V_{(ik)}; \quad \varphi_k = \frac{M_k l}{3 E I} U_{ki};$$

con:

$$U_{ki} = (1-t)^3 - s^3 \quad (12'')$$

Si noti che come caso limite per $s = t = 0$ si ha $U_{ik} = U_{ki} = V_{(ik)} = 1$ e si riottengono quindi le relazioni già note per la trave a sezione costante.

2.5.2. Momenti di incastro perfetto.

Un'altra informazione necessaria per l'analisi del modello di telaio con aste dotate di tratti rigidi è la conoscenza dei momenti di incastro perfetto corrispondenti ad un carico uniformemente distribuito (fig. 2.19). Essi possono in generale essere determinati sostituendo i vincoli di incastro con appoggi ed aggiungendo alle estremità le coppie flettenti cercate, che devono essere tali da annullare la rotazione. Nel caso in esame lo stesso risultato può essere ottenuto, con minori complicazioni analitiche, considerando che il tratto centrale, deformabile, dell'asta è in effetti anch'esso una trave incastrata agli estremi, di luce $(1-s-t)l$.

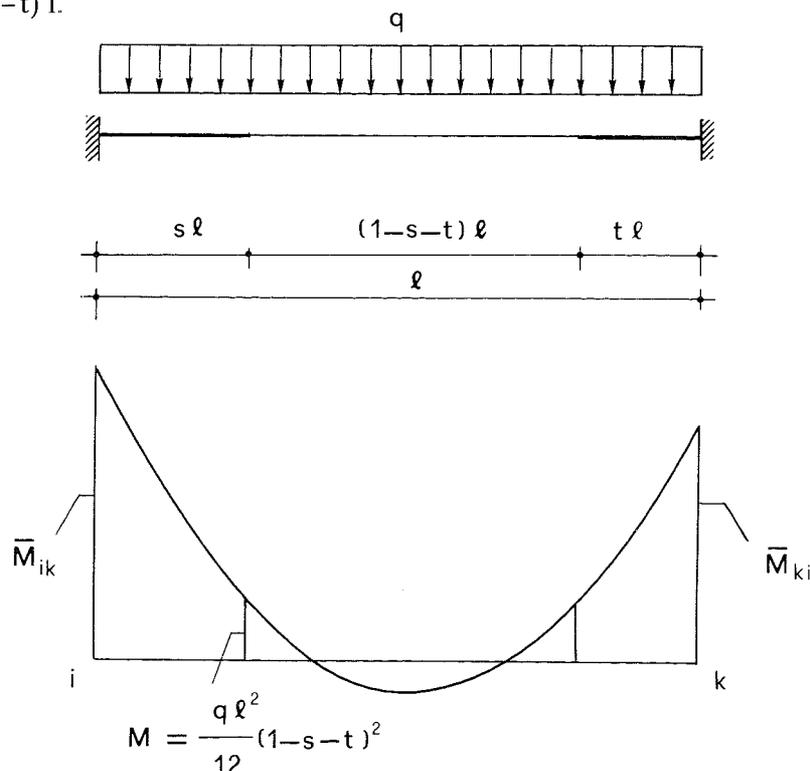


Figura 2.19. Momento flettente provocato da un carico uniforme in un'asta con tratti rigidi all'estremità

Nella sezione di contatto tra tratto rigido e deformabile il momento e il taglio valgono quindi:

$$M = \frac{q l^2}{12} (1-s-t)^2 \qquad T = \frac{q l}{2} (1-s-t).$$

Il momento di incastro agli estremi dell'asta può pertanto essere ricavato direttamente imponendo l'equilibrio alla rotazione intorno a tali punti. Si ottiene:

$$\bar{M}_{ik} = -\frac{q l^2}{12} Z_{ik} \qquad \bar{M}_{ki} = \frac{q l^2}{12} Z_{ki}$$

avendo posto:

$$\begin{aligned} Z_{ik} &= (1-s-t)^2 + 6s(1-s-t) + 6s^2 \\ Z_{ki} &= (1-s-t)^2 + 6t(1-s-t) + 6t^2 \end{aligned} \tag{13}$$

Si noti che come caso limite per $s = t = 0$ si ha $Z_{ik} = Z_{ki} = 1$ e si riottengono quindi le relazioni già note per la trave a sezione costante.

2.5.3. Considerazioni sui coefficienti correttivi.

Tutti i coefficienti introdotti nel presente paragrafo hanno la funzione di adattare valori usati per le aste a sezione costante al caso in cui siano presenti in esse tratti infinitamente rigidi. Prima ancora di applicare la procedura necessaria per tenerne conto nel calcolo, utili indicazioni si possono ricavare da un loro sommario esame.

Si consideri per semplicità il caso in cui il tratto rigido abbia uguale estensione ad entrambi gli estremi, cioè in cui sia $s = t$. Le espressioni in precedenza riportate si semplificano divenendo:

$$\begin{aligned} A_{ik} &= 1 - s + s^2 \\ B_{(ik)} &= 1 + 2s - 2s^2 \\ C_{ik} &= 1 \\ \frac{w''_{(ik)}}{w'_{(ik)}} &= \frac{1}{(1-2s)^3} \\ Z_{ik} &= 1 + 2s - 2s^2. \end{aligned}$$

I valori dei suddetti parametri sono diagrammati in figura 2.20. Si nota che i coefficienti A_{ik} , $B_{(ik)}$, C_{ik} e Z_{ik} si discostano poco dall'unità, mentre il rapporto w''/w' cresce rapidamente con legge cubica. Appare pertanto possibile, almeno in prima approssimazione e per bassi valori di s , sostituire all'asta dotata di tratti rigidi un'asta della stessa lunghezza, la cui sezione abbia un momento di inerzia maggiorato col cubo del rapporto tra luce lorda e luce netta. Meno corretta risulta invece una schematizzazione a volte utilizzata, che consiste nel considerare in sostituzione un'asta della stessa sezione e di lunghezza pari alla luce netta; in tal caso, infatti, la rigidezza viene incrementata solo della quantità $1/(1-2s)$; il momento d'incastro conseguente a carichi distribuiti risul-

terebbe inoltre ridotto, mentre l'andamento del coefficiente Z_{ik} mostra come esso sia invece leggermente crescente con s .

Il rapido crescere del rapporto w''/w' potrebbe far sorgere qualche perplessità sulla correttezza delle usuali schematizzazioni che trascurano

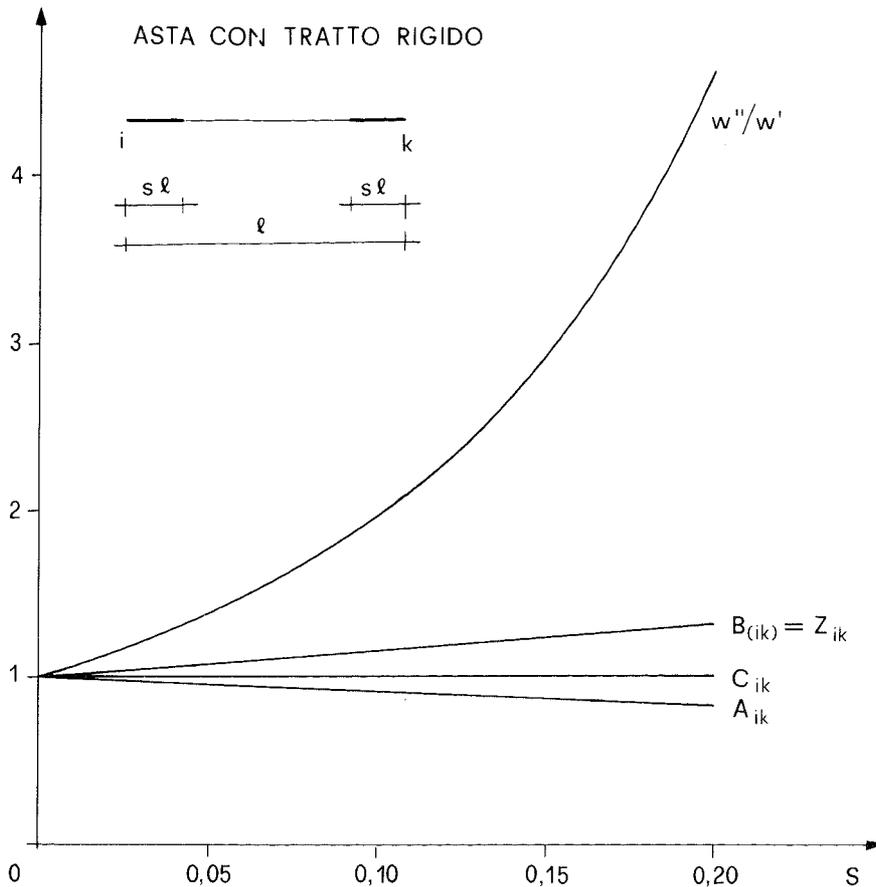


Figura 2.20 Coefficienti correttivi per asta con tratti rigidi all'estremità.

l'incremento di rigidezza dovuto alle dimensioni non puntiformi dei nodi. Raramente la sezione e la lunghezza delle aste sono tali da rendere l'ingombro del nodo inferiore al 5% della luce, e ad $s = 0,05$ corrisponde $w''/w' = 1,37$, cioè un incremento di rigidezza di quasi il 40%. È però da notare che l'irrigidimento avviene contemporaneamente per tutte le aste, anche se non in identica misura, ed è quindi scarsamente rilevante ai fini della distribuzione delle sollecitazioni tra i singoli elementi.

2.5.4. Esempio numerico.

Il procedimento operativo per la risoluzione di uno schema di telaio regolare con tratti rigidi agli estremi delle aste è sostanzialmente coincidente con l'impostazione generale illustrata per il telaio con aste a sezione costante. Differisce infatti da essa solo per la necessità di calcolare preliminarmente i coefficienti correttivi qui definiti e di tener conto di essi nella risoluzione iterativa delle equazioni di equilibrio e nel calcolo dei momenti finali.

A titolo esemplificativo si è presa in esame la struttura già descritta e analizzata nel capitolo 1 ed in precedenti lavori [5], mo-

strata nella figura 2.21. La zona di intersezione delle aste non è in realtà molto ampia. Per massimizzare l'effetto descritto nel paragrafo si è pertanto assunto per i tratti rigidi una dimensione tale da conglobare l'intero nodo, senza le riduzioni consigliate dalla norme giapponesi.

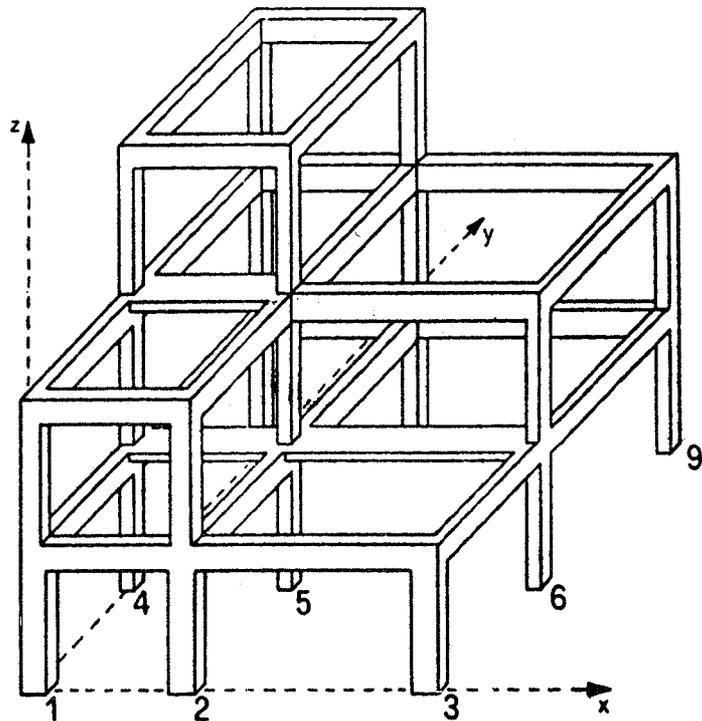


Figura 2.21. Edificio a 3 piani: struttura spaziale composta da travi e pilastri; nella figura non sono riportati i solai, che intervengono però nel calcolo come vincolo mutuo per i nodi di ogni impalcato.

L'asse dei pilastri che presentano riseghe eccentriche è stato assunto coincidente con quello dell'ultimo ordine. Il tratto rigido all'estremo delle travi varia pertanto da un minimo di 15 cm, in corrispondenza dei pilastri di sezione 30×30 , fino ad un massimo di 30 cm in corrispondenza dei pilastri 1, 2 e 3 al primo impalcato. Data la contemporanea presenza di travi emergenti e a spessore, l'asse delle travi è stato schematicamente posto a livello del piano medio dell'impalcato. Il tratto rigido superiore dei pilastri ha quindi una lunghezza di 40 cm in corrispondenza alle travi 30×50 , mentre quello inferiore misura 10 cm al secondo e terzo ordine ed è nullo alla base del telaio (fig. 2.22).

La figura 2.23 mostra i risultati relativi al telaio 1-2-3, parallelo all'asse x, confrontati con quelli già ottenuti in assenza di tratto rigido. La variazione del momento flettente, in genere non molto elevata, raggiunge in alcune sezioni punte rilevanti. Se però si trascura, in coerenza con il modello strutturale, l'effetto flettente nei tratti infinitamente rigidi, il momento non supera mai i valori determinati con la prima schematizzazione. Molto più sensibile è invece l'irrigidimento complessivo, e quindi la differenza degli spostamenti, che risultano ridotti di circa un terzo.

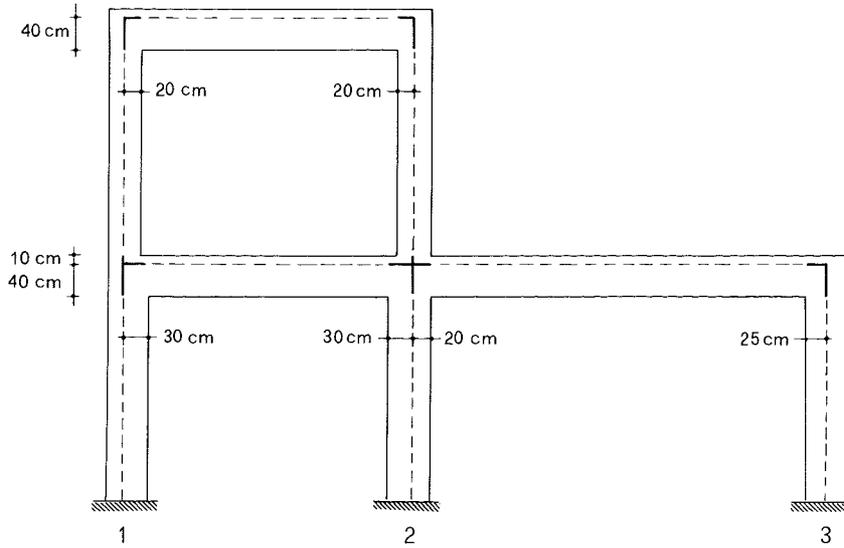
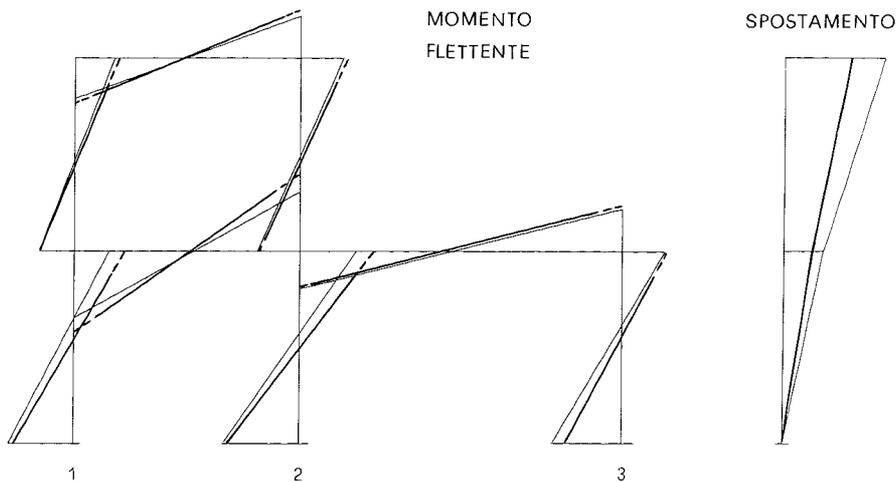


Figura 2.22. Schematizzazione di un telaio piano della struttura spaziale



- senza tratto rigido
- con tratto rigido
- - - con tratto rigido [zona interna al nodo]

Figura 2.23. Confronto dei risultati ottenuti, con e senza tratti rigidi, per un telaio piano della struttura spaziale.

2.6. Effetto della deformazione dovuta al taglio.

2.6.1. Relazione tra azioni flettenti e rotazioni dei nodi.

Si prenda in esame lo schema di trave semplicemente appoggiata, di luce l , caricata da una coppia flettente M_i applicata ad un suo estremo (fig. 2.24). In essa il taglio T è costante e pari al rapporto M_i/l . In figura 2.25 sono rappresentate (in scala molto amplificata e trascurando l'ingobbimento della sezione) le deformazioni conseguenti alla flessione e al taglio e le rotazioni che insorgono alle estremità dell'asta. Dalla sovrapposizione dei due effetti si ha:

$$\varphi_i = \frac{M_i l}{3 E I} + \frac{\chi T}{G A} \qquad \varphi_k = -\frac{M_i l}{6 E I} + \frac{\chi T}{G A}$$

e quindi:

$$\varphi_i = \frac{M_i l}{3 E I} U_{ik}; \qquad \varphi_k = -\frac{M_i l}{6 E I} V_{(ik)};$$

avendo posto:

$$U_{ik} = 1 + \varepsilon; \qquad V_{(ik)} = 1 - 2\varepsilon; \tag{14}$$

$$\varepsilon = \frac{3 E I \chi}{G A l^2}.$$

Analogo risultato si ottiene applicando una coppia M_k all'altro estremo; si noti che il coefficiente U_{ki} che viene in tal modo determinato è in questo caso coincidente con U_{ik} .

2.6.2. Momenti di incastro perfetto.

Per valutare quali siano le variazioni dei momenti di incastro perfetto causate dalle deformazioni taglianti si prenda in esame lo schema isostatico di trave semplicemente appoggiata, gravata da un carico uniforme (fig. 2.26). Il taglio ha un andamento bitriangolare, ed analoga variazione presenta quindi lo scorrimento. Esso provoca nella trave abbassamenti, ma non la rotazione delle sezioni. Ciò è facilmente intuibile se si pensa che nella deformazione da taglio le sezioni devono mantenersi tra loro parallele (a meno dell'ingobbimento) e che per la simmetria dello schema la sezione di mezzzeria può abbassarsi ma deve rimanere verticale. La rotazione delle facce di estremità dell'asta è quindi dovuta esclusivamente alla flessione.

Per rendere lo schema innanzi riportato equivalente a quello di trave incastrata occorre aggiungere due coppie di entità tale da annullare le

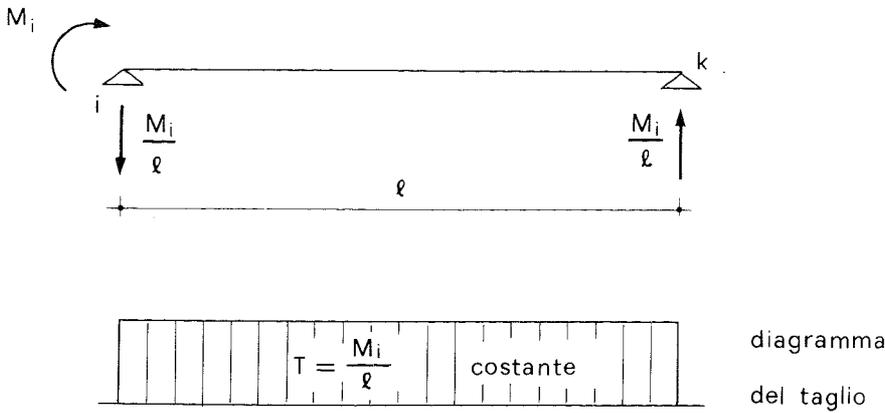


Figura 2.24

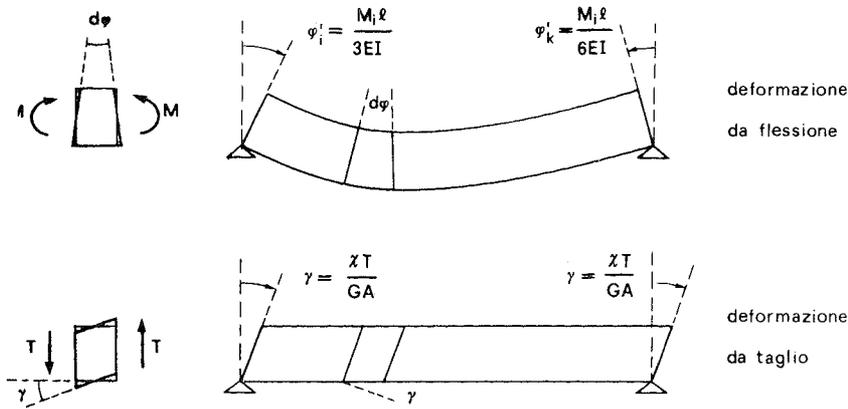


Figura 2.25. Deformazioni da flessione e da taglio per effetto di una coppia M_i applicata ad un estremo.

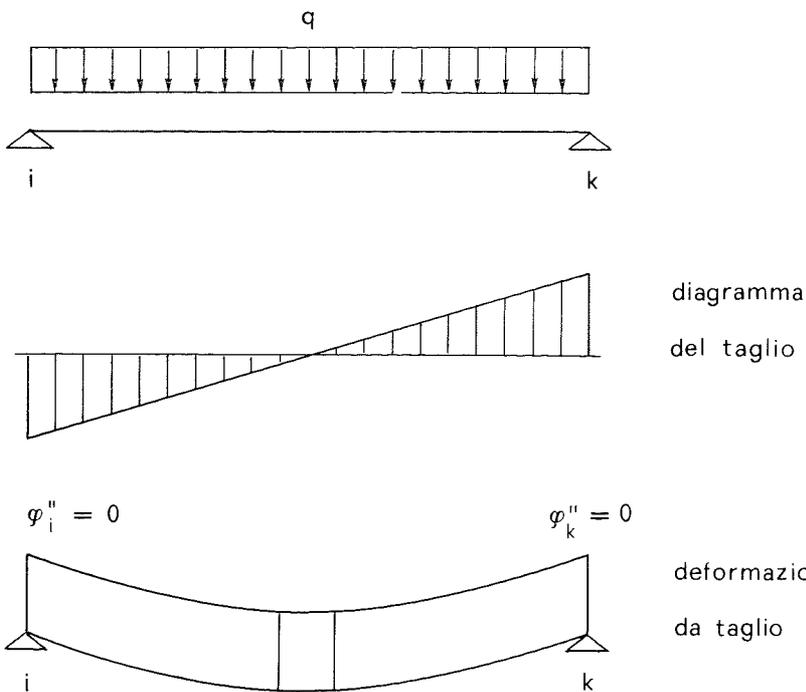


Figura 2.26. Deformazioni da taglio per effetto di un carico uniformemente distribuito.

sudette rotazioni (fig. 2.27). Ancora una volta dalla simmetria dello schema si deduce che le coppie devono essere uguali ed opposte, e quindi

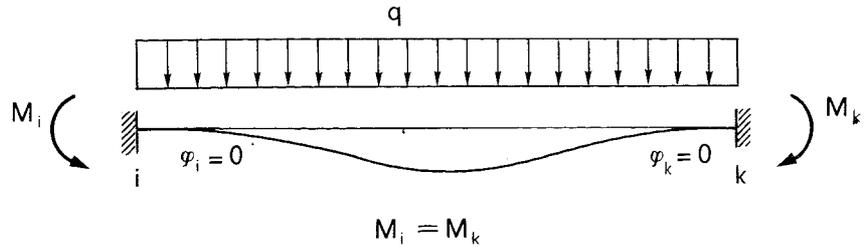


Figura 2.27

non provocare taglio. Il loro valore sarà quindi coincidente con quello determinato in assenza della deformazione tagliante. Si può utilizzare ancora la notazione generale del paragrafo precedente:

$$\bar{M}_{ik} = -\frac{q l^2}{12} Z_{ik} \qquad \bar{M}_{ki} = \frac{q l^2}{12} Z_{ki}$$

essendo però in questo caso $Z_{ik} = Z_{ki} = 1$.

2.6.3. Considerazioni sui coefficienti correttivi.

I coefficienti A_{ik} , $B_{(ik)}$, C_{ik} ed il rapporto w''/w' , utilizzati nell'espressione del momento flettente e delle equazioni di equilibrio, possono essere scritti direttamente in funzione del già definito coefficiente ε :

$$A_{ik} = A_{ki} = 1 + \varepsilon$$

$$B_{(ik)} = 1 - 2\varepsilon$$

$$C_{ik} = C_{ki} = 1$$

$$w''/w' = \frac{1}{1 + 4\varepsilon}.$$

Per telai in cemento armato, con aste a sezione rettangolare, di base b ed altezza h , si ha:

$$I = \frac{b h^3}{12}; \quad A = b h; \quad \chi = 1.2; \quad \frac{G}{E} = 0.45.$$

Il parametro ε è in tal caso funzione esclusivamente del rapporto tra altezza della sezione e lunghezza dell'asta:

$$\varepsilon = 0.3 \frac{E}{G} \frac{h^2}{l^2} = \frac{2}{3} \frac{h^2}{l^2} \qquad (15)$$

In figura 2.28 sono diagrammati i valori conseguentemente assunti dai coefficienti caratteristici del problema. Si nota che in questo caso la variazione di A_{ik} e $B_{(ik)}$ è dello stesso ordine di grandezza di quella del rapporto w''/w' . Appaiono quindi poco corrette schematizzazioni semplificate che cerchino di tener conto della minore rigidità provo-

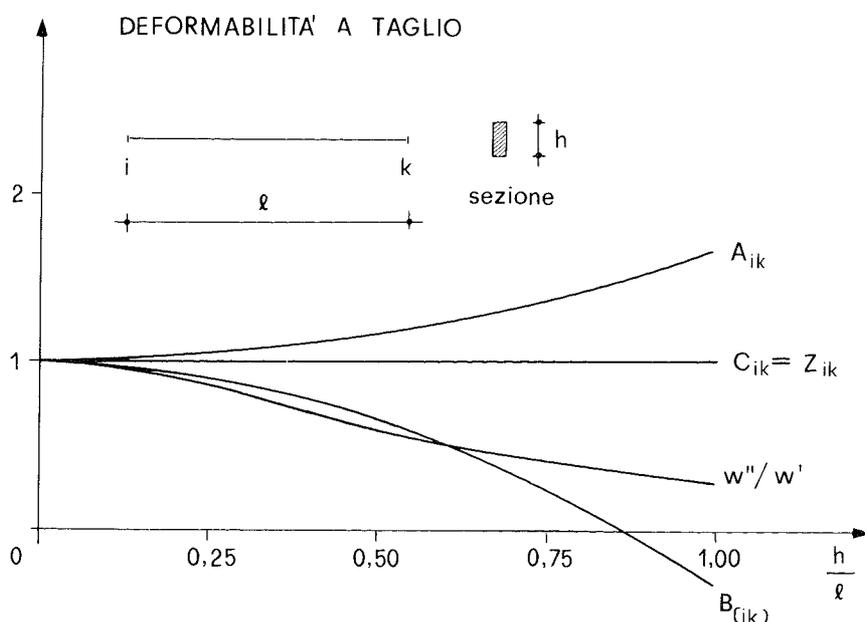


Figura 2.28. Coefficienti correttivi per tener conto della deformabilità da taglio.

cata dal taglio esclusivamente con una riduzione del momento d'inerzia delle aste. Risulta invece confermata la trascurabilità dell'effetto del taglio per le più comuni strutture intelaiate, nelle quali raramente il rapporto h/l supera il valore 0,2. In tal caso, infatti, i coefficienti correttivi non subiscono variazioni maggiori del 10%; la diminuzione di rigidità si risente inoltre su tutte le aste, rendendo praticamente nulle le variazioni delle caratteristiche di sollecitazione. L'effetto diventa sensibile solo per rapporti h/l superiori a 0,5; è però opportuno ricordare che per valori del rapporto prossimi o superiori all'unità, cioè per aste la cui sezione abbia dimensioni comparabili con la lunghezza, la teoria del De Saint Venant, assunta alla base dello schema di trave, non è in realtà più applicabile ed i risultati forniti dallo schema di telaio sono quindi necessariamente approssimati.

2.6.4. Esempio numerico.

A titolo esemplificativo si è presa in esame la struttura già descritta ed analizzata nei paragrafi precedenti. Come facilmente prevedibile, le differenze riscontrate nelle caratteristiche di sollecitazione sono appena percepibili, essendo sempre inferiori al 3%. Leggermente maggiori sono le differenze degli spostamenti, che raggiungono quasi il 5%.

2.7. Effetto contemporaneo di tratto rigido e deformazione da taglio.

2.7.1. Relazione tra azioni flettenti e rotazioni dei nodi.

Si prenda in esame lo schema di trave semplicemente appoggiata, di luce l , avente agli estremi tratti infinitamente rigidi di lunghezza $s l$ e $t l$ ed una zona centrale la cui sezione ha momento di inerzia I (fig. 2.29).

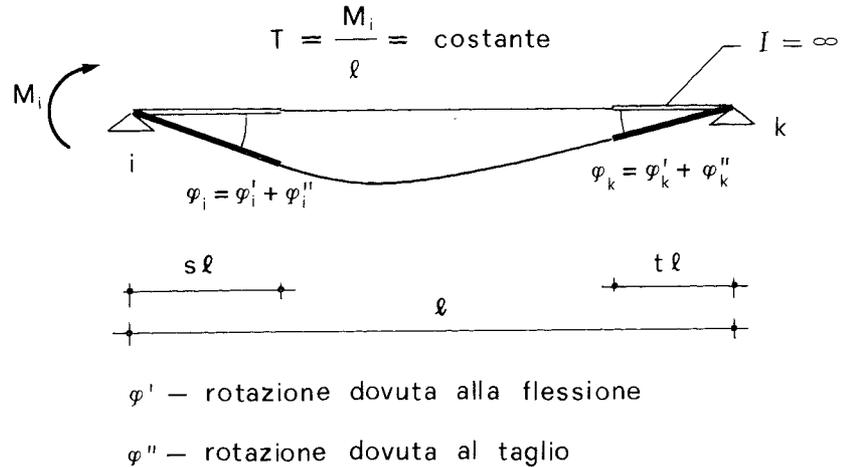


Figura 2.29. Effetto contemporaneo di tratti rigidi e deformabilità a taglio.

Le rotazioni φ_i e φ_k provocate da una coppia M_i possono essere calcolate come somma di una aliquota φ' dovuta alla deformazione flessionale dell'asta, già valutata nel paragrafo 2.5.1, ed una φ'' dovuta alla deformazione da taglio. Nel caso in esame il taglio è costante e pari a M_i/l . Alla deformazione del tratto centrale $\gamma = \chi T/GA$ corrisponderanno rotazioni degli estremi uguali tra loro e determinabili per la congruenza, come mostrato dalla figura 2.30:

$$\varphi'' (1-t) l + \varphi'' t l = \gamma (1-s-t) l$$

e quindi:

$$\varphi'' = \gamma (1-s-t).$$

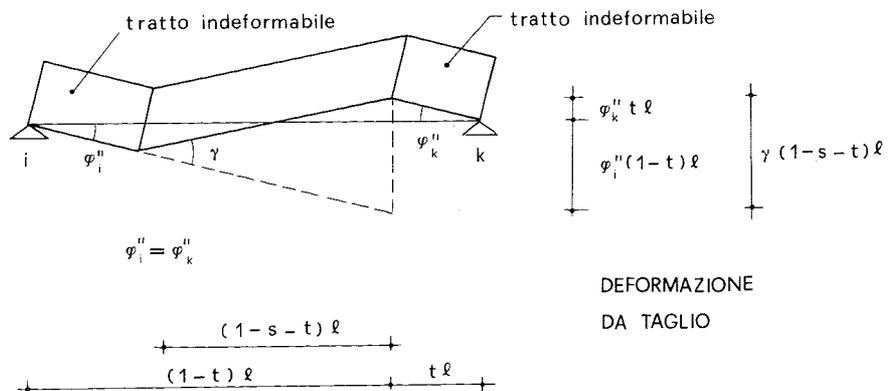


Figura 2.30. Deformazione da taglio in presenza di tratti rigidi.

Le rotazioni complessive sono pertanto:

$$\varphi_i = \frac{M_i l}{3 E I} [(1-s)^3 - t^3] + \frac{\chi M_i}{G A l} (1-s-t)$$

$$\varphi_k = -\frac{M_i l}{6 E I} [1 - 3(s^2 + t^2) + 2(s^3 + t^3)] + \frac{\chi M_i}{G A l} (1-s-t)$$

e quindi:

$$\varphi_i = \frac{M_i l}{3 E I} U_{ik}; \quad \varphi_k = -\frac{M_i l}{6 E I} V_{(ik)};$$

avendo posto:

$$U_{ik} = (1-s)^3 - t^3 + \varepsilon (1-s-t);$$

$$V_{(ik)} = 1 - 3(s^2 + t^2) + 2(s^3 + t^3) - 2\varepsilon (1-s-t);$$

$$\varepsilon = \frac{3 E I \chi}{G A l^2}.$$

(16)

Si noti, che ponendo come caso limite $\varepsilon = 0$ (cioè trascurando la deformabilità a taglio) si ricade nelle espressioni del paragrafo 2.5.1, mentre ponendo $s = t = 0$ (assenza di tratto rigido) si ricade in quelle del paragrafo 2.6.1.

2.7.2. Momenti di incastro perfetto.

L'influenza della deformabilità tagliante nella determinazione dei momenti di incastro perfetto in una trave con tratti rigidi all'estremità può essere valutata con facilità se si osserva che il tratto centrale, deformabile, dell'asta si comporta a sua volta come una trave incastrata agli estremi, di luce $(1-s-t)l$. Valgono pertanto per esso le considerazioni già esposte nel paragrafo 2.6.2., in base alle quali si è concluso che, per la simmetria geometrica e di carico, le reazioni di incastro perfetto non vengono influenzate dalla deformabilità a taglio. Il momento d'incastro perfetto è quindi individuato mediante i coefficienti correttivi Z_{ik} forniti dalle espressioni (13).

Bibliografia.

1. J.L. Meek, *Matrix structural analysis*, McGraw-Hill, 1971.
2. S.P. Timoshenko, J.M. Gere, *Mechanics of materials*, Van Nostrand Reinhold Company, 1972.
3. K. Muto, *Aseismic design analysis of buildings*, Maruzen, 1974. Edizione italiana: *Analisi della progettazione antisismica degli edifici*, Flaccovio, 1983.
4. A. Ghersi, *Strutture intelaiate spaziali per edifici*, Giornale del Genio Civile, 1977.
5. A. Ghersi, *Impostazione manuale del calcolo dei telai spaziali*, Ingegneri, 1979.
6. G. Toniolo, *Analisi strutturale con l'elaboratore elettronico*, Masson, 1982.
7. A. Ghersi, S. Saglimbeni, *Prove pilota per una indagine sul comportamento non lineare dei telai spaziali*, Atti del X congresso C.T.A., 1985.

APPENDICE AL CAPITOLO SECONDO
**PROGRAMMA PER LA RISOLUZIONE
DI UN TELAIO SPAZIALE TENENDO CONTO DI TRATTI RIGIDI
E DEFORMABILITÀ A TAGLIO.**

Aurelio Ghersi

a. Introduzione.

Il programma che qui si presenta è una estensione di quello illustrato in appendice al capitolo 1, e consente di tener conto della presenza di tratti rigidi all'estremità delle aste e della deformabilità a taglio. La maggior complessità del problema rende necessario un più elevato numero di variabili. Per tale motivo il dimensionamento, fatto nell'intento di non superare un ingombro di memoria di 64 Kbytes, limita il programma alla risoluzione di schemi composti da un massimo di 20 telai, con un totale di 40 pilastri e 7 piani.

I paragrafi successivi contengono la documentazione del programma, vista come integrazione di quella già fornita per la versione base. Il paragrafo b contiene la descrizione delle variabili aggiunte o che hanno cambiato significato rispetto alla versione precedente. In esso sono anche riportate precise indicazioni sull'ingombro di memoria, che consentono di variare i limiti anzidetti in funzione della capacità di memoria del proprio calcolatore e delle possibilità del BASIC utilizzato. Nel paragrafo c sono descritti i blocchi di istruzioni aggiunti o modificati. Il relativo listato è riportato nel successivo paragrafo d. Il paragrafo e contiene le indicazioni necessarie per utilizzare il programma. I paragrafi f e g contengono infine due esempi che mostrano rispettivamente l'effetto di tratti rigidi e della deformabilità a taglio. Per essi sono riportati i dati necessari per l'elaborazione ed i risultati conseguentemente ottenuti.

b. Elenco delle variabili.

La maggior generalità della impostazione assunta comporta innanzitutto un incremento delle informazioni di ingresso. Occorre infatti definire il modulo di elasticità tangenziale G e l'ampiezza dei tratti rigidi di estremità. Per consentire di trascurare la deformabilità a taglio, si è assunto di indicare convenzionalmente tale situazione assegnando valore nullo a G . L'assenza di tratti rigidi può invece essere indicata semplicemente ponendo pari a 0 la loro ampiezza.

Nell'ambito del programma occorre poi valutare i coefficienti correttivi A , B , C , Z e l'indice di rigidezza modificato w'' . I valori di quest'ultimo possono direttamente essere conservati nelle variabili $WT()$ e $WR()$, al posto dei valori di w' . I coefficienti correttivi potrebbero essere calcolati di volta in volta, ma ciò comporterebbe un sensibile rallentamento del procedimento risolutivo. Si è pertanto preferito determinarne una volta per tutte i valori e memorizzarli in appositi array, anche se ciò ha causato una sensibile diminuzione delle dimensioni del massimo telaio risolubile.

Si riporta di seguito l'elenco delle variabili che sono state aggiunte, o che hanno cambiato significato rispetto alla versione base illustrata in appendice al capitolo 1. Si analizza infine il nuovo ingombro complessivo di memoria, in modo da consentire con facilità variazioni dei limiti di dimensionamento.

teoria	programma	descrizione
s l	RS (I, K)	ampiezza del tratto rigido all'estremo sinistro della trave I, K (m)
t l	RD (I, K)	ampiezza del tratto rigido all'estremo destro della trave I, K (m)
s l	RP (I, K)	ampiezza del tratto rigido all'estremo sinistro (cioè al piede) del ritto I, K (m)
t l	RT (I, K)	ampiezza del tratto rigido all'estremo destro (cioè in testa) del ritto I, K (m)
	GG	modulo di elasticità tangenziale del materiale (kg cm^{-2})
G	G	modulo di elasticità tangenziale (t m^{-2}); $G = GG \times 10$
w''	WT (I, K)	indice di rigidezza modificato della trave I, K (tm)
w''	WR (I, K)	indice di rigidezza modificato del ritto I, K (tm)
A_{ik}	AS (I, K)	coefficiente A per l'estremo sinistro della trave I, K
A_{ki}	AD (I, K)	coefficiente A per l'estremo destro della trave I, K
A_{ik}	AP (I, K)	coefficiente A per l'estremo al piede del ritto I, K
A_{ki}	AT (I, K)	coefficiente A per l'estremo in testa del ritto I, K
$B_{(ik)}$	BT (I, K)	coefficiente B per la trave I, K
$B_{(ik)}$	BR (I, K)	coefficiente B per il ritto I, K
C_{ik}	CS (I, K)	coefficiente C per l'estremo sinistro della trave I, K
C_{ki}	CD (I, K)	coefficiente C per l'estremo destro della trave I, K
C_{ik}	CP (I, K)	coefficiente C per l'estremo al piede del ritto I, K
C_{ki}	CT (I, K)	coefficiente C per l'estremo in testa del ritto I, K
Z_{ik}	ZS (I, K)	coefficiente Z per l'estremo sinistro della trave I, K
Z_{ki}	ZD (I, K)	coefficiente Z per l'estremo destro della trave I, K
s	S	tratto rigido all'estremo sinistro di un'asta
t	T	tratto rigido all'estremo destro di un'asta
ε	EP	coefficiente ε per un'asta generica
U_{ik}	U1	coefficiente U per l'estremo sinistro di un'asta
U_{ki}	U2	coefficiente U per l'estremo destro di un'asta
$V_{(ik)}$	V	coefficiente V per un'asta generica
	V0	$U_{ik} + U_{ki} + V_{(ik)}$
A_{ik}	A1	valore per un'asta generica
A_{ki}	A2	valore per un'asta generica
$B_{(ik)}$	B	valore per un'asta generica
C_{ik}	C1	valore per un'asta generica
C_{ki}	C2	valore per un'asta generica
Z_{ik}	Z1	valore per un'asta generica
Z_{ki}	Z2	valore per un'asta generica
w''/w'	WW	valore per un'asta generica
1-s-t	Z0	valore per un'asta generica

Ingombro complessivo di memoria:

L'ingombro della versione in GWBASIC del programma è di circa 20 Kbytes. L'ingombro delle variabili può essere calcolato in funzione dei valori massimi di MI, MJ, MK, ML utilizzati nel loro dimensionamento. Si sono utilizzate 60 variabili con indice e 47 variabili semplici, per un numero totale di valori pari a:

$$33 \times MI \times MK + 2 \times MJ \times MK + 2 \times MI + 3 \times MJ + MK + 3 \times ML + 46.$$

Se si pone $MI = 40$, $MK = 7$, $MJ = 20$, $ML = 50$, il numero totale di variabili è pari a 9863, corrispondente a un ingombro di memoria pari a quasi 40 Kbytes, valore che, sommato a quello del programma, si mantiene inferiore al limite di 64 Kbytes, caratteristico del GWBASIC.

Lo stesso ingombro complessivo può essere ottenuto variando i limiti del dimensionamento l'uno a scapito degli altri. Si può così, per esempio, portare il numero massimo dei piani MK a 10 riducendo il numero dei pilastri MI a 28, oppure abbassarlo a 3 aumentando MI a 90.

c. Descrizione del programma.

Nel listato, riportato nel paragrafo seguente, sono riportati esclusivamente quei blocchi di istruzioni che hanno subito aggiunte o modifiche rispetto alla versione base. Denominando i blocchi principali con le stesse lettere utilizzate nel paragrafo 1.c, si ha:

A) Dimensionamento delle variabili con indice.

Nella linea 100 è stato ridotto il valore limite per il numero di pilastri. Sono state aggiunte le linee 190-220, contenenti il dimensionamento delle nuove variabili.

B) Programma principale.

Inalterato.

C) Input dei dati geometrici ed elastici.

La parte principale del sottoprogramma è rimasta inalterata. Sono invece stati modificati i sottoprogrammi 1700 e 1900. Nel primo (modulo di elasticità) è stata aggiunta l'istruzione per l'input del modulo G. Nel secondo (tipi di sezione delle aste) è stata aggiunta la lettura delle dimensioni dei tratti rigidi.

D) Stampa dei dati geometrici ed elastici.

Sono stati modificati i sottoprogrammi 2400 (luci e sezioni delle travi), 2600 (sezioni dei pilastri) e 2800 (modulo di elasticità tangenziale).

E) Elaborazione iniziale dei dati geometrici.

È stato cambiato il sottoprogramma 3100 (indici di rigidezza delle aste), che ora determina anche i coefficienti correttivi A, B, C, Z ed il rapporto w''/w' , utilizzando il sottoprogramma 3300, prima inesistente. È stato modificato anche il sottoprogramma 3400 (somma degli indici di rigidezza delle aste nei nodi).

F) Input dei carichi verticali, nodali ed orizzontali.

Inalterato.

G) Stampa dei dati relativi ai carichi.

Inalterato.

H) Elaborazione iniziale dei dati relativi ai carichi.

È stato variato il sottoprogramma 6100 (somma dei momenti di incastro perfetto) per tener conto dei coefficienti correttivi Z.

I) Risoluzione iterativa del sistema.

Sono stati modificati i sottoprogrammi 7400 (operazione di nodo) e 7800 (somma dei valori per l'operazione di piano), nei quali ora compaiono i coefficienti B e C.

L) Calcolo delle caratteristiche di sollecitazione agli estremi delle aste e degli spostamenti assoluti dei traversi.

È cambiato solo il sottoprogramma 8100, relativo al calcolo del momento flettente agli estremi delle aste.

M) Stampa dei risultati.

Inalterato.

d. Codifica del programma.

Si riportano di seguito solo i blocchi variati rispetto alla impostazione di base, individuati mediante le lettere già utilizzate nel paragrafo 1.c.

A) Dimensionamento delle variabili.

```

100 MI=40 : MK=7 : ML=50 : MJ=20 'valori limite per gli indici degli array
110 OPTION BASE 1 ' estremo inferiore dell'indice degli array
120 DIM MR(MJ), IR(MJ), DL(MI-1), H(MK), NP(MI), DT(MJ)
130 DIM NT(MI-1, MK), NR(MI, MK), ZB(ML), ZH(ML), ZI(ML)
140 DIM WT(MI-1, MK), WR(MI, MK), WN(MI, MK), XG(MK), YG(MK), DG(MJ, MK), WX(MK),
    WY(MK), WF(MK)
150 DIM Q(MI-1, MK), MN(MI, MK), XF(MK), YF(MK), FX(MK), FY(MK), FM(MK)
160 DIM SM(MI, MK), QX(MK), QY(MK), QM(MK)
170 DIM FI(MI, MK), DX(MK), DY(MK), DF(MK), D(MJ, MK)
180 DIM MS(MI-1, MK), MD(MI-1, MK), MT(MI, MK), MP(MI, MK), TS(MI-1, MK),
    TD(MI-1, MK), TR(MI, MK), SN(MI, MK)
190 DIM RS(MI-1, MK), RD(MI-1, MK), RT(MI, MK), RP(MI, MK)
200 DIM AS(MI-1, MK), AD(MI-1, MK), AT(MI, MK), AP(MI, MK)
210 DIM BT(MI-1, MK), BR(MI, MK), CS(MI-1, MK), CD(MI-1, MK), CT(MI, MK), CP(MI, MK)
220 DIM ZS(MI-1, MK), ZD(MI-1, MK)

```

C) Lettura dei dati geometrici ed elastici.

```

1670 '
1680 ' --- legge modulo di elasticita'
1690 ' lo adatta alle unita' di misura interne
1700 READ EL, GG
1710 E=EL*10
1720 G=GG*10
1730 RETURN

1880 '
1890 ' --- legge tipi di sezione delle aste e lunghezza tratti rigidi
1900 ER=0
1910 '
1920 FOR K=1 TO KZ
1922   FOR J=1 TO JZ
1924     FOR I=IR(J)+1 TO IR(J)+MR(J)-1
1926       READ NT(I, K), RS(I, K), RD(I, K)
1928       IF NT(I, K)<1 OR NT(I, K)>LZ THEN PRINT "TIPO DI SEZIONE INACCET-
          TTABILE PER LA TRAVE"; I; K : ER=1
1930     NEXT I
1932   NEXT J
1934 NEXT K
1940 '
1950 FOR K=1 TO KZ
1952   FOR I=1 TO IZ
1954     READ NR(I, K), RP(I, K), RT(I, K)
1956     IF NR(I, K)<1 OR NR(I, K)>LZ THEN PRINT "TIPO DI SEZIONE INACCETTA-
          BILE PER IL RITTO"; I; K : ER=1
1958   NEXT I
1960 NEXT K
1965 '
1970 IF ER=1 THEN STOP
1975 RETURN

```

D) Stampa dei dati geometrici ed elastici.

91

Influenza di tratti rigidi e deformabilità a taglio nel calcolo dei telai spaziali

```

2380 '
2390 ' --- stampa luci e sezioni delle travi
2400 PRINT " LUCI E SEZIONI DELLE TRAVI"
2410 PRINT : PRINT " TELAIO CAMPATA PIANO LUCE TR. RIGIDO B
H INERZIA"
2420 PRINT " (M) (M) (M) (M) (M)
(M^4)"
2430 V=0 : V$="X"
2440 FOR J=1 TO JZ
2450 IF J=JX+1 THEN V=JX : V$="Y"
2460 FOR I=IR(J)+1 TO IR(J)+MR(J)-1
2470 PRINT
2480 FOR K=1 TO KZ
2490 L=NT(I,K)
2500 PRINT USING " ### ! ### -### ## #####.##"; J-V,V$,
NP(I),NP(I+1),K,DL(I);
2510 PRINT USING " ##.## ##.##"; RS(I,K),RD(I,K);
2520 PRINT USING " ##.## ##.## ###.#####"; ZB(L),ZH(L),ZI(L)
2530 NEXT K
2540 NEXT I
2550 NEXT J
2560 PRINT : PRINT : PRINT
2570 RETURN
2580 '
2590 ' --- stampa sezioni dei pilastri
2600 PRINT " SEZIONI DEI PILASTRI"
2610 PRINT : PRINT " TELAIO PILASTRO PIANO TR. RIGIDO B
H INERZIA"
2620 PRINT " (M) (M) (M) (M)
(M^4)"
2630 V=0 : V$="X"
2640 FOR J=1 TO JZ
2650 IF J=JX+1 THEN V=JX : V$="Y"
2660 FOR I=IR(J)+1 TO IR(J)+MR(J)
2670 PRINT
2680 FOR K=1 TO KZ
2690 L=NR(I,K)
2700 PRINT USING " ### ! ### ## "; J-V,V$,
NP(I),K;
2710 PRINT USING " ##.## ##.##"; RP(I,K),RT(I,K);
2720 PRINT USING " ##.## ##.## ###.#####"; ZB(L),ZH(L),ZI(L)
2730 NEXT K
2740 NEXT I
2750 NEXT J
2760 PRINT : PRINT : PRINT
2770 RETURN
2780 '
2790 ' --- stampa modulo di elasticita'
2800 PRINT " MODULO DI ELASTICITA' = ";EL;" KG/CM2"
2810 IF GG<>0 THEN PRINT " MODULO DI ELASTICITA' TANGENZIALE = ";GG;
" KG/CM2"
2820 RETURN

```

E) Elaborazione iniziale dei dati geometrici.

```

3080 '
3090 ' --- calcola gli indici di rigidezza di travi e pilastri
3100 FOR K=1 TO KZ
3105 FOR J=1 TO JZ
3110 FOR I=IR(J)+1 TO IR(J)+MR(J)-1
3115 L=NT(I,K)
3120 WT(I,K)=E*ZI(L)/DL(I)
3125 S=RS(I,K)/DL(I)
3130 T=RD(I,K)/DL(I)
3135 IF G=0 THEN EP=0 ELSE EP=.3*E/G*(ZH(L)/DL(I))^2

```

```

3140          GOSUB 3300 '                determina A,B,C,w'/w",Z
3145          AS(I,K)=A1
3150          AD(I,K)=A2
3155          BT(I,K)=B
3160          CS(I,K)=C1
3165          CD(I,K)=C2
3170          WT(I,K)=WW*WT(I,K)
3175          ZS(I,K)=Z1
3180          ZD(I,K)=Z2
3185          NEXT I
3190          NEXT J
3195          FOR I=1 TO IZ
3200              L=NR(I,K)
3205              WR(I,K)=E*ZI(L)/H(K)
3210              S=RP(I,K)/H(K)
3215              T=RT(I,K)/H(K)
3220              IF G=0 THEN EP=0 ELSE EP=.3*E/G*(ZH(L)/DL(I))^2
3225              GOSUB 3300 '                determina A,B,C,w'/w",Z
3230              AP(I,K)=A1
3235              AT(I,K)=A2
3240              BR(I,K)=B
3245              CP(I,K)=C1
3250              CT(I,K)=C2
3255              WR(I,K)=WW*WR(I,K)
3260          NEXT I
3265          NEXT K
3270          RETURN
3280 '
3290 ' --- determina coefficienti U, V, A, B, C, w'/w", Z
3300 U1=(1-S)^3-T^3+EP*(1-S-T)
3305 U2=(1-T)^3-S^3+EP*(1-S-T)
3310 V=1-3*(S^2+T^2)+2*(S^3+T^3)-2*EP*(1-S-T)
3315 V0=U1+U2+V
3320 A1=3*U2/V0
3325 A2=3*U1/V0
3330 B=3*V/V0
3335 C1=(2*U2+V)/V0
3340 C2=(2*U1+V)/V0
3345 WW=V0/(4*U1*U2-V^2)
3350 Z0=1-S-T
3355 Z1=Z0^2+6*S*Z0+6*S^2
3360 Z2=Z0^2+6*T*Z0+6*T^2
3365          RETURN
3380 '
3390 ' --- calcola la somma degli indici di rigidezza delle aste nei nodi
3400          FOR K=1 TO KZ
3410              I=0
3420              FOR J=1 TO JZ
3430                  FOR M=1 TO MR(J)
3440                      I=I+1
3450                      S=AT(I,K)*WR(I,K)
3460                      IF M>1 THEN S=S+AD(I-1,K)*WT(I-1,K)
3470                      IF M<MR(J) THEN S=S+AS(I,K)*WT(I,K)
3480                      IF K<KZ THEN S=S+AP(I,K+1)*WR(I,K+1)
3490                      WN(I,K)=S
3500                  NEXT M
3510              NEXT J
3520          NEXT K
3530          RETURN

```

H) Elaborazione iniziale dei dati relativi ai carichi.

```

6080 '
6090 ' --- calcola somma momenti d'incastro perfetto e momenti nei nodi
6100          FOR K=1 TO KZ
6110              I=0
6120              FOR J=1 TO JZ

```

```

6130     SM(I+1,K)=MN(I+1,K)
6140     FOR M=1 TO MR(J)-1
6150         I=I+1
6160         V=Q(I,K)*DL(I)^2/12
6170         SM(I,K)=SM(I,K)+V*ZS(I,K)
6180         SM(I+1,K)=MN(I+1,K)-V*ZD(I,K)
6190     NEXT M
6200     I=I+1
6210     NEXT J
6220     NEXT K
6230     RETURN

```

I) Risoluzione iterativa del sistema.

```

7380 '
7390 ' --- operazione di nodo per il nodo I,K
7400 IF WN(I,K)=0 THEN RETURN
7410 S=SM(I,K)+6*CT(I,K)*WR(I,K)*D(J,K)/H(K)
7420 IF K>1 THEN S=S-2*BR(I,K)*WR(I,K)*FI(I,K-1)
7430 IF K<KZ THEN S=S+6*CP(I,K+1)*WR(I,K+1)*D(J,K+1)/H(K+1)-2*BR(I,K+1)*
    WR(I,K+1)*FI(I,K+1)
7440 IF M>1 THEN S=S-2*BT(I-1,K)*WT(I-1,K)*FI(I-1,K)
7450 IF M<MR(J) THEN S=S-2*BT(I,K)*WT(I,K)*FI(I+1,K)
7460 IF ABS(S-4*WN(I,K)*FI(I,K))<.0005 THEN RETURN
7470 FI(I,K)=S/4/WN(I,K)
7480 SQ=1
7490 RETURN

7780 '
7790 ' -- somma
7800 S1=0
7810 FOR J=J1 TO J2
7820     S=0
7830     FOR I=IR(J)+1 TO IR(J)+MR(J)
7840         V=CT(I,K)*FI(I,K)
7850         IF K>1 THEN V=V+CP(I,K)*FI(I,K-1)
7860         S=S+V*WR(I,K)
7870     NEXT I
7880     S1=S1+S
7890     S2=S2+S*DG(J,K)
7900 NEXT J
7910 RETURN

```

L) Calcolo delle caratteristiche di sollecitazione.

```

8080 '
8090 ' --- calcola momento flettente
8100 FOR K=1 TO KZ
8110     FOR J=1 TO JZ
8120         FOR I=IR(J)+1 TO IR(J)+MR(J)-1
8130             V=Q(I,K)*DL(I)^2/12
8140             MS(I,K)=(4*AS(I,K)*FI(I,K)+2*BT(I,K)*FI(I+1,K))*WT(I,K)-V
8150             MD(I,K)=-((2*BT(I,K)*FI(I,K)+4*AD(I,K)*FI(I+1,K))*WT(I,K)+V)
8160         NEXT I
8170         FOR I=IR(J)+1 TO IR(J)+MR(J)
8180             IF K>1 THEN V=FI(I,K-1) ELSE V=0
8190             MT(I,K)=-((4*AT(I,K)*FI(I,K)+2*BR(I,K)*V-6*CT(I,K)*D(J,K)/
                H(K))*WR(I,K))
8200             MP(I,K)=(2*BR(I,K)*FI(I,K)+4*AP(I,K)*V-6*CP(I,K)*D(J,K)/
                H(K))*WR(I,K)
8210         NEXT I
8220     NEXT J
8230 NEXT K
8240 RETURN

```

e. Modalità di utilizzazione.

Il programma descritto nel presente capitolo è una estensione della versione base illustrata in appendice al capitolo 1. Le scelte generali, relative al tipo di istruzioni di lettura dati (READ e DATA), ai valori da fornire, all'istruzione di output (PRINT), sono già state discusse nel paragrafo 1.e. Le uniche aggiunte a quanto ivi indicato sono costituite dai valori legati alle generalizzazioni introdotte: ampiezza dei tratti rigidi e modulo di elasticità tangenziale. Si riporta comunque, per maggior chiarezza, l'elenco completo dei valori da assegnare.

Il programma è stato organizzato in maniera tale da consentire la risoluzione di uno schema geometrico soggetto a più condizioni di carico. I dati vanno pertanto disposti col seguente ordine:

- Gruppo di dati che descrivono la geometria dello schema.
- Gruppo di dati che descrivono la prima condizione di carico.
- Gruppo di dati che descrivono la seconda condizione di carico.

.....

- Gruppo di dati che descrivono l'ultima condizione di carico.
- 0,0,0 (valori che indicano al calcolatore che non vi sono altre condizioni di carico).

Il gruppo di dati che descrive la geometria dello schema deve rispettare l'ordine di seguito riportato. I valori forniti devono essere conformi alle unità di misura indicate tra parentesi.

- Numero di telai paralleli all'asse x.
- Numero di telai paralleli all'asse y.
- Numero di piani.
- Numero di tipi di sezione.
- Altezza dei piani, dal basso verso l'alto (m).
- Distanza dei telai dall'asse cui sono paralleli (m).
- Numerazione dei pilastri in carpenteria; dopo l'ultimo pilastro di ciascun telaio occorre aggiungere uno 0, che indica al calcolatore la fine dell'insieme di pilastri di quel telaio.
- Luce delle campate (m).
- Modulo di elasticità normale E del materiale (kg cm^{-2}).
- Modulo di elasticità tangenziale G del materiale (kg cm^{-2}); se non si vuole tener conto della deformabilità a taglio delle aste, occorre assegnare a G il valore 0.
- Tipi di sezione delle aste; per ogni tipo occorre indicare prima la base e poi l'altezza (m).
- Per ogni impalcato, dal basso verso l'alto: travi dell'impalcato - tipo di sezione, ampiezza del tratto rigido all'estremo sinistro e all'estremo destro di ciascuna campata.
- Per ogni impalcato, dal basso verso l'alto: pilastri dell'interpiano - tipo di sezione, ampiezza del tratto rigido al piede e in testa di ciascun ritto.

Il gruppo di dati che descrive la singola condizione di carico deve rispettare l'ordine e le unità di misura di seguito indicati.

- Indice di esistenza dei carichi verticali sulle travi (0 = no, 1 = si).
- Indice di esistenza dei momenti concentrati nei nodi (0 = no, 1 = si).
- Indice di esistenza dei carichi orizzontali (0 = no, 1 = si).
- Se il primo indice è 1 - per ogni impalcato, dal basso verso l'alto: carico verticale su ciascuna campata (t/m).
- Se il secondo indice è 1 - per ogni impalcato, dal basso verso l'alto: momento concentrato in ciascun nodo (tm).
- Se il terzo indice è 1 - per ogni impalcato, dal basso verso l'alto: ascissa e ordinata del punto di applicazione della forza di piano (m); componenti in direzione x e y della forza di piano (t); momento esterno di piano (tm).

f. Primo esempio - aste con tratti rigidi all'estremità.

Il programma è stato utilizzato per la risoluzione dello schema intelaiato a tre piani, già analizzato nel paragrafo 2.5.4. Si riportano di seguito le linee di programma contenenti i dati e, nelle pagine successive, i risultati ottenuti.

```

10000 ' ----- spazio per i dati
10010 DATA 3,3,3,8
10020 DATA 3,3,3
10030 DATA 0,3,7,0,3.5,8.5
10040 DATA 1,2,3,0,4,5,6,0,7,8,9,0,1,4,7,0,2,5,8,0,3,6,9,0
10050 DATA 3.5,5,3.5,5,3.5,5,3,4,3,4,3,4
10060 DATA 250000,0
10070 DATA 0,0,.9,.2,.3,.5,.3,.3,.3,.5,.5,.3,.3,.4,.4,.3
10080 DATA 3,.35,.35,3,.15,.35,2,.15,.15,2,.15,.15,3,.15,.15,3,.15,.15,
3,.15,.15,3,.15,.15,3,.15,.15,3,.15,.15,3,.15,.15,3,.15,.15
10090 DATA 3,.25,.25,1,0,0,2,.15,.15,3,.15,.15,3,.15,.15,3,.15,.15,
3,.15,.15,3,.15,.15,3,.15,.15,3,.15,.15,1,0,0,3,.15,.15
10100 DATA 1,0,0,1,0,0,3,.15,.15,1,0,0,3,.15,.15,1,0,0,1,0,0,3,.15,.15,
1,0,0,3,.15,.15,1,0,0,1,0,0
10110 DATA 5,0,.40,5,0,.40,5,0,.40,4,0,.10,4,0,.10,4,0,.10,4,0,.40,
4,0,.40,4,0,.40
10115 DATA 6,0,.40,4,0,.40,4,0,.40,6,0,.40,4,0,.40,4,0,.40,6,0,.40,
4,0,.40,4,0,.40
10120 DATA 7,.10,.40,7,.10,.40,1,0,0,4,.10,.10,4,.10,.40,4,.10,.40,
4,.10,.40,4,.10,.40,4,.10,.40
10125 DATA 8,.10,.40,4,.10,.40,4,.10,.40,8,.10,.40,4,.10,.40,4,.10,.40,
1,0,0,4,.10,.40,4,.10,.40
10130 DATA 1,0,0,1,0,0,1,0,0,4,.10,.40,4,.10,.40,1,0,0,4,.10,.40,4,.10,.40,
1,0,0
10135 DATA 1,0,0,4,.10,.40,4,.10,.40,1,0,0,4,.10,.40,4,.10,.40,1,0,0,1,0,0,
1,0,0
10140 DATA 0,0,1
10150 DATA 4.25,3.5,3.5,0,0,3.8,4.2,5,0,0,1.75,5,2,0,0
10160 DATA 0,0,0

```

ALTEZZA DEI PIANI

PIANO	ALTEZZA (M)
1	3.00
2	3.00
3	3.00

POSIZIONE DEI TELAI

TELAIO	DISTANZA DALL'ASSE (M)
1 X	0.00
2 X	3.00
3 X	7.00
1 Y	0.00
2 Y	3.50
3 Y	8.50

LUCI E SEZIONI DELLE TRAVI

TELAIO	CAMPATA	PIANO	LUCE (M)	TR. RIGIDO (M)	RIGIDO (M)	B (M)	H (M)	INERZIA (M ⁴)
1 X	1 - 2	1	3.50	0.00	0.00	0.30	0.50	0.003125
1 X	1 - 2	2	3.50	0.00	0.00	0.30	0.50	0.003125
1 X	1 - 2	3	3.50	0.00	0.00	0.00	0.00	0.000000
1 X	2 - 3	1	5.00	0.00	0.00	0.30	0.50	0.003125
1 X	2 - 3	2	5.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.000000
1 X	2 - 3	3	5.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.000000
2 X	4 - 5	1	3.50	0.00	0.00	0.90	0.20	0.000600
2 X	4 - 5	2	3.50	0.00	0.00	0.90	0.20	0.000600
2 X	4 - 5	3	3.50	0.00	0.00	0.30	0.50	0.003125
2 X	5 - 6	1	5.00	0.00	0.00	0.90	0.20	0.000600
2 X	5 - 6	2	5.00	0.00	0.00	0.30	0.50	0.003125
2 X	5 - 6	3	5.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.000000
3 X	7 - 8	1	3.50	0.00	0.00	0.30	0.50	0.003125
3 X	7 - 8	2	3.50	0.00	0.00	0.30	0.50	0.003125
3 X	7 - 8	3	3.50	0.00	0.00	0.30	0.50	0.003125
3 X	8 - 9	1	5.00	0.00	0.00	0.30	0.50	0.003125
3 X	8 - 9	2	5.00	0.00	0.00	0.30	0.50	0.003125
3 X	8 - 9	3	5.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.000000
1 Y	1 - 4	1	3.00	0.00	0.00	0.30	0.50	0.003125
1 Y	1 - 4	2	3.00	0.00	0.00	0.30	0.50	0.003125
1 Y	1 - 4	3	3.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.000000
1 Y	4 - 7	1	4.00	0.00	0.00	0.30	0.50	0.003125
1 Y	4 - 7	2	4.00	0.00	0.00	0.30	0.50	0.003125
1 Y	4 - 7	3	4.00	0.00	0.00	0.30	0.50	0.003125

Influenza di tratti rigidi e deformabilità a taglio nel calcolo dei telai spaziali

2 Y	2 - 5	1	3.00	0.00	0.00	0.30	0.50	0.003125
2 Y	2 - 5	2	3.00	0.00	0.00	0.30	0.50	0.003125
2 Y	2 - 5	3	3.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.000000
2 Y	5 - 8	1	4.00	0.00	0.00	0.30	0.50	0.003125
2 Y	5 - 8	2	4.00	0.00	0.00	0.30	0.50	0.003125
2 Y	5 - 8	3	4.00	0.00	0.00	0.30	0.50	0.003125
3 Y	3 - 6	1	3.00	0.00	0.00	0.30	0.50	0.003125
3 Y	3 - 6	2	3.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.000000
3 Y	3 - 6	3	3.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.000000
3 Y	6 - 9	1	4.00	0.00	0.00	0.30	0.50	0.003125
3 Y	6 - 9	2	4.00	0.00	0.00	0.30	0.50	0.003125
3 Y	6 - 9	3	4.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.000000

SEZIONI DEI PILASTRI

TELAIO	PILASTRO PIANO		TR. RIGIDO (M)	RIGIDO (M)	B (M)	H (M)	INERZIA (M ⁴)
1 X	1	1	0.00	0.00	0.30	0.50	0.003125
1 X	1	2	0.00	0.00	0.30	0.40	0.001600
1 X	1	3	0.00	0.00	0.00	0.00	0.000000
1 X	2	1	0.00	0.00	0.30	0.50	0.003125
1 X	2	2	0.00	0.00	0.30	0.40	0.001600
1 X	2	3	0.00	0.00	0.00	0.00	0.000000
1 X	3	1	0.00	0.00	0.30	0.50	0.003125
1 X	3	2	0.00	0.00	0.00	0.00	0.000000
1 X	3	3	0.00	0.00	0.00	0.00	0.000000
2 X	4	1	0.00	0.00	0.30	0.30	0.000675
2 X	4	2	0.00	0.00	0.30	0.30	0.000675
2 X	4	3	0.00	0.00	0.30	0.30	0.000675
2 X	5	1	0.00	0.00	0.30	0.30	0.000675
2 X	5	2	0.00	0.00	0.30	0.30	0.000675
2 X	5	3	0.00	0.00	0.30	0.30	0.000675
2 X	6	1	0.00	0.00	0.30	0.30	0.000675
2 X	6	2	0.00	0.00	0.30	0.30	0.000675
2 X	6	3	0.00	0.00	0.00	0.00	0.000000
3 X	7	1	0.00	0.00	0.30	0.30	0.000675
3 X	7	2	0.00	0.00	0.30	0.30	0.000675
3 X	7	3	0.00	0.00	0.30	0.30	0.000675
3 X	8	1	0.00	0.00	0.30	0.30	0.000675
3 X	8	2	0.00	0.00	0.30	0.30	0.000675
3 X	8	3	0.00	0.00	0.30	0.30	0.000675
3 X	9	1	0.00	0.00	0.30	0.30	0.000675
3 X	9	2	0.00	0.00	0.30	0.30	0.000675
3 X	9	3	0.00	0.00	0.00	0.00	0.000000

Capitolo secondo

1 Y	1	1	0.00	0.40	0.50	0.30	0.001125
1 Y	1	2	0.10	0.40	0.40	0.30	0.000900
1 Y	1	3	0.00	0.00	0.00	0.00	0.000000
1 Y	4	1	0.00	0.40	0.30	0.30	0.000675
1 Y	4	2	0.10	0.40	0.30	0.30	0.000675
1 Y	4	3	0.10	0.40	0.30	0.30	0.000675
1 Y	7	1	0.00	0.40	0.30	0.30	0.000675
1 Y	7	2	0.10	0.40	0.30	0.30	0.000675
1 Y	7	3	0.10	0.40	0.30	0.30	0.000675
2 Y	2	1	0.00	0.40	0.50	0.30	0.001125
2 Y	2	2	0.10	0.40	0.40	0.30	0.000900
2 Y	2	3	0.00	0.00	0.00	0.00	0.000000
2 Y	5	1	0.00	0.40	0.30	0.30	0.000675
2 Y	5	2	0.10	0.40	0.30	0.30	0.000675
2 Y	5	3	0.10	0.40	0.30	0.30	0.000675
2 Y	8	1	0.00	0.40	0.30	0.30	0.000675
2 Y	8	2	0.10	0.40	0.30	0.30	0.000675
2 Y	8	3	0.10	0.40	0.30	0.30	0.000675
3 Y	3	1	0.00	0.40	0.50	0.30	0.001125
3 Y	3	2	0.00	0.00	0.00	0.00	0.000000
3 Y	3	3	0.00	0.00	0.00	0.00	0.000000
3 Y	6	1	0.00	0.40	0.30	0.30	0.000675
3 Y	6	2	0.10	0.40	0.30	0.30	0.000675
3 Y	6	3	0.00	0.00	0.00	0.00	0.000000
3 Y	9	1	0.00	0.40	0.30	0.30	0.000675
3 Y	9	2	0.10	0.40	0.30	0.30	0.000675
3 Y	9	3	0.00	0.00	0.00	0.00	0.000000

MODULO DI ELASTICITA' = 250000 KG/CM2

CARICHI

FORZE ORIZZONTALI

PIANO	X (M)	Y (M)	FX (T)	FY (T)	M (TM)
1	4.25	3.50	3.50	0.00	0.00
2	3.80	4.20	5.00	0.00	0.00
3	1.75	5.00	2.00	0.00	0.00

RISULTATI

SPOSTAMENTO DEGLI IMPALCATI

TELAIO	IMPALCATO	SPOSTAMENTO (MM)
1 X	1	0.616
1 X	2	1.397
1 X	3	2.140
2 X	1	0.957
2 X	2	1.956
2 X	3	2.658
3 X	1	1.412
3 X	2	2.701
3 X	3	3.350
1 Y	1	0.456
1 Y	2	0.709
1 Y	3	0.696
2 Y	1	0.057
2 Y	2	0.057
2 Y	3	0.091
3 Y	1	-0.511
3 Y	2	-0.874
3 Y	3	-0.774

CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE NELLE TRAVI

TELAIO	CAMPATA	PIANO	MOMENTO A SINISTRA (TM)	MOMENTO A DESTRA (TM)	TAGLIO A SINISTRA (T)	TAGLIO A DESTRA (T)
1 X	1 - 2	1	3.91	-3.58	-2.14	-2.14
1 X	1 - 2	2	2.13	-2.24	-1.25	-1.25
1 X	1 - 2	3	0.00	0.00	0.00	0.00
1 X	2 - 3	1	1.74	-2.15	-0.78	-0.78
1 X	2 - 3	2	0.00	0.00	0.00	0.00
1 X	2 - 3	3	0.00	0.00	0.00	0.00
2 X	4 - 5	1	0.85	-0.81	-0.47	-0.47
2 X	4 - 5	2	0.70	-0.58	-0.37	-0.37
2 X	4 - 5	3	0.80	-0.95	-0.50	-0.50
2 X	5 - 6	1	0.61	-0.70	-0.26	-0.26
2 X	5 - 6	2	1.21	-1.01	-0.44	-0.44
2 X	5 - 6	3	0.00	0.00	0.00	0.00
3 X	7 - 8	1	3.09	-2.41	-1.57	-1.57
3 X	7 - 8	2	2.19	-1.83	-1.15	-1.15
3 X	7 - 8	3	0.87	-0.96	-0.52	-0.52

3 X	8 - 9	1	1.84	-2.56	-0.88	-0.88
3 X	8 - 9	2	1.18	-1.44	-0.52	-0.52
3 X	8 - 9	3	0.00	0.00	0.00	0.00
1 Y	1 - 4	1	1.16	-0.76	-0.64	-0.64
1 Y	1 - 4	2	0.36	-0.28	-0.21	-0.21
1 Y	1 - 4	3	0.00	0.00	0.00	0.00
1 Y	4 - 7	1	0.49	-0.77	-0.31	-0.31
1 Y	4 - 7	2	0.17	-0.22	-0.10	-0.10
1 Y	4 - 7	3	-0.04	0.05	0.02	0.02
2 Y	2 - 5	1	0.11	-0.07	-0.06	-0.06
2 Y	2 - 5	2	-0.01	-0.01	0.00	0.00
2 Y	2 - 5	3	0.00	0.00	0.00	0.00
2 Y	5 - 8	1	0.04	-0.06	-0.03	-0.03
2 Y	5 - 8	2	0.03	-0.02	-0.01	-0.01
2 Y	5 - 8	3	0.05	-0.05	-0.03	-0.03
3 Y	3 - 6	1	-1.16	0.81	0.66	0.66
3 Y	3 - 6	2	0.00	0.00	0.00	0.00
3 Y	3 - 6	3	0.00	0.00	0.00	0.00
3 Y	6 - 9	1	-0.62	0.94	0.39	0.39
3 Y	6 - 9	2	-0.55	0.47	0.26	0.26
3 Y	6 - 9	3	0.00	0.00	0.00	0.00

CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE NEI PILASTRI

TELAIO	PILASTRO	PIANO	MOMENTO SUP. (TM)	MOMENTO INF. (TM)	TAGLIO (T)	SFORZO NORMALE (T)
1 X	1	1	2.40	-2.75	1.72	3.39
1 X	1	2	2.13	-1.51	1.22	1.25
1 X	1	3	0.00	0.00	0.00	0.00
1 X	2	1	3.49	-3.27	2.25	-2.61
1 X	2	2	2.24	-1.83	1.36	-1.25
1 X	2	3	0.00	0.00	0.00	0.00
1 X	3	1	2.15	-2.63	1.59	-0.78
1 X	3	2	0.00	0.00	0.00	0.00
1 X	3	3	0.00	0.00	0.00	0.00
2 X	4	1	0.55	-0.81	0.45	1.34
2 X	4	2	0.31	-0.30	0.20	0.86
2 X	4	3	0.80	-0.38	0.39	0.50
2 X	5	1	0.65	-0.86	0.50	-0.63
2 X	5	2	1.10	-0.77	0.62	-0.42
2 X	5	3	0.95	-0.70	0.55	-0.50
2 X	6	1	0.26	-0.67	0.31	-0.71
2 X	6	2	1.01	-0.45	0.49	-0.44
2 X	6	3	0.00	0.00	0.00	0.00

Influenza di tratti rigidi e deformabilità a taglio nel calcolo dei telai spaziali

3 X	7	1	1.86	-1.68	1.18	3.24
3 X	7	2	1.61	-1.23	0.95	1.67
3 X	7	3	0.87	-0.58	0.48	0.52
3 X	8	1	2.42	-1.95	1.46	-1.84
3 X	8	2	2.24	-1.82	1.35	-1.15
3 X	8	3	0.96	-0.77	0.58	-0.52
3 X	9	1	1.56	-1.54	1.03	-1.40
3 X	9	2	1.44	-0.99	0.81	-0.52
3 X	9	3	0.00	0.00	0.00	0.00
1 Y	1	1	0.96	-0.89	0.61	0.85
1 Y	1	2	0.36	-0.20	0.19	0.21
1 Y	1	3	0.00	0.00	0.00	0.00
1 Y	4	1	0.85	-0.66	0.51	-0.46
1 Y	4	2	0.49	-0.40	0.30	-0.14
1 Y	4	3	-0.04	0.04	-0.03	-0.02
1 Y	7	1	0.59	-0.54	0.38	-0.39
1 Y	7	2	0.29	-0.17	0.16	-0.08
1 Y	7	3	-0.05	0.07	-0.04	0.02
2 Y	2	1	0.14	-0.12	0.08	0.06
2 Y	2	2	-0.01	0.03	-0.01	-0.00
2 Y	2	3	0.00	0.00	0.00	0.00
2 Y	5	1	0.11	-0.09	0.07	0.01
2 Y	5	2	-0.01	0.01	-0.01	0.04
2 Y	5	3	0.05	-0.05	0.03	0.03
2 Y	8	1	0.09	-0.07	0.05	-0.06
2 Y	8	2	-0.02	0.02	-0.01	-0.04
2 Y	8	3	0.05	-0.05	0.03	-0.03
3 Y	3	1	-1.16	1.03	-0.73	-0.66
3 Y	3	2	0.00	0.00	0.00	0.00
3 Y	3	3	0.00	0.00	0.00	0.00
3 Y	6	1	-0.94	0.74	-0.56	0.01
3 Y	6	2	-0.55	0.49	-0.35	-0.26
3 Y	6	3	0.00	0.00	0.00	0.00
3 Y	9	1	-0.64	0.59	-0.41	0.65
3 Y	9	2	-0.47	0.30	-0.26	0.26
3 Y	9	3	0.00	0.00	0.00	0.00

L'effettivo sforzo normale in ciascun pilastro si ottiene sommando il suo peso proprio, lo scarico dei telai ortogonali e gli eventuali carichi concentrati.

ALTEZZA DEI PIANI

PIANO	ALTEZZA (M)
1	3.00
2	3.00
3	3.00

POSIZIONE DEI TELAI

TELAIO	DISTANZA DALL'ASSE (M)
1 X	0.00
2 X	3.00
3 X	7.00
1 Y	0.00
2 Y	3.50
3 Y	8.50

LUCI E SEZIONI DELLE TRAVI

TELAIO	CAMPATA	PIANO	LUCE (M)	B (M)	H (M)	INERZIA (M ⁴)
1 X	1 - 2	1	3.50	0.30	0.50	0.003125
1 X	1 - 2	2	3.50	0.30	0.50	0.003125
1 X	1 - 2	3	3.50	0.00	0.00	0.000000
1 X	2 - 3	1	5.00	0.30	0.50	0.003125
1 X	2 - 3	2	5.00	0.00	0.00	0.000000
1 X	2 - 3	3	5.00	0.00	0.00	0.000000
2 X	4 - 5	1	3.50	0.90	0.20	0.000600
2 X	4 - 5	2	3.50	0.90	0.20	0.000600
2 X	4 - 5	3	3.50	0.30	0.50	0.003125
2 X	5 - 6	1	5.00	0.90	0.20	0.000600
2 X	5 - 6	2	5.00	0.30	0.50	0.003125
2 X	5 - 6	3	5.00	0.00	0.00	0.000000
3 X	7 - 8	1	3.50	0.30	0.50	0.003125
3 X	7 - 8	2	3.50	0.30	0.50	0.003125
3 X	7 - 8	3	3.50	0.30	0.50	0.003125
3 X	8 - 9	1	5.00	0.30	0.50	0.003125
3 X	8 - 9	2	5.00	0.30	0.50	0.003125
3 X	8 - 9	3	5.00	0.00	0.00	0.000000
1 Y	1 - 4	1	3.00	0.30	0.50	0.003125
1 Y	1 - 4	2	3.00	0.30	0.50	0.003125
1 Y	1 - 4	3	3.00	0.00	0.00	0.000000
1 Y	4 - 7	1	4.00	0.30	0.50	0.003125
1 Y	4 - 7	2	4.00	0.30	0.50	0.003125
1 Y	4 - 7	3	4.00	0.30	0.50	0.003125

Capitolo secondo

2 Y	2 - 5	1	3.00	0.30	0.50	0.003125
2 Y	2 - 5	2	3.00	0.30	0.50	0.003125
2 Y	2 - 5	3	3.00	0.00	0.00	0.000000
2 Y	5 - 8	1	4.00	0.30	0.50	0.003125
2 Y	5 - 8	2	4.00	0.30	0.50	0.003125
2 Y	5 - 8	3	4.00	0.30	0.50	0.003125
3 Y	3 - 6	1	3.00	0.30	0.50	0.003125
3 Y	3 - 6	2	3.00	0.00	0.00	0.000000
3 Y	3 - 6	3	3.00	0.00	0.00	0.000000
3 Y	6 - 9	1	4.00	0.30	0.50	0.003125
3 Y	6 - 9	2	4.00	0.30	0.50	0.003125
3 Y	6 - 9	3	4.00	0.00	0.00	0.000000

SEZIONI DEI PILASTRI

TELAIO	PILASTRO	PIANO	B (M)	H (M)	INERZIA (M ⁴)
1 X	1	1	0.30	0.50	0.003125
1 X	1	2	0.30	0.40	0.001600
1 X	1	3	0.00	0.00	0.000000
1 X	2	1	0.30	0.50	0.003125
1 X	2	2	0.30	0.40	0.001600
1 X	2	3	0.00	0.00	0.000000
1 X	3	1	0.30	0.50	0.003125
1 X	3	2	0.00	0.00	0.000000
1 X	3	3	0.00	0.00	0.000000
2 X	4	1	0.30	0.30	0.000675
2 X	4	2	0.30	0.30	0.000675
2 X	4	3	0.30	0.30	0.000675
2 X	5	1	0.30	0.30	0.000675
2 X	5	2	0.30	0.30	0.000675
2 X	5	3	0.30	0.30	0.000675
2 X	6	1	0.30	0.30	0.000675
2 X	6	2	0.30	0.30	0.000675
2 X	6	3	0.00	0.00	0.000000
3 X	7	1	0.30	0.30	0.000675
3 X	7	2	0.30	0.30	0.000675
3 X	7	3	0.30	0.30	0.000675
3 X	8	1	0.30	0.30	0.000675
3 X	8	2	0.30	0.30	0.000675
3 X	8	3	0.30	0.30	0.000675
3 X	9	1	0.30	0.30	0.000675
3 X	9	2	0.30	0.30	0.000675
3 X	9	3	0.00	0.00	0.000000

Influenza di tratti rigidi e
deformabilità a taglio nel
calcolo dei telai spaziali

1 Y	1	1	0.00	0.00	0.50	0.30	0.001125
1 Y	1	2	0.00	0.00	0.40	0.30	0.000900
1 Y	1	3	0.00	0.00	0.00	0.00	0.000000
1 Y	4	1	0.00	0.00	0.30	0.30	0.000675
1 Y	4	2	0.00	0.00	0.30	0.30	0.000675
1 Y	4	3	0.00	0.00	0.30	0.30	0.000675
1 Y	7	1	0.00	0.00	0.30	0.30	0.000675
1 Y	7	2	0.00	0.00	0.30	0.30	0.000675
1 Y	7	3	0.00	0.00	0.30	0.30	0.000675
2 Y	2	1	0.00	0.00	0.50	0.30	0.001125
2 Y	2	2	0.00	0.00	0.40	0.30	0.000900
2 Y	2	3	0.00	0.00	0.00	0.00	0.000000
2 Y	5	1	0.00	0.00	0.30	0.30	0.000675
2 Y	5	2	0.00	0.00	0.30	0.30	0.000675
2 Y	5	3	0.00	0.00	0.30	0.30	0.000675
2 Y	8	1	0.00	0.00	0.30	0.30	0.000675
2 Y	8	2	0.00	0.00	0.30	0.30	0.000675
2 Y	8	3	0.00	0.00	0.30	0.30	0.000675
3 Y	3	1	0.00	0.00	0.50	0.30	0.001125
3 Y	3	2	0.00	0.00	0.00	0.00	0.000000
3 Y	3	3	0.00	0.00	0.00	0.00	0.000000
3 Y	6	1	0.00	0.00	0.30	0.30	0.000675
3 Y	6	2	0.00	0.00	0.30	0.30	0.000675
3 Y	6	3	0.00	0.00	0.00	0.00	0.000000
3 Y	9	1	0.00	0.00	0.30	0.30	0.000675
3 Y	9	2	0.00	0.00	0.30	0.30	0.000675
3 Y	9	3	0.00	0.00	0.00	0.00	0.000000

MODULO DI ELASTICITA' = 250000 KG/CM2
MODULO DI ELASTICITA' TANGENZIALE = 112500 KG/CM2

CARICHI

FORZE ORIZZONTALI

PIANO	X (M)	Y (M)	FX (T)	FY (T)	M (TM)
1	4.25	3.50	3.50	0.00	0.00
2	3.80	4.20	5.00	0.00	0.00
3	1.75	5.00	2.00	0.00	0.00

RISULTATI

SPOSTAMENTO DEGLI IMPALCATI

TELAIO	IMPALCATO	SPOSTAMENTO (MM)
1 X	1	0.893
1 X	2	2.186
1 X	3	3.421
2 X	1	1.379
2 X	2	2.997
2 X	3	4.152
3 X	1	2.026
3 X	2	4.077
3 X	3	5.126
1 Y	1	0.649
1 Y	2	1.027
1 Y	3	0.995
2 Y	1	0.082
2 Y	2	0.082
2 Y	3	0.142
3 Y	1	-0.727
3 Y	2	-1.269
3 Y	3	-1.076

CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE NELLE TRAVI

TELAIO	CAMPATA	PIANO	MOMENTO A SINISTRA (TM)	MOMENTO A DESTRA (TM)	TAGLIO A SINISTRA (T)	TAGLIO A DESTRA (T)
1 X	1 - 2	1	3.12	-2.69	-1.66	-1.66
1 X	1 - 2	2	1.88	-1.99	-1.11	-1.11
1 X	1 - 2	3	0.00	0.00	0.00	0.00
1 X	2 - 3	1	1.82	-1.99	-0.76	-0.76
1 X	2 - 3	2	0.00	0.00	0.00	0.00
1 X	2 - 3	3	0.00	0.00	0.00	0.00
2 X	4 - 5	1	1.00	-0.92	-0.55	-0.55
2 X	4 - 5	2	0.81	-0.61	-0.40	-0.40
2 X	4 - 5	3	0.74	-0.91	-0.47	-0.47
2 X	5 - 6	1	0.72	-0.84	-0.31	-0.31
2 X	5 - 6	2	1.26	-1.01	-0.45	-0.45
2 X	5 - 6	3	0.00	0.00	0.00	0.00
3 X	7 - 8	1	2.95	-2.12	-1.45	-1.45
3 X	7 - 8	2	2.12	-1.64	-1.08	-1.08
3 X	7 - 8	3	0.80	-0.88	-0.48	-0.48

Influenza di tratti rigidi e
deformabilità a taglio nel
calcolo dei telai spaziali

3 X	8 - 9	1	1.78	-2.61	-0.88	-0.88
3 X	8 - 9	2	1.14	-1.43	-0.51	-0.51
3 X	8 - 9	3	0.00	0.00	0.00	0.00
1 Y	1 - 4	1	1.04	-0.61	-0.55	-0.55
1 Y	1 - 4	2	0.32	-0.20	-0.18	-0.18
1 Y	1 - 4	3	0.00	0.00	0.00	0.00
1 Y	4 - 7	1	0.44	-0.72	-0.29	-0.29
1 Y	4 - 7	2	0.13	-0.19	-0.08	-0.08
1 Y	4 - 7	3	-0.04	0.05	0.02	0.02
2 Y	2 - 5	1	0.09	-0.05	-0.05	-0.05
2 Y	2 - 5	2	-0.01	-0.02	-0.00	-0.00
2 Y	2 - 5	3	0.00	0.00	0.00	0.00
2 Y	5 - 8	1	0.03	-0.06	-0.02	-0.02
2 Y	5 - 8	2	0.03	-0.04	-0.02	-0.02
2 Y	5 - 8	3	0.05	-0.05	-0.03	-0.03
3 Y	3 - 6	1	-1.00	0.66	0.55	0.55
3 Y	3 - 6	2	0.00	0.00	0.00	0.00
3 Y	3 - 6	3	0.00	0.00	0.00	0.00
3 Y	6 - 9	1	-0.57	0.89	0.37	0.37
3 Y	6 - 9	2	-0.47	0.41	0.22	0.22
3 Y	6 - 9	3	0.00	0.00	0.00	0.00

CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE NEI PILASTRI

TELAIO	PILASTRO	PIANO	MOMENTO SUP. (TM)	MOMENTO INF. (TM)	TAGLIO (T)	SFORZO NORMALE (T)
1 X	1	1	1.60	-3.04	1.55	2.77
1 X	1	2	1.88	-1.52	1.13	1.11
1 X	1	3	0.00	0.00	0.00	0.00
1 X	2	1	2.55	-3.49	2.01	-2.00
1 X	2	2	1.99	-1.95	1.32	-1.11
1 X	2	3	0.00	0.00	0.00	0.00
1 X	3	1	1.99	-3.22	1.74	-0.76
1 X	3	2	0.00	0.00	0.00	0.00
1 X	3	3	0.00	0.00	0.00	0.00
2 X	4	1	0.58	-1.05	0.55	1.42
2 X	4	2	0.45	-0.42	0.29	0.87
2 X	4	3	0.74	-0.35	0.36	0.47
2 X	5	1	0.78	-1.15	0.64	-0.66
2 X	5	2	1.05	-0.86	0.64	-0.42
2 X	5	3	0.91	-0.81	0.57	-0.47
2 X	6	1	0.33	-0.93	0.42	-0.76
2 X	6	2	1.01	-0.50	0.50	-0.45
2 X	6	3	0.00	0.00	0.00	0.00

3 X	7	1	1.57	-1.90	1.16	3.01
3 X	7	2	1.48	-1.38	0.96	1.56
3 X	7	3	0.80	-0.64	0.48	0.48
3 X	8	1	1.99	-2.11	1.36	-1.62
3 X	8	2	1.92	-1.91	1.28	-1.04
3 X	8	3	0.88	-0.86	0.58	-0.48
3 X	9	1	1.39	-1.82	1.07	-1.39
3 X	9	2	1.43	-1.22	0.88	-0.51
3 X	9	3	0.00	0.00	0.00	0.00
1 Y	1	1	0.82	-1.01	0.61	0.73
1 Y	1	2	0.32	-0.22	0.18	0.18
1 Y	1	3	0.00	0.00	0.00	0.00
1 Y	4	1	0.68	-0.69	0.46	-0.38
1 Y	4	2	0.38	-0.37	0.25	-0.12
1 Y	4	3	-0.04	0.05	-0.03	-0.02
1 Y	7	1	0.52	-0.62	0.38	-0.35
1 Y	7	2	0.27	-0.20	0.16	-0.06
1 Y	7	3	-0.05	0.08	-0.04	0.02
2 Y	2	1	0.12	-0.13	0.08	0.05
2 Y	2	2	-0.01	0.02	-0.01	0.00
2 Y	2	3	0.00	0.00	0.00	0.00
2 Y	5	1	0.09	-0.09	0.06	0.01
2 Y	5	2	-0.01	0.01	-0.00	0.04
2 Y	5	3	0.05	-0.06	0.04	0.03
2 Y	8	1	0.07	-0.08	0.05	-0.07
2 Y	8	2	-0.02	0.02	-0.01	-0.04
2 Y	8	3	0.05	-0.05	0.04	-0.03
3 Y	3	1	-1.00	1.17	-0.72	-0.55
3 Y	3	2	0.00	0.00	0.00	0.00
3 Y	3	3	0.00	0.00	0.00	0.00
3 Y	6	1	-0.74	0.77	-0.50	-0.03
3 Y	6	2	-0.47	0.49	-0.32	-0.22
3 Y	6	3	0.00	0.00	0.00	0.00
3 Y	9	1	-0.56	0.68	-0.42	0.58
3 Y	9	2	-0.41	0.33	-0.25	0.22
3 Y	9	3	0.00	0.00	0.00	0.00

L'effettivo sforzo normale in ciascun pilastro si ottiene sommando il suo peso proprio, lo scarico dei telai ortogonali e gli eventuali carichi concentrati.