

**CAPITOLO TERZO.**  
**RAPIDITÀ DI CONVERGENZA DEL PROCEDIMENTO**  
**DI RISOLUZIONE DEI TELAI SPAZIALI.**

*Aurelio Ghersi*

**Sommario.**

Al fine di ridurre il tempo occorrente per la risoluzione iterativa di telai spaziali per edifici col metodo delle deformazioni, si propone un procedimento che, senza alterare l'ordine del sistema di equazioni, consente la determinazione contemporanea del valore di un blocco di incognite. Si analizza quindi il legame tra rigidità delle aste e rapidità di convergenza del procedimento, per quantizzare l'effetto dell'impostazione proposta.

**Summary.**

A solution technique for quicker iterative analysis of tridimensional building frames is here presented. This technique does not affect the order of the system of equations, while allows the contemporary evaluation of a group of unknowns. The relations between member stiffnesses and solution time are then analysed, so as to display the effect of the proposed technique.

**3.1. Introduzione.**

Un modello frequentemente adottato per determinare lo stato tensionale che insorge in un edificio in conseguenza ad un assegnato insieme di carichi è quello di telaio spaziale regolare. Esso considera la struttura composta da un doppio ordine di telai piani a maglie rettangolari, mutuamente collegati da impalcati indeformabili nel loro piano. Si è in precedenza mostrato come tale schema può essere risolto col metodo delle deformazioni, assumendo come incognite le rotazioni dei nodi ( $\varphi_i$ ) e le tre componenti di movimento relativo degli impalcati ( $\delta_{Gix}$ ,  $\delta_{Giy}$ ,  $\Phi_i$ ). Il procedimento proposto richiede la scrittura diretta del sistema di equazioni che impongono l'equilibrio dei nodi alla rotazione e degli impalcati alla traslazione e rotazione.

La soluzione del sistema può essere conseguita in maniera iterativa col metodo di Gauss-Siedel, che consiste nel ricavare ciclicamente il valore di una incognita in funzione del corrente valore delle altre. Questo modo di operare ha un preciso riscontro fisico. Esso equivale a tenere bloccati nodi e traversi del telaio, impedendone rotazioni e spostamenti con vincoli che assorbono momenti flettenti e tagli squilibrati. Determinare la rotazione di un nodo corrisponde al lasciar libero quell'unico nodo, consentendogli di raggiungere la rotazione necessaria ad annullare lo squilibrio tra i momenti all'estremità delle aste ivi concorrenti (operazione di nodo). Determinare le tre componenti di movimento di un impalcato corrisponde a lasciarlo libero di traslare e ruotare, per raggiungere la posizione necessaria ad annullare lo squilibrio dei tagli dei ritti ad esso sottostanti (operazione di piano).

Sul piano operativo, in caso di approccio manuale è indispensabile che il procedimento iterativo di soluzione del sistema sia dotato di una elevata velocità di convergenza. L'uso di elaboratori elettronici ha reso meno essenziale questa caratteristica, che risulta comunque sempre ben accetta, anche per la contemporanea tendenza ad affrontare schemi

sempre più complessi e che richiedono quindi, già di per se, tempi maggiori. Perché ciò si verifichi occorre che la matrice dei coefficienti delle incognite sia diagonalizzata, cioè che gli elementi appartenenti alla sua diagonale principale siano prevalenti rispetto agli altri coefficienti. Nel caso di telai, piani o spaziali, la matrice presenta addensamenti di termini non nulli in una banda diagonale, che contiene valori proporzionali alle rigidezze delle aste che convergono nei nodi, e in due fasce laterali, corrispondenti agli spostamenti degli impalcati, che contengono le rigidezze dei ritti.

Nei telai soggetti esclusivamente a carichi verticali, gli spostamenti orizzontali sono modesti, quasi irrilevanti. Trascurando i termini ad essi corrispondenti, gli elementi della diagonale principale della matrice dei coefficienti delle incognite risultano sempre prevalenti, ed è quindi assicurata una buona rapidità di convergenza del procedimento iterativo.

Nei telai soggetti anche ad azioni orizzontali, cui conseguono spostamenti rilevanti, possono invece verificarsi più situazioni differenti. Un caso limite è quello di edifici con travi notevolmente più rigide dei pilastri. Per essi gli elementi che costituiscono le bande laterali sono piccoli rispetto a quelli della diagonale principale. La velocità di convergenza è quindi ancora elevata. Il caso opposto è costituito da edifici in cui siano adottati pilastri molto rigidi, situazione che si verifica di frequente in zona sismica. Gli elementi delle bande laterali sono in tal caso grandi rispetto a quelli della diagonale principale, e la convergenza è lenta.

Alle considerazioni puramente numeriche fin qui fatte possono essere affiancate osservazioni legate al significato fisico del procedimento. Nei telai soggetti a soli carichi verticali la configurazione deformata deve presentare rotazioni dei nodi rilevanti e spostamenti degli impalcati modesti. L'operazione di nodo corrisponde perfettamente a questo comportamento; essa è quindi predominante e consente di raggiungere con facilità il risultato finale. Il contrario (rotazioni modeste e spostamenti rilevanti) avviene nei telai con travi più rigide dei ritti, soggetti ad azioni orizzontali. In tal caso è l'operazione di piano a rispecchiare il reale comportamento della struttura e consentire una rapida convergenza. I telai con ritti rigidi tendono invece ad una configurazione che presenta contemporaneamente rotazioni e spostamenti. Sia l'operazione di nodo che quella di piano rappresentano un comportamento molto differente da quello reale, che può pertanto essere raggiunto solo dopo un numero elevato di iterazioni.

Per lo schema di telaio piano sono stati proposti in passato numerosi procedimenti atti ad accelerare la convergenza del procedimento risolutivo [1, 2, 3, 4, 5]. Tra tutti, si richiama in particolare l'operazione di traverso per il metodo delle «rigidità globali», proposta dal prof. M. Pagano [8]. Essa equivale fisicamente a consentire contemporaneamente rotazioni dei nodi di un traverso e spostamenti relativi dei due interpiani che lo racchiudono, tali da annullare globalmente lo squilibrio dei nodi senza alterare l'equilibrio dei piani alla traslazione. Rotazioni e spostamenti effettivi sono quindi scissi in due aliquote, ottenibili rispettivamente mediante operazioni di nodo e piano e operazioni di traverso. Dal punto di vista matematico, lo sdoppiamento delle incognite aumenta solo in apparenza l'ordine del sistema, in quanto le nuove equazioni sono combinazioni lineari delle precedenti. Questa impostazione è quindi utilizzabile solo perché si è adottato un procedimento iterativo come metodo di risoluzione del sistema.

La via seguita nel caso piano viene qui estesa al telaio tridimensionale, proponendo per la sua risoluzione l'adozione di una operazione, detta di traverso spaziale ovvero di impalcato, che consente sia rotazioni dei nodi che spostamenti e rotazioni degli impalcati. Si ritiene però preferibile una differente modalità operativa. Anziché considerare per tutta la durata del procedimento risolutivo distinte aliquote di rotazioni e sposta-

menti, si utilizza l'operazione di impalcato per determinare valori « correttivi » delle componenti di movimento, cioè quantità che vanno immediatamente aggiunte a quelle fornite dalle operazioni di nodo e piano. In tal modo quest'ultime non subiscono alcuna modifica formale, ed anche l'espressione dell'operazione di traverso spaziale risulta analiticamente meno complessa. Dal punto di vista numerico, ciò equivale a mantenere inalterato il numero di incognite, ed inserire nel procedimento risolutivo fasi nelle quali viene ricalcolato contemporaneamente il valore di un intero blocco di esse.

### 3.2. Componenti di movimento attivate nell'operazione di impalcato.

L'applicazione dell'operazione di traverso al generico traverso  $s$  di un telaio piano comporta contemporaneamente la rotazione dei nodi ad esso appartenenti e lo spostamento relativo degli interpiani  $s$  e  $t$  che lo racchiudono, mentre sono impedito tutte le altre componenti di movimento (fig. 3.1). Queste grandezze sono in seguito contrassegnate con due punti ( $\varphi''$ ,  $\delta''$ ) per distinguerle dai valori forniti da operazioni di nodo e piano.

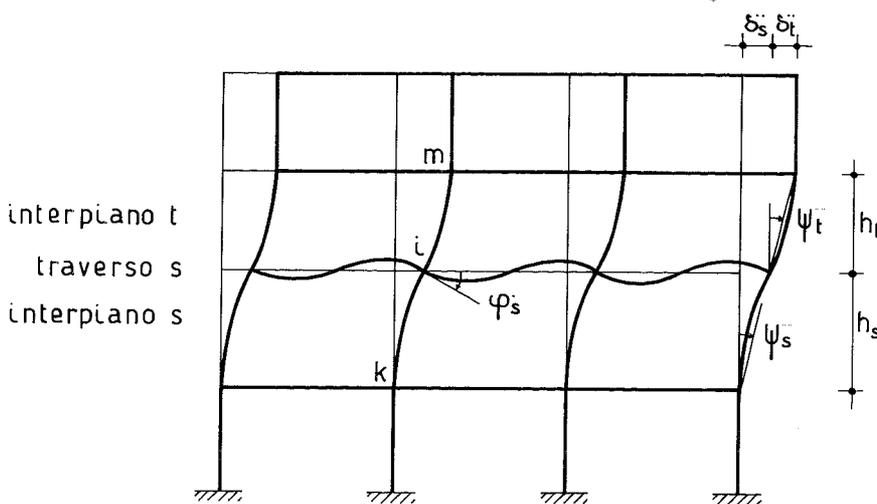


Figura 3.1

Se si vuole che non insorga taglio nei pilastri, rotazioni e spostamenti non possono essere tra loro indipendenti. Si prenda infatti in esame il generico ritto  $ik$  dell'interpiano  $s$ . Si può facilmente verificare (fig. 3.2) che la rotazione del nodo  $i$ , appartenente al traverso  $s$ , deve essere pari al doppio della rotazione dell'asta, cioè del rapporto  $\delta_s''/h_s$ . Da ciò si ricavano due conseguenze. Innanzitutto, per la congruenza lo spostamento  $\delta_s''$  è lo stesso per tutti i nodi del traverso e quindi anche la loro rotazione sarà uguale (si usa così un unico simbolo,  $\varphi_s''$ ). In secondo luogo, perché anche nel generico ritto  $im$  dell'interpiano  $t$  il taglio sia nullo occorre che la rotazione dell'interpiano  $t$  coincida con quella dell'interpiano  $s$  ( $\delta_s''/h_s = \delta_t''/h_t$ ).

In maniera analoga, l'applicazione dell'operazione di traverso spaziale all'impalcato  $s$  comporta la rotazione dei nodi ad esso appartenenti e lo spostamento relativo degli interpiani  $s$  e  $t$ . Quest'ultimo può essere individuato mediante tre parametri per ciascun impalcato, costituiti in

generale dalle componenti  $\delta_{G_sx}^{**}$  e  $\delta_{G_sy}^{**}$  dello spostamento di un arbitrario punto  $G_s^{**}$  rispetto all'impalcato sottostante e dalla rotazione relativa  $\Phi_s^{**}$ . Indicando con  $d_{js}^{**}$  la distanza tra il telaio  $j$  e il punto  $G_s^{**}$ , cambiata di

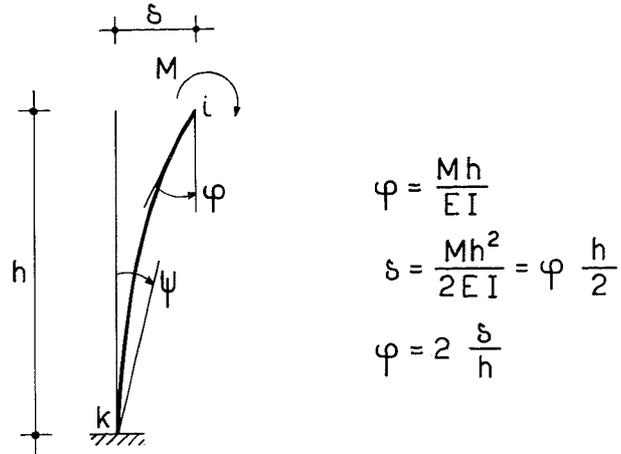


Figura 3 2

segno se il telaio è parallelo all'asse  $y$ , lo spostamento relativo tra due traveri consecutivi di un telaio piano può essere determinato, in funzione delle componenti di movimento anzidette, mediante la relazione:

$$\delta_{js}^{**} = \delta_{G_s}^{**} + \Phi_s^{**} d_{js}^{**} \tag{1}$$

Per le stesse considerazioni già fatte con riferimento ai telai piani, nell'applicare l'operazione di travaso spaziale all'impalcato s la rotazione dei nodi appartenenti a uno stesso traverso di un telaio piano dovrà essere unica e pari al doppio della rotazione dei ritzi sottostanti:

$$\varphi_{js}^{**} = 2 \frac{\delta_{js}^{**}}{h_s} \tag{2}$$

Inoltre, la rotazione di ritzi corrispondenti, appartenenti ai due impalcati adiacenti, dovrà essere uguale ( $\delta_{js}^{**}/h_s = \delta_{jt}^{**}/h_t$ ). Dovrà quindi essere anche:

$$\begin{aligned} \delta_{G_sx}^{**}/h_s &= \delta_{G_tx}^{**}/h_t \\ \delta_{G_sy}^{**}/h_s &= \delta_{G_ty}^{**}/h_t \\ \Phi_s^{**}/h_s &= \Phi_t^{**}/h_t \end{aligned} \tag{3}$$

Questi tre rapporti possono essere pertanto considerati come parametri caratteristici dell'operazione di impalcato, la cui conoscenza è necessaria e sufficiente per definire la deformazione della struttura in questa fase.

### 3.3. Azioni agli estremi delle aste.

L'azione flettente che insorge agli estremi delle aste in conseguenza all'operazione di travaso può essere determinata facilmente utilizzando

la relazione generale tra azioni e componenti di movimento, analizzata nel primo capitolo:

$$M_{ik} = \bar{M}_{ik} + 4 w'_{(ik)} \varphi_i + 2 w'_{(ik)} \varphi_k - 6 w'_{(ik)} \frac{\delta_{(ik)}}{l_{(ik)}} \quad (4)$$

La generica trave ik del telaio j (fig. 3.3) presenta rotazioni uguali dei nodi di estremità ( $\varphi_i = \varphi_k = \varphi_{js}^{\bullet\bullet}$ ) e spostamento relativo nullo ( $\delta_{(ik)} = 0$ ). Si ha pertanto:

$$M_{ik}^{\bullet\bullet} = M_{ki}^{\bullet\bullet} = 4 w'_{(ik)} \varphi_{js}^{\bullet\bullet} + 2 w'_{(ik)} \varphi_{js}^{\bullet\bullet}$$

e quindi:

$$M_{ik}^{\bullet\bullet} = M_{ki}^{\bullet\bullet} = 12 w'_{(ik)} \frac{\delta_{js}^{\bullet\bullet}}{h_s} \quad (5)$$

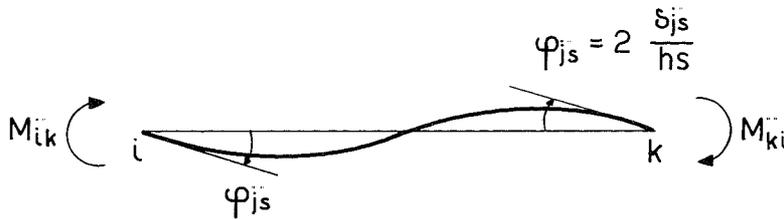


Figura 3.3

Nella risoluzione iterativa dello schema, questo valore rappresenta la variazione del momento flettente, rispetto a quanto determinato in precedenza, conseguente alla variazione di deformazione connessa con l'operazione di travaso. Indicando con  $M'_{ik}$  il momento calcolato con le precedenti operazioni, il valore complessivo che si ottiene dopo l'operazione di travaso è quindi:

$$M_{ik} = M'_{ik} + M_{ik}^{\bullet\bullet} = M'_{ik} + 12 w'_{(ik)} \frac{\delta_{js}^{\bullet\bullet}}{h_s} \quad (6)$$

Il generico pilastro ik, col nodo i appartenente all'impalcato s (fig. 3.4), presenta rotazione nulla al secondo estremo ( $\varphi_k = 0$ ) e diversa da zero al primo ( $\varphi_i = \varphi_{js}^{\bullet\bullet}$ ) e spostamento relativo tra gli estremi pari a  $\delta_{js}^{\bullet\bullet}$ . Si ha pertanto:

$$M_{ik}^{\bullet\bullet} = 4 w'_{(ik)} \varphi_{js}^{\bullet\bullet} - 6 w'_{(ik)} \frac{\delta_{js}^{\bullet\bullet}}{h_s}$$

e quindi:

$$M_{ik}^{\bullet\bullet} = 2 w'_{(ik)} \frac{\delta_{js}^{\bullet\bullet}}{h_s} \quad (7)$$

Il valore complessivo del momento flettente che si ottiene dopo l'operazione di travaso è così:

$$M_{ik} = M'_{ik} + M_{ik}^{\bullet\bullet} = M'_{ik} + 2 w'_{(ik)} \frac{\delta_{js}^{\bullet\bullet}}{h_s} \quad (8)$$

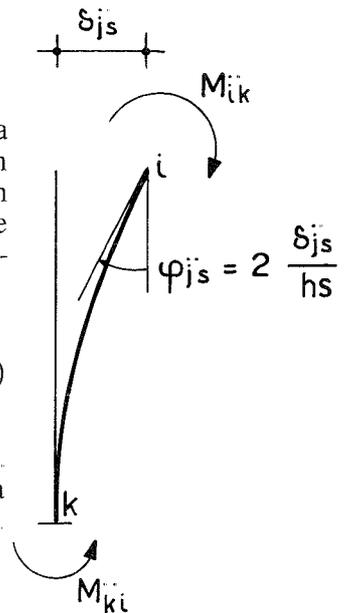


Figura 3.4

### 3.4. Equazioni di equilibrio nell'operazione di impalcato.

Nel caso dei telai piani, l'operazione di traverso impone l'equilibrio complessivo alla rotazione di tutti i nodi appartenenti al traverso stesso. Nell'estendere questa condizione allo schema tridimensionale, occorre tener presente che i momenti agenti sui nodi di un impalcato costituiscono un insieme di vettori distribuiti in un piano. Richiederne l'equilibrio equivale ad annullare la somma delle loro componenti rispetto ad  $x$  e  $y$  ed il loro momento statico rispetto a un punto qualsiasi, cioè in particolare alle tre condizioni:

$$\begin{aligned}\sum_{jx} (\sum_s M_{ik}) &= 0 \\ \sum_{jy} (\sum_s M_{ik}) &= 0 \\ \sum_j (\sum_s M_{ik}) d_{js}^{\bullet\bullet} &= 0\end{aligned}$$

La prima e la seconda espressione rappresentano la somma, estesa a tutti i telai paralleli rispettivamente all'asse  $x$  e  $y$ , dei momenti all'estremità delle aste convergenti nei nodi del traverso  $s$ . La terza, estesa ai telai di entrambe le direzioni, impone l'annullarsi del momento statico dei momenti flettenti rispetto al punto  $G_s^{\bullet\bullet}$ , cioè del loro valore moltiplicato per la distanza  $d_{js}^{\bullet\bullet}$ .

Sostituendo in essa le espressioni (6) e (8) del momento flettente, e tenendo presente che nella sommatoria compaiono per ciascuna trave sia  $M_{ik}^{\bullet\bullet}$  che  $M_{ki}^{\bullet\bullet}$ , uguali tra loro, la prima condizione diventa:

$$\sum_{jx} \left[ \sum_s M'_{ik} + (\sum_{s, \text{travi}} 2 \times 12 w'_{(ik)} + \sum_{s, \text{ritti}} 2 w'_{(ik)}) \frac{\delta_{js}^{\bullet\bullet}}{h_s} \right] = 0$$

ovvero:

$$\sum_{jx} (\sum_s M'_{ik}) + \sum_{jx} w_{js}^{\bullet\bullet} \frac{\delta_{js}^{\bullet\bullet}}{h_s} = 0$$

in funzione della rigidezza di traverso  $w_{js}^{\bullet\bullet}$ , definita da:

$$w_{js}^{\bullet\bullet} = \sum_{s, \text{travi}} 24 w'_{(ik)} + \sum_{s, \text{ritti}} 2 w'_{(ik)}$$

Esprimendo lo spostamento relativo all'interpiano  $s$  in funzione delle componenti di movimento dell'impalcato, si ottiene quindi:

$$\sum_{jx} (\sum_s M'_{ik}) + \sum_{jx} w_{js}^{\bullet\bullet} \frac{\delta_{G_{sx}}^{\bullet\bullet}}{h_s} + \sum_{jx} w_{js}^{\bullet\bullet} \frac{\Phi_s^{\bullet\bullet}}{h_s} d_{js}^{\bullet\bullet} = 0$$

Poiché i rapporti  $\delta_{G_{sx}}^{\bullet\bullet}/h_s$  e  $\Phi_s^{\bullet\bullet}/h_s$  sono quantità valide per tutti i telai, è possibile estrarli dalla sommatoria:

$$\sum_{jx} (\sum_s M'_{ik}) + \frac{\delta_{G_{sx}}^{\bullet\bullet}}{h_s} \sum_{jx} w_{js}^{\bullet\bullet} + \frac{\Phi_s^{\bullet\bullet}}{h_s} \sum_{jx} w_{js}^{\bullet\bullet} d_{js}^{\bullet\bullet} = 0$$

Se il punto di riferimento  $G_s^{\bullet\bullet}$  viene scelto coincidente col baricentro delle rigidezze di traverso dei telai, l'ultima sommatoria, che ne rappresenta il momento statico, è nulla. Si ottiene così:

$$\frac{\delta_{G_{sx}}^{\bullet\bullet}}{h_s} = - \left[ \sum_{jx} (\sum_s M'_{ik}) \right] \frac{1}{\sum_{jx} w_{js}^{\bullet\bullet}} \quad (9)$$

Analogamente, dalla seconda condizione si ottiene:

$$\frac{\delta_{G_{sy}}^{\bullet\bullet}}{h_s} = - \left[ \sum_j \left( \sum_s M'_{ik} \right) \right] \frac{1}{\sum_j w_{js}^{\bullet\bullet}} \quad (10)$$

Lo stesso procedimento può essere seguito anche per la terza condizione. Si ha pertanto:

$$\sum_j \left( \sum_s M'_{ik} \right) d_{js}^{\bullet\bullet} + \sum_j w_{js}^{\bullet\bullet} \frac{\delta_{js}^{\bullet\bullet}}{h_s} d_{js}^{\bullet\bullet} = 0$$

Esprimendo lo spostamento relativo dell'interpiano  $s$  in funzione delle componenti di movimento dell'impalcato, ed estraendo queste ultime dalla sommatoria, si ottiene:

$$\sum_j \left( \sum_s M'_{ik} \right) d_{js}^{\bullet\bullet} + \frac{\delta_{G_{sx}}^{\bullet\bullet}}{h_s} \sum_j w_{js}^{\bullet\bullet} d_{js}^{\bullet\bullet} + \frac{\Phi_s^{\bullet\bullet}}{h_s} \sum_j w_{js}^{\bullet\bullet} d_{js}^{\bullet\bullet 2} = 0$$

Per la scelta effettuata del punto di riferimento  $G_s^{\bullet\bullet}$ , la seconda sommatoria è nulla. Si ha così:

$$\frac{\Phi_s^{\bullet\bullet}}{h_s} = - \left[ \sum_j \left( \sum_s M'_{ik} \right) d_{js}^{\bullet\bullet} \right] \frac{1}{\sum_j w_{js}^{\bullet\bullet} d_{js}^{\bullet\bullet 2}} \quad (11)$$

Nelle tre equazioni ottenute, si è indicato con  $\sum_s M'_{ik}$  la somma dei momenti flettenti conseguenti alle operazioni precedentemente effettuate, estesa a tutti gli estremi delle aste che convergono nei nodi del traverso  $s$  del telaio piano  $j$  (cioè lo squilibrio globale dei nodi di tale traverso). Questa somma può essere espressa direttamente in funzione dei correnti valori delle rotazioni dei nodi e delle componenti di movimento degli impalcati, mediante la relazione (4). Se si osserva che per ogni trave compaiono i due termini,  $M'_{ik}$  e  $M'_{ki}$ , perché entrambi i nodi di estremità appartengono al traverso, essa può essere esplicitata come:

$$\begin{aligned} \sum_s M'_{ik} = & \sum_s \bar{M}_{ik} + \sum_{s, \text{travi}} 6 w'_{(ik)} \varphi_i + \sum_{s, \text{ritti}} 4 w'_{(ik)} \varphi_i + \\ & + \sum_{s, \text{ritti}} 2 w'_{(ik)} \varphi_k - \sum_{s, \text{ritti}} 6 w'_{(ik)} \frac{\delta_{js}}{h_s} \end{aligned}$$

ovvero:

$$\sum_s M'_{ik} = \sum_s \bar{M}_{ik} + \sum_j w_{js}^{\bullet\bullet} \varphi_i + \sum_k 2 w'_{(ik)} \varphi_k - 6 w'_{js} \frac{\delta_{js}}{h_s} - 6 w'_{jt} \frac{\delta_{jt}}{h_t} \quad (12)$$

avendo posto:

- |  |   |
|--|---|
| i  | nodo appartenente all'impalcato $s$ ;   |
| k  | nodo appartenente all'impalcato $r$ o $t$ , adiacenti all'impalcato $s$ ;   |
| $w_i^{\bullet\bullet} = \sum_{i, \text{travi}} 6 w'_{(ik)} + \sum_{i, \text{ritti}} 4 w'_{(ik)}$ | somma degli indici di rigidezza delle travi e dei ritti che convergono nel nodo $i$ , moltiplicati rispettivamente per 6 e per 4; |
| $w'_{js} = \sum_{js} w'_{(ik)}$  | somma degli indici di rigidezza dei ritti dell'interpiano $s$ o $t$ , adiacenti all'impalcato                                     |
| $w'_{jt} = \sum_{jt} w'_{(ik)}$  | $s$ , appartenenti al telaio piano $j$ .  |

### 3.5. Procedimento operativo.

Come già si è evidenziato nel primo paragrafo, l'operazione di traverso spaziale ha senso quando si utilizza per la risoluzione del telaio una impostazione iterativa. Sia che si operi manualmente o che si utilizzi un elaboratore elettronico, è necessario un lavoro preparatorio che può procedere attraverso le seguenti fasi:

- a) determinazione degli indici di rigidezza delle aste;
- b) determinazione dei valori da utilizzare nelle operazioni di nodo: somma delle rigidezze delle aste confluenti nei nodi, momenti di incastro perfetto delle travi e loro somma;
- c) determinazione ad ogni piano dei baricentri degli indici di rigidezza dei ritti e delle distanze dei telai da tali baricentri;
- d) determinazione dei valori da utilizzare nelle operazioni di piano: somma delle rigidezze dei ritti e loro momento rispetto al baricentro;
- e) determinazione delle rigidezze di traverso dei telai e delle grandezze occorrenti per la valutazione dello squilibrio globale dei nodi: somma dei momenti di incastro perfetto, degli indici di rigidezza delle aste confluenti nei nodi, degli indici di rigidezza dei ritti di ciascun telaio;
- f) determinazione ad ogni piano dei baricentri delle rigidezze di traverso dei telai e delle distanze dei telai da tali baricentri; somma delle rigidezze di traverso e loro momento rispetto al baricentro.

Nel caso di impostazione manuale, questi valori verranno riportati in schemi operativi, in modo da avere sotto mano tutte le informazioni necessarie per la risoluzione. Se si procede col calcolatore, esse saranno invece conservate nella memoria centrale del computer.

Per determinare le componenti di movimento incognite si effettueranno quindi, ciclicamente, operazioni di nodo, di piano e di impalcato. Le prime due forniscono valori, via via più approssimati, di rotazioni e spostamenti, in maniera operativamente identica a quanto si avrebbe in assenza dell'operazione di traverso spaziale. L'applicazione di quest'ultima al generico impalcato  $s$  fornisce i tre parametri che ne caratterizzano la deformazione in questa fase ( $\delta_{G_{sx}}^{\bullet\bullet}/h_s$ ,  $\delta_{G_{sy}}^{\bullet\bullet}/h_s$ ,  $\Phi_s^{\bullet\bullet}/h_s$ ). Da essi è possibile ricavare i valori della rotazione dei nodi e dello spostamento relativo degli impalcati, che andranno aggiunti a quelli correnti.

Per il nodo  $i$  appartenente al telaio  $j$ , sottointendendo l'indice  $x$  o  $y$  che rappresenta l'asse cui il telaio è parallelo in pianta e indicando con un apice il valore calcolato con le operazioni precedenti, dalle relazioni (1) e (2) si ottiene:

$$\varphi_i = \varphi_i' + 2 \frac{\delta_{G_s}^{\bullet\bullet}}{h_s} + 2 \frac{\Phi_s^{\bullet\bullet}}{h_s} d_{js}^{\bullet\bullet} \quad (13)$$

In maniera analoga occorre sommare le aliquote di spostamento e rotazione relativa per l'impalcato  $s$ . Bisogna però tener presente che lo spostamento di piano è riferito al punto  $G_s$  mentre quello di impalcato a  $G_s^{\bullet\bullet}$ . Quest'ultimo deve quindi essere riportato al precedente, mediante una relazione analoga alla (1). Indicando con  $x_{G_s}$ ,  $y_{G_s}$ ,  $x_{G_s^{\bullet\bullet}}$ ,  $y_{G_s^{\bullet\bullet}}$  le ascisse e ordinate dei punti anzidetti, si ha quindi:

$$\begin{aligned} \delta_{G_{sx}} &= \delta_{G_{sx}}' + \frac{\delta_{G_{sx}}^{\bullet\bullet}}{h_s} h_s + \frac{\Phi_s^{\bullet\bullet}}{h_s} h_s (y_{G_s} - y_{G_s^{\bullet\bullet}}) \\ \delta_{G_{sy}} &= \delta_{G_{sy}}' + \frac{\delta_{G_{sy}}^{\bullet\bullet}}{h_s} h_s - \frac{\Phi_s^{\bullet\bullet}}{h_s} h_s (x_{G_s} - x_{G_s^{\bullet\bullet}}) \\ \Phi_s &= \Phi_s' + \frac{\Phi_s^{\bullet\bullet}}{h_s} h_s \end{aligned} \quad (14)$$

Infine, la corrispondente somma sarà effettuata per l'impalcato t, che subisce anch'esso un movimento relativo rispetto al sottostante impalcato s. Tenendo presente la relazione (3) si ha:

$$\begin{aligned} \delta_{G_{tx}} &= \delta'_{G_{tx}} + \frac{\delta_{G_{sx}}^{**}}{h_s} h_t + \frac{\Phi_s^{**}}{h_s} h_t (y_{G_t} - y_{G_s}) \\ \delta_{G_{ty}} &= \delta'_{G_{ty}} + \frac{\delta_{G_{sy}}^{**}}{h_s} h_t - \frac{\Phi_s^{**}}{h_s} h_t (x_{G_t} - x_{G_s}) \\ \Phi_t &= \Phi'_t + \frac{\Phi_s^{**}}{h_s} h_t \end{aligned} \tag{15}$$

### 3.6. Esempio numerico.

Per illustrare le caratteristiche principali del procedimento proposto si è preso in esame uno schema strutturale a quattro impalcati (fig. 3.5 e 3.6), i

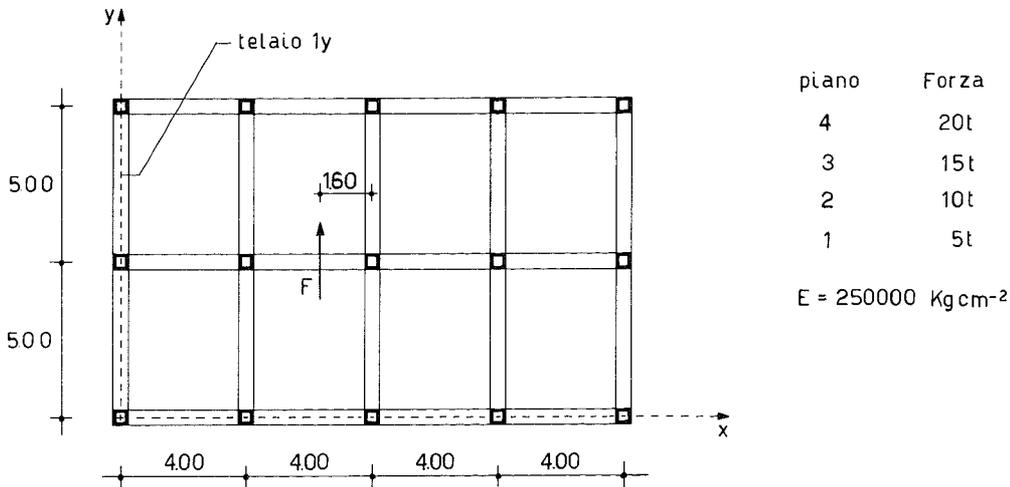


Figura 3.5

travi:  $I_T = 000064 \text{ m}^4$   
 ritli:  $I_R = 000256 \text{ m}^4$   
 $\frac{I_R}{I_T} = 4$

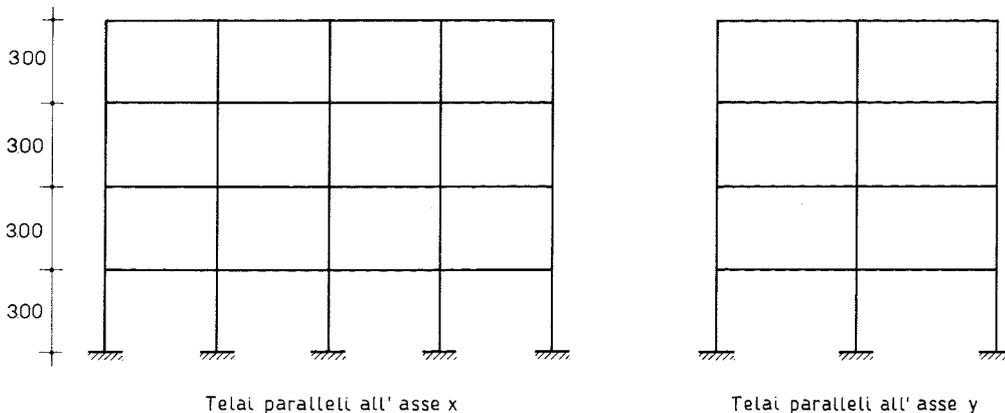
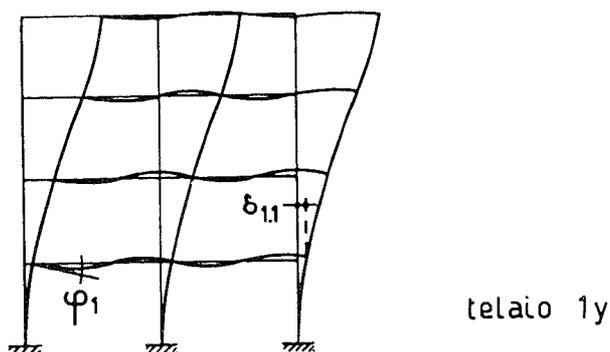


Figura 3.6

cui pilastri sono tutti di sezione quadrata, con momento d'inerzia pari al quadruplo di quello delle travi. La doppia simmetria dello schema, che potrebbe portare a un comportamento non spaziale, è compensata dal carico, costituito da forze orizzontali parallele all'asse  $y$  disposte con una eccentricità tale da provocare sensibili rotazioni planimetriche.

La risoluzione dello schema mediante elaboratore elettronico con sole operazioni di nodo e piano ha richiesto 74 iterazioni. In figura 3.7a sono riportati i valori via via ottenuti per la rotazione del primo nodo del telaio  $1y$  e per lo spostamento del primo traverso dello stesso telaio.

La risoluzione effettuata alternando operazioni di nodo, piano e impalcato ha richiesto 21 iterazioni. In figura 3.7b sono riportati i valori della rotazione e dello spostamento anzidetti. Per ciascuna iterazione è indicato prima il valore fornito dalle operazioni di nodo e piano, poi il valore « corretto » mediante l'operazione di traverso spaziale. Così, ad esempio, nella prima interazione l'operazione di nodo fornisce il valore 0 (perché i momenti d'incastro perfetto sono nulli per l'assenza di carichi verticali, mentre le altre componenti di movimento sono nulle perché non si sono effettuate precedenti operazioni). L'operazione di equilibra-



a) SENZA OPERAZIONE DI IMPALCATO			b) CON OPERAZIONE DI IMPALCATO		
iteraz.	$\varphi_1$	$\delta_{11}$	iteraz.	$\varphi_1$	$\delta_{11}$
1	0.000 E+0	1.480 E-3	1	0.000 E+0 9.134 E-4	1.480 E-3 2.850 E-3
2	6.540 E-4	2.415 E-3	2	1.376 E-3 1.730 E-3	3.464 E-3 3.996 E-3
3	1.111 E-3	3.081 E-3	3	1.988 E-3 2.198 E-3	4.361 E-3 4.676 E-3
4	1.449 E-3	3.574 E-3	4	2.346 E-3 2.466 E-3	4.885 E-3 5.066 E-3
5	1.705 E-3	3.949 E-3	5	2.548 E-3 2.615 E-3	5.182 E-3 5.283 E-3
6	1.904 E-3	4.240 E-3	6	2.660 E-3 2.696 E-3	5.346 E-3 5.401 E-3
..	.....	.....	..	.....	.....
74	2.788 E-3	5.533 E-3	21	2.788 E-3	5.533 E-3

Figura 3.7

mento del primo interpiano fornisce  $\delta_{G1x} = 0$ ,  $\delta_{G1y} = 1.172 \times 10^{-3}$ ,  $\Phi_1 = 3.853 \times 10^{-5}$ , da cui si ricava per il telaio 1y uno spostamento:

$$\delta_{1,1} = 1.172 \times 10^{-3} + 3.853 \times 10^{-5} \times 8 = 1.480 \times 10^{-3}.$$

I tre parametri che caratterizzano l'operazione di impalcato valgono rispettivamente  $0$ ,  $3.662 \times 10^{-4}$ ,  $1.131 \times 10^{-5}$ . La conseguente aliquota di spostamento per il primo traverso del telaio 1y, calcolata in base alla (1), è:

$$\delta_{1,1}^* = (3.662 \times 10^{-4} + 1.131 \times 10^{-5} \times 8) \times 3 = 1.370 \times 10^{-3},$$

che sommata al precedente fornisce un valore complessivo dello spostamento pari a  $2.850 \times 10^{-3}$ . Corrispondentemente, l'aliquota di rotazione per tutti i nodi di quel traverso, fornita dalla (2), è:

$$\varphi_i^* = 2 \times 1.370 \times 10^{-3} / 3 = 0.913 \times 10^{-3},$$

che va aggiunto al valore, attualmente nullo, della rotazione.

I valori determinati in assenza e in presenza di operazione di impalcato sono riportati graficamente nella figura 3.8. Il diagramma relativo al secondo caso ha un aspetto seghettato perché si sono rappresentati con due punti distinti i valori calcolati, nell'ambito di una stessa iterazione, prima e dopo l'applicazione dell'operazione di traverso spaziale. La figura mostra con chiarezza che l'andamento del processo di convergenza è sostanzialmente lo stesso sia per le rotazioni che per gli spostamenti. È inoltre evidente l'effetto benefico dell'operazione di impalcato, che nel caso in esame consente di ottenere già dopo poche iterazioni valori notevolmente vicini a quelli finali.

### 3.7. La convergenza.

#### 3.7.1. Rapporto globale di rigidezza.

Il procedimento iterativo utilizzato per la soluzione del telaio spaziale è sempre convergente. Nei telai con pilastri rigidi rispetto alle travi la convergenza è però lenta, in alcuni casi limite tanto lenta da rendere problematico l'ottenimento di valori in tempi ragionevoli. Per analizzare il fenomeno è quindi opportuno metterlo in relazione al rapporto tra le rigidezze dei pilastri e delle travi del telaio. Pure non essendo irrilevante la loro distribuzione locale, il parametro maggiormente significativo può essere il *rapporto globale di rigidezza pilastri/travi*,  $K$ , cioè il rapporto tra la somma degli indici di rigidezza di tutti i pilastri del telaio e quella di tutte le travi:

$$K = \frac{\sum_{\text{pilastri}} w'_{(ik)}}{\sum_{\text{travi}} w'_{(ik)}} \quad (16)$$

Nel caso di un telaio spaziale è opportuno estendere queste sommatorie a tutti i telai piani costituenti la struttura solo quando il suo comportamento è realmente tridimensionale, cioè tale da chiamare in causa tutti i suoi componenti. Se invece il carico provoca sollecitazioni sensibili solo in un insieme di telai, come nel caso di forze orizzontali agenti in una direzione e applicate in punti tali da non causare sensibili rotazioni planimetriche degli impalcati, è più significativo estendere le sommatorie solo ai telai in questione.

A titolo esemplificativo si può valutare il rapporto globale di rigidezza per lo schema esaminato nel paragrafo precedente. In esso gli indici di rigidezza delle aste valgono:

- $21.33 \times 10^5 \text{ kgm}$  per i pilastri
- $4.00 \times 10^5 \text{ kgm}$  per le travi dei telai paralleli all'asse  $x$
- $3.20 \times 10^5 \text{ kgm}$  per le travi dei telai paralleli all'asse  $y$ .

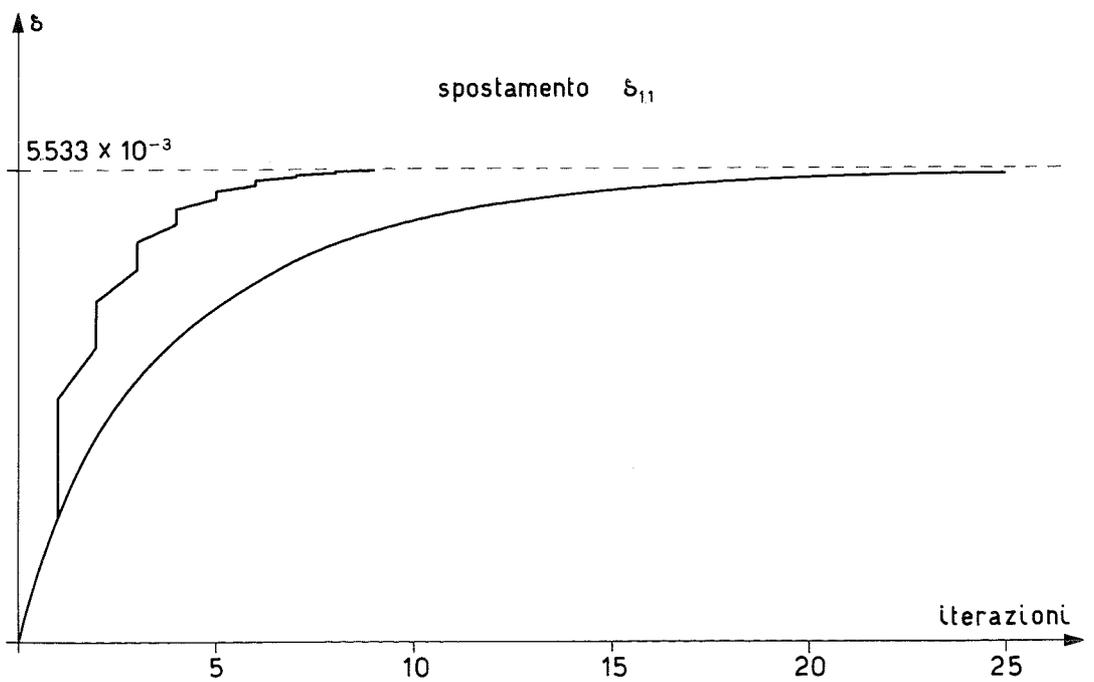
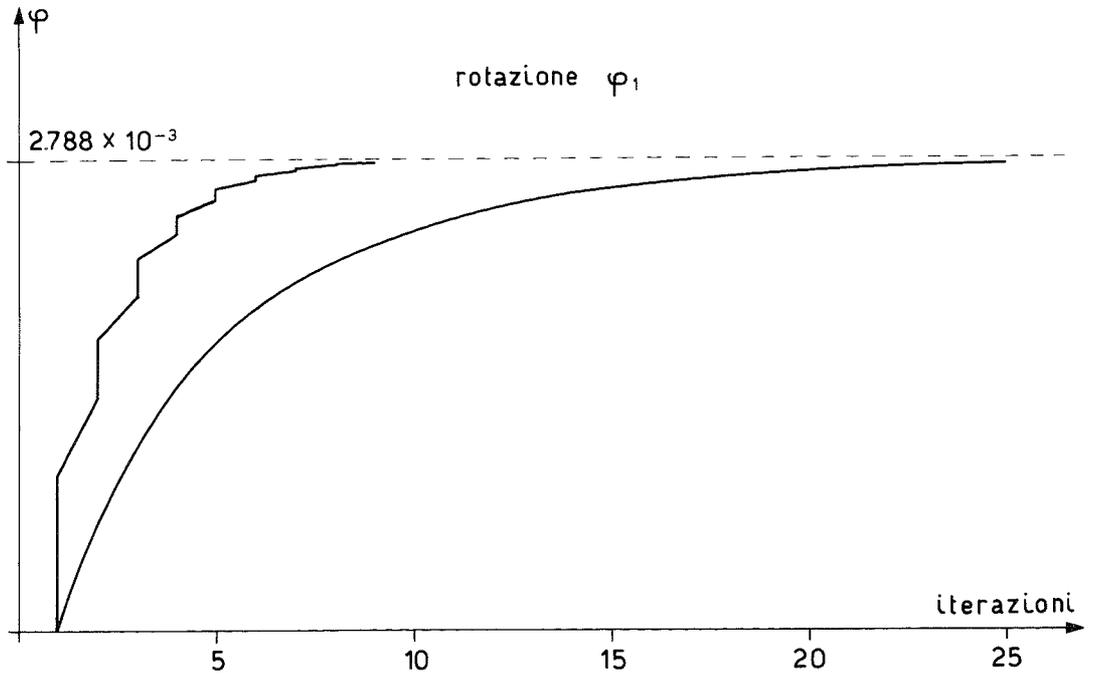


Figura 3.8

Nel caso di carico costituito da forze agenti in direzione  $y$ , se si prendono in considerazione solo i telai paralleli a tale direzione si ha:

$$K = \frac{60 \times 21.33 \times 10^5}{40 \times 3.20 \times 10^5} = 10.$$

### 3.7.2. Errore e scarto relativo.

Nel processo iterativo di soluzione, ciascuna grandezza incognita assume valori via via più vicini al valore effettivo. Si indichi con  $v$  tale valore e con  $v_1, v_2, v_3 \dots v_i$  i valori approssimati ottenuti dopo  $n_1, n_2, n_3 \dots n_i$  iterazioni. Per una valutazione della rapidità di convergenza del procedimento si può mettere in relazione in numero di iterazioni  $n_i$  con il corrispondente *errore relativo*,  $e_i$ , definito da:

$$e_i = \left| \frac{v - v_i}{v} \right| \quad (17)$$

I diagrammi in scala semilogaritmica riportati nella figura 3.9, riferiti alla rotazione del primo nodo del telaio 1y dello schema geometrico descritto nel paragrafo 3.6., rappresentano tale relazione per differenti valori della rigidezza globale (1, 10, 100), nonché in presenza ed assenza dell'operazione di impalcato. Si può notare come per tutti i casi l'andamento possa, almeno in prima approssimazione essere considerato rettilineo. Ciò equivale ad ipotizzare una relazione lineare tra il loga-

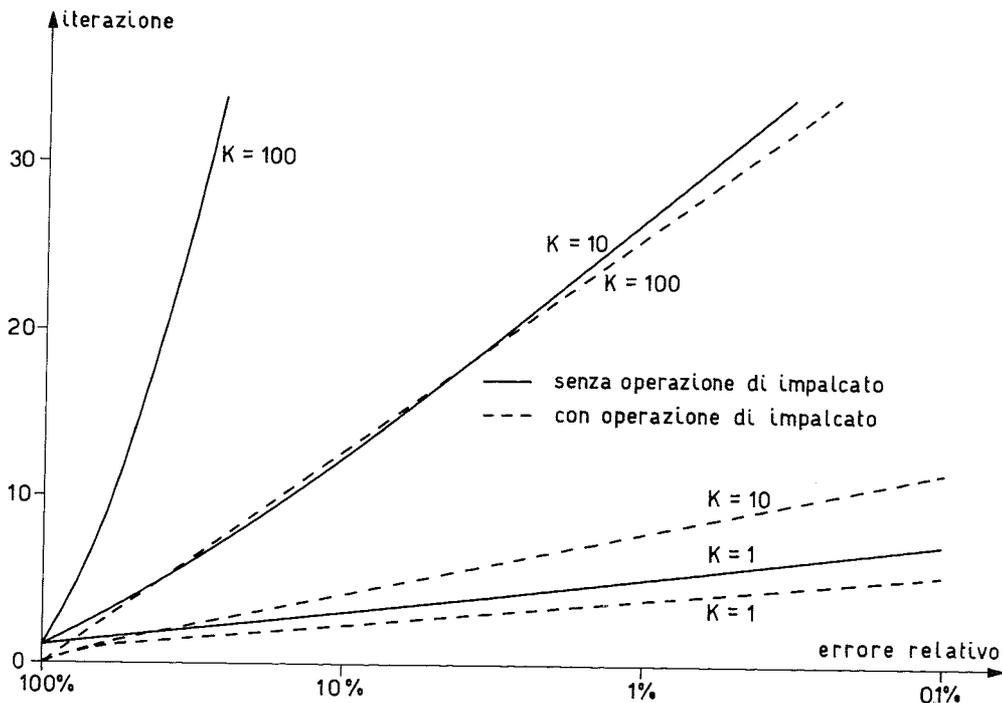


Figura 3.9

ritmo dell'errore relativo e il numero di iterazioni:

$$-c \log e_i = n_i$$

cioè:

$$e_i = 10^{-n_i/c} \quad (18)$$

In tale relazione il parametro  $c$ , sempre positivo, rappresenta il numero di iterazioni necessario per ridurre l'errore relativo di un fattore 10.

Ipotizzando, per semplicità, che la successione di valori  $v_i$  sia crescente, dalla (18) si ottiene inoltre:

$$v_i = v (1 - 10^{-n_i/c}) \quad (19)$$

Considerando due iterazioni successive,  $n_{i-1}$  ed  $n_i$ , si può definire lo *scarto relativo tra valori consecutivi*,  $s_i$ :

$$s_i = \left| \frac{v_i - v_{i-1}}{v} \right| \quad (20)$$

Utilizzando la (19), ed essendo  $n_{i-1} = n_i - 1$ , esso può essere messo in relazione con l'errore relativo:

$$s_i = 1 - 10^{-n_i/c} - (1 - 10^{-n_{i-1}/c}) = 10^{-n_i/c} (10^{1/c} - 1)$$

Si ottiene quindi:

$$e_i = p s_i \quad (21)$$

con:

$$p = \frac{1}{10^{1/c} - 1} \quad (22)$$

Nella tabella di figura 3.10 sono riportati i valori dei coefficienti  $c$  e  $p$  per i casi innanzi definiti. Si può notare come in assenza dell'operazione

Rapporto globale di rigidezza	SENZA OPERAZIONE DI IMPALCATO		CON OPERAZIONE DI IMPALCATO	
	$c$	$p$	$c$	$p$
1	2.1	0.50	1.5	0.28
10	14.1	5.64	3.8	1.20
100	72.8	31.12	12.9	5.12

Figura 3.10

di impalcato il numero di iterazioni necessario per ridurre di 10 volte l'errore sia rapidamente crescente all'aumentare del rapporto globale di rigidezza (ad esempio, bastano 2 iterazioni quando  $K = 1$ , mentre ne occorrono ben 72 quando  $K = 100$ ). Corrispondentemente cresce anche il coefficiente moltiplicativo  $p$ . Per  $K = 100$  l'errore relativo è oltre 30 volte maggiore dello scarto relativo tra valori consecutivi. Ciò significa che, in tal

caso, se due valori consecutivamente determinati differiscono tra loro ad esempio dell'1% essi possono differire dal valore finale del 30%. È quindi evidente che il raffronto tra i valori di successive iterazioni può non essere sufficientemente indicativo ai fini della valutazione del raggiungimento della convergenza.

L'esame della tabella anzidetta consente inoltre di rilevare l'effetto positivo dell'operazione di travaso spaziale. La sua applicazione comporta infatti un miglioramento della convergenza tanto più sensibile quanto più elevato è il rapporto globale di rigidezza pilastri/travi del telaio.

### 3.7.3. Estrapolazione dei valori.

Le relazioni innanzi determinate possono consentire di estrapolare i valori ottenuti con le prime iterazioni per ottenere il valore finale, o quanto meno un valore che ad esso meglio si approssimi. Infatti, se si considerano tre iterazioni consecutive,  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$ , dalla (18) si può ottenere:

$$e_2/e_1 = 10^{-1/c}$$

$$e_3/e_2 = 10^{-1/c}$$

e quindi:

$$e_2/e_1 = e_3/e_2$$

ovvero:

$$\frac{v - v_2}{v - v_1} = \frac{v - v_3}{v - v_2}$$

Si può quindi ricavare il valore finale:

$$v = \frac{v_2^2 - v_1 v_3}{2 v_2 - (v_1 + v_3)} \quad (23)$$

Applicando questa espressione ai valori della rotazione contenuti in fig. 3.7a, relativi alla quarta, quinta e sesta iterazione ( $1.449 \times 10^{-3}$ ,  $1.705 \times 10^{-3}$ ,  $1.904 \times 10^{-3}$ ), si ottiene il valore  $2.599 \times 10^{-3}$ . Esso non è ancora quello effettivo, perché l'andamento errore/iterazioni non è in realtà rigorosamente lineare. L'errore relativo si è però ridotto dal 31.7% al 6.8%.

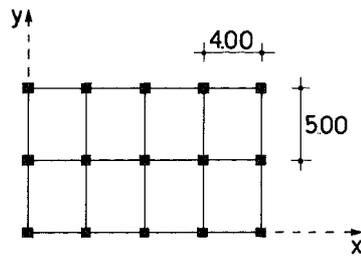
La (23) può essere vantaggiosamente utilizzata nella risoluzione manuale di uno schema intelaiato, piano o spaziale, per determinare saltuariamente valori maggiormente approssimati e ridurre quindi il numero di iterazioni necessario. La possibilità di irregolarità dell'andamento della convergenza, che comporterebbero per alcune grandezze un sensibile discostarsi dall'andamento lineare ipotizzato, richiede però un uso «ragionato» della formula. Essa appare pertanto poco adatta alla risoluzione automatica mediante elaboratore elettronico.

### 3.8. Effetto dell'operazione di impalcato.

Come già evidenziato nei paragrafi precedenti, la velocità di convergenza del procedimento iterativo di risoluzione di uno schema intelaiato spaziale dipende dal rapporto tra la rigidezza delle travi e quella dei pilastri. L'introduzione dell'operazione di impalcato migliora in genere la

convergenza del procedimento, consentendo un risparmio di tempo tanto maggiore quanto più elevato è il suddetto rapporto. Quando esso è invece basso, l'operazione di impalcato può risultare non solo superflua, ma addirittura dannosa, perché non riduce il numero di iterazioni necessarie mentre incrementa il tempo occorrente per ciascuna di esse.

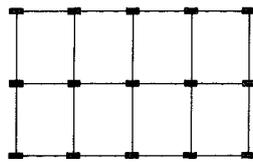
ORGANIZZAZIONE PLANIMETRICA



A - Pilastrini quadrati

$$K_x = 1667 \eta$$

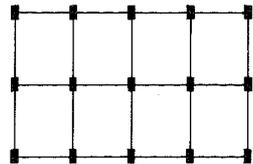
$$K_y = 2500 \eta$$



B - Pilastrini allungati in direzione x  
 ( $I_{Rmax}/I_{Rmin} = 5$ )

$$K_x = 1667 \eta$$

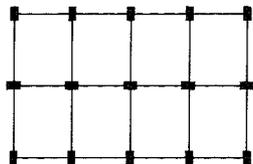
$$K_y = 0.500 \eta$$



C - Pilastrini allungati in direzione y

$$K_x = 0.333 \eta$$

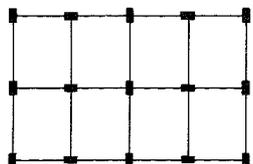
$$K_y = 2500 \eta$$



D - Pilastrini alternati

$$K_x = 0.778 \eta$$

$$K_y = 1833 \eta$$



E - Pilastrini alternati

$$K_x = 0.867 \eta$$

$$K_y = 1.700 \eta$$

$$\eta = \frac{I_{Rmax}}{I_T} \quad K_x = \frac{\sum_x \frac{I_{Rmax}}{h_R}}{\sum_x \frac{I_T}{l_T}} \quad K_y = \frac{\sum_y \frac{I_{Rmax}}{h_R}}{\sum_y \frac{I_T}{l_T}}$$

Figura 3.11

Per le applicazioni pratiche è opportuna una precisa quantizzazione delle considerazioni, puramente qualitative, innanzi esposte. Si è pertanto effettuata un'ampia indagine numerica, i cui risultati sono riportati e discussi nel seguito.

Tutte le elaborazioni sono state svolte utilizzando un programma che consente la risoluzione di telai spaziali con e senza operazione di impalcato. Esso è stato compilato mediante il Quick Basic Compiler e fatto girare su un personal computer con microprocessore Intel 8088 e sistema operativo MS-DOS. I tempi di soluzione sono ovviamente legati alle caratteristiche dell'elaboratore e del linguaggio adoperato. Nel valu-

### ORGANIZZAZIONE VERTICALE

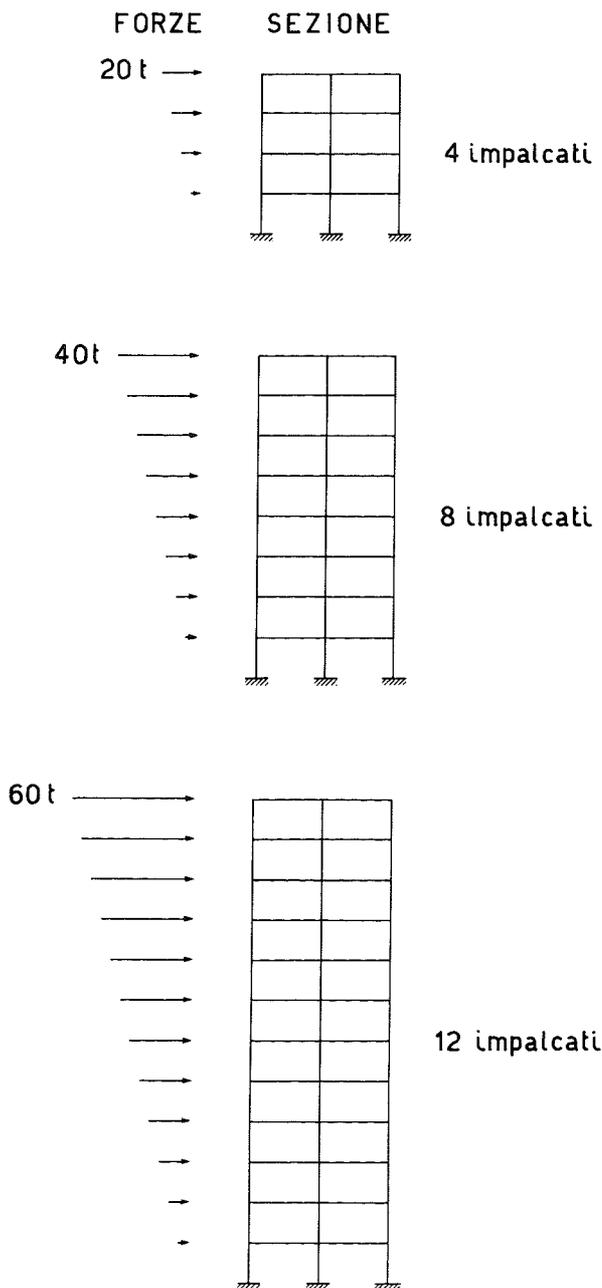


Figura 3.12

tare la convenienza dell'operazione di traverso spaziale interviene però solo il rapporto dei tempi impiegati per i singoli casi, rapporto che dipende in misura molto minore dal tipo di calcolatore. I risultati conseguiti possono pertanto con buona approssimazione essere considerati di validità generale.

Per constatare il raggiungimento della convergenza il programma effettua un controllo sul valore assoluto dello squilibrio (del momento flettente nel caso dei nodi, del taglio per gli impalcati). In tal modo il numero di iterazioni effettuate viene a dipendere solo dal rapporto delle rigidità delle aste e non dal loro valore. Esso è invece dipendente dall'entità delle forze, che è quindi stata considerata invariante per ciascun schema.

Per valutare l'effetto della distribuzione delle rigidità, oltre a quello del rapporto globale di rigidità travi/pilastri, si sono presi in considerazione cinque schemi planimetrici, riportati in figura 3.11. Lo schema A prevede pilastri quadrati, mentre per gli altri schemi i pilastri sono rettangolari, con rapporto 1:5 tra inerzia minima e massima. Negli schemi B e C tutti i pilastri presentano lo stesso orientamento (allungati rispettivamente in direzione x e y); negli schemi D e E essi sono disposti in maniera alternata.

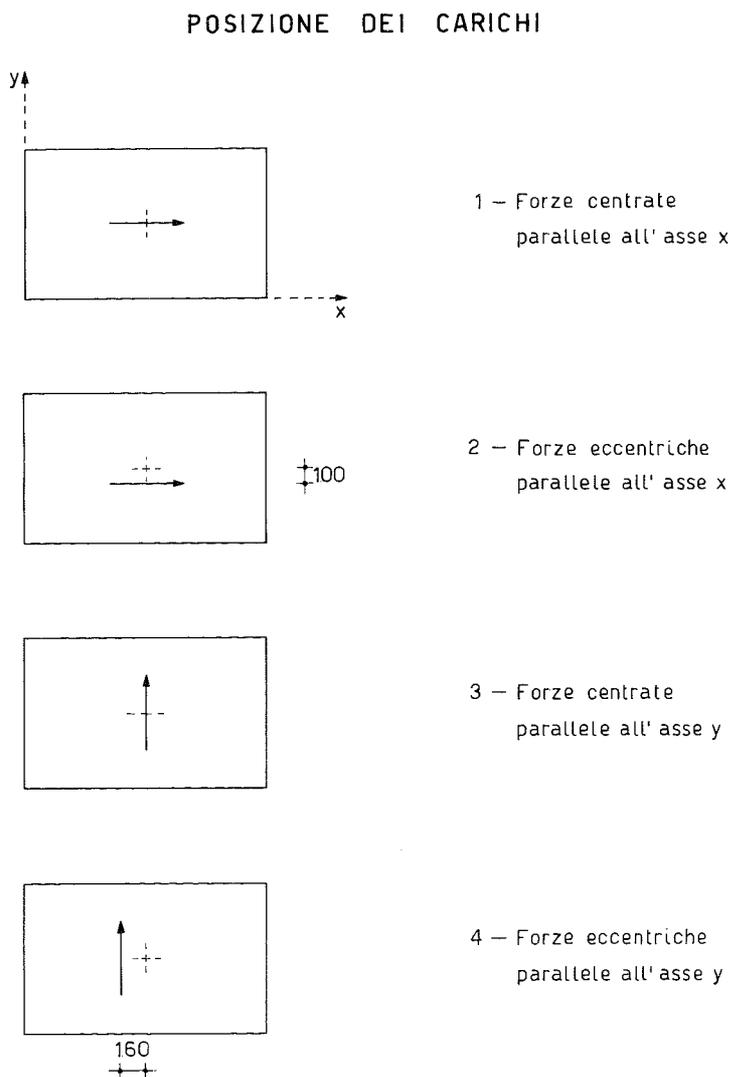


Figura 3.13

Per valutare l'influenza del numero di piani si sono analizzati schemi a 4, 8 e 12 impalcati, caricati con un insieme di forze ad andamento triangolare (fig. 3.12). Si sono inoltre considerati quattro schemi di carico, prevedendo forze agenti in direzione  $x$  o  $y$ , applicate nel baricentro geometrico oppure disposte con una eccentricità pari a un decimo della dimensione dell'edificio in pianta (fig. 3.13).

Nella tabella di figura 3.14 sono riportati i risultati ottenuti per lo schema a quattro piani con pilastri quadrati, al variare del rapporto globale di rigidezza e dello schema di carico. Si può osservare come la posizione e l'orientamento delle forze abbiano poca influenza sui tempi di risoluzione, che risultano solo leggermente superiori nel caso di forze eccentriche.

Nella tabella di figura 3.15 sono riportati i valori relativi allo stesso schema planimetrico con numero di piani pari a 8 e 12. Dal confronto con la precedente tabella si può notare come, a parità di rapporto globale di rigidezza, il numero di iterazioni necessario per la soluzione aumenta col numero dei piani solo nel caso di schemi con pilastri molto rigidi. Il tempo necessario per ciascuna iterazione cresce invece in maniera sostanzialmente lineare col numero di piani (circa 0.8 e 1.3 secondi a piano, rispettivamente in assenza e presenza dell'operazione di impalcato).

Nella tabella di figura 3.16 sono invece riportati i valori ottenuti al variare dello schema planimetrico e del numero di piani, avendo prefissato la posizione del carico e il rapporto di rigidezza (calcolato con riferimento ai soli telai paralleli alle forze). Si riscontra che lo scarto massimo tra i tempi di esecuzione richiesti dai diversi schemi è inferiore al 20%, con esclusione del solo schema B che richiede tempi sensibilmente superiori. Questo caso presenta però la particolarità di avere tutti i pilastri molti più rigidi nella direzione ortogonale alle forze applicate; se si fosse tenuto conto di ciò nella valutazione del rapporto globale di rigidezza, il valore per esso ottenuto sarebbe stato maggiore, coerentemente col maggior tempo di soluzione riscontrato.

Tutti i risultati ottenuti sono rappresentati graficamente nel diagramma in scala logaritmica di figura 3.17, unitamente a curve che mediano tali valori. In figura 3.18 è infine rappresentato il rapporto tra i tempi di soluzione necessari in presenza ed assenza dell'operazione di impalcato. Si può notare che questo rapporto  $r$  è in sostanza dipendente solo dal rapporto globale di rigidezza  $K$  e può essere con buona approssimazione espresso mediante la relazione:

$$r = \frac{40 + 5 K}{24 + 19 K} \quad (24)$$

Dall'esame dei diagrammi si può quindi concludere che l'operazione di impalcato comincia a diventare utile quando la rigidezza dei ritti supera quella delle travi. Il risparmio di tempo è già del 50% quando il rapporto globale di rigidezza è pari a 6 e tende a un limite superiore di circa il 75% all'ulteriore crescere della rigidezza dei ritti.

## Capitolo terzo

schema	piani	carico	K	SENZA OP. IMPALCATO		CON OP. IMPALCATO		rapp.
				n.iteraz.	tempo	n.iteraz.	tempo	
A	4	1	0.01	9	26"	9	44"	1.69
		2		9	28"	9	45"	1.61
		3		8	24"	8	39"	1.63
		4		9	28"	8	40"	1.43
A	4	1	0.03	9	27"	9	44"	1.63
		2		9	28"	10	49"	1.75
		3		8	24"	8	39"	1.63
		4		8	25"	8	39"	1.56
A	4	1	0.1	8	24"	8	37"	1.54
		2		9	28"	9	44"	1.57
		3		8	24"	8	39"	1.63
		4		8	26"	9	45"	1.73
A	4	1	0.3	8	24"	7	34"	1.42
		2		8	25"	7	35"	1.40
		3		9	27"	7	34"	1.26
		4		9	28"	8	39"	1.39
A	4	1	1	13	38"	8	39"	1.03
		2		14	44"	9	44"	1.00
		3		13	38"	8	38"	1.00
		4		13	41"	8	39"	0.95
A	4	1	3	26	1' 17"	10	48"	0.62
		2		28	1' 29"	12	59"	0.66
		3		26	1' 17"	11	53"	0.69
		4		26	1' 23"	12	59"	0.71
A	4	1	10	61	3' 03"	16	1' 17"	0.421
		2		71	3' 49"	16	1' 19"	0.345
		3		62	3' 05"	16	1' 18"	0.422
		4		62	3' 19"	16	1' 19"	0.397
A	4	1	30	137	6' 51"	28	2' 17"	0.333
		2		146	7' 54"	29	2' 24"	0.304
		3		149	7' 25"	28	2' 17"	0.308
		4		150	8' 02"	30	2' 29"	0.309
A	4	1	100	293	14' 39"	52	4' 00"	0.273
		2		294	15' 55"	53	4' 24"	0.276
		3		276	13' 49"	52	4' 15"	0.308
		4		304	15' 18"	52	4' 19"	0.282
A	4	1	300	428	21' 25"	73	5' 37"	0.262
		2		455	24' 32"	77	6' 25"	0.262
		3		402	20' 08"	75	6' 09"	0.305
		4		452	24' 15"	75	6' 14"	0.257
A	4	1	1000	529	26' 48"	90	7' 16"	0.271
		2		516	27' 54"	88	7' 21"	0.263
		3		516	25' 47"	87	7' 07"	0.276
		4		532	28' 38"	91	7' 34"	0.264

Figura 3.14

Rapidità di convergenza  
del procedimento di risoluzi-  
one dei telai spaziali

schema	piani	carico	K	SENZA OP. IMPALCATO		CON OP. IMPALCATO		rapp.
				n.iteraz.	tempo	n.iteraz.	tempo	
A	8	4	0.01	9	59"	9	1'33"	1.58
				9	59"	9	1'34"	1.59
				9	58"	8	1'23"	1.43
				10	1'05"	8	1'22"	1.26
				16	1'45"	13	2'13"	1.27
				32	3'32"	12	2'04"	0.58
				89	9'52"	23	3'58"	0.402
				223	24'48"	44	7'36"	0.306
				596	66'26"	106	10'22"	0.277
				>750	--	409	69'40"	--
4	1000	>750	--	>750	--	--		
A	12	4	0.01	9	1'29"	10	2'37"	1.76
				9	1'29"	9	2'22"	1.60
				9	1'30"	12	3'07"	2.08
				11	1'48"	8	2'06"	1.17
				17	2'49"	12	3'07"	1.11
				39	6'30"	13	3'24"	0.52
				98	16'30"	24	6'18"	0.382
				263	44'21"	48	12'40"	0.286
				>500	--	333	85'45"	--
				>500	--	>500	--	--
4	1000	>500	--	>500	--	--		

Figura 3.15

schema	piani	carico	K	SENZA OP. IMPALCATO		CON OP. IMPALCATO		rapp.
				n.iteraz.	tempo	n.iteraz.	tempo	
A	4	4	10	62	3'20"	16	1'20"	0.359
B				112	5'56"	21	1'44"	0.292
C				64	3'24"	17	1'24"	0.412
D				78	4'06"	21	1'41"	0.411
E				70	3'42"	18	1'29"	0.401
A	8	4	10	90	9'58"	21	3'38"	0.365
B				153	16'55"	28	4'51"	0.287
C				87	9'36"	21	3'37"	0.377
D				102	11'08"	28	4'42"	0.422
E				91	10'00"	23	3'58"	0.397
A	12	4	10	99	16'39"	22	5'47"	0.347
B				177	29'41"	32	8'26"	0.284
C				97	16'15"	23	6'02"	0.371
D				114	18'54"	29	7'26"	0.393
E				103	17'11"	30	7'49"	0.455

Figura 3.16

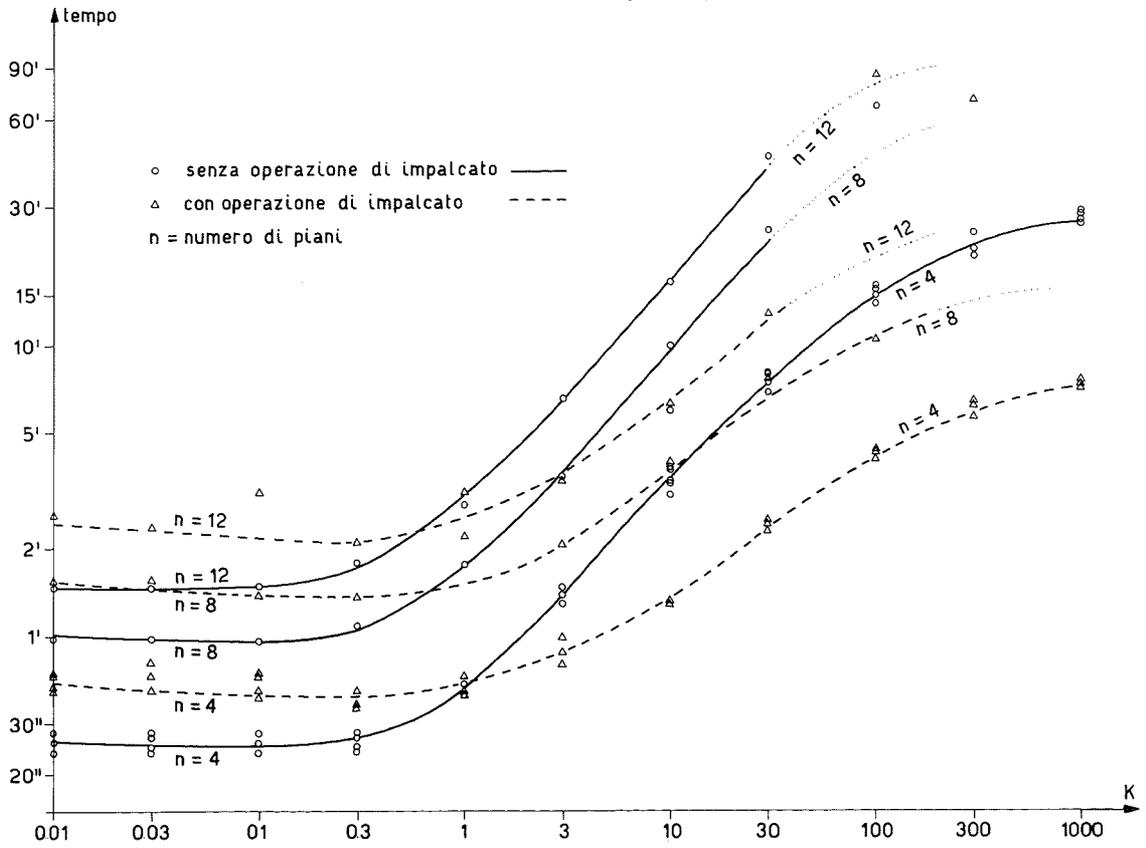


Figura 3.17

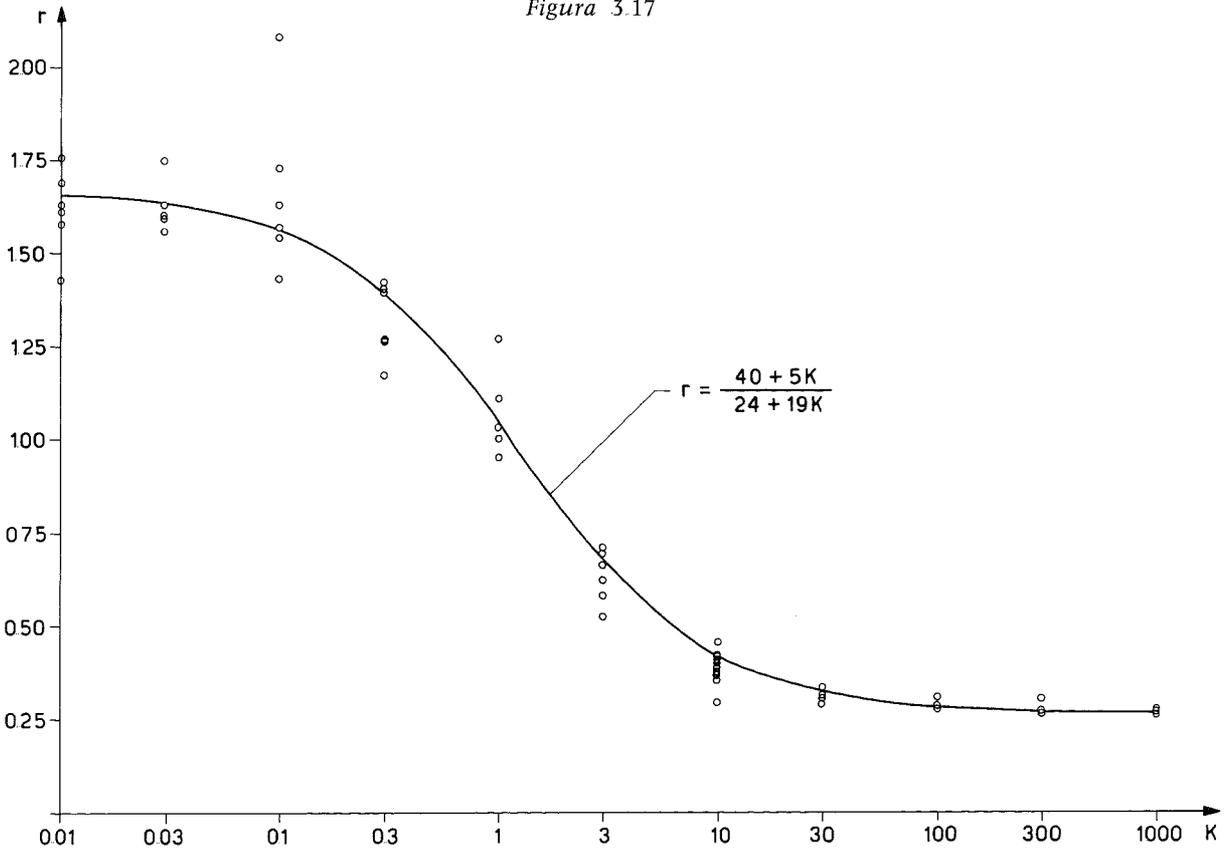


Figura 3.18

1. M. Pagano, *Sul calcolo dei telai a nodi spostabili*, Giornale del Genio Civile, 1957.
2. G. Morabito, *Una modifica al procedimento di G. Kani*, Giornale del Genio Civile, 1965.
3. F. Mazzolani, *Metodi di calcolo a rapida convergenza per telai multipiani (parte prima)*, Giornale del Genio Civile, 1967.
4. F. Mazzolani, *Metodi di calcolo a rapida convergenza per telai multipiani (parte seconda)*, Giornale del Genio Civile, 1967.
5. A. Giliberti, *Un più spedito procedimento di calcolo dei telai a maglie rettangolari caricate da forze orizzontali nei nodi*, Giornale del Genio Civile, 1976.
6. A. Ghersi, *Strutture intelaiate spaziali per edifici*, Giornale del Genio Civile, 1977.
7. A. Ghersi, *Impostazione manuale del calcolo dei telai spaziali*, Ingegneri, 1979.
8. M. Pagano, *Teoria degli edifici. Telai per edifici a maglie rettangolari*, Liguori, 1979.



APPENDICE AL CAPITOLO TERZO  
PROGRAMMA PER LA RISOLUZIONE DI UN TELAIO SPAZIALE  
CON L'OPERAZIONE DI IMPALCATO

Aurelio Gherzi

**a. Introduzione.**

Il programma che qui si presenta è una estensione di quello illustrato in appendice al capitolo primo, e consente di utilizzare nella risoluzione del sistema l'operazione di impalcato. Ciò rende necessario l'uso di un maggior numero di variabili; di conseguenza il dimensionamento, fatto nell'intento di non superare un ingombro di memoria di 64 Kbytes, limita il programma alla risoluzione di schemi composti da un massimo di 20 telai, con un totale di 65 pilastri e 7 piani.

I paragrafi successivi contengono la documentazione del programma, vista come integrazione di quella già fornita per la versione base. Il paragrafo b contiene la descrizione delle variabili aggiunte rispetto alla prima versione. In esso sono anche riportate precise indicazioni sull'ingombro di memoria, che consentono di variare i limiti anzidetti in funzione della capacità di memoria del proprio calcolatore e delle possibilità del BASIC utilizzato. Nel paragrafo c sono descritti i blocchi di istruzioni aggiunti o modificati. Il relativo listato è riportato nel successivo paragrafo d. Il paragrafo e contiene le indicazioni necessarie per utilizzare il programma. Il paragrafo f contiene infine un esempio, costituito dallo stesso schema analizzato nel paragrafo 3.6. Per esso sono riportati i dati necessari per l'elaborazione ed i risultati conseguentemente ottenuti.

**b. Elenco delle variabili.**

L'utilizzazione dell'operazione di impalcato non comporta alcuna variazione delle informazioni di ingresso. Solo nelle fasi di preparazione e risoluzione occorre memorizzare un limitato numero di valori, strettamente connessi con l'operazione.

Si riporta di seguito l'elenco delle variabili che sono state aggiunte rispetto alla versione base illustrata in appendice al capitolo primo. Si analizza infine il nuovo ingombro complessivo di memoria, in modo da consentire con facilità variazioni dei limiti di dimensionamento.

teoria	programma	descrizione
$w_{js}^{**}$	WPI (J, K)	rigidezza di traverso (tm)
$x_{G_{js}}$	XI (K)	ascissa del baricentro delle rigidezze di traverso (m)
$y_{G_{js}}$	YI (K)	ordinata del baricentro delle rigidezze di traverso (m)
$d_{js}^{**}$	DI (J, K)	distanza del telaio dal baricentro delle rigidezze di traverso (m)
	WXI (K)	somma delle rigidezze di traverso dei telai paralleli all'asse x (tm)
	WYI (K)	somma delle rigidezze di traverso dei telai paralleli all'asse y (tm)

teoria	programma	descrizione
	WFI (K)	momento d'inerzia delle rigidezze di traverso rispetto al loro baricentro ( $\text{tm}^3$ )
$w_i^{**}$	WNI (I, K)	somma degli indici di rigidezza delle travi e dei ritti che convergono nel nodo i, moltiplicati rispettivamente per 6 e per 4 (tm)
$w'_{js}$	WP (J, K)	somma degli indici di rigidezza dei ritti di un interpiano
	SX (K)	somma dei momenti di incastro perfetto per tutti i telai paralleli all'asse x (tm)
	SY (K)	somma dei momenti di incastro perfetto per tutti i telai paralleli all'asse y (tm)
	SF (K)	momento d'inerzia dei momenti di incastro perfetto rispetto al baricentro delle rigidezze di traverso ( $\text{tm}^3$ )
$\delta_{Gsx}^{**}/h_s$	DXI	rapporto tra spostamento relativo in direzione x provocato dall'operazione di impalcato e altezza dell'interpiano
$\delta_{Gsy}^{**}/h_s$	DYI	rapporto tra spostamento relativo in direzione y provocato dall'operazione di impalcato e altezza dell'interpiano
$\Phi_s^{**}/h_s$	DFI	rapporto tra rotazione relativa provocata dalla operazione di impalcato e altezza dell'interpiano

### *Ingombro complessivo di memoria*

L'ingombro della versione in GWBASIC del programma è di circa 20 Kbytes. L'ingombro delle variabili può essere calcolato in funzione dei valori massimi di MI, MJ, MK, ML utilizzati nel loro dimensionamento. Si sono utilizzate 56 variabili con indice e 34 variabili semplici, per un numero totale di valori pari a:

$$18 \times MI \times MK + 5 \times MJ \times MK + 2 \times MI + 3 \times MJ + 18 \times MK + 3 \times ML + 33.$$

Se si pone  $MI = 65$ ,  $MK = 7$ ,  $MJ = 20$ ,  $ML = 50$ , il numero totale di variabili è pari a 9389, corrispondente a un ingombro di memoria pari a quasi 40 Kbytes, valore che, sommato a quello del programma, si mantiene inferiore al limite di 64 Kbytes, caratteristico del GWBASIC.

Lo stesso ingombro complessivo può essere ottenuto variando i limiti del dimensionamento l'uno a scapito degli altri. Si può così, per esempio, portare il numero massimo dei piani MK a 10 riducendo il numero dei pilastri MI a 45, oppure abbassarlo a 3 aumentando MI a 160.

### **c. Descrizione del programma.**

Nel listato, riportato nel paragrafo seguente, sono riportati esclusivamente quei blocchi di istruzioni che hanno subito aggiunte o modifiche rispetto alla versione base. Denominando i blocchi principali con le stesse lettere utilizzate nel paragrafo 1.c, si ha:

A) Dimensionamento delle variabili con indice.

Nella linea 100 è stato ridotto il valore limite per il numero di pilastri. Sono state aggiunte le linee 190-200, contenenti il dimensionamento delle nuove variabili.

B) Programma principale.

Inalterato.

C) Input dei dati geometrici ed elastici.

Inalterato.

D) Stampa dei dati geometrici ed elastici.

Inalterato.

E) Elaborazione iniziale dei dati geometrici.

Sono rimaste sostanzialmente invariate, anche se rinumerate, le istruzioni per il calcolo delle grandezze geometriche ed elastiche legate alle operazioni di nodo e piano. A queste sono state aggiunte istruzioni per la determinazione dei valori necessari per l'operazione di impalcato: somma degli indici di rigidezza dei ritti per ciascun telaio, rigidezze di traverso, somma degli indici di rigidezza delle travi e dei ritti che convergono in un nodo moltiplicate per 6 e per 4, coordinate del baricentro delle rigidezze di traverso e loro somma e momento d'inerzia baricentrico.

F) Input dei carichi verticali, nodali ed orizzontali.

Inalterato.

G) Stampa dei dati relativi ai carichi.

Inalterato.

H) Elaborazione iniziale dei dati relativi ai carichi.

Sono state aggiunte istruzioni per il calcolo della somma dei momenti di incastro perfetto e del loro momento rispetto al baricentro delle rigidezze di traverso.

I) Risoluzione iterativa del sistema.

Sono rimaste invariate, anche se rinumerate, le istruzioni per l'azzeramento delle incognite e per le operazioni di nodo e piano. Ad esse sono state aggiunte istruzioni per l'effettuazione dell'operazione di impalcato.

L) Calcolo delle caratteristiche di sollecitazione agli estremi delle aste e degli spostamenti assoluti dei traversi.

Inalterato.

M) Stampa dei risultati.

Inalterato.

## d. Codifica del programma

Si riportano di seguito solo i blocchi variati rispetto alla impostazione di base, individuati mediante le lettere già utilizzate nel paragrafo 1.c.

## A) Dimensionamento delle variabili.

```

100 MI=70 : MK=7 : ML=50 : MJ=20 'valori limite per gli indici degli array
110 OPTION BASE 1 '           estremo inferiore dell'indice degli array
120 DIM MR(MJ), IR(MJ), DL(MI-1), H(MK), NP(MI), DT(MJ)
130 DIM NT(MI-1, MK), NR(MI, MK), ZB(ML), ZH(ML), ZI(ML)
140 DIM WT(MI-1, MK), WR(MI, MK), WN(MI, MK), XG(MK), YG(MK), DG(MJ, MK), WX(MK),
    WY(MK), WF(MK)
150 DIM Q(MI-1, MK), MN(MI, MK), XF(MK), YF(MK), FX(MK), FY(MK), FM(MK)
160 DIM SM(MI, MK), QX(MK), QY(MK), QM(MK)
170 DIM FI(MI, MK), DX(MK), DY(MK), DF(MK), D(MJ, MK)
180 DIM MS(MI-1, MK), MD(MI-1, MK), MT(MI, MK), MP(MI, MK), TS(MI-1, MK),
    TD(MI-1, MK), TR(MI, MK), SN(MI, MK)
190 DIM WNI(MI, MK), WP(MJ, MK), WPI(MJ, MK), DI(MJ, MK), WXI(MK), WYI(MK), WFI(MK)
200 DIM XI(MK), YI(MK), SX(MK), SY(MK), SF(MK)

```

## E) Elaborazione iniziale dei dati geometrici.

```

3000 GOSUB 3100 '           indici di rigidezza di travi e pilastri
3005 GOSUB 3200 '           somma degli indici di rigidezza nei nodi
3010 GOSUB 3300 '           somma indici rigidezza ritti, per telaio
3015 GOSUB 3400 '           baricentro dei w' e somma nel piano
3020 GOSUB 3600 '           somma ind. rigid. nei nodi, per op. impalcato
3025 GOSUB 3700 '           rigidezza di traverso
3030 GOSUB 3800 '           baricentro rigidezze traverso e loro somma
3035 RETURN
3080 '
3090 ' --- calcola gli indici di rigidezza di travi e pilastri
3100 FOR K=1 TO KZ
3105   FOR J=1 TO JZ
3110     FOR I=IR(J)+1 TO IR(J)+MR(J)-1
3115       L=NT(I, K)
3120       WT(I, K)=E*ZI(L)/DL(I)
3125     NEXT I
3130   NEXT J
3135   FOR I=1 TO IZ
3140     L=NR(I, K)
3145     WR(I, K)=E*ZI(L)/H(K)
3150   NEXT I
3155 NEXT K
3160 RETURN
3180 '
3190 ' --- calcola la somma degli indici di rigidezza delle aste nei nodi
3200 FOR K=1 TO KZ
3205   I=0
3210   FOR J=1 TO JZ
3215     FOR M=1 TO MR(J)
3220       I=I+1
3225       S=WR(I, K)
3230       IF M>1 THEN S=S+WT(I-1, K)
3235       IF M<MR(J) THEN S=S+WT(I, K)
3240       IF K<KZ THEN S=S+WR(I, K+1)
3245       WN(I, K)=S
3250     NEXT M
3255   NEXT J
3260 NEXT K
3265 RETURN

```

```

3280 '
3290 ' --- calcola la somma degli indici di rigidezza dei ritli,
      per interpiano e per telaio
3300 FOR K=1 TO KZ
3305   FOR J=1 TO JZ
3310     S=0
3315     FOR I=IR(J)+1 TO IR(J)+MR(J)
3320       S=S+WR(I,K)
3325     NEXT I
3330     WP(J,K)=S
3335   NEXT J
3340 NEXT K
3345 RETURN
3380 '
3390 ' --- calcola baricentro dei w' e loro somma nel piano
3400 FOR K=1 TO KZ
3405   J1=1 : J2=JX
3410   GOSUB 3500 '           calcola baricentro delle rigidezze
3415   WX(K)=S : WF(K)=S2
3420   YG(K)=S1
3425   FOR J=J1 TO J2
3430     DG(J,K)=DT(J)-YG(K)
3435   NEXT J
3440   J1=JX+1 : J2=JZ
3445   GOSUB 3500 '           calcola baricentro delle rigidezze
3450   WY(K)=S : WF(K)=WF(K)+S2
3455   XG(K)=S1
3460   FOR J=J1 TO J2
3465     DG(J,K)=XG(K)-DT(J)
3470   NEXT J
3475 NEXT K
3480 RETURN
3485 '
3490 ' --- calcola baricentro delle rigidezze
3500 S=0 : S1=0 : S2=0
3505 H2=1/H(K)^2
3510 FOR J=J1 TO J2
3515   V=WP(J,K)*H2
3520   S=S+V
3525   S1=S1+V*DT(J)
3530   S2=S2+V*DT(J)^2
3535 NEXT J
3540 IF S<>0 THEN S1=S1/S '       S=0 se non esistono telai in una direzione
3545 S2=S2-S*S1^2
3550 RETURN
3580 '
3590 ' --- calcola la somma degli indici di rigidezza delle aste nei nodi,
      per l'operazione di impalcato
3600 FOR K=1 TO KZ
3605   I=0
3610   FOR J=1 TO JZ
3615     FOR M=1 TO MR(J)
3620       I=I+1
3625       S=4*WR(I,K)
3630       IF M>1 THEN S=S+6*WT(I-1,K)
3635       IF M<MR(J) THEN S=S+6*WT(I,K)
3640       IF K<KZ THEN S=S+4*WR(I,K+1)
3645       WNI(I,K)=S
3650     NEXT M
3655   NEXT J
3660 NEXT K
3665 RETURN
3680 '
3690 ' --- calcola la rigidezza di traverso
3700 FOR K=1 TO KZ
3705   FOR J=1 TO JZ
3710     S=2*WP(J,K)
3715     IF K<KZ THEN S=S+2*WP(J,K+1)

```

```

3720     FOR I=IR(J)+1 TO IR(J)+MR(J)-1
3725         S=S+24*WT(I,K)
3730     NEXT I
3735     WPI(J,K)=S
3740 NEXT J
3745 NEXT K
3750 RETURN
3780 '
3790 ' --- calcola baricentro delle rig. di traverso e loro somma nel piano
3800 FOR K=1 TO KZ
3805     J1=1 : J2=JX
3810     GOSUB 3900 '          calcola baricentro delle rigidezze di traverso
3815     WXI(K)=S : WFI(K)=S2
3820     YI(K)=S1
3825     FOR J=J1 TO J2
3830         DI(J,K)=DT(J)-YI(K)
3835     NEXT J
3840     J1=JX+1 : J2=JZ
3845     GOSUB 3900 '          calcola baricentro delle rigidezze di traverso
3850     WYI(K)=S : WFI(K)=WFI(K)+S2
3855     XI(K)=S1
3860     FOR J=J1 TO J2
3865         DI(J,K)=XI(K)-DT(J)
3870     NEXT J
3875 NEXT K
3880 RETURN
3885 '
3890 ' --- calcola baricentro delle rigidezze di traverso
3900 S=0 : S1=0 : S2=0
3910 FOR J=J1 TO J2
3915     V=WPI(J,K)
3920     S=S+V
3925     S1=S1+V*DT(J)
3930     S2=S2+V*DT(J)^2
3935 NEXT J
3940 IF S<>0 THEN S1=S1/S '          S=0 se non esistono telai in una direzione
3945 S2=S2-S*S1^2
3950 RETURN

```

#### H) Elaborazione iniziale dei dati relativi ai carichi.

```

6000 GOSUB 6100 '          somma momenti d'incastro e nodali
6010 GOSUB 6300 '          somma forze e momenti di piano
6020 GOSUB 6500 '          somma e momento d'inerzia dei momenti
                          d'incastro per impalcato
6030 RETURN

6480 '
6490 ' --- calcola somma e momento d'inerzia
        dei momenti d'incastro perfetto nell'impalcato
6500 FOR K=1 TO KZ
6505     J1=1 : J2=JX
6510     GOSUB 6600 '          somma momenti d'incastro
6515     SX(K)=S : SF(K)=S2
6520     J1=JX+1 : J2=JZ
6525     GOSUB 6600 '          somma momenti d'incastro
6530     SY(K)=S : SF(K)=SF(K)+S2
6535 NEXT K
6540 RETURN
6580 '
6590 ' -- somma i momenti d'incastro perfetto per piu' telai
6600 S=0 : S2=0
6605 FOR J=J1 TO J2
6610     V=0
6615     FOR I=IR(J)+1 TO IR(J)+MR(J)
6620         V=V+SM(I,K)
6625     NEXT I

```

```

6630 S=S+V
6635 S2=S2+V*DI(J,K)^2
6640 NEXT J
6645 RETURN

```

Rapidità di convergenza  
del procedimento di riso-  
luzione dei telai spaziali

### 1) Risoluzione iterativa del sistema.

```

7000 GOSUB 7100 ' azzera rotazioni e spostamenti
7005 SQ=0
7010 FOR K=1 TO KZ
7015 I=0
7020 FOR J=1 TO JZ
7025 FOR M=1 TO MR(J)
7030 I=I+1
7035 GOSUB 7200 ' operazione di nodo
7040 NEXT M
7045 NEXT J
7050 GOSUB 7400 ' operazione di piano
7055 GOSUB 7600 ' operazione di impalcato
7060 NEXT K
7065 IF SQ<>0 THEN 7005
7070 RETURN
7080 '
7090 ' --- azzera rotazioni e spostamenti
7100 FOR K=1 TO KZ
7105 FOR I=1 TO IZ
7110 FI(I,K)=0
7115 NEXT I
7120 FOR J=1 TO JZ
7125 D(J,K)=0
7130 NEXT J
7135 DX(K)=0 : DY(K)=0 : DF(K)=0
7140 NEXT K
7145 RETURN
7180 '
7190 ' --- operazione di nodo per il nodo I,K
7200 IF WN(I,K)=0 THEN RETURN
7205 S=SM(I,K)+6*WR(I,K)*D(J,K)/H(K)
7210 IF K>1 THEN S=S-2*WR(I,K)*FI(I,K-1)
7215 IF K<KZ THEN S=S+6*WR(I,K+1)*D(J,K+1)/H(K+1)-2*WR(I,K+1)*FI(I,K+1)
7220 IF M>1 THEN S=S-2*WT(I-1,K)*FI(I-1,K)
7225 IF M<MR(J) THEN S=S-2*WT(I,K)*FI(I+1,K)
7230 IF ABS(S-4*WN(I,K)*FI(I,K))<.0005 THEN RETURN
7235 FI(I,K)=S/4/WN(I,K)
7240 SQ=1
7245 RETURN
7380 '
7390 ' --- operazione di piano per il piano K
7400 S2=0
7405 J1=1 : J2=JX : GOSUB 7500 ' somma
7410 S1=QX(K)+6*S1/H(K)
7415 IF ABS(S1-12*WX(K)*DX(K))>.0005 THEN DX(K)=S1/12/WX(K) : SQ=1
7420 J1=JX+1 : J2=JZ : GOSUB 7500 ' somma
7425 S1=QY(K)+6*S1/H(K)
7430 IF ABS(S1-12*WY(K)*DY(K))>.0005 THEN DY(K)=S1/12/WY(K) : SQ=1
7435 S2=QM(K)+6*S2/H(K)
7440 IF ABS(S2-12*WF(K)*DF(K))>.0005 THEN DF(K)=S2/12/WF(K) : SQ=1
7445 FOR J=1 TO JX
7450 D(J,K)=DX(K)+DG(J,K)*DF(K)
7455 NEXT J
7460 FOR J=JX+1 TO JZ
7465 D(J,K)=DY(K)+DG(J,K)*DF(K)
7470 NEXT J
7475 RETURN
7480 '
7490 ' -- somma
7500 S1=0

```

## Capitolo terzo

```

7505 FOR J=J1 TO J2
7510   S=0
7515   FOR I=IR(J)+1 TO IR(J)+MR(J)
7520     V=FI(I,K)
7525     IF K>1 THEN V=V+FI(I,K-1)
7530     S=S+V*WR(I,K)
7535   NEXT I
7540   S1=S1+S
7545   S2=S2+S*DG(J,K)
7550 NEXT J
7555 RETURN
7580 '
7590 ' --- operazione di traverso spaziale per l'impalcato K
7600 S2=SF(K)
7605 J1=1 : J2=JX : GOSUB 7800 '          somma squilibrio momenti
7610 S1=S1+SX(K)
7615 DXI=-S1/WXI(K)
7620 J1=JX+1 : J2=JZ : GOSUB 7800 '      somma squilibrio momenti
7625 S1=S1+SY(K)
7630 DYI=-S1/WYI(K)
7635 DFI=-S2/WFI(K)
7640 FOR J=1 TO JZ
7645   IF J<=JX THEN V=DXI ELSE V=DYI
7650   V=V+DFI*DI(J,K)
7655   D(J,K)=D(J,K)+V*H(K)
7660   IF K<KZ THEN D(J,K+1)=D(J,K+1)+V*H(K+1)
7665   V=2*V
7670   FOR I=IR(J)+1 TO IR(J)+MR(J)
7675     FI(I,K)=FI(I,K)+V
7680   NEXT I
7685 NEXT J
7690 DX(K)=DX(K)+(DXI+DFI*(YG(K)-YI(K)))*H(K)
7695 DY(K)=DY(K)+(DYI-DFI*(XG(K)-XI(K)))*H(K)
7700 DF(K)=DF(K)+DFI*H(K)
7705 IF K>=KZ THEN 7725
7710   DX(K+1)=DX(K+1)+(DXI+DFI*(YG(K+1)-YI(K)))*H(K+1)
7715   DY(K+1)=DY(K+1)+(DYI-DFI*(XG(K+1)-XI(K)))*H(K+1)
7720   DF(K+1)=DF(K+1)+DFI*H(K+1)
7725 RETURN
7780 '
7790 ' -- somma squilibrio momenti
7800 S1=0
7805 FOR J=J1 TO J2
7810   S=-6*WP(J,K)*D(J,K)/H(K)
7815   IF K<KZ THEN S=S-6*WP(J,K+1)*D(J,K+1)/H(K)
7820   FOR I=IR(J)+1 TO IR(J)+MR(J)
7825     S=S+WNI(I,K)*FI(I,K)
7830     IF K>1 THEN S=S+WR(I,K)*2*FI(I,K-1)
7835     IF K<KZ THEN S=S+WR(I,K+1)*2*FI(I,K+1)
7840   NEXT I
7845   S1=S1+S
7850   S2=S2+S*DI(J,K)
7855 NEXT J
7860 RETURN

```



## Capitolo terzo

## ALTEZZA DEI PIANI

PIANO	ALTEZZA (M)
1	3.00
2	3.00
3	3.00
4	3.00

## POSIZIONE DEI TELAI

TELAIO	DISTANZA DALL'ASSE (M)
1 X	0.00
2 X	5.00
3 X	10.00
1 Y	0.00
2 Y	4.00
3 Y	8.00
4 Y	12.00
5 Y	16.00

## LUCI E SEZIONI DELLE TRAVI

TELAIO	CAMPATA	PIANO	LUCE (M)	B (M)	H (M)	INERZIA (M <sup>4</sup> )
1 X	1 - 2	1	4.00	0.42	0.26	0.000640
1 X	1 - 2	2	4.00	0.42	0.26	0.000640
1 X	1 - 2	3	4.00	0.42	0.26	0.000640
1 X	1 - 2	4	4.00	0.42	0.26	0.000640
1 X	2 - 3	1	4.00	0.42	0.26	0.000640
1 X	2 - 3	2	4.00	0.42	0.26	0.000640
1 X	2 - 3	3	4.00	0.42	0.26	0.000640
1 X	2 - 3	4	4.00	0.42	0.26	0.000640
1 X	3 - 4	1	4.00	0.42	0.26	0.000640
1 X	3 - 4	2	4.00	0.42	0.26	0.000640
1 X	3 - 4	3	4.00	0.42	0.26	0.000640
1 X	3 - 4	4	4.00	0.42	0.26	0.000640
1 X	4 - 5	1	4.00	0.42	0.26	0.000640
1 X	4 - 5	2	4.00	0.42	0.26	0.000640
1 X	4 - 5	3	4.00	0.42	0.26	0.000640
1 X	4 - 5	4	4.00	0.42	0.26	0.000640
2 X	6 - 7	1	4.00	0.42	0.26	0.000640
2 X	6 - 7	2	4.00	0.42	0.26	0.000640
2 X	6 - 7	3	4.00	0.42	0.26	0.000640
2 X	6 - 7	4	4.00	0.42	0.26	0.000640
2 X	7 - 8	1	4.00	0.42	0.26	0.000640
2 X	7 - 8	2	4.00	0.42	0.26	0.000640
2 X	7 - 8	3	4.00	0.42	0.26	0.000640
2 X	7 - 8	4	4.00	0.42	0.26	0.000640
2 X	8 - 9	1	4.00	0.42	0.26	0.000640
2 X	8 - 9	2	4.00	0.42	0.26	0.000640
2 X	8 - 9	3	4.00	0.42	0.26	0.000640
2 X	8 - 9	4	4.00	0.42	0.26	0.000640

**Rapidità di convergenza  
del procedimento di risoluzi-  
one dei telai spaziali**

2 X	9 - 10	1	4.00	0.42	0.26	0.000640
2 X	9 - 10	2	4.00	0.42	0.26	0.000640
2 X	9 - 10	3	4.00	0.42	0.26	0.000640
2 X	9 - 10	4	4.00	0.42	0.26	0.000640
3 X	11 - 12	1	4.00	0.42	0.26	0.000640
3 X	11 - 12	2	4.00	0.42	0.26	0.000640
3 X	11 - 12	3	4.00	0.42	0.26	0.000640
3 X	11 - 12	4	4.00	0.42	0.26	0.000640
3 X	12 - 13	1	4.00	0.42	0.26	0.000640
3 X	12 - 13	2	4.00	0.42	0.26	0.000640
3 X	12 - 13	3	4.00	0.42	0.26	0.000640
3 X	12 - 13	4	4.00	0.42	0.26	0.000640
3 X	13 - 14	1	4.00	0.42	0.26	0.000640
3 X	13 - 14	2	4.00	0.42	0.26	0.000640
3 X	13 - 14	3	4.00	0.42	0.26	0.000640
3 X	13 - 14	4	4.00	0.42	0.26	0.000640
3 X	14 - 15	1	4.00	0.42	0.26	0.000640
3 X	14 - 15	2	4.00	0.42	0.26	0.000640
3 X	14 - 15	3	4.00	0.42	0.26	0.000640
3 X	14 - 15	4	4.00	0.42	0.26	0.000640
1 Y	1 - 6	1	5.00	0.42	0.26	0.000640
1 Y	1 - 6	2	5.00	0.42	0.26	0.000640
1 Y	1 - 6	3	5.00	0.42	0.26	0.000640
1 Y	1 - 6	4	5.00	0.42	0.26	0.000640
1 Y	6 - 11	1	5.00	0.42	0.26	0.000640
1 Y	6 - 11	2	5.00	0.42	0.26	0.000640
1 Y	6 - 11	3	5.00	0.42	0.26	0.000640
1 Y	6 - 11	4	5.00	0.42	0.26	0.000640
2 Y	2 - 7	1	5.00	0.42	0.26	0.000640
2 Y	2 - 7	2	5.00	0.42	0.26	0.000640
2 Y	2 - 7	3	5.00	0.42	0.26	0.000640
2 Y	2 - 7	4	5.00	0.42	0.26	0.000640
2 Y	7 - 12	1	5.00	0.42	0.26	0.000640
2 Y	7 - 12	2	5.00	0.42	0.26	0.000640
2 Y	7 - 12	3	5.00	0.42	0.26	0.000640
2 Y	7 - 12	4	5.00	0.42	0.26	0.000640
3 Y	3 - 8	1	5.00	0.42	0.26	0.000640
3 Y	3 - 8	2	5.00	0.42	0.26	0.000640
3 Y	3 - 8	3	5.00	0.42	0.26	0.000640
3 Y	3 - 8	4	5.00	0.42	0.26	0.000640
3 Y	8 - 13	1	5.00	0.42	0.26	0.000640
3 Y	8 - 13	2	5.00	0.42	0.26	0.000640
3 Y	8 - 13	3	5.00	0.42	0.26	0.000640
3 Y	8 - 13	4	5.00	0.42	0.26	0.000640
4 Y	4 - 9	1	5.00	0.42	0.26	0.000640
4 Y	4 - 9	2	5.00	0.42	0.26	0.000640
4 Y	4 - 9	3	5.00	0.42	0.26	0.000640
4 Y	4 - 9	4	5.00	0.42	0.26	0.000640
4 Y	9 - 14	1	5.00	0.42	0.26	0.000640
4 Y	9 - 14	2	5.00	0.42	0.26	0.000640
4 Y	9 - 14	3	5.00	0.42	0.26	0.000640
4 Y	9 - 14	4	5.00	0.42	0.26	0.000640

## Capitolo terzo

5 Y	5 - 10	1	5.00	0.42	0.26	0.000640
5 Y	5 - 10	2	5.00	0.42	0.26	0.000640
5 Y	5 - 10	3	5.00	0.42	0.26	0.000640
5 Y	5 - 10	4	5.00	0.42	0.26	0.000640
5 Y	10 - 15	1	5.00	0.42	0.26	0.000640
5 Y	10 - 15	2	5.00	0.42	0.26	0.000640
5 Y	10 - 15	3	5.00	0.42	0.26	0.000640
5 Y	10 - 15	4	5.00	0.42	0.26	0.000640

## SEZIONI DEI PILASTRI

TELAIO	PILASTRO	PIANO	B (M)	H (M)	INERZIA (M <sup>4</sup> )
1 X	1	1	0.42	0.42	0.002560
1 X	1	2	0.42	0.42	0.002560
1 X	1	3	0.42	0.42	0.002560
1 X	1	4	0.42	0.42	0.002560
1 X	2	1	0.42	0.42	0.002560
1 X	2	2	0.42	0.42	0.002560
1 X	2	3	0.42	0.42	0.002560
1 X	2	4	0.42	0.42	0.002560
1 X	3	1	0.42	0.42	0.002560
1 X	3	2	0.42	0.42	0.002560
1 X	3	3	0.42	0.42	0.002560
1 X	3	4	0.42	0.42	0.002560
1 X	4	1	0.42	0.42	0.002560
1 X	4	2	0.42	0.42	0.002560
1 X	4	3	0.42	0.42	0.002560
1 X	4	4	0.42	0.42	0.002560
1 X	5	1	0.42	0.42	0.002560
1 X	5	2	0.42	0.42	0.002560
1 X	5	3	0.42	0.42	0.002560
1 X	5	4	0.42	0.42	0.002560
2 X	6	1	0.42	0.42	0.002560
2 X	6	2	0.42	0.42	0.002560
2 X	6	3	0.42	0.42	0.002560
2 X	6	4	0.42	0.42	0.002560
2 X	7	1	0.42	0.42	0.002560
2 X	7	2	0.42	0.42	0.002560
2 X	7	3	0.42	0.42	0.002560
2 X	7	4	0.42	0.42	0.002560
2 X	8	1	0.42	0.42	0.002560
2 X	8	2	0.42	0.42	0.002560
2 X	8	3	0.42	0.42	0.002560
2 X	8	4	0.42	0.42	0.002560
2 X	9	1	0.42	0.42	0.002560
2 X	9	2	0.42	0.42	0.002560
2 X	9	3	0.42	0.42	0.002560
2 X	9	4	0.42	0.42	0.002560
2 X	10	1	0.42	0.42	0.002560
2 X	10	2	0.42	0.42	0.002560
2 X	10	3	0.42	0.42	0.002560
2 X	10	4	0.42	0.42	0.002560

**Rapidità di convergenza  
del procedimento di risoluzio-  
ne dei telai spaziali**

3 X	11	1	0.42	0.42	0.002560
3 X	11	2	0.42	0.42	0.002560
3 X	11	3	0.42	0.42	0.002560
3 X	11	4	0.42	0.42	0.002560
3 X	12	1	0.42	0.42	0.002560
3 X	12	2	0.42	0.42	0.002560
3 X	12	3	0.42	0.42	0.002560
3 X	12	4	0.42	0.42	0.002560
3 X	13	1	0.42	0.42	0.002560
3 X	13	2	0.42	0.42	0.002560
3 X	13	3	0.42	0.42	0.002560
3 X	13	4	0.42	0.42	0.002560
3 X	14	1	0.42	0.42	0.002560
3 X	14	2	0.42	0.42	0.002560
3 X	14	3	0.42	0.42	0.002560
3 X	14	4	0.42	0.42	0.002560
3 X	15	1	0.42	0.42	0.002560
3 X	15	2	0.42	0.42	0.002560
3 X	15	3	0.42	0.42	0.002560
3 X	15	4	0.42	0.42	0.002560
1 Y	1	1	0.42	0.42	0.002560
1 Y	1	2	0.42	0.42	0.002560
1 Y	1	3	0.42	0.42	0.002560
1 Y	1	4	0.42	0.42	0.002560
1 Y	6	1	0.42	0.42	0.002560
1 Y	6	2	0.42	0.42	0.002560
1 Y	6	3	0.42	0.42	0.002560
1 Y	6	4	0.42	0.42	0.002560
1 Y	11	1	0.42	0.42	0.002560
1 Y	11	2	0.42	0.42	0.002560
1 Y	11	3	0.42	0.42	0.002560
1 Y	11	4	0.42	0.42	0.002560
2 Y	2	1	0.42	0.42	0.002560
2 Y	2	2	0.42	0.42	0.002560
2 Y	2	3	0.42	0.42	0.002560
2 Y	2	4	0.42	0.42	0.002560
2 Y	7	1	0.42	0.42	0.002560
2 Y	7	2	0.42	0.42	0.002560
2 Y	7	3	0.42	0.42	0.002560
2 Y	7	4	0.42	0.42	0.002560
2 Y	12	1	0.42	0.42	0.002560
2 Y	12	2	0.42	0.42	0.002560
2 Y	12	3	0.42	0.42	0.002560
2 Y	12	4	0.42	0.42	0.002560
3 Y	3	1	0.42	0.42	0.002560
3 Y	3	2	0.42	0.42	0.002560
3 Y	3	3	0.42	0.42	0.002560
3 Y	3	4	0.42	0.42	0.002560
3 Y	8	1	0.42	0.42	0.002560
3 Y	8	2	0.42	0.42	0.002560
3 Y	8	3	0.42	0.42	0.002560
3 Y	8	4	0.42	0.42	0.002560

## Capitolo terzo

3 Y	13	1	0.42	0.42	0.002560
3 Y	13	2	0.42	0.42	0.002560
3 Y	13	3	0.42	0.42	0.002560
3 Y	13	4	0.42	0.42	0.002560
4 Y	4	1	0.42	0.42	0.002560
4 Y	4	2	0.42	0.42	0.002560
4 Y	4	3	0.42	0.42	0.002560
4 Y	4	4	0.42	0.42	0.002560
4 Y	9	1	0.42	0.42	0.002560
4 Y	9	2	0.42	0.42	0.002560
4 Y	9	3	0.42	0.42	0.002560
4 Y	9	4	0.42	0.42	0.002560
4 Y	14	1	0.42	0.42	0.002560
4 Y	14	2	0.42	0.42	0.002560
4 Y	14	3	0.42	0.42	0.002560
4 Y	14	4	0.42	0.42	0.002560
5 Y	5	1	0.42	0.42	0.002560
5 Y	5	2	0.42	0.42	0.002560
5 Y	5	3	0.42	0.42	0.002560
5 Y	5	4	0.42	0.42	0.002560
5 Y	10	1	0.42	0.42	0.002560
5 Y	10	2	0.42	0.42	0.002560
5 Y	10	3	0.42	0.42	0.002560
5 Y	10	4	0.42	0.42	0.002560
5 Y	15	1	0.42	0.42	0.002560
5 Y	15	2	0.42	0.42	0.002560
5 Y	15	3	0.42	0.42	0.002560
5 Y	15	4	0.42	0.42	0.002560

MODULO DI ELASTICITA' = 250000 KG/CM2

## CARICHI

## FORZE ORIZZONTALI

PIANO	X (M)	Y (M)	FX (T)	FY (T)	M (TM)
1	6.40	5.00	0.00	5.00	0.00
2	6.40	5.00	0.00	10.00	0.00
3	6.40	5.00	0.00	15.00	0.00
4	6.40	5.00	0.00	20.00	0.00

## RISULTATI

## SPOSTAMENTO DEGLI IMPALCATI

TELAIO	IMPALCATO	SPOSTAMENTO (MM)
1 X	1	-0.679
1 X	2	-1.884
1 X	3	-2.996
1 X	4	-3.786
2 X	1	-0.000
2 X	2	-0.000
2 X	3	-0.000
2 X	4	-0.000
3 X	1	0.679
3 X	2	1.884
3 X	3	2.996
3 X	4	3.786
1 Y	1	5.534
1 Y	2	15.537
1 Y	3	24.911
1 Y	4	31.719
2 Y	1	4.990
2 Y	2	14.030
2 Y	3	22.515
2 Y	4	28.690
3 Y	1	4.447
3 Y	2	12.523
3 Y	3	20.118
3 Y	4	25.662
4 Y	1	3.904
4 Y	2	11.016
4 Y	3	17.722
4 Y	4	22.633
5 Y	1	3.361
5 Y	2	9.509
5 Y	3	15.325
5 Y	4	19.604

## CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE NELLE TRAVI

TELAIO	CAMPATA	PIANO	MOMENTO A SINISTRA (TM)	MOMENTO A DESTRA (TM)	TAGLIO A SINISTRA (T)	TAGLIO A DESTRA (T)
1 X	1 - 2	1	-0.77	0.75	0.38	0.38
1 X	1 - 2	2	-0.87	0.84	0.43	0.43
1 X	1 - 2	3	-0.69	0.67	0.34	0.34
1 X	1 - 2	4	-0.44	0.42	0.22	0.22
1 X	2 - 3	1	-0.72	0.72	0.36	0.36
1 X	2 - 3	2	-0.81	0.82	0.41	0.41
1 X	2 - 3	3	-0.65	0.65	0.33	0.33
1 X	2 - 3	4	-0.39	0.40	0.20	0.20

## Capitolo terzo

1 X	3 - 4	1	-0.72	0.72	0.36	0.36
1 X	3 - 4	2	-0.82	0.81	0.41	0.41
1 X	3 - 4	3	-0.65	0.65	0.33	0.33
1 X	3 - 4	4	-0.40	0.39	0.20	0.20
1 X	4 - 5	1	-0.75	0.77	0.38	0.38
1 X	4 - 5	2	-0.84	0.87	0.43	0.43
1 X	4 - 5	3	-0.67	0.69	0.34	0.34
1 X	4 - 5	4	-0.42	0.45	0.22	0.22
2 X	6 - 7	1	-0.00	0.00	0.00	0.00
2 X	6 - 7	2	-0.00	0.00	0.00	0.00
2 X	6 - 7	3	0.00	-0.00	-0.00	-0.00
2 X	6 - 7	4	-0.00	0.00	0.00	0.00
2 X	7 - 8	1	-0.00	0.00	0.00	0.00
2 X	7 - 8	2	-0.00	0.00	0.00	0.00
2 X	7 - 8	3	0.00	-0.00	-0.00	-0.00
2 X	7 - 8	4	-0.00	0.00	0.00	0.00
2 X	8 - 9	1	-0.00	0.00	0.00	0.00
2 X	8 - 9	2	-0.00	0.00	0.00	0.00
2 X	8 - 9	3	0.00	-0.00	-0.00	-0.00
2 X	8 - 9	4	-0.00	0.00	0.00	0.00
2 X	9 - 10	1	-0.00	0.00	0.00	0.00
2 X	9 - 10	2	-0.00	0.00	0.00	0.00
2 X	9 - 10	3	0.00	-0.00	-0.00	-0.00
2 X	9 - 10	4	-0.00	0.00	0.00	0.00
3 X	11 - 12	1	0.77	-0.75	-0.38	-0.38
3 X	11 - 12	2	0.87	-0.84	-0.43	-0.43
3 X	11 - 12	3	0.69	-0.67	-0.34	-0.34
3 X	11 - 12	4	0.44	-0.42	-0.22	-0.22
3 X	12 - 13	1	0.72	-0.72	-0.36	-0.36
3 X	12 - 13	2	0.81	-0.82	-0.41	-0.41
3 X	12 - 13	3	0.65	-0.65	-0.33	-0.33
3 X	12 - 13	4	0.39	-0.40	-0.20	-0.20
3 X	13 - 14	1	0.72	-0.72	-0.36	-0.36
3 X	13 - 14	2	0.82	-0.81	-0.41	-0.41
3 X	13 - 14	3	0.65	-0.65	-0.33	-0.33
3 X	13 - 14	4	0.40	-0.39	-0.20	-0.20
3 X	14 - 15	1	0.75	-0.77	-0.38	-0.38
3 X	14 - 15	2	0.84	-0.87	-0.43	-0.43
3 X	14 - 15	3	0.67	-0.69	-0.34	-0.34
3 X	14 - 15	4	0.42	-0.45	-0.22	-0.22
1 Y	1 - 6	1	5.21	-5.06	-2.05	-2.05
1 Y	1 - 6	2	5.93	-5.78	-2.34	-2.34
1 Y	1 - 6	3	4.77	-4.68	-1.89	-1.89
1 Y	1 - 6	4	3.21	-3.04	-1.25	-1.25
1 Y	6 - 11	1	5.06	-5.21	-2.05	-2.05
1 Y	6 - 11	2	5.78	-5.93	-2.34	-2.34
1 Y	6 - 11	3	4.68	-4.77	-1.89	-1.89
1 Y	6 - 11	4	3.04	-3.21	-1.25	-1.25
2 Y	2 - 7	1	4.70	-4.57	-1.85	-1.85
2 Y	2 - 7	2	5.36	-5.22	-2.12	-2.12
2 Y	2 - 7	3	4.33	-4.24	-1.71	-1.71
2 Y	2 - 7	4	2.91	-2.76	-1.14	-1.14

2 Y	7 - 12	1	4.57	-4.70	-1.85	-1.85
2 Y	7 - 12	2	5.22	-5.36	-2.12	-2.12
2 Y	7 - 12	3	4.24	-4.33	-1.71	-1.71
2 Y	7 - 12	4	2.76	-2.91	-1.14	-1.14
3 Y	3 - 8	1	4.19	-4.07	-1.65	-1.65
3 Y	3 - 8	2	4.79	-4.67	-1.89	-1.89
3 Y	3 - 8	3	3.88	-3.80	-1.54	-1.54
3 Y	3 - 8	4	2.62	-2.48	-1.02	-1.02
3 Y	8 - 13	1	4.07	-4.19	-1.65	-1.65
3 Y	8 - 13	2	4.67	-4.79	-1.89	-1.89
3 Y	8 - 13	3	3.80	-3.88	-1.54	-1.54
3 Y	8 - 13	4	2.48	-2.62	-1.02	-1.02
4 Y	4 - 9	1	3.69	-3.58	-1.45	-1.45
4 Y	4 - 9	2	4.23	-4.12	-1.67	-1.67
4 Y	4 - 9	3	3.43	-3.36	-1.36	-1.36
4 Y	4 - 9	4	2.32	-2.20	-0.90	-0.90
4 Y	9 - 14	1	3.58	-3.69	-1.45	-1.45
4 Y	9 - 14	2	4.12	-4.23	-1.67	-1.67
4 Y	9 - 14	3	3.36	-3.43	-1.36	-1.36
4 Y	9 - 14	4	2.20	-2.32	-0.90	-0.90
5 Y	5 - 10	1	3.18	-3.09	-1.25	-1.25
5 Y	5 - 10	2	3.66	-3.57	-1.45	-1.45
5 Y	5 - 10	3	2.98	-2.92	-1.18	-1.18
5 Y	5 - 10	4	2.03	-1.92	-0.79	-0.79
5 Y	10 - 15	1	3.09	-3.18	-1.25	-1.25
5 Y	10 - 15	2	3.57	-3.66	-1.45	-1.45
5 Y	10 - 15	3	2.92	-2.98	-1.18	-1.18
5 Y	10 - 15	4	1.92	-2.03	-0.79	-0.79

Rapidità di convergenza  
del procedimento di risoluzi-  
one dei telai spaziali

#### CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE NEI PILASTRI

TELAIO PILASTRO PIANO			MOMENTO SUP. (TM)	MOMENTO INF. (TM)	TAGLIO (T)	SFORZO NORMALE (T)
1 X	1	1	-0.06	1.48	-0.51	-1.36
1 X	1	2	-0.55	0.71	-0.42	-0.98
1 X	1	3	-0.65	0.32	-0.32	-0.56
1 X	1	4	-0.45	0.03	-0.16	-0.22
1 X	2	1	-0.34	1.62	-0.65	0.07
1 X	2	2	-0.97	1.13	-0.70	0.05
1 X	2	3	-0.97	0.69	-0.55	0.03
1 X	2	4	-0.81	0.35	-0.39	0.02
1 X	3	1	-0.33	1.61	-0.65	-0.00
1 X	3	2	-0.95	1.12	-0.69	-0.00
1 X	3	3	-0.97	0.68	-0.55	0.00
1 X	3	4	-0.79	0.34	-0.38	0.00
1 X	4	1	-0.34	1.62	-0.65	-0.07
1 X	4	2	-0.97	1.13	-0.70	-0.05
1 X	4	3	-0.97	0.69	-0.55	-0.03
1 X	4	4	-0.81	0.35	-0.39	-0.02
1 X	5	1	-0.06	1.48	-0.51	1.36
1 X	5	2	-0.55	0.71	-0.42	0.98
1 X	5	3	-0.65	0.32	-0.32	0.56
1 X	5	4	-0.45	0.03	-0.16	0.22

## Capitolo terzo

2 X	6	1	0.00	0.00	-0.00	-0.00
2 X	6	2	-0.00	-0.00	0.00	-0.00
2 X	6	3	-0.00	-0.00	0.00	0.00
2 X	6	4	0.00	0.00	0.00	-0.00
2 X	7	1	0.00	0.00	-0.00	0.00
2 X	7	2	-0.00	-0.00	0.00	0.00
2 X	7	3	-0.00	-0.00	0.00	0.00
2 X	7	4	0.00	0.00	0.00	0.00
2 X	8	1	0.00	0.00	-0.00	0.00
2 X	8	2	-0.00	-0.00	0.00	0.00
2 X	8	3	-0.00	-0.00	0.00	0.00
2 X	8	4	0.00	0.00	0.00	0.00
2 X	9	1	0.00	0.00	-0.00	0.00
2 X	9	2	-0.00	-0.00	0.00	0.00
2 X	9	3	-0.00	-0.00	0.00	0.00
2 X	9	4	0.00	0.00	0.00	0.00
2 X	10	1	0.00	0.00	-0.00	0.00
2 X	10	2	-0.00	-0.00	0.00	0.00
2 X	10	3	-0.00	-0.00	0.00	-0.00
2 X	10	4	0.00	0.00	0.00	0.00
3 X	11	1	0.06	-1.48	0.51	1.36
3 X	11	2	0.55	-0.71	0.42	0.98
3 X	11	3	0.65	-0.32	0.32	0.56
3 X	11	4	0.45	-0.03	0.16	0.22
3 X	12	1	0.34	-1.62	0.65	-0.07
3 X	12	2	0.97	-1.13	0.70	-0.05
3 X	12	3	0.97	-0.69	0.55	-0.03
3 X	12	4	0.81	-0.35	0.39	-0.02
3 X	13	1	0.33	-1.61	0.65	0.00
3 X	13	2	0.95	-1.12	0.69	0.00
3 X	13	3	0.97	-0.68	0.55	-0.00
3 X	13	4	0.79	-0.34	0.38	-0.00
3 X	14	1	0.34	-1.62	0.65	0.07
3 X	14	2	0.97	-1.13	0.70	0.05
3 X	14	3	0.97	-0.69	0.55	0.03
3 X	14	4	0.81	-0.35	0.39	0.02
3 X	15	1	0.06	-1.48	0.51	-1.36
3 X	15	2	0.55	-0.71	0.42	-0.98
3 X	15	3	0.65	-0.32	0.32	-0.56
3 X	15	4	0.45	-0.03	0.16	-0.22
1 Y	1	1	-0.18	-11.72	3.85	7.54
1 Y	1	2	3.77	-5.38	3.05	5.48
1 Y	1	3	4.86	-2.16	2.34	3.14
1 Y	1	4	3.21	0.09	1.04	1.25
1 Y	6	1	1.77	-12.69	4.82	-0.00
1 Y	6	2	6.76	-8.34	5.04	-0.00
1 Y	6	3	7.10	-4.79	3.96	-0.00
1 Y	6	4	6.08	-2.27	2.78	-0.00
1 Y	11	1	-0.18	-11.72	3.85	-7.54
1 Y	11	2	3.77	-5.38	3.05	-5.48
1 Y	11	3	4.86	-2.16	2.34	-3.14
1 Y	11	4	3.21	0.09	1.04	-1.25

**Rapidità di convergenza  
del procedimento di risoluzi-  
one dei telai spaziali**

2 Y	2	1	-0.18	-10.56	3.46	6.82
2 Y	2	2	3.40	-4.88	2.76	4.97
2 Y	2	3	4.39	-1.97	2.12	2.85
2 Y	2	4	2.91	0.06	0.95	1.14
2 Y	7	1	1.58	-11.44	4.34	-0.00
2 Y	7	2	6.10	-7.55	4.55	-0.00
2 Y	7	3	6.41	-4.35	3.59	-0.00
2 Y	7	4	5.52	-2.07	2.53	-0.00
2 Y	12	1	-0.18	-10.56	3.46	-6.82
2 Y	12	2	3.40	-4.88	2.76	-4.97
2 Y	12	3	4.39	-1.97	2.12	-2.85
2 Y	12	4	2.91	0.06	0.95	-1.14
3 Y	3	1	-0.18	-9.40	3.07	6.10
3 Y	3	2	3.02	-4.37	2.47	4.45
3 Y	3	3	3.92	-1.77	1.90	2.56
3 Y	3	4	2.62	0.04	0.86	1.02
3 Y	8	1	1.39	-10.18	3.86	0.00
3 Y	8	2	5.44	-6.76	4.07	0.00
3 Y	8	3	5.73	-3.90	3.21	0.00
3 Y	8	4	4.96	-1.88	2.28	0.00
3 Y	13	1	-0.18	-9.40	3.07	-6.10
3 Y	13	2	3.02	-4.37	2.47	-4.45
3 Y	13	3	3.92	-1.77	1.90	-2.56
3 Y	13	4	2.62	0.04	0.86	-1.02
4 Y	4	1	-0.18	-8.24	2.68	5.39
4 Y	4	2	2.65	-3.87	2.17	3.93
4 Y	4	3	3.44	-1.57	1.67	2.26
4 Y	4	4	2.32	0.01	0.77	0.90
4 Y	9	1	1.20	-8.93	3.37	-0.00
4 Y	9	2	4.78	-5.97	3.58	-0.00
4 Y	9	3	5.04	-3.46	2.83	-0.00
4 Y	9	4	4.40	-1.69	2.03	-0.00
4 Y	14	1	-0.18	-8.24	2.68	-5.39
4 Y	14	2	2.65	-3.87	2.17	-3.93
4 Y	14	3	3.44	-1.57	1.67	-2.26
4 Y	14	4	2.32	0.01	0.77	-0.90
5 Y	5	1	-0.19	-7.08	2.30	4.67
5 Y	5	2	2.28	-3.36	1.88	3.42
5 Y	5	3	2.97	-1.38	1.45	1.97
5 Y	5	4	2.03	-0.01	0.68	0.79
5 Y	10	1	1.00	-7.67	2.89	-0.00
5 Y	10	2	4.13	-5.18	3.10	-0.00
5 Y	10	3	4.36	-3.01	2.46	-0.00
5 Y	10	4	3.84	-1.49	1.78	-0.00
5 Y	15	1	-0.19	-7.08	2.30	-4.67
5 Y	15	2	2.28	-3.36	1.88	-3.42
5 Y	15	3	2.97	-1.38	1.45	-1.97
5 Y	15	4	2.03	-0.01	0.68	-0.79

L'effettivo sforzo normale in ciascun pilastro si ottiene sommando il suo peso proprio, lo scarico dei telai ortogonali e gli eventuali carichi concentrati.

