UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
FACOLTÀ DI INGEGNERIA
Corso di Regime e Protezione dei Litorali

ONDE DI GRAVITÀ REGOLARI

Prof. Ing. Enrico FOTI

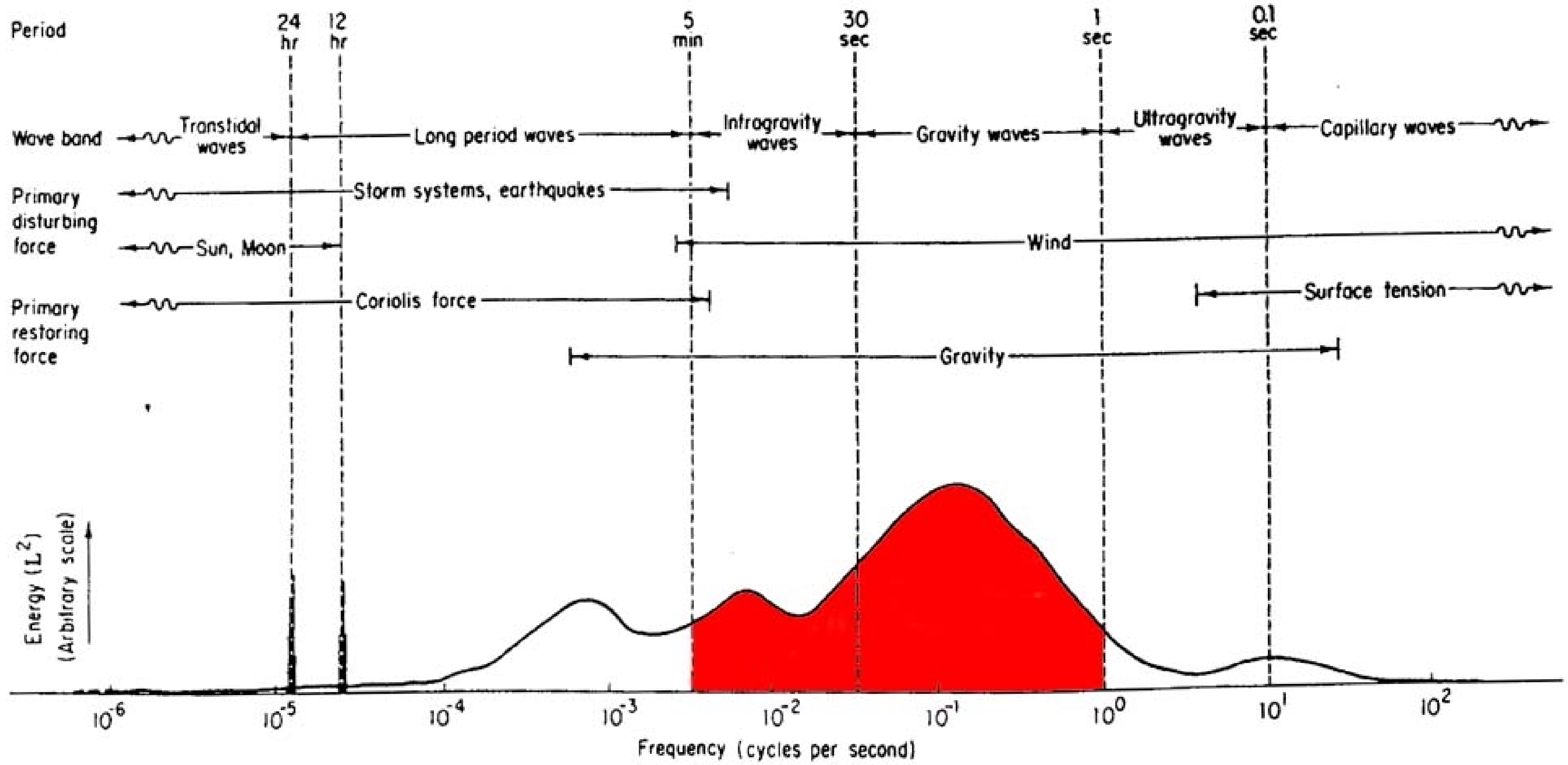
CLASSIFICAZIONE DELLE ONDE

- Classificazione in base alle forze che le hanno generate
  - Onde di marea
  - Onde di vento → Onde di gravità
    - Onde vive (“sea”)
    - Onde lunghe (“swell”)
  - Onde dovute all’avanzare di una nave
  - Etc.

- Classificazione in base al profilo
  - Sinusoidali
  - Random

- Classificazione in base al periodo (o frequenza)
  - Capillari (0-0.1s; >10Hz)
  - Ultragravità (0.1-1 s; 1-10 Hz)
  - Gravità (1-30 s; 0,033-1 Hz)
  - Infragravità (30 s- 5 min)
  - Lungo periodo (30 min-24h)
  - Marea (> 24h)

CONTENUTO ENERGETICO DELLE ONDE ALLE VARIE FREQUENZE



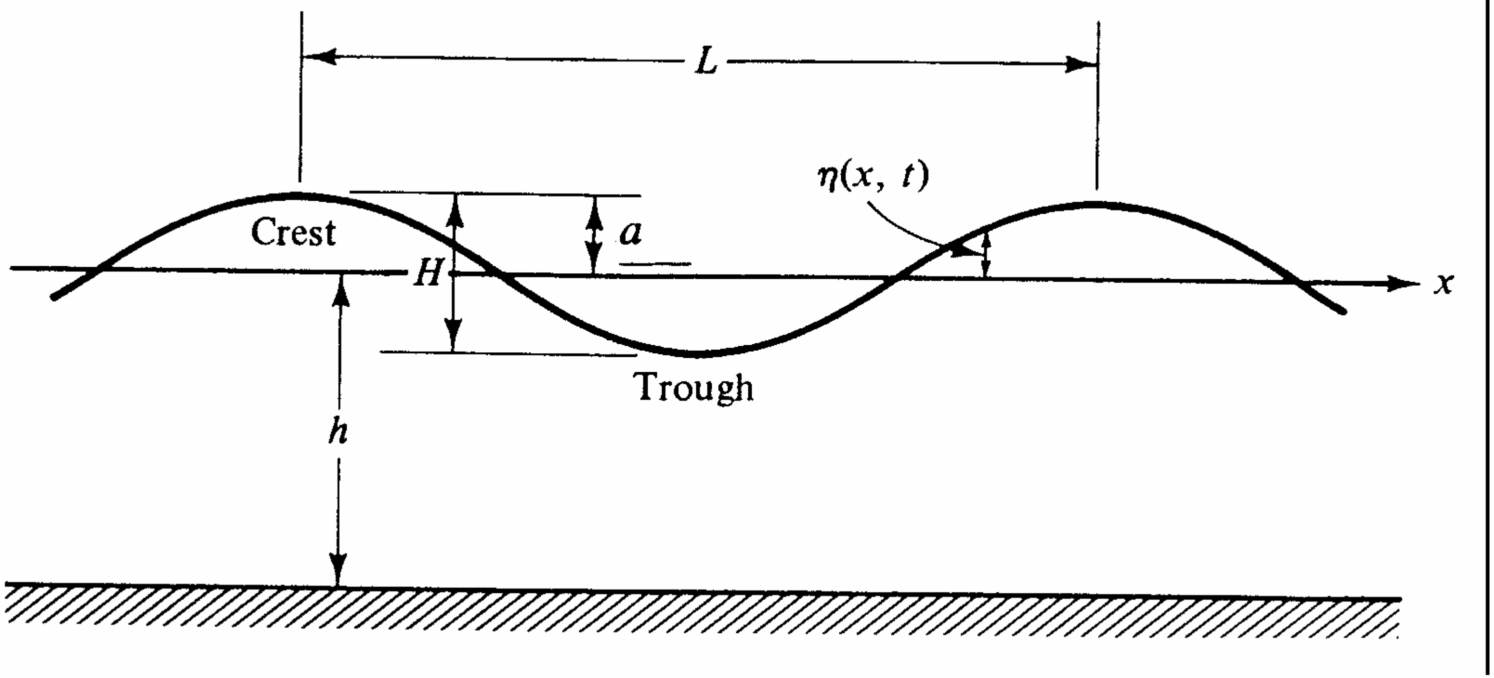
CARATTERIZZAZIONE DELLE ONDE (1/3)

I parametri fondamentali per la descrizione delle onde sono:

- lunghezza d’onda *L*;

- altezza d’onda *H*;

- profondità su cui l’onda si propaga *h*



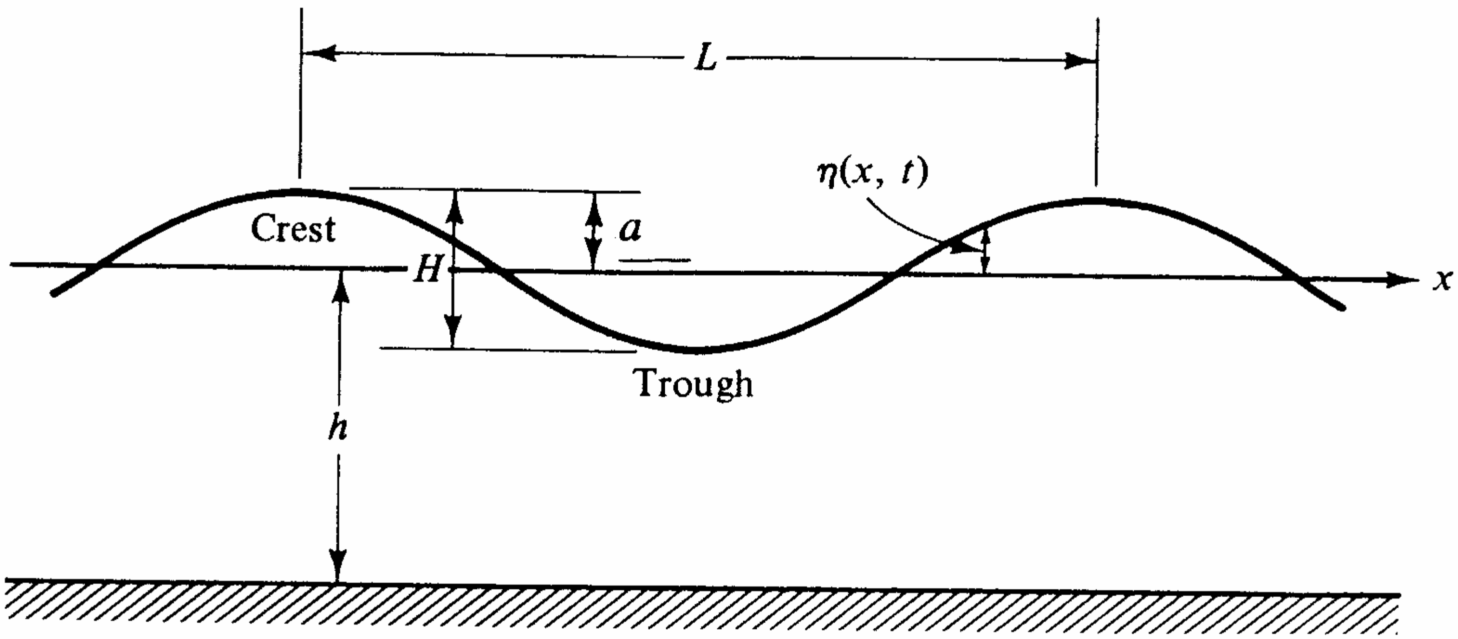
Tutti gli altri parametri (periodo, velocità delle particelle, accelerazione, etc) possono essere determinati teoricamente a partire da queste grandezze.

CARATTERIZZAZIONE DELLE ONDE (2/3)

L è la distanza orizzontale tra due creste successive

T è il tempo che intercorre fra il passaggio per un punto assegnato di due creste successive.

c=L/T è la celerità di un’onda.

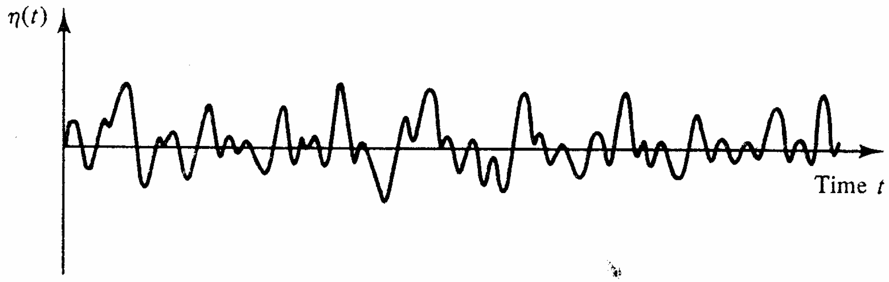


Riconosceremo come è possibile individuare una relazione che lega tra loro Lunghezza, periodo e profondità, ovvero una relazione funzionale del tipo:

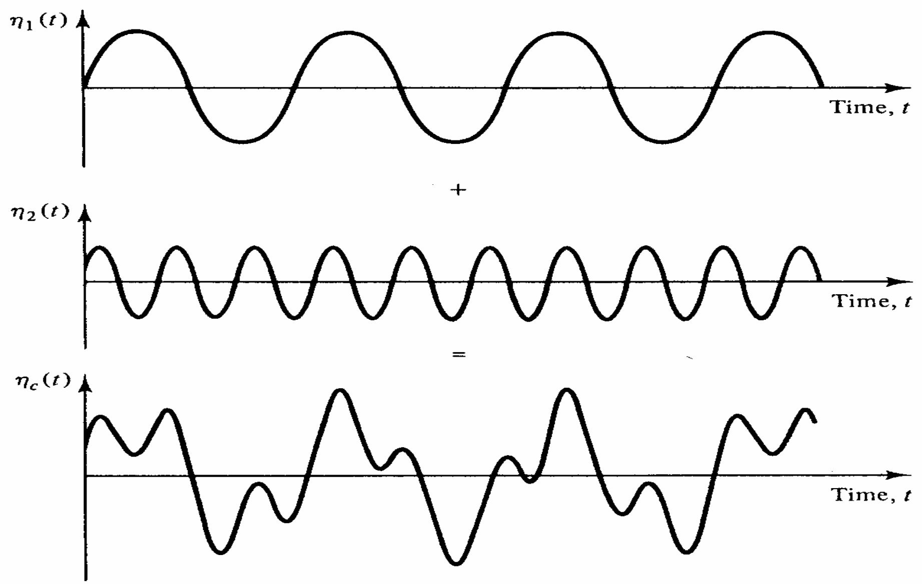
$$\mathbf{f(L, T, h)=0}$$

CARATTERIZZAZIONE DELLE ONDE (3/3)

E’ chiaro come nella realtà le onde non siano monocromatiche, infatti un tipico segnale di sopraelevazione del pelo libero assume l’andamento rappresentato nella segunte figura.

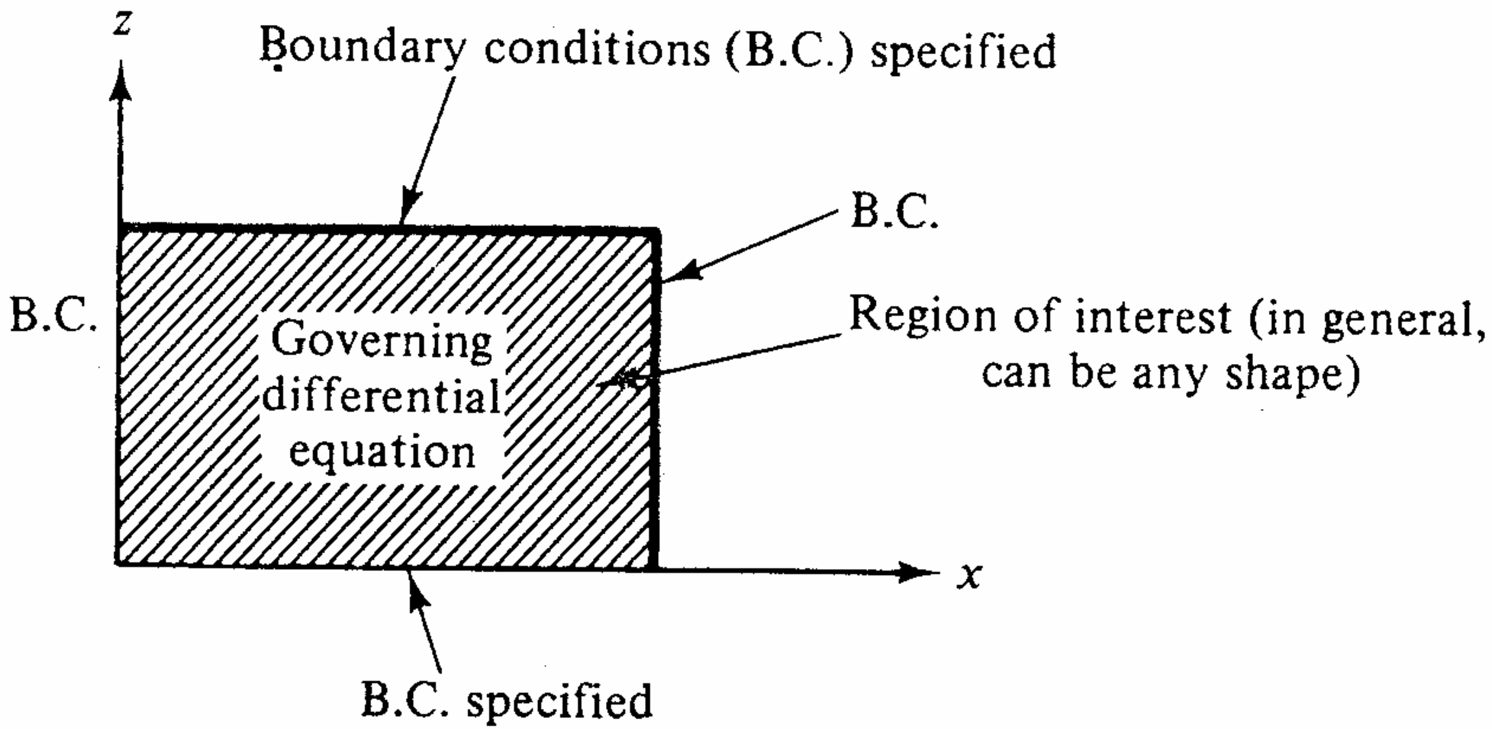


Tuttavia questo può essere visto come la sovrapposizione di un gran numero di sinusoidi. Per esempio, se sovrapponiamo due seni come nella figura seguente, il risultato è già più simile ad una situazione realistica



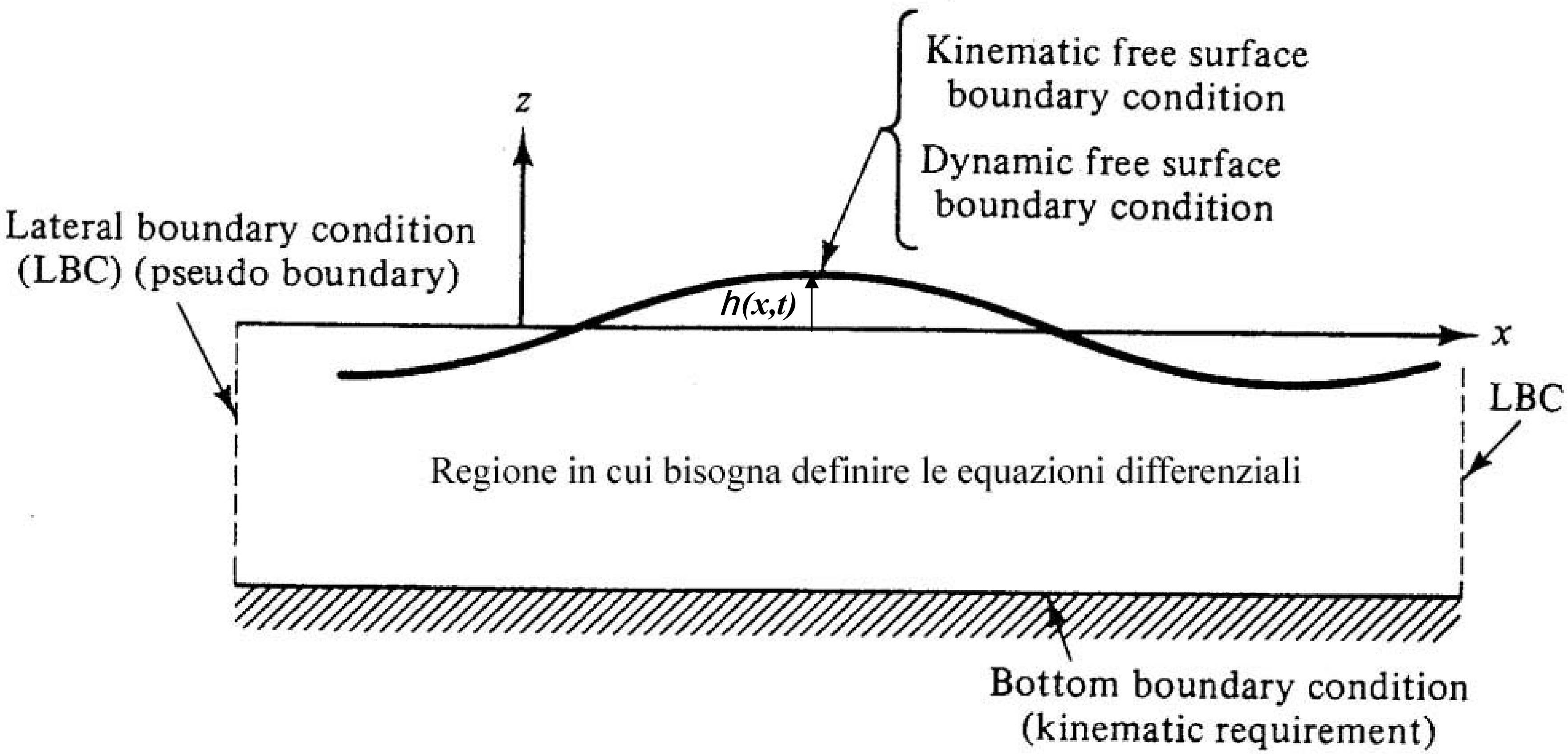
FORMULAZIONE DEL PROBLEMA BIDIMENSIONALE (1/4)

Prima di formulare il problema della determinazione del campo di moto sotto un'onda di mare matematicamente, è opportuno rivedere in termini generali la struttura di un problema governato da equazioni differenziali ed opportune condizioni al contorno (boundary value problem).



FORMULAZIONE DEL PROBLEMA BIDIMENSIONALE (2/4)

Quanto appena visto nel caso generale, si particolarizza nel caso di onde monocromatiche come segue:



FORMULAZIONE DEL PROBLEMA BIDIMENSIONALE (3/4)

Le onde reali che si propagano in un fluido viscoso generano un campo di moto estremamente complesso ma che, nella maggior parte dei casi di interesse pratico, può essere considerato irrotazionale. Ciò è dovuto essenzialmente al fatto che le tensioni viscose risultano rilevanti solo in prossimità del fondo e comunque su uno strato assai modesto rispetto alle dimensioni del campo di moto.

Si possono quindi effettuare le seguenti ipotesi:

- moto irrotazionale
- fluido incomprimibile
- fluido ideale
- onda bidimensionale

L'ipotesi di moto irrotazionale implica l'esistenza di una funzione potenziale della velocità:

$$\underline{V} = \nabla \phi$$

mentre dall'ipotesi di fluido incomprimibile si ottiene (principio di conservazione della massa):

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{V}} = 0$$

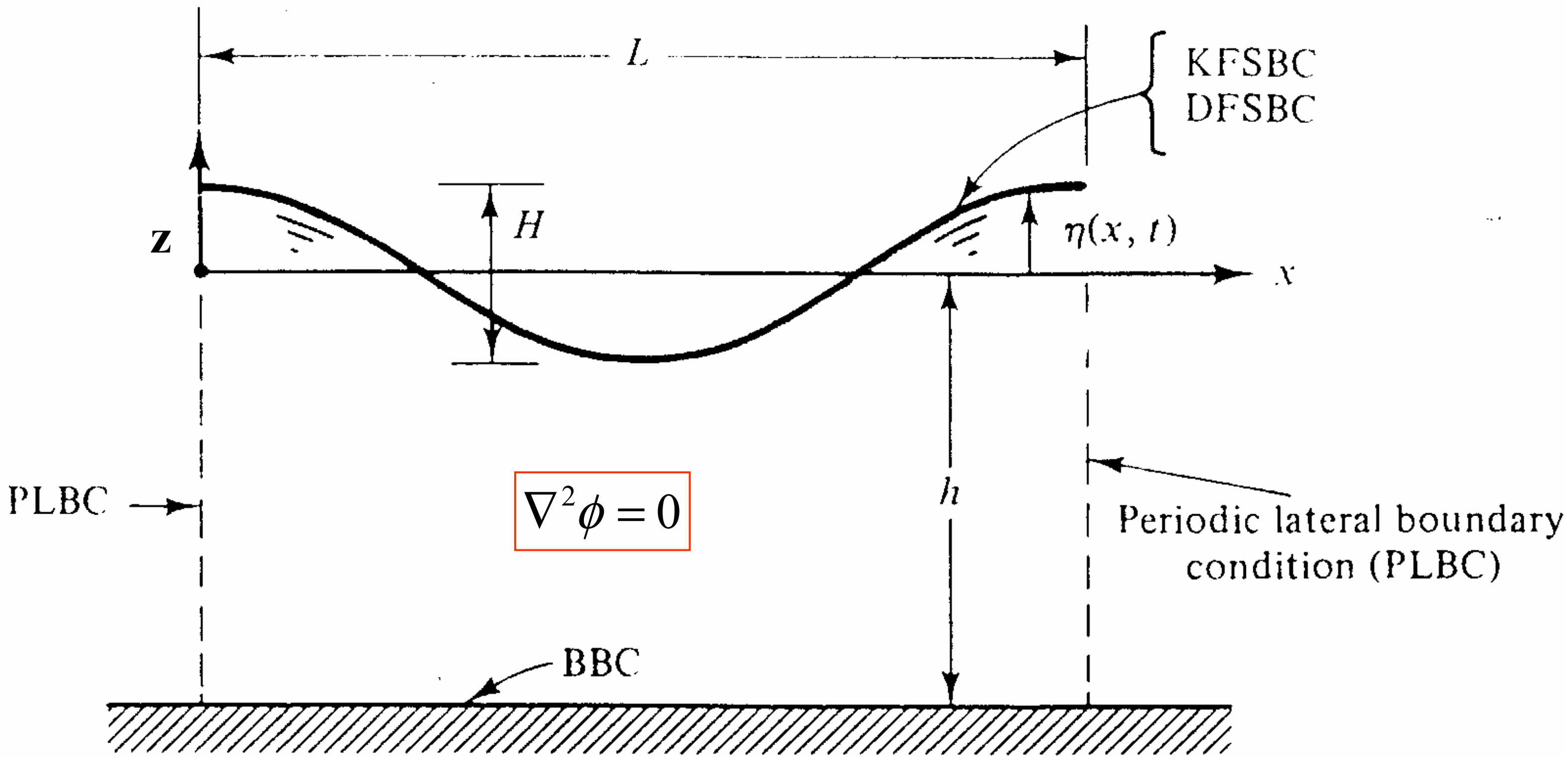
che conduce alla ben nota equazione di Laplace:

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

FORMULAZIONE DEL PROBLEMA BIDIMENSIONALE (4/4)

L'ipotesi di onda bidimensionale (*"long-crested"* nella letteratura anglosassone) implica che il campo di moto risulti identico su ogni piano parallelo a quello in cui verranno sviluppate tutte le considerazioni, per cui:

$$\boxed{\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0}$$



CONDIZIONI AL CONTORNO (1/3)

GENERALITÀ

Su qualunque tipo di contorno sia esso fisso, come ad esempio il fondo del mare, o libero di deformarsi sotto l'azione delle forze, come una qualunque superficie liquida, le componenti della velocità del fluido devono soddisfare particolari condizioni fisiche.

Si potranno quindi distinguere:

• condizioni di tipo cinematico se riguardano le caratteristiche cinematiche delle particelle di fluido

• condizioni di tipo dinamico se invece stabiliscono la distribuzione delle pressioni su una superficie libera o su un'interfaccia.

L'espressione analitica che descrive tali condizioni risulta chiaramente funzione dell'equazione che descrive la superficie di contorno e per la risoluzione dei casi tipici di studio si rimanda il lettore ai testi consigliati.Esistono inoltre altre condizioni al contorno che assicurano la periodicità della soluzione nello spazio e nel tempo.

Poiché l'equazione che descrive la superficie libera risulta a priori non nota le condizioni al contorno che la caratterizzano introducono, dal punto di vista analitico, forti non-linearità che rappresentano un ostacolo insormontabile per una risoluzione del problema in forma analitica chiusa.

CONDIZIONI AL CONTORNO (2/3)

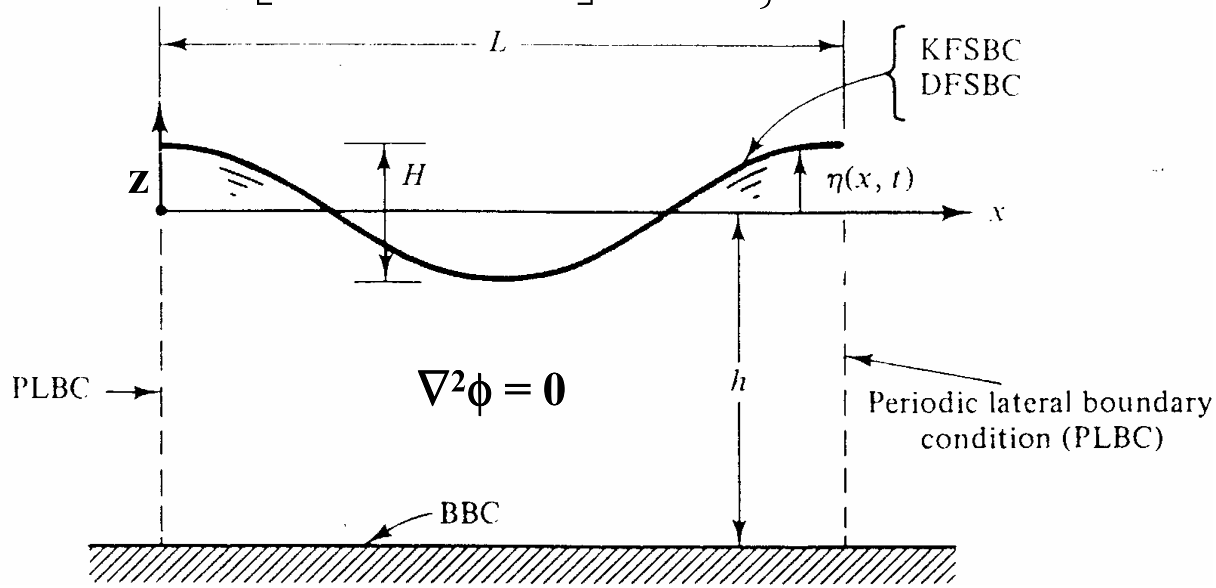
Riassunto del problema della determinazione del campo di moto sotto onde regolari 2D

L'equazione differenziale del secondo ordine per la determinazione del campo di moto sotto onde di mare regolari bidimensionali è l'equazione di Laplace. In formule:

$$\nabla^2\phi = 0$$

Le condizioni al contorno sulla superficie sono:

$$\left.\begin{array}{ll}\textbf{KFSBC} & \dfrac{\partial\phi}{\partial z}+\dfrac{\partial\eta}{\partial t}-\dfrac{\partial\phi}{\partial x}\dfrac{\partial\eta}{\partial x}=0; \\[2ex] \textbf{DFSBC} & -\dfrac{\partial\phi}{\partial t}+\dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2\right]+g\eta=0\end{array}\right\} \quad su \quad z=\eta(x,t)$$



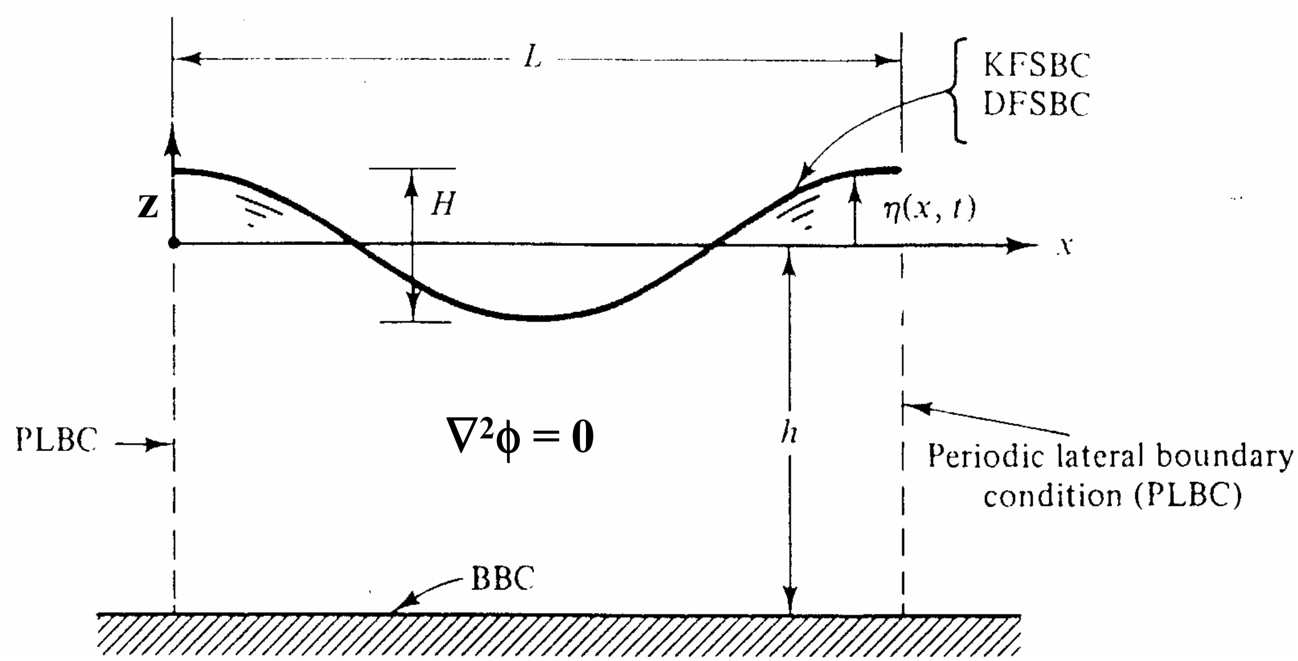
CONDIZIONI AL CONTORNO (3/3)

Per quanto concerne la condizione al fondo, invece:

BBC $$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0; \quad su \quad z = -h$$

Inoltre non bisogna dimenticare che stiamo ricercando soluzioni periodiche sia nello spazio che nel tempo, cioè:

$$\phi(x,t) = \phi(x+L,t);$$
$$\phi(x,t) = \phi(x,t+T)$$



Viene presentata una soluzione dell'equazione di Laplace vincolata dalle opportune condizioni al contorno prima descritte, nell'ipotesi di onde "infinitesime". Il metodo adottato è quello già descritto dei metodi perturbativi (linearizzazione del problema).
Separando le variabili, è possibile scrivere:

$$\boxed{\phi(x,z,t) = X(x)Z(z)T(t)}$$

Dal momento che sappiamo che vogliamo risolvere il problema linearizzato, e che, inoltre, stiamo ricercando soluzioni periodiche nel tempo della funzione potenziale, possiamo già dire che:

$$T(t) = sin(\sigma t)$$

Per trovare σ, che rappresenta la frequenza angolare dell'onda, dalla condizione di periodicità si ha che:

$$sin(\sigma t) = sin(\sigma(t+T)) \quad \text{cioè} \quad sin(\sigma t) = sin(\sigma t)cos(\sigma T) + cos(\sigma t)sin(\sigma T)$$

Quest'ultima risulta vera se $\sigma T=2\pi$, cioè se $\sigma=2\pi/T$.
Pertanto possiamo dire già che:

$$\boxed{\phi(x,y,t) = X(x)Z(z)sin(\sigma t)}$$

Sostituendo la relazione appena trovata nell'equazione di Laplace, si ottiene:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} Z sin(\sigma t) + X \frac{d^2 Z}{dz^2} sin(\sigma t) = 0$$

Quest'ultima, dividendo per ϕ porge:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2 Z}{dz^2} = 0$$

Chiaramente, il primo termine di questa equazione dipende solo da x, mentre il secondo solamente da z, pertanto l'equazione è soddisfatta solamente se i due addendi sono uguali alla medesima costante, eccetto che per un segno di differenza. In formule:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2 X}{dx^2} = -k^2$$

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2 Z}{dz^2} = k^2$$

Queste equazioni sono adesso delle semplici equazioni differenziali ordinarie che possono essere risolte separatamente. Possono realizzarsi tre casi, a secondo che k sia reale, nullo o immaginario.

Possibili soluzioni dell'equazione di Laplace:

Carattere di k, costante di separazione	Equazioni differenziali ordinarie (ODE)	Soluzioni
Reale $k^2 > 0$	$\frac{d^2 X}{dx^2} + k^2 X = 0$ $\frac{d^2 Z}{dz^2} - k^2 Z = 0$	$X(x) = A \cos kx + B \sin kx$ $Z(z) = C e^{kz} + D e^{-kz}$
$k = 0$	$\frac{d^2 X}{dx^2} = 0$ $\frac{d^2 Z}{dz^2} = 0$	$X(x) = Ax + B$ $Z(z) = Cz + D$
Immaginario $k^2 < 0, k = i\|k\|$ $\|k\|$ = magnitude of k	$\frac{d^2 X}{dx^2} - \|k\|^2 X = 0$ $\frac{d^2 Z}{dz^2} + \|k\|^2 Z = 0$	$X(x) = A e^{\|k\| x} + B e^{-\|k\| x}$ $Z(z) = C \cos \|k\| z + D \sin \|k\| z$

Dalle condizioni al contorno, oltre che determinare le costanti incognite, sarà possibile scegliere tra le soluzioni sopra riportate, quelle fisicamente possibili.

1.<u>Condizione al contorno di periodicità laterale</u>

Tra le soluzioni della tabella prima mostrata, non tutte sono periodiche in x, infatti la soluzione risulta periodica solo nel caso in cui k è reale e non nullo. Pertanto come soluzione dell'equazione di Laplace si ottiene la seguente funzione potenziale delle velocità:

$$\phi(x,z,t) = (A\cos kx + Bsinkx)(Ce^{kz} + De^{-kz})sin(\sigma t)$$

Per soddisfare la condizione di periodicità laterale in forma esplicita deve essere:

$$A\cos kx + B\sin kx = A\cos k(x+L) + B\sin k(x+L) =$$
$$= A(\cos kx\ \cos kL - \sin kx\ \sin kL) + B(\sin kx\ \cos kL + \cos kx\ \sin kL)$$

Quest'ultima risulta soddisfatta solamente per coskL=1 e sinkL=0, il che significa che kL=2π, ovvero k=2π/L. Inoltre, dal momento che stiamo risolvendo un problema lineare, è possibile adottare il principio di sovrapposizione degli effetti, per cui ϕ può essere decomposta nei suoi addendi. Concentriamo l'attenzione sul "pezzo" (la rimanente parte potrà essere aggiunta in un secondo momento):

$$\boxed{\phi(x,z,t) = A\cos kx(Ce^{kz} + De^{-kz})sin(\sigma t)}$$

2. Condizione al contorno al fondo (fondo orizzontale)

Sostituendo l'espressione fin qui trovata per ϕ nella condizione al contorno al fondo, si ricava.

$$v_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} = -A\cos kx(kCe^{kz} - kDe^{-kz})sin(\sigma t) = 0 \qquad su \qquad z = -h$$

Affinché questa equazione sia verificata per ogni x e ogni t i termini dentro parentesi devono essere identicamente nulli, il che comporta che:

$$C = De^{2kh}$$

e pertanto:

$$\phi(x,y,t) = A\cos kx(De^{2kh}e^{kz} + De^{-kz})\sin(\sigma t) = \frac{G}{2}\cos kx(e^{k(h+z)} + e^{-k(h+z)})\sin(\sigma t) =$$

$$= G\cos kx\cosh(k(h+z))\sin(\sigma t)$$

Dove:

$$G = 2ADe^{kh}$$

è una nuova costante.

3. Condizione al contorno dinamica di superficie

In corrispondenza della superficie bisogna applicare Bernoulli. La posizione della superficie stessa, tuttavia, è a priori non nota. Pertanto per applicare la condizione al contorno si può sviluppare in serie di Taylor attorno a z=0. In formule:

$$(Bernoulli \quad equation)_{z=\eta} = (Bernoulli \quad equation)_{z=0} + \eta \frac{\partial}{\partial z}(Bernoulli \quad equation)_{z=0} + \dots$$

Ovvero:

$$\left(gz - \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{V_x^2 + V_z^2}{2} \right)_{z=\eta} = \left(gz - \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{V_x^2 + V_z^2}{2} \right)_{z=0} + \eta \left[g - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} (V_x + V_z) \right]_{z=0} + \dots = C(t)$$

Nell'ipotesi di onde di piccola ampiezza, $\eta \ll 1$ e $u \ll 1$ e quindi $\eta^2 \ll \eta$ e $u\eta \ll \eta$, pertanto è lecito scrivere linearizzando:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta \right)_{z=0} = C(t) \quad \text{cioè} \quad \eta = \frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t}\bigg|_{z=0} + \frac{C(t)}{g}$$

Se sostituiamo in questa espressione l'espressione di ϕ si ottiene:

$$\eta = \frac{G\sigma}{g} \cos\ kx \cosh k(h+z) \cos\sigma t \,\bigg|_{z=0} + \frac{C(t)}{g} = \left[\frac{G\sigma \cosh kh}{g} \right] \cos\ kx \cos\sigma t \ + \frac{C(t)}{g}$$

3. Condizione al contorno dinamica di superficie

Poiché per definizione η avrà media sia temporale che spaziale nulla, allora C(t)=0.

$$\eta = \left[\frac{G\sigma \cosh \mathrm{kh}}{g}\right] \cos \mathrm{kx} \cos \sigma \mathrm{t}$$

I termini entro parentesi rappresentano valori costanti. Per cui possiamo riscrivere questa funzione nella maniera seguente:

$$\eta = \frac{H}{2} \cos \mathrm{kx} \cos \sigma \mathrm{t}$$

Quest'ultimo risultato viene fuori dal confronto tra l'espressione di η e il modello fisico dell'onda. Per cui l'ultima costante diviene pari a:

$$G = \frac{Hg}{2\sigma \cosh \mathrm{kh}}$$

La funzione potenziale risulta uguale a:

$$\boxed{\phi = \frac{Hg \cosh k(h+z)}{2\sigma \cosh kh} \cos kx \sin \sigma t}$$

La funzione potenziale risulta dipendere da H, σ, h e k. I primi tre dipenderanno dai dati e la quarta sarà derivata dalla relazione di dispersione.

4. Condizione al contorno cinematica di superficie

Quest'ultima condizione al contorno pone una relazione tra σ e k. Anche in questo caso, dovendo imporre la condizione su di una superficie incognita, utilizzeremo l'espansione di Taylor attorno a y=0.

$$\left(V_z - \frac{\partial \eta}{\partial t} - V_x \frac{\partial \eta}{\partial x}\right)_{z=\eta} = \left(V_z - \frac{\partial \eta}{\partial t} - V_x \frac{\partial \eta}{\partial x}\right)_{z=0} + \eta \frac{\partial}{\partial z}\left(V_z - \frac{\partial \eta}{\partial t} - V_x \frac{\partial \eta}{\partial x}\right)_{z=0} + \cdots = 0$$

Nell'ipotesi di onde di piccola ampiezza, ancora una volta riteniamo i termini lineari. La condizione cinematica di superficie si riduce alla seguente espressione:

$$V_z = \left.\frac{\partial \eta}{\partial t}\right|_{z=0} \qquad \text{ovvero} \qquad -\left.\frac{\partial \phi}{\partial z}\right|_{z=0} = \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

Sostituendo le espressioni di ϕ e η si ricava:

$$-\frac{H}{2}\frac{gk}{\sigma}\frac{\sinh k(h+z)}{\cosh kh}\cos kx \sin \sigma t\Big|_{z=0} = -\frac{H}{2}\sigma \cos kx \sin \sigma t$$

Ovvero:

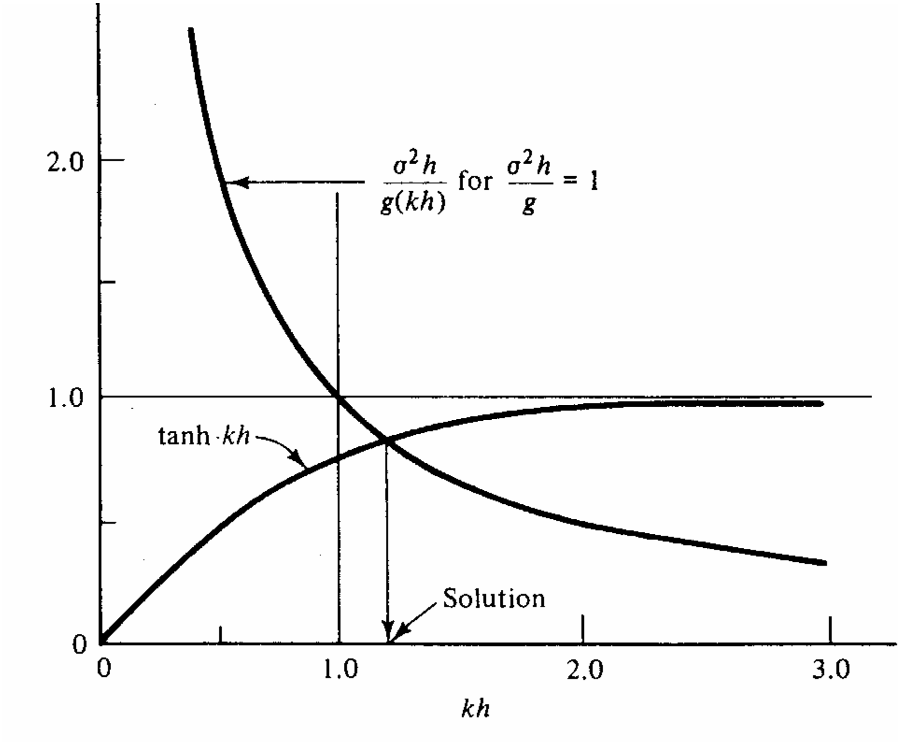
$$\boxed{\sigma^2 = gk\tanh(kh)} \quad \textbf{RELAZIONE DI DISPERSIONE}$$

$$\boxed{\sigma^2 = gk \tanh(kh)}$$

Riscrivendo la precedente equazione nella forma:

$$\frac{\sigma^2}{gk} = \tanh(kh)$$

e plottiamo ognuno dei due membri in funzione di kh per un particolare valore di $\sigma^2 h/g$ si ricava la figura:



Come si evince dall'intersezione delle due curve (che rappresenta la soluzione della equazione), l'equazione ha una sola soluzione di k per assegnati valori di σ e h.

5. La relazione di dispersione

Notando che, per definizione, un'onda progressiva coprirà una lunghezza d'onda L in un periodo T, e ricordando inoltre che $\sigma=2\pi/T$ e che $k=2\pi/L$, chiaramente la velocità di propagazione dell'onda potrà essere espressa come segue:

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = g\frac{2\pi}{L}\tanh kh \qquad \text{ovvero} \qquad C^2 = \frac{L^2}{T^2} = \frac{g}{k}\tanh kh$$

Dall'espressione precedente può anche ricavarsi la seguente:

$$L = \frac{g}{2\pi}T^2 \tanh\frac{2\pi h}{L}$$

Poiché in acque profonde kh è molto grande e, pertanto, tanh(kh)=1, si ottiene $L=L_o=gT^2/2\pi$ dove il pedice "o" sta ad indicare il valore in acque profonde.
Pertanto:

$$\boxed{L=L_0 \tanh kh}$$

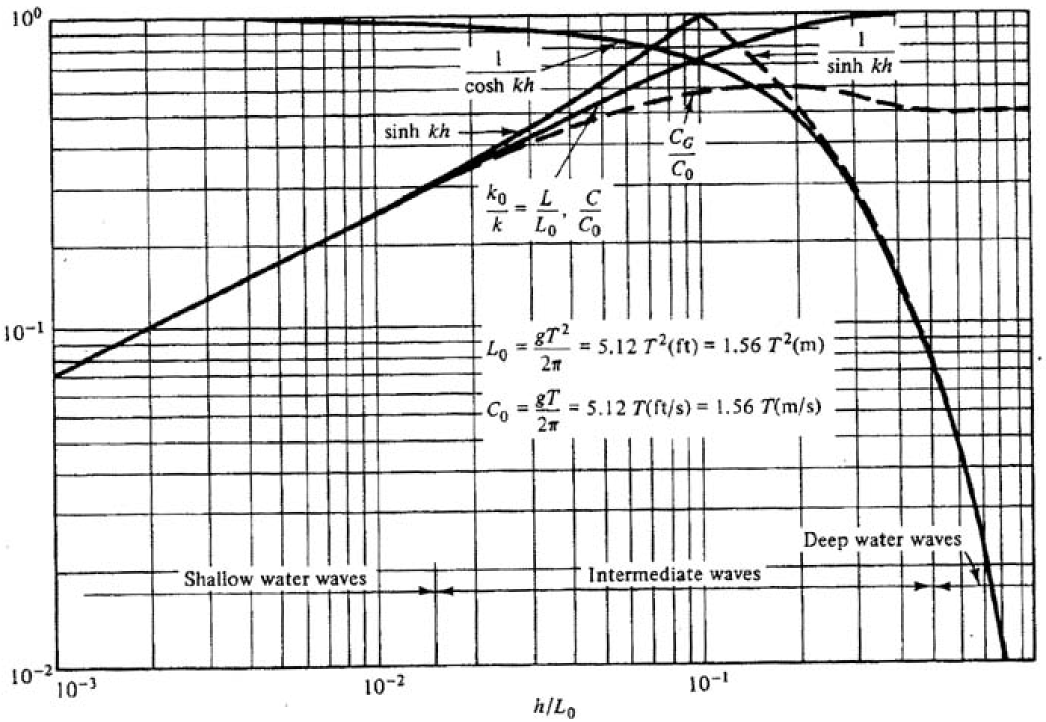
Da ciò se ne deduce che:

<u>la lunghezza d'onda decresce monotonamente al decrescere della profondità</u>

<u>5. La relazione di dispersione</u>

Le relazioni prima viste sono "facce" diverse della stessa equazione, detta di dispersione poiché essa descrive la maniera in cui un campo di onde progressive costituite da molte frequenze diverse vengono separate (ovvero "disperse") in funzione delle diverse celerità delle singole componenti. Per come è stata definita la celerità si ha inoltre:

$$C = \frac{L_o}{T}\tanh kh \qquad \text{ovvero} \qquad C = C_o \tanh kh$$



La figura rappresenta alcune variabili comunemente usate nel calcolo del moto ondoso. In particolare, essa rappresenta un valido metodo grafico per ottenere i valori in acque basse e intermedie di questi parametri

APPROSSIMAZIONI ASINTOTICHE: ACQUE BASSE E PROFONDE (1/4)

Le funzioni iperboliche presentano asintoti che si rivelano particolarmente utili per lo studio delle acque basse e profonde. Per esempio, la funzione cosh(*kh*) che compare nel denominatore del potenziale delle velocità è definita come segue:

$$\cosh kh = \frac{e^{kh} + e^{-kh}}{2}$$

Per argomenti piccoli, la funzione esponenziale e^{kh} può essere sviluppata in serie di Taylor, cioè, ponendo per semplicità kh=ζ

$$e^{\zeta} = 1 + \left.\frac{de^{\zeta}}{d\zeta}\right|_{\zeta=0} \zeta + \left.\frac{d^2 e^{\zeta}}{d\zeta^2}\right|_{\zeta=0} \frac{(\zeta)^2}{2!} + \cdots$$

Ovvero:

$$\boxed{e^{kh} = 1 + kh + \frac{(kh)^2}{2} + \cdots}$$

Analogamente:

$$\boxed{e^{-kh} = 1 - kh + \frac{(kh)^2}{2} + \cdots}$$

APPROSSIMAZIONI ASINTOTICHE: ACQUE BASSE E PROFONDE (2/4)

Per piccoli valori di kh (*acque basse*) allora:

$$\cosh kh = \frac{1}{2}\left[\left(1 + kh + \frac{(kh)^2}{2}\cdots\right) + \left(1 - kh + \frac{(kh)^2}{2}\cdots\right)\right]$$

$$\cong 1 + \frac{(kh)^2}{2}$$

Per grandi valori di kh (*acque profonde*) allora cosh(kh)=$e^{kh}/2$ poiché e^{-kh} diventa trascurabile. Di seguito vengono rappresentati gli asintoti:

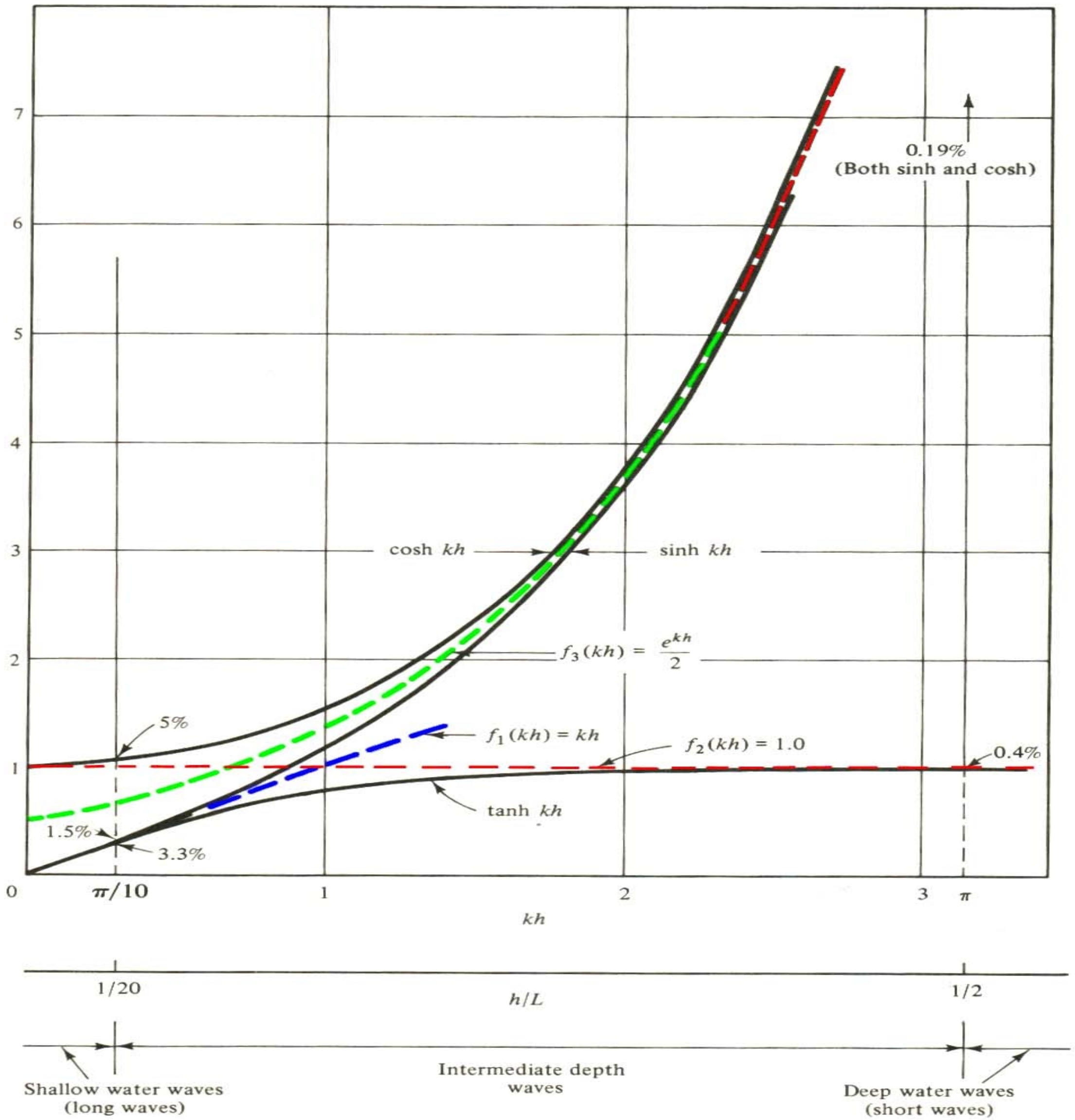
Funzione	Grandi valori di kh	Piccoli valori di kh
$\cosh\ kh$	$e^{kh}/2$	1
$\sinh\ kh$	$e^{kh}/2$	kh
$\tanh\ kh$	1	kh

APPROSSIMAZIONI ASINTOTICHE: ACQUE BASSE E PROFONDE (3/4)

Appare utile suddividere le regioni entro cui queste approssimazioni asintotiche appaiono valide. Nella figura seguente sono rappresentate le funzioni iperboliche insieme ai loro asintoti $f_1=kh$, $f_2=1$, $f_3=e^{kh}/2$.

Le percentuali rappresentano, per particolari valori di kh, l'errore che si commette nell'uso dell'asintoto piuttosto che della funzione.

La scala più in basso riporta la profondità relativa. Si noti che un'onda avente L=200 m in 1000 m di profondità ha la stessa profondità relativa di un'onda di altezza di 0.2 m in 1 m di profondità.



APPROSSIMAZIONI ASINTOTICHE: ACQUE BASSE E PROFONDE (4/4)

La relazione di dispersione in acque basse e profonde

In acque basse si ottiene:

$$\sigma^2 = gk \tanh kh = gk^2 h \quad \text{ovvero} \quad \frac{\sigma^2}{k^2} = C^2 = gh$$

da cui la celerità

$$C = \sqrt{gh}$$

La velocità delle onde in acque basse dipende solo dalla profondità!

Ricordando che la definizione di acque basse è basata su di una profondità relativa, per gli oceani, dove la profondità è dell'ordine del km, un'onda caratterizzata da una lunghezza di 20km è in acque basse. Per esempio, gli Tsunami generati dai maremoti hanno lunghezze d'onda superiori ai 20 km e pertanto raggiungono velocità di propagazione dell'ordine di 100 m/s.

In acque profonde ($kh>\pi$)si ottiene: $\sigma^2=gk \tanh kh = gk$

$$L = L_o$$

dove $L_o= gT^2/2\pi=1.56T^2$ [m] e $C_o=gT/2\pi=1.56T$ [m/s]