



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
FACOLTÀ DI INGEGNERIA
Corso di Regime e Protezione dei Litorali

PROPRIETÀ INGEGNERISTICHE DELLE ONDE LINEARI

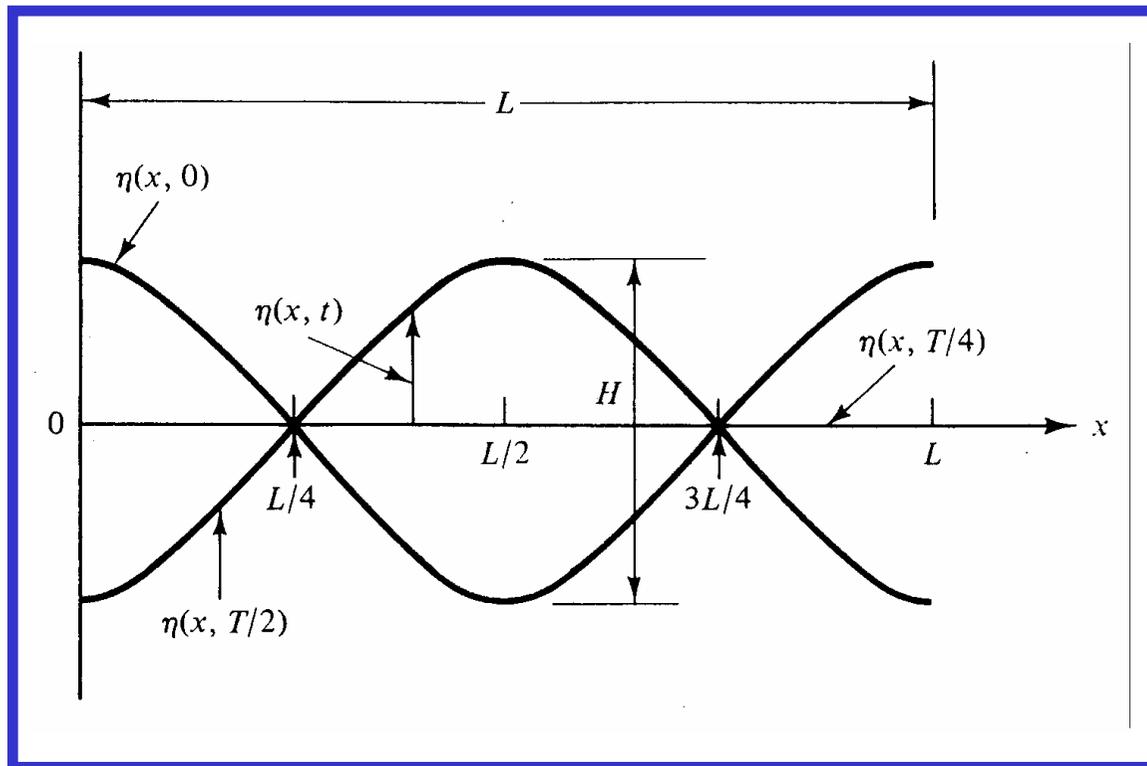
Prof. Ing. Enrico FOTI

Riassunto del problema della determinazione del campo di moto sotto onde regolari 2D *Onde stazionarie*

Abbiamo visto come una soluzione al problema della determinazione del campo di moto sotto onde di mare è data dalle seguenti relazioni:

$$\phi = \frac{Hg \cosh k(h+y)}{2\sigma \cosh kh} \cos kx \sin \sigma t$$

$$\eta(x,t) = \frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{y=0} = \frac{H}{2} \cos kx \cos \sigma t$$



La forma di quest'onda è quella rappresentata in figura, da cui si evince come per $\sigma t = \pi/2$, la forma d'onda è nulla per ogni x , mentre a $\sigma t = 0$, essa si presenta come un coseno. Questa forma d'onda chiaramente non si propaga in nessuna direzione. In corrispondenza dei punti $kx = \pi/2$ e $3\pi/2$, vi sono i nodi.

La determinazione del campo di moto sotto onde regolari 2D

Onde progressive

Consideriamo un'altra onda stazionaria il cui potenziale è dato dalla seguente:

$$\phi(x, y, t) = \frac{H}{2} \frac{g}{\sigma} \frac{\cosh k(h+y)}{\cosh kh} \sin kx \cos \sigma t$$

Questa soluzione è una di quelle che avevamo precedentemente scartato. Essa differisce dalla precedente dal fatto che x e t sono fuori fase di 90° . La sopraelevazione del pelo libero corrispondente è:

$$\eta(x, t) = \frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{y=0} = -\frac{H}{2} \sin kx \sin \sigma t$$

Dal momento che l'equazione di Laplace è un'equazione lineare, possiamo sottrarre o aggiungere tra loro soluzioni, ottenendo altre soluzioni ancora valide. Se sottraiamo il presente potenziale da quello ricavato in precedenza, si ottiene:

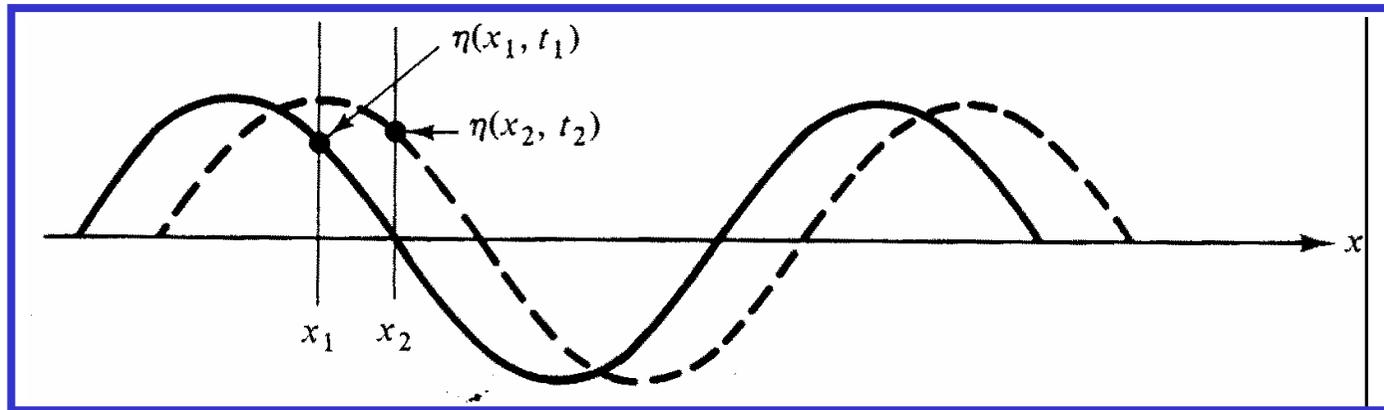
$$\phi = \frac{H}{2} \frac{g}{\sigma} \frac{\cosh k(h+y)}{\cosh kh} (\cos kx \sin \sigma t - \sin kx \cos \sigma t) = \frac{H}{2} \frac{g}{\sigma} \frac{\cosh k(h+y)}{\cosh kh} \sin(kx - \sigma t)$$

A questa nuova funzione potenziale è associato una nuova sopraelevazione del pelo libero data da:

$$\eta(x, t) = \frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{y=0} = \frac{H}{2} \cos(kx - \sigma t)$$

La determinazione del campo di moto sotto onde regolari 2D

Il profilo d'onda così ottenuto chiaramente rappresenta un'onda che si propaga. Per determinare la direzione di propagazione, esaminiamo lo stesso punto della forma d'onda a due istanti di tempo differenti, t_1 e t_2 .



La velocità a cui l'onda si propaga è data da $C = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$

Inoltre, il fatto d'aver considerato lo stesso punto a due istanti diversi, significa aver assunto la medesima fase, perciò è da attendersi: $\eta(x_1, t_1) = \eta(x_2, t_2)$, ovvero sia:

$$kx_1 - \sigma t_1 = kx_2 - \sigma t_2 \longrightarrow k(x_1 - x_2) = \sigma(t_1 - t_2) \longrightarrow \frac{\sigma}{k} = \frac{2\pi/T}{2\pi/L} = C = \frac{x_1 - x_2}{t_1 - t_2} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

Perciò se $t_2 > t_1$, $x_2 > x_1$ e la forma d'onda si propaga (nel riferimento assunto) da sinistra a destra

La determinazione del campo di moto sotto onde regolari 2D

Semplificazioni per acque basse e profonde

Le funzioni iperboliche presentano asintoti che si rivelano particolarmente utili per lo studio delle acque basse e profonde. Per esempio, la funzione $\cosh(kh)$ che compare nel denominatore del potenziale delle velocità è definita come segue:

$$\cosh kh = \frac{e^{kh} + e^{-kh}}{2}$$

Per argomenti piccoli, la funzione esponenziale e^y può essere sviluppata in serie di Taylor, cioè

$$e^{(0+kh)} = e^0 + \left. \frac{de^y}{dy} \right|_{y=0} kh + \left. \frac{d^2 e^y}{dy^2} \right|_{y=0} \frac{(kh)^2}{2!} + \dots$$

Ovvero:
$$e^{kh} = 1 + kh + \frac{(kh)^2}{2} + \dots$$

Analogamente:
$$e^{-kh} = 1 - kh + \frac{(kh)^2}{2} - \dots$$

La determinazione del campo di moto sotto onde regolari 2D

Per piccoli valori di kh (*acque basse*) allora:

$$\begin{aligned}\cosh kh &= \frac{1}{2} \left[\left(1 + kh + \frac{(kh)^2}{2} \dots \right) + \left(1 - kh + \frac{(kh)^2}{2} \dots \right) \right] \\ &\cong 1 + \frac{(kh)^2}{2}\end{aligned}$$

Per grandi valori di kh (*acque profonde*) allora $\cosh(kh) = e^{kh}/2$ poiché e^{-kh} diventa trascurabile. Di seguito vengono rappresentati gli asintoti:

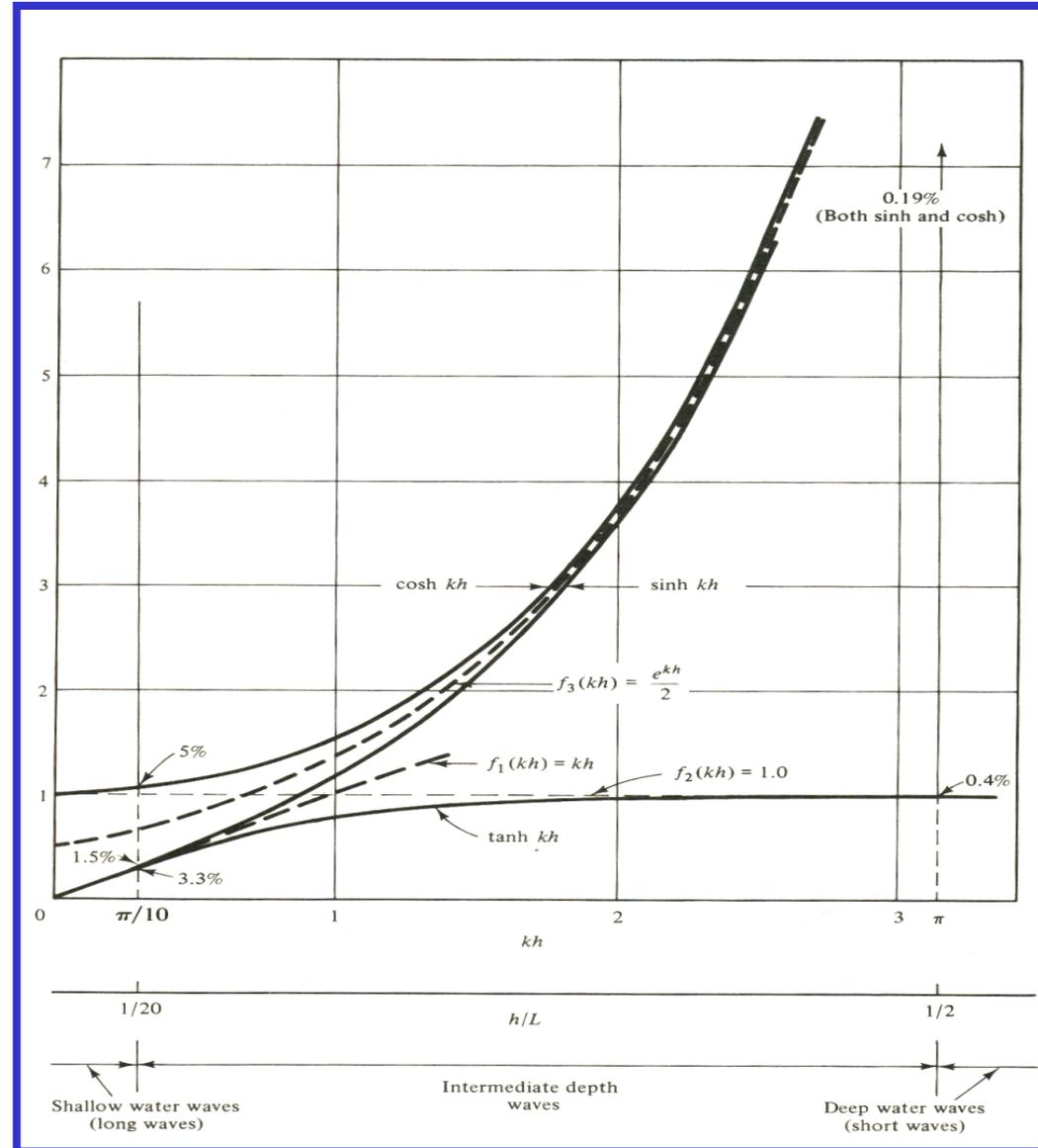
Funzione	Grandi valori di kh	Piccoli valori di kh
$\cosh kh$	$e^{kh}/2$	1
$\sinh kh$	$e^{kh}/2$	kh
$\tanh kh$	1	kh

La determinazione del campo di moto sotto onde regolari 2D

Appare utile suddividere le regioni in cui entro cui queste approssimazioni asintotiche appaiono valide. Nella figura seguente sono rappresentate le funzioni iperboliche insieme ai loro asintoti $f_1=kh$, $f_2=1$, $f_3=e^{kh}/2$.

Le percentuali rappresentano, per particolari valori di kh , l'errore che si commette nell'uso dell'asintoto piuttosto che della funzione.

La scala più in basso riporta la profondità relativa. Si noti che un'onda avente $L=200\text{m}$ in 1000m di profondità ha la stessa profondità relativa di un'onda di altezza di 0.2m in 1m di profondità.



La determinazione del campo di moto sotto onde regolari 2D

La relazione di dispersione in acque basse e profonde

In **acque basse** si ottiene: $\sigma^2 = gk \tanh kh = gk^2h$ ovvero $\frac{\sigma^2}{k^2} = C^2 = gh$

da cui la celerità $C = \sqrt{gh}$ La velocità delle onde in acque basse dipende solo dalla profondità!

La velocità delle onde in acque basse dipende solo dalla profondità!

Ricordando che la definizione di acque basse è basata su di una profondità relativa, per gli oceani, dove la profondità è dell'ordine del km, un'onda caratterizzata da una lunghezza di 20km è in acque basse. Per esempio, gli Tsunami generati dai maremoti hanno lunghezze d'onda superiori ai 20 km e pertanto raggiungono velocità di propagazione dell'ordine di 100m/s

In **acque profonde** ($kh > \pi$) si ottiene: $\sigma^2 = gk \tanh kh = gk$

$$L = L_0$$

dove

$$L_0 = gT^2/2\pi = 1.56T^2 \text{ (m)} \text{ e } C_0 = gT/2\pi = 1.56T \text{ (m/s)}$$

La determinazione del campo di moto sotto onde regolari 2D

La funzione di corrente per onde di piccola ampiezza

Per sviluppare la teoria delle onde di piccola ampiezza, è stata utilizzata la funzione potenziale.

In alcuni casi tuttavia risulta utile adottare la funzione di corrente. Ricordando che

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Si ottiene:

$$\left. \begin{aligned} \phi &= -\frac{Hg \cosh k(h+y)}{2\sigma \cosh kh} \sin(kx - \sigma t) \\ \psi &= -\frac{Hgsinhk(h+y)}{2\sigma \cosh kh} \cos(kx - \sigma t) \end{aligned} \right\} \text{Onde progressive}$$
$$\left. \begin{aligned} \phi &= \frac{Hg \cosh k(h+y)}{2\sigma \cosh kh} \cos kx \sin \sigma t \\ \psi &= -\frac{Hgsinhk(h+y)}{2\sigma \cosh kh} \sin kx \sin \sigma t \end{aligned} \right\} \text{Onde stazionarie}$$

La determinazione del campo di moto sotto onde regolari 2D

La funzione di corrente per onde di piccola ampiezza

Per sviluppare la teoria delle onde di piccola ampiezza, è stata utilizzata la funzione potenziale. In alcuni casi tuttavia risulta utile adottare la funzione di corrente. Ricordando

$$\text{che } \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Si ottiene:

$$\left. \begin{aligned} \phi &= -\frac{Hg \cosh k(h+y)}{2\sigma \cosh kh} \sin(kx - \sigma t) \\ \psi &= -\frac{Hg \sinh k(h+y)}{2\sigma \cosh kh} \cos(kx - \sigma t) \end{aligned} \right\} \text{Onde progressive}$$

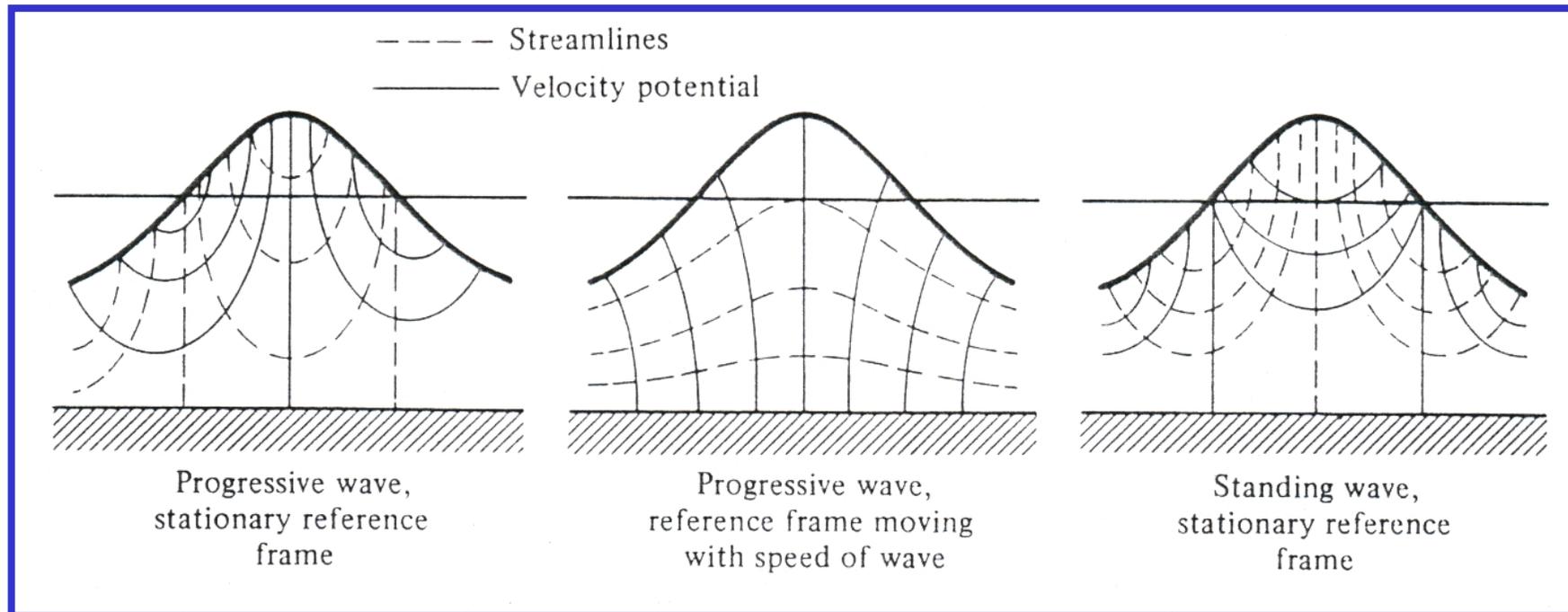
Nel caso di onde progressive è talvolta conveniente adottare un sistema di riferimento mobile con l'onda, nel qual caso la funzione di corrente diviene:

$$\psi = Cy - \frac{Hg \sinh k(h+y)}{2\sigma \cosh kh} \cos(kx)$$

La determinazione del campo di moto sotto onde regolari 2D

Nel caso di onde stazionarie:

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \frac{Hg \cosh k(h+y)}{2\sigma \cosh kh} \cos kx \sin \sigma t \\ \psi &= -\frac{Hgsinhk(h+y)}{2\sigma \cosh kh} \sin kx \sin \sigma t \end{aligned} \right\} \text{Onde stazionarie}$$



Proprietà “ingegneristiche” delle onde

Introduzione

Le soluzioni sviluppate per onde progressive e stazionarie di piccola ampiezza rappresentano le basi per applicazioni a numerosi problemi ingegneristici. Per esempio, la cinematica delle particelle d'acqua e il campo di pressione all'interno del corpo dell'onda sono direttamente correlate al calcolo delle forze sui corpi immersi.

La trasformazione delle onde durante il loro propagarsi dal largo alla riva è anche importante, poiché per molte opere costiere è indispensabile la previsione del clima ondoso al largo. E' necessario poi determinare qualsiasi trasformazione che si ripercuote sulle onde mano a mano che queste incontrano acque più basse.

Proprietà “ingegneristiche” delle onde

Cinematica delle particelle d'acqua sotto onde di piccola ampiezza (*Onde progressive*)

Consideriamo un'onda progressiva il cui profilo è descritto dalla seguente espressione:

$$\eta = \frac{H}{2} \cos(kx - \sigma t)$$

La funzione potenziale delle velocità risulta:

$$\phi = -\frac{Hg \cosh k(h+y)}{2\sigma \cosh kh} \sin(kx - \sigma t)$$

Ricordando l'espressione della relazione di dispersione (i.e. $\sigma^2 = gk \tanh(kh)$) possiamo riscrivere:

$$\phi = -\frac{H}{2} C \frac{\cosh k(h+y)}{\sinh kh} \sin(kx - \sigma t)$$

Proprietà “ingegneristiche” delle onde

Vogliamo determinare le componenti di velocità delle singole particelle d'acqua.
Per definizione, la componente orizzontale delle velocità è:

$$v_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{H}{2}\sigma \frac{\cosh k(h+y)}{\sinh(kh)} \cos(kx - \sigma t)$$

ovvero:
$$v_x = \frac{gHk}{2\sigma} \frac{\cosh k(h+y)}{\cosh(kh)} \cos(kx - \sigma t)$$

L'accelerazione locale sarà quindi:
$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{H\sigma^2}{2} \frac{\cosh k(h+y)}{\sinh(kh)} \sin(kx - \sigma t)$$

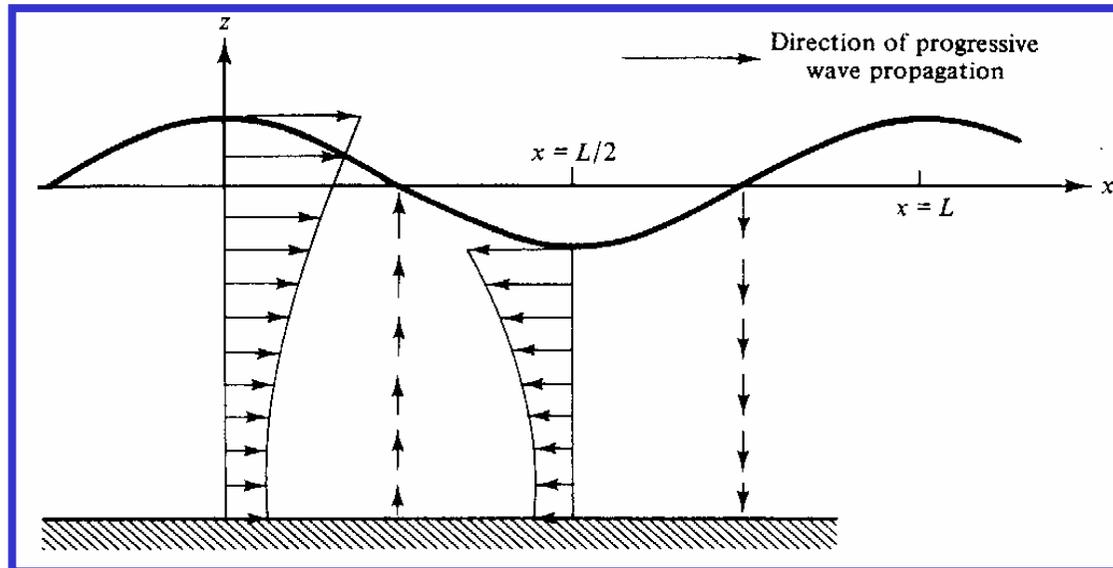
Per quanto concerne la componente verticale della velocità e dell'accelerazione locale:

$$v_y = -\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{H}{2}\sigma \frac{\sinh k(h+y)}{\sinh(kh)} \sin(kx - \sigma t)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = -\frac{H\sigma^2}{2} \frac{\sinh[k(h+y)]}{\sinh(kh)} \cos(kx - \sigma t)$$

Proprietà “ingegneristiche” delle onde

Esaminando le componenti di velocità verticale e orizzontale si nota come esse siano “sfasate” di 90° . Chiaramente i massimi di velocità orizzontale si hanno per $(kx - \sigma t) = 0, \pi, \dots$ mentre i massimi di velocità verticale si hanno per $(kx - \sigma t) = \pi/2, 3\pi/2$. La variazione delle componenti di velocità (sia orizzontale che verticale) può essere meglio colta se si parte dal fondo dove $k(h+y) = 0$. Ivi i termini iperbolici che contengono y sia in v_x che in v_y hanno il loro minimo, 1 e 0 rispettivamente. Man mano che ci si sposta verso l'alto il modulo delle componenti di velocità aumenta. Per quanto concerne le accelerazioni, la massima verticale si realizza quando la velocità orizzontale è massima (lo stesso per l'accelerazione orizzontale con la componente verticale di velocità)



Proprietà “ingegneristiche” delle onde

Traiettorie delle particelle (onde progressive)

Una particella d'acqua che abbia posizione media nel punto (x_1, y_1) sarà spostata dal campo di pressione e la sua posizione istantanea sarà data da $(x_1 + \zeta, y_1 + \xi)$ come nella figura di seguito riportata:

Le componenti dello spostamento (ζ, ξ) possono essere ricavate per integrazione delle componenti di velocità:

$$\zeta(x_1, y_1, t) = \int v_x(x_1 + \zeta, y_1 + \xi) dt$$

$$\xi(x_1, y_1, t) = \int v_y(x_1 + \zeta, y_1 + \xi) dt$$

Nell'ipotesi di onde di piccola ampiezza (ζ, ξ) per cui possiamo sostituire $v_x(x_1 + \zeta, y_1 + \xi)$ con $v_x(x_1, y_1)$ (il che implica, in un'espansione in serie di Taylor, il trascurare i termini del

tipo: $\frac{\partial v_x}{\partial x} \zeta$.

Proprietà “ingegneristiche” delle onde

Traiettorie delle particelle (onde progressive)

Pertanto dalla semplice integrazione si ottiene:

$$\zeta = -\frac{H}{2} \frac{gk \cosh k(h + y_1)}{\sigma^2 \cosh(kh)} \sin(kx_1 - \sigma t)$$

Ovvero, usando la relazione di dispersione:

$$\zeta = -\frac{H}{2} \frac{\cosh k(h + y_1)}{\sinh(kh)} \sin(kx_1 - \sigma t)$$

Similmente per lo spostamento verticale:

$$\xi = \frac{H}{2} \frac{\sinh k(h + y_1)}{\sinh(kh)} \cos(kx_1 - \sigma t)$$

Proprietà “ingegneristiche” delle onde

Traiettorie delle particelle (onde progressive)

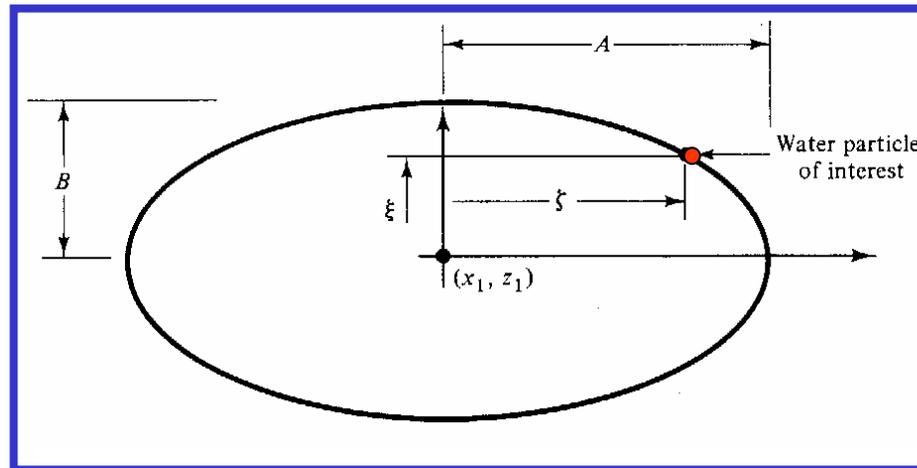
Gli spostamenti (ζ , ξ) possono essere riscritti come segue: $\zeta(x_1, y_1, t) = -A \sin(kx_1 - \sigma t)$

$$\xi(x_1, y_1, t) = B \cos(kx_1 - \sigma t)$$

Elevando al quadrato e sommando membro a membro si ricava:

$$\left(\frac{\zeta}{A}\right)^2 + \left(\frac{\xi}{B}\right)^2 = 1$$

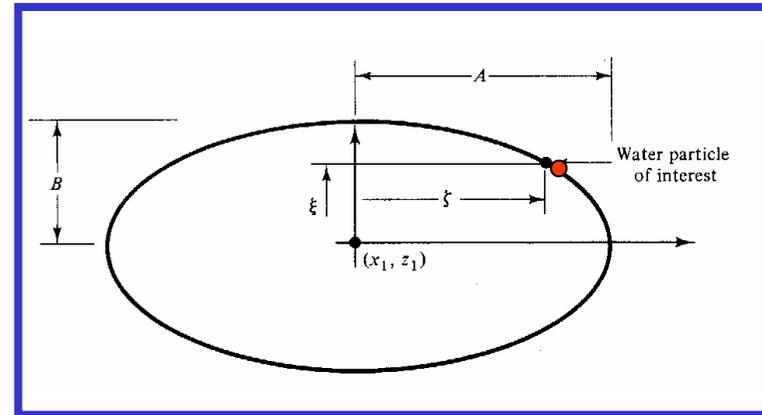
Che è l'equazione di un'ellisse di semiassi A e B rispettivamente come rappresentato in figura



Proprietà “ingegneristiche” delle onde

Traiettorie delle particelle (onde progressive)

Si noti come il semiasse “A” sia sempre più grande di “B”. Infatti, in corrispondenza del m.w.l., le particelle con elevazione media $y=0$, seguono una traiettoria con spostamento verticale $H/2$. Non ci sono particelle con posizione media superiore a $y=0$.



Traiettorie delle particelle (onde progressive) in acque basse ($h/L < 1/20$)

Vediamo ora come si particolarizzano le traiettorie nel caso di acque basse. In questo caso, usando i valori asintotici delle funzioni iperboliche si ottiene:

$$A = \frac{H}{2} \frac{\cosh k(h + y_1)}{\sinh(kh)} = \frac{H}{2} \frac{1}{kh} = \frac{HL}{4\pi h} = \frac{HT}{4\pi} \sqrt{\frac{g}{h}}$$

In cui si sono introdotte le uguaglianze valide per acque basse (i.e. $L=CT=(gh)^{1/2}T$). Da notare che A è indipendente dalla elevazione!

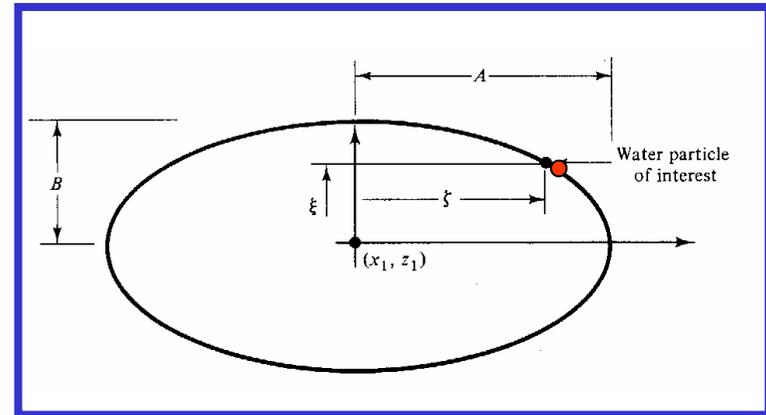
Proprietà “ingegneristiche” delle onde

Traiettorie delle particelle (onde progressive) in
acque basse ($h/L < 1/20$)

Per quanto concerne l'altro semiasse (“B”):

$$B = \frac{H}{2} \frac{\sinh k(h + y_1)}{\sinh(kh)} = \frac{H}{2} \left(1 + \frac{y_1}{h} \right)$$

Da notare come l'escursione verticale aumenta linearmente con l'elevazione, essendo zero (ovviamente) al fondo e massima ($H/2$) per $y=0$.



Proprietà “ingegneristiche” delle onde

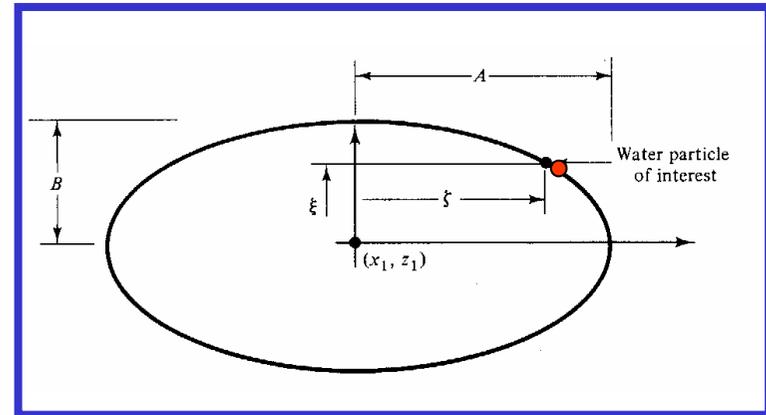
Traiettorie delle particelle (onde progressive) in acque profonde ($h/L > 1/2$)

Vediamo ora come si particolarizzano le traiettorie nel caso di acque profonde. Anche in questo caso saranno utilizzati i valori asintotici delle funzioni iperboliche ottenendo:

$$A = \frac{H}{2} \frac{e^{kh} e^{ky_1}}{e^{kh}} = \frac{H}{2} e^{ky_1}$$

$$B = \frac{H}{2} e^{ky_1} = A$$

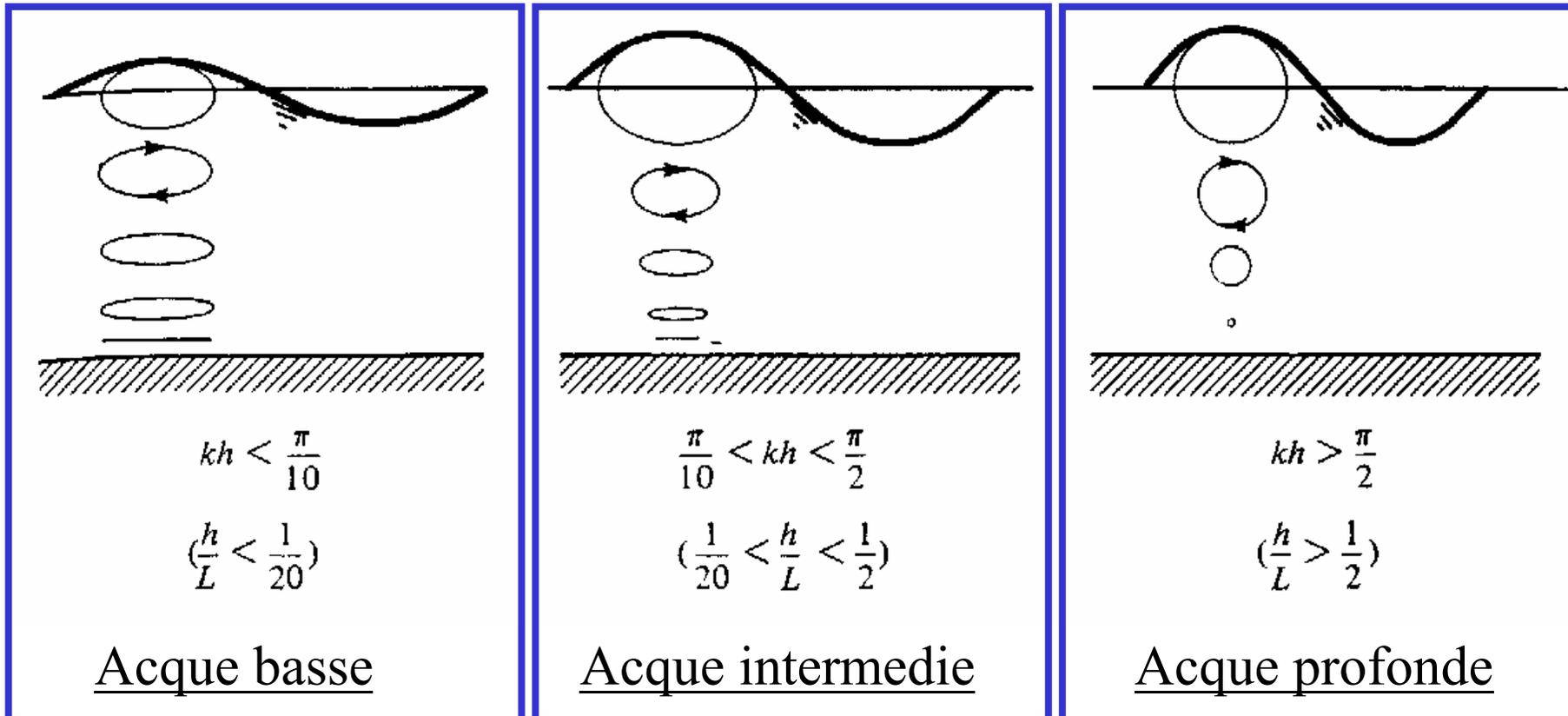
Le traiettorie in questo caso risultano essere cerchi con raggio decrescente esponenzialmente con la profondità. Da notare come per una profondità di $y = -L/2$, i valori di A e B si sono ridotti di una quantità pari a $e^{-\pi}$ cioè a dire il raggio è già trascurabile!



Proprietà “ingegneristiche” delle onde

Traiettorie delle particelle (onde progressive)

La figura sotto riportata rappresenta le traiettorie seguite dalle particelle rispettivamente nella situazione di acque basse, acque intermedie e acque profonde.



Proprietà “ingegneristiche” delle onde

Il campo di pressione sotto onde di piccola ampiezza

In questo caso si adotta il teorema di Bernoulli nel caso di moto non stazionario

$$\frac{p}{\rho} + gy + \frac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2) - \frac{\partial \phi}{\partial t} = C(t)$$

Uguagliando quest'ultima alla generica quota y e la stessa in corrispondenza della superficie libera dove la pressione è nulla e, linearizzando, si ricava: Si ottiene:

$$\left(\frac{p}{\rho} + gy - \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_y = g\eta - \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{\eta \approx 0}$$

Ricordando che la forma linearizzata della DFSBC si riduce alla:

$$\eta = \frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{y=0}$$

si vede ricava come la pressione possa essere espressa come:

$$\frac{p}{\rho} = -gy + \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Proprietà “ingegneristiche” delle onde

Il campo di pressione sotto onde *progressive*

In questo caso, ricordando l'espressione della funzione potenziale, si ricava:

$$p = -\rho g y + \rho g \frac{H}{2} \frac{\cosh k(h+y)}{\cosh(kh)} \cos(kx - \sigma t)$$

O, più semplicemente:

$$p = -\rho g y + \rho g \eta K_p(y) \quad \text{con} \quad K_p(y) = \frac{\cosh k(h+y)}{\cosh(kh)}$$

Il primo termine dell'espressione che fornisce la pressione è, ovviamente, il termine idrostatico, presente anche in assenza di campo di moto. Il termine $K_p(y)$ è invece detto fattore di risposta della pressione e, al di sotto del livello di quiete è sempre inferiore all'unità.

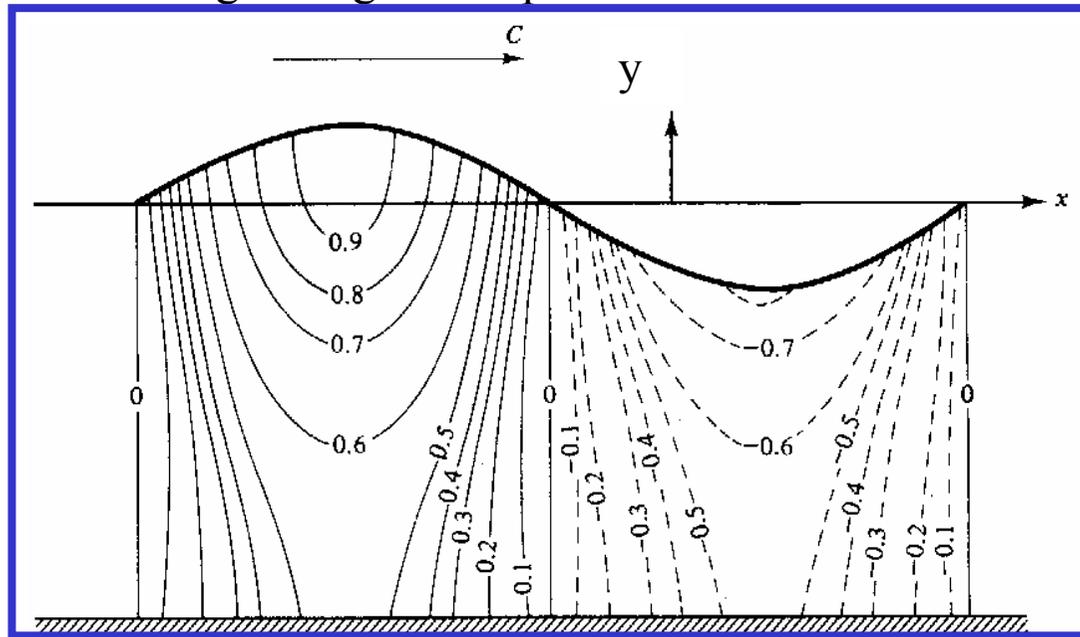
La pressione dinamica è quindi il risultato di due contributi: il primo dato dallo spostamento della superficie libera (se il coefficiente K_p fosse sempre pari a 1, ci sarebbe una risposta puramente di tipo idrostatico). Tuttavia, associata al moto vi è anche un'accelerazione verticale che è 180° fuori fase rispetto allo spostamento η , che modifica la distribuzione delle pressioni dal caso idrostatico.

Proprietà “ingegneristiche” delle onde

Il campo di pressione sotto onde progressive

$$p(y_1) = \left(-\rho g y + \rho g \eta K_p \right)_{y=0} + y_1 \frac{\partial}{\partial y} \left(-\rho g y + \rho g \eta K_p \right)_{y=0} + \dots$$
$$= \rho g \eta - \rho g y_1 = \boxed{\rho g (\eta - y_1)} \quad \leftarrow \text{al primo ordine}$$

Dall'espressione sopra riportata, si ricava come si di sotto della cresta, al minimo ordine, la distribuzione delle pressioni sia di tipo idrostatico, mentre al di sotto di $y=0$, essa devia dalla legge idrostatica. La figura seguente riporta le isolinee nel caso di $h/L=0.2$



Proprietà “ingegneristiche” delle onde

Il campo di pressione sotto onde *progressive*

Un metodo per misurare le onde sia in laboratorio che in campo è legato al rilievo delle pressioni e porì di risalire agli spostamenti della superficie libera attraverso la relazione:

$$p = -\rho g y + \rho g \eta K_p(y)$$

Più precisamente, utilizzando la relazione precedente, un misuratore di pressione poggiato sul fondo rileva sia la componente idrostatica, sia la componente dinamica della pressione. Quest'ultima per un particolare periodo è proporzionale allo spostamento η , (che è la variabile di interesse). Se la pressione dinamica (p_D) viene isolata, sottraendo dalla totale la componente idrostatica, allora η risulta dato dalla seguente espressione:

$$\eta = \frac{p_D}{\rho g K_p(-h)} \quad \text{con} \quad K_p(-h) = \frac{1}{\cosh(kh)}$$

In cui $K_p(-h)$ risulta funzione della frequenza angolare delle onde. Pertanto bisogna utilizzare la relazione di dispersione per determinare (kh) dalla frequenza osservata delle onde. Sebbene il fattore di risposta della pressione sia stato ricavato per una sola onda, laddove è ragionevole assumere onde lineari, le precedenti possono essere utilizzate anche per determinare la pressione in onde random. Infine, poiché K_p dipende dalla frequenza, onde corte presentano un K_p molto piccolo (al fondo) al contrario delle onde lunghe. In altre parole ciò significa che onde molto piccole non possono essere rilevate dai misuratori di pressione al fondo.

Proprietà “ingegneristiche” delle onde

Il campo di pressione sotto onde *progressive*

Il fattore di risposta delle pressioni K_p presenta un massimo ($K_p=1$) in corrispondenza del livello di quiete, e un minimo di $1/(\cosh(kh))$ al fondo. Per ottenere la pressione sopra il livello di quiete, ancora una volta, si può sviluppare in serie di Taylor, ottenendo:

$$p(y_1) = \left(-\rho g y + \rho g \eta K_p \right)_{y=0} + y_1 \frac{\partial}{\partial y} \left(-\rho g y + \rho g \eta K_p \right)_{y=0} + \dots$$

$$= \rho g \eta - \rho g y_1 = \rho g (\eta - y_1) \quad \leftarrow \text{al primo ordine}$$

