UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
FACOLTÀ DI INGEGNERIA
Corso di Regime e Protezione dei Litorali

PROPRIETÀ INGEGNERISTICHE DELLE ONDE LINEARI

Prof. Ing. Enrico FOTI

INTRODUZIONE

Le soluzioni sviluppate per onde progressive e stazionarie di piccola ampiezza rappresentano le basi per applicazioni a numerosi problemi ingegneristici.

- La cinematica delle particelle d'acqua e il campo di pressione all'interno del corpo dell'onda sono direttamente correlati al calcolo delle forze sui corpi immersi.

- La trasformazione delle onde durante il loro propagarsi dal largo alla riva è anche importante, poiché per molte opere costiere è indispensabile la previsione del clima ondoso al largo.

- E' necessario poi determinare qualsiasi trasformazione che si ripercuote sulle onde mano a mano che queste incontrano acque più basse.

CINEMATICA DELLE PARTICELLE D'ACQUA SOTTO ONDE DI PICCOLA AMPIEZZA (1/2)

ONDE PROGRESSIVE

Consideriamo un'onda progressiva il cui profilo è descritto dalla seguente espressione:

$$\eta = \frac{H}{2}\cos(kx - \sigma t)$$

La funzione potenziale delle velocità risulta:

$$\phi = -\frac{Hg \cosh k\left(h + y\right)}{2\sigma \cosh kh}\, sin(kx - \sigma t)$$

Ricordando l'espressione della relazione di dispersione (i.e. $\sigma^2 = gk\tanh(kh)$) possiamo riscrivere:

$$\phi = -\frac{H}{2} C \frac{\cosh k\left(h + y\right)}{\sinh kh} \sin(kx - \sigma t)$$

CINEMATICA DELLE PARTICELLE D'ACQUA SOTTO ONDE DI PICCOLA AMPIEZZA (2/2)

ONDE PROGRESSIVE

Vogliamo determinare le componenti di velocità delle singole particelle d'acqua.

Per definizione, la componente orizzontale delle velocità è:

$$v_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{H}{2}\sigma \frac{\cosh k(h+y)}{\sinh(kh)}\cos(kx - \sigma t)$$

ovvero:

$$v_x = \frac{gHk}{2\sigma}\frac{\cosh k(h+y)}{\cosh(kh)}\cos(kx - \sigma t)$$

L'accelerazione locale sarà quindi:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{H\sigma^2}{2}\frac{\cosh k(h+y)}{\sinh(kh)}\sin(kx - \sigma t)$$

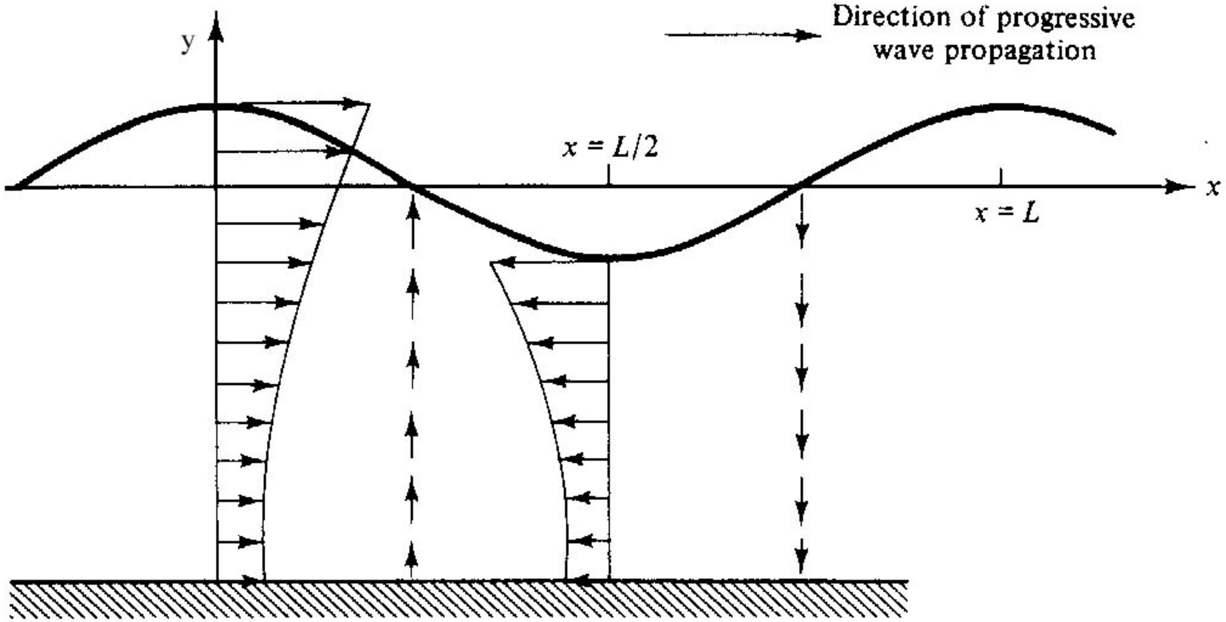
Per quanto concerne la componente verticale della velocità e dell'accelerazione locale:

$$v_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{H}{2}\sigma \frac{sinh k(h+y)}{sinh(kh)} sin(kx - \sigma t)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = -\frac{H\sigma^2}{2}\frac{sinh[k(h+y)]}{sinh(kh)}\cos(kx - \sigma t)$$

TRAIETTORIE DELLE PARTICELLE (1/8)

Esaminando le componenti di velocità verticale e orizzontale si nota come esse siano "sfasate" di 90°. Chiaramente i massimi di velocità orizzontale si hanno per $(kx-\sigma t)=0, \pi, \ldots$ mentre i massimi di velocità verticale si hanno per $(kx-\sigma t)=\pi/2, 3\pi/2$. La variazione verticale delle componenti di velocità (sia orizzontale che verticale) può essere meglio colta se si parte dal fondo dove $k(h+y)=0$. Ivi i termini iperbolici che contengono y sia in v_x che in v_y hanno il loro minimo, 1 e 0 rispettivamente. Man mano che ci si sposta verso l'alto il modulo delle componenti di velocità aumenta. Per quanto concerne le accelerazioni, la massima verticale si realizza quando la velocità orizzontale è massima (lo stesso per l'accelerazione orizzontale con la componente verticale di velocità).



TRAIETTORIE DELLE PARTICELLE (2/8)

Una particella d'acqua che abbia posizione media nel punto (x_1, y_1) sarà spostata dal campo di pressione e la sua posizione istantanea sarà data da ($x_1 + \zeta$, $y_1 + \xi$).

Le componenti dello spostamento (ζ, ξ) possono essere ricavate per integrazione delle componenti di velocità:

$$\varsigma(x_1, y_1, t) = \int v_x(x_1 + \zeta, y_1 + \xi)dt$$

$$\xi(x_1, y_1, t) = \int v_y(x_1 + \zeta, y_1 + \xi)dt$$

Nell'ipotesi di onde di piccola ampiezza (ζ, ξ) per cui possiamo sostituire $v_x(x_1 + \zeta, y_1 + \xi)$ con $v_x(x_1, y_1)$ (il che implica, in un'espansione in serie di Taylor, il trascurare i termini del tipo: $\frac{\partial v_x}{\partial x}\zeta$).

TRAIETTORIE DELLE PARTICELLE (3/8)

ONDE PROGRESSIVE

Pertanto dalla semplice integrazione si ottiene:

$$\zeta = -\frac{H}{2}\frac{gk}{\sigma^2}\frac{\cosh k(h+y_1)}{\cosh(kh)}\sin(kx_1-\sigma t)$$

Ovvero, usando la relazione di dispersione:

$$\boxed{\zeta = -\frac{H}{2}\frac{\cosh k(h+y_1)}{\sinh(kh)}\sin(kx_1-\sigma t)}$$

Similmente per lo spostamento verticale:

$$\boxed{\xi = \frac{H}{2}\frac{\sinh k(h+y_1)}{\sinh(kh)}\cos(kx_1-\sigma t)}$$

TRAIETTORIE DELLE PARTICELLE (4/8)

ONDE PROGRESSIVE

Gli spostamenti (ζ, ξ) possono essere riscritti come segue:

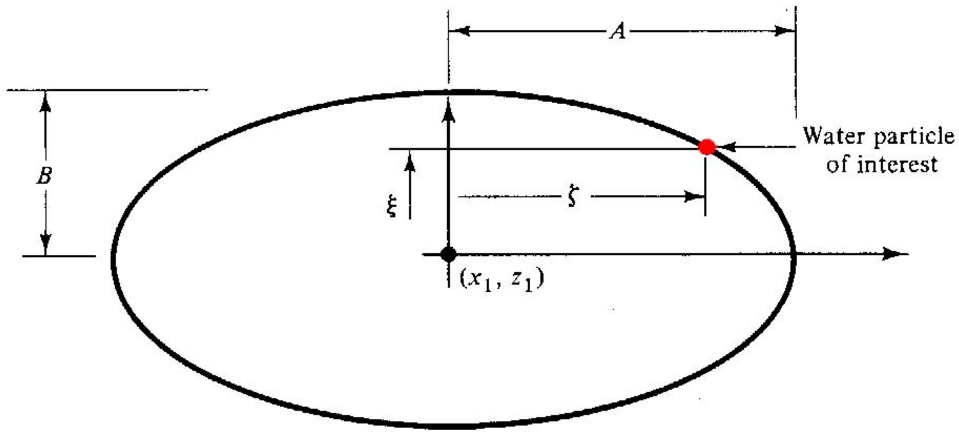
$$\zeta\left(x_1, y_1, t\right) = -A sin(kx_1 - \sigma t)$$

$$\xi\left(x_1, y_1, t\right) = B \cos(kx_1 - \sigma t)$$

Elevando al quadrato e sommando membro a membro si ricava:

$$\left(\frac{\zeta}{A}\right)^2 + \left(\frac{\xi}{B}\right)^2 = 1$$

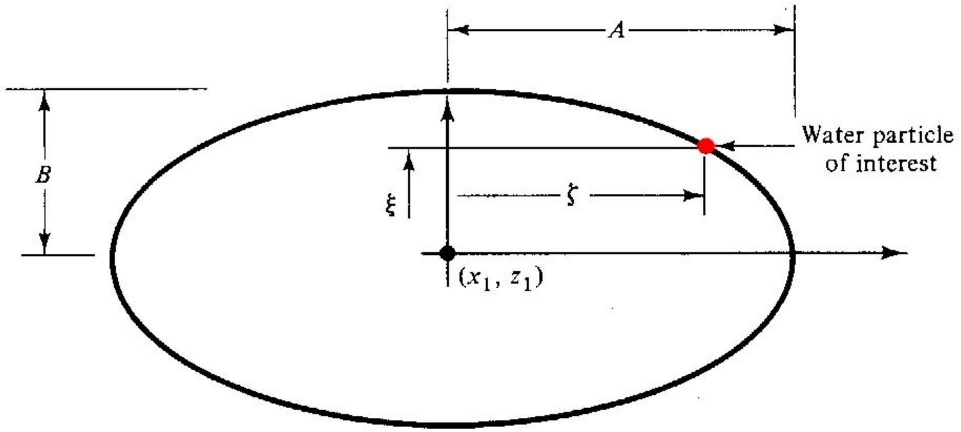
Che è l'equazione di un'ellisse di semiassi A e B rispettivamente come rappresentato in figura:



TRAIETTORIE DELLE PARTICELLE (5/8)

ONDE PROGRESSIVE

Si noti come il semiasse "A" sia sempre più grande di "B". Infatti, in corrispondenza del m.w.l., le particelle con elevazione media y=0, seguono una traiettoria con spostamento verticale H/2. Non ci sono particelle con posizione media superiore a y=0.



TRAIETTORIE DELLE PARTICELLE (ONDE PROGRESSIVE) IN ACQUE BASSE (H/L<1/20)

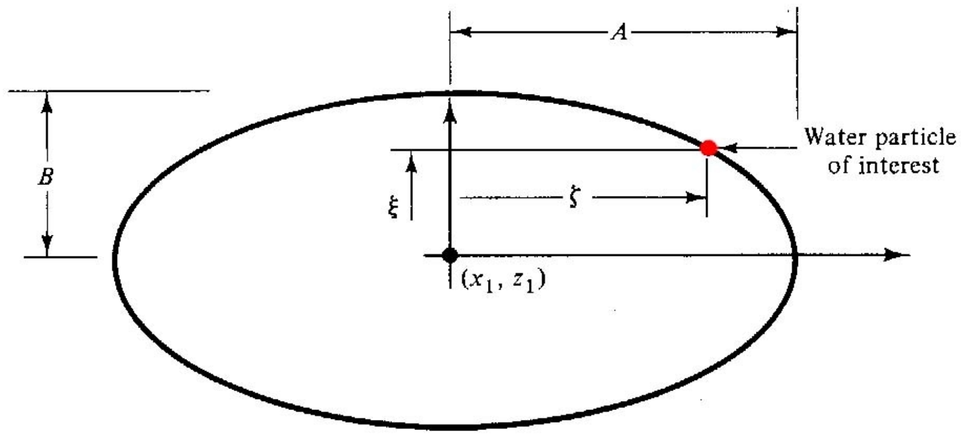
Vediamo ora come si particolarizzano le traiettorie nel caso di acque basse. In questo caso, usando i valori asintotici delle funzioni iperboliche si ottiene:

$$A = \frac{H}{2}\frac{\cosh k(h+y_1)}{sinh(kh)} = \frac{H}{2}\frac{1}{kh} = \frac{HL}{4\pi h} = \frac{HT}{4\pi}\sqrt{\frac{g}{h}}$$

In cui si sono introdotte le uguaglianze valide per acque basse (i.e. $L=CT=(gh)^{1/2}T$). Da notare che A è <u>indipendente dalla elevazione!</u>

TRAIETTORIE DELLE PARTICELLE (6/8)

ONDE PROGRESSIVE IN ACQUE BASSE (H/L<1/20)



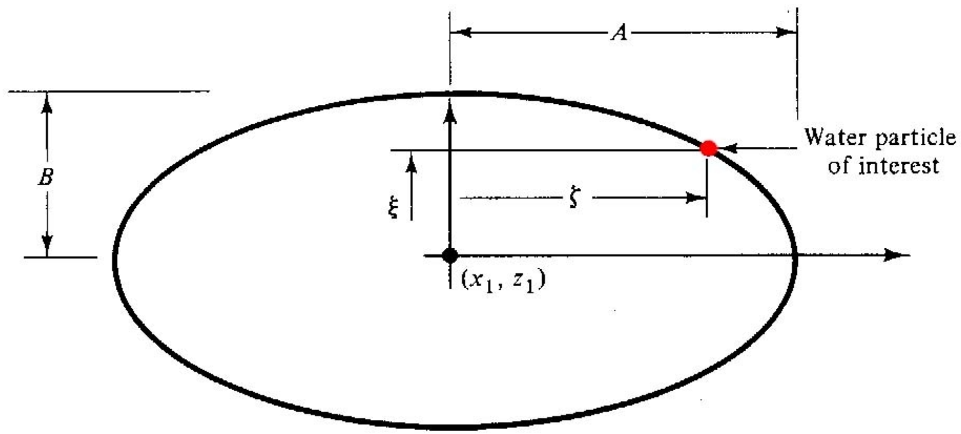
Per quanto concerne l'altro semiasse ("B"):

$$B = \frac{H}{2}\frac{sinhk(h+y_1)}{sinh(kh)} = \frac{H}{2}\left(1+\frac{y_1}{h}\right)$$

Da notare come l'escursione verticale aumenta linearmente con l'elevazione, essendo zero (ovviamente) al fondo e massima (H/2) per y=0.

TRAIETTORIE DELLE PARTICELLE (7/8)

ONDE PROGRESSIVE IN ACQUE PROFONDE (H/L>1/2)



Vediamo ora come si particolarizzano le traiettorie nel caso di acque profonde. Anche in questo caso saranno utilizzati i valori asintotici delle funzioni iperboliche ottenendo:

$$A = \frac{H}{2}\frac{e^{kh}e^{ky_1}}{e^{kh}} = \frac{H}{2}e^{ky_1}$$

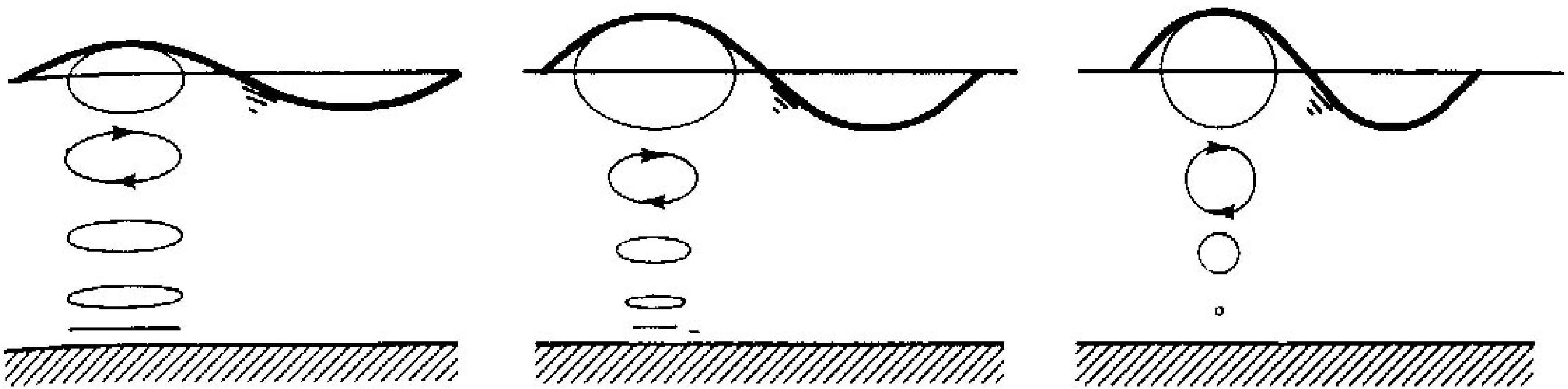
$$B = \frac{H}{2}e^{ky_1} = A$$

Le traiettorie in questo caso risultano essere cerchi con raggio decrescente esponenzialmente con la profondità. Da notare come per una profondità di y=-L/2, i valori di A e B si sono ridotti di una quantità pari a $e^{-\pi}$ cioè a dire il raggio è già trascurabile!

TRAIETTORIE DELLE PARTICELLE (8/8)

ONDE PROGRESSIVE

La figura sotto riportata rappresenta le traiettorie seguite dalle particelle rispettivamente nella situazione di acque basse, acque intermedie e acque profonde.



$kh < \frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{10} < kh < \frac{\pi}{2}$	$kh > \frac{\pi}{2}$
$(\frac{h}{L} < \frac{1}{20})$	$(\frac{1}{20} < \frac{h}{L} < \frac{1}{2})$	$(\frac{h}{L} > \frac{1}{2})$
Acque basse	Acque intermedie	Acque profonde

IL CAMPO DI PRESSIONE (1/5)

In questo caso si adotta il teorema di Bernoulli nel caso di moto non stazionario:

$$\frac{p}{\rho} + gy + \frac{1}{2}\left(v_x^2 + v_y^2\right) - \frac{\partial \phi}{\partial t} = C(t)$$

Uguagliando quest'ultima alla generica quota y e la stessa in corrispondenza della superficie libera dove la pressione è nulla e, linearizzando, si ricava:

$$\left(\frac{p}{\rho} + gy - \frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_y = g\eta - \left.\frac{\partial \phi}{\partial t}\right|_{\eta \approx 0}$$

Ricordando che la forma linearizzata della DFSBC si riduce alla:

$$\eta = \frac{1}{g}\left.\frac{\partial \phi}{\partial t}\right|_{y=0}$$

Si può vedere come la pressione possa essere espressa come:

$$\boxed{\frac{p}{\rho} = -gy + \frac{\partial \phi}{\partial t}}$$

IL CAMPO DI PRESSIONE (2/5)

In questo caso, ricordando l'espressione della funzione potenziale, si ricava:

$$p = -\rho g y + \rho g \frac{H}{2} \frac{\cosh k(h+y)}{\cosh(kh)} \cos(kx - \sigma t)$$

o, più semplicemente:

$$\boxed{p = -\rho g y + \rho g \eta K_p(y)} \qquad \text{con} \qquad K_p(y) = \frac{\cosh k(h+y)}{\cosh(kh)}$$

Il primo termine dell'espressione che fornisce la pressione è, ovviamente, il termine idrostatico, presente anche in assenza di campo di moto. Il termine $K_p(y)$ è invece detto fattore di risposta della pressione e, al di sotto del livello di quiete ed è sempre inferiore all'unità.

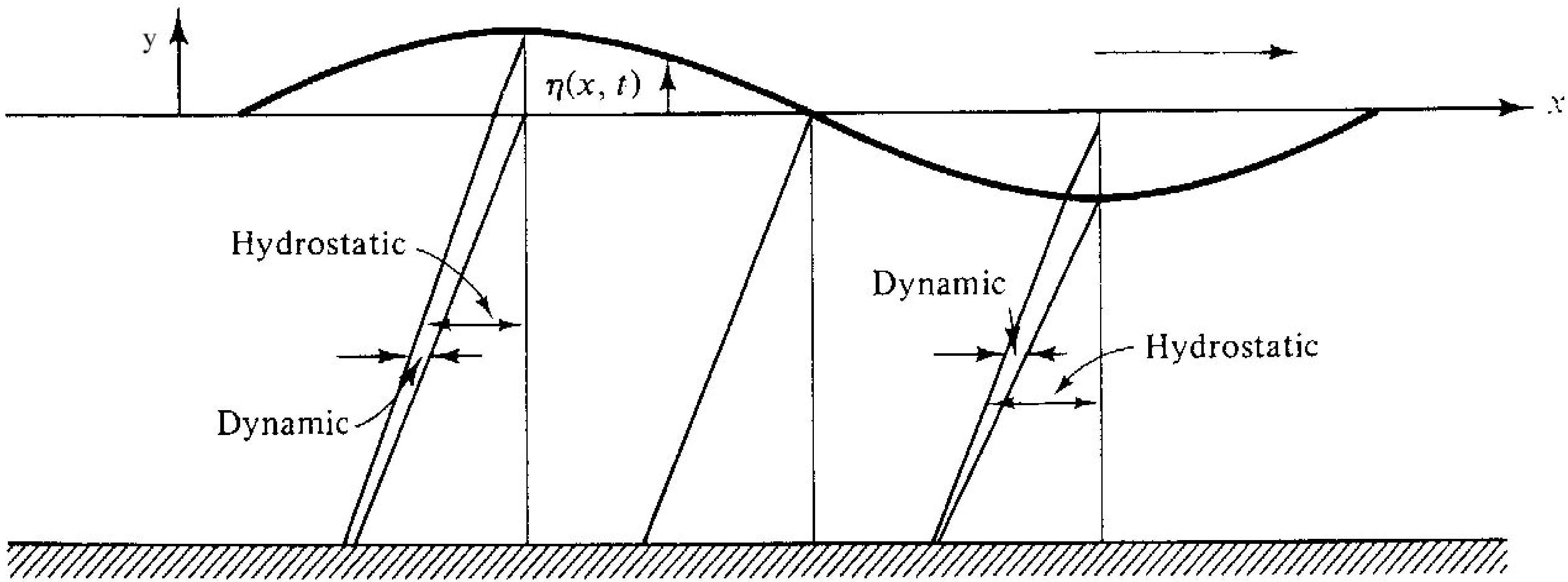
La pressione dinamica è quindi il risultato di due contributi: il primo dato dallo spostamento della superficie libera (se il coefficiente K_p fosse sempre pari a 1, ci sarebbe una risposta puramente di tipo idrostatico). Tuttavia, associata al moto vi è anche un'accelerazione verticale che è 180° fuori fase rispetto allo spostamento η, che modifica la distribuzione delle pressioni dal caso idrostatico.

IL CAMPO DI PRESSIONE (3/5)

Il fattore di risposta delle pressioni K_p presenta un massimo (K_p=1) in corrispondenza del livello di quiete, e un minimo di 1/(cosh(*kh*)) al fondo. Per ottenere la pressione sopra il livello di quiete, ancora una volta, si può sviluppare in serie di Taylor ($0<y_1<1$, ottenendo:

$$p(y_1) = \left(-\rho g y + \rho g \eta K_p\right)_{y=0} + y_1 \frac{\partial}{\partial y}\left(-\rho g y + \rho g \eta K_p\right)_{y=0} + \ldots$$

$$= \rho g \eta - \rho g y_1 = \rho g(\eta - y_1)$$ ← al primo ordine

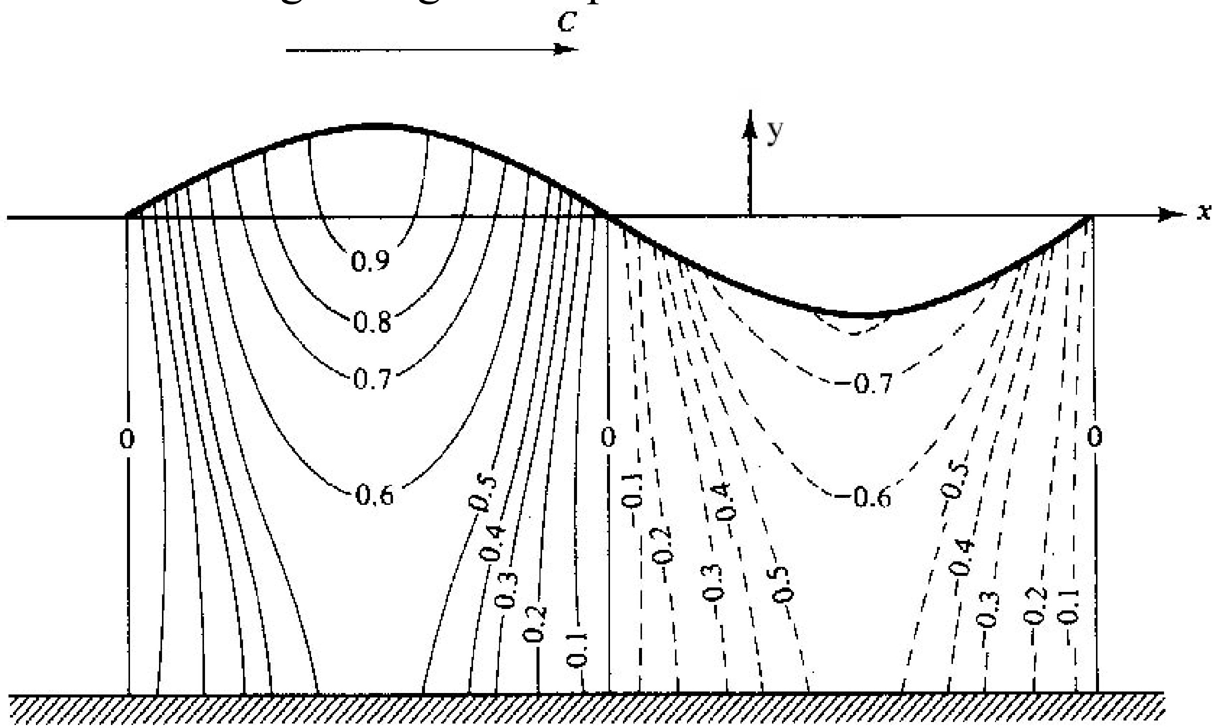


IL CAMPO DI PRESSIONE (4/5)

$$p(y_1) = \left(-\rho g y + \rho g \eta K_p\right)_{y=0} + y_1 \frac{\partial}{\partial y}\left(-\rho g y + \rho g \eta K_p\right)_{y=0} + \ldots$$

$$= \rho g \eta - \rho g y_1 = \boxed{\rho g(\eta - y_1)} \longleftarrow \quad \text{al primo ordine}$$

Dall'espressione sopra riportata, si ricava come al di sotto della cresta, al minimo ordine, la distribuzione delle pressioni sia di tipo idrostatico, mentre al di sotto di y=0, essa devia dalla legge idrostatica. La figura seguente riporta le isolinee nel caso di h/L=0.2



IL CAMPO DI PRESSIONE (5/5)

Un metodo per misurare le onde sia in laboratorio che in campo è legato al rilievo delle pressioni che consente poi di risalire agli spostamenti della superficie libera attraverso la relazione:

$$p = -\rho g y + \rho g \eta K_p(y)$$

Più precisamente, utilizzando la relazione precedente, un misuratore di pressione poggiato sul fondo rileva sia la componente idrostatica, sia la componente dinamica della pressione. Quest'ultima per un particolare periodo è proporzionale allo spostamento η, (che è la variabile di interesse). Se la pressione dinamica (p_D) viene isolata, sottraendo dalla totale la componente idrostatica, allora η risulta dato dalla seguente espressione:

$$\eta = \frac{p_D}{\rho g K_p(-h)} \qquad \text{con} \qquad K_p(-h) = \frac{1}{\cosh(kh)}$$

In cui $K_p(-h)$ risulta funzione della frequenza angolare delle onde. Pertanto bisogna utilizzare la relazione di dispersione per determinare (kh) dalla frequenza osservata delle onde. Sebbene il fattore di risposta della pressione sia stato ricavato per una sola onda, laddove è ragionevole assumere onde lineari, le precedenti possono essere utilizzate anche per determinare la pressione in onde random. Infine, poiché K_p dipende dalla frequenza, onde corte presentano un K_p molto piccolo (al fondo) al contrario delle onde lunghe. In altre parole ciò significa che onde molto piccole non possono essere rilevate dai misuratori di pressione al fondo.

ENERGIA E SUA PROPAGAZIONE (1/16)

INTRODUZIONE

L'energia complessivamente contenuta in un'onda è composta da due componenti: energia potenziale derivante dalla sopraelevazione della superficie liquida rispetto allo stato di quiete, e l'energia cinetica, dovuta al fatto che le particelle fluide sono dotate di movimento.

La determinazione dell'energia, nonché le sue modalità di propagazione, risultano essere particolarmente importanti per determinare le variazioni delle caratteristiche dell'onda allorché essa si propaga verso la riva, la potenza necessaria a generare il moto ondoso, nonché quella estraibile ai fini della produzione di energia elettrica (ad esempio).

ENERGIA E SUA PROPAGAZIONE (2/16)

ENERGIA POTENZIALE

L’energia potenziale deriva dallo spostamento di una massa (l’acqua) dalla posizione di equilibrio rispetto al campo gravitazionale.

Quando l’acqua è in quiete, essa presenta il minimo di energia potenziale. Tuttavia, uno spostamento di un insieme di particelle, con un conseguente spostamento della superficie libera, richiederà del lavoro compiuto sul sistema che provoca un aumento di energia potenziale.

Di seguito l’energia potenziale associata ad un’onda sinusoidale verrà ricavata determinando l’energia media per unità di superficie associata all’onda come differenza tra la presenza e l’assenza dell’onda.

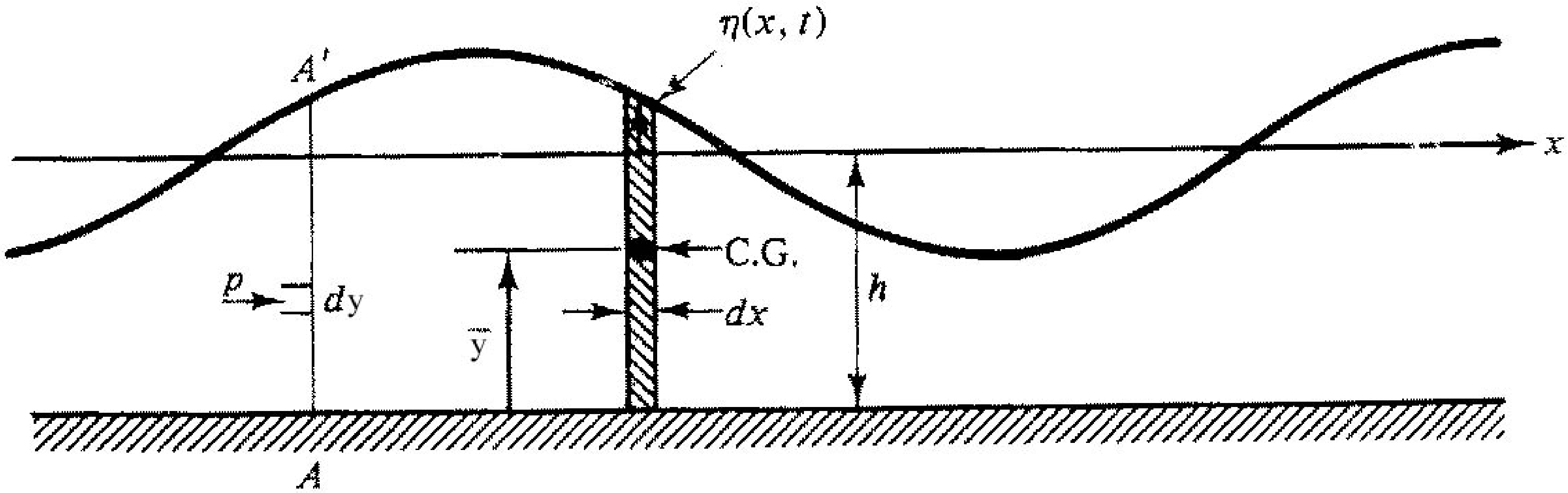
ENERGIA E SUA PROPAGAZIONE (3/16)

L'energia potenziale di una colonna di fluido dm relativamente al fondo è:

$$d(EP) = dm(g\,\underline{y})$$

In cui $\underline{y}$ è l'altezza del baricentro, che può essere scritta nella forma:

$$\underline{y} = \frac{h+\eta}{2}$$



La massa per unità di larghezza sarà pari a:

$$dm = \rho\left(h + \eta\right)dx$$

ENERGIA E SUA PROPAGAZIONE (4/16)

L'energia potenziale mediata su di una lunghezza d'onda, nel caso di onda progressiva di altezza H sarà pertanto pari a:

$$(\overline{EP})_T = \frac{1}{L}\int_x^{x+L} d(EP) = \frac{1}{L}\int_x^{x+L} \rho g \frac{(h+\eta)^2}{2} dx =$$

$$= \frac{\rho g}{L}\int_x^{x+L}\left[\frac{1}{2}\left(h^2+\eta^2+2h\eta\right)\right]dx$$

Il pedice T sta ad indicare il fatto che si sta considerando l'energia potenziale (totale) dell'intera colonna di fluido. Se si considera un'onda progressiva, per cui:

$$\eta = \frac{H}{2}\cos(kx-\sigma t)$$

Allora l'energia potenziale totale media risulta pari a:

$$(\overline{EP})_T = \frac{\rho g}{L}\left(\frac{1}{2}h^2 L + h\int_x^{x+L}\eta dx + \frac{1}{2}\int_x^{x+L}\eta^2 dx\right)$$

ENERGIA E SUA PROPAGAZIONE (5/16)

L'integrazione dell'espressione seguente è immediata.

$$(\overline{EP})_T = \frac{\rho g}{L}\left(\frac{1}{2}h^2 L + h\int_x^{x+L}\eta dx + \frac{1}{2}\int_x^{x+L}\eta^2 dx\right)$$

Il risultato ottenuto è quindi:

$$(\overline{EP})_T = \rho g \frac{1}{2}h^2 + \rho g \frac{H^2}{16}$$

E' chiaro come l'espressione sopra ottenuto indichi l'energia potenziale totale media. Volendo ricavare quella dovuta solo alla presenza dell'onda, bisognerà effettuare la differenza tra l'energia potenziale in presenza dell'onda e in assenza dell'onda, cioè:

$$(\overline{EP})_{onda} = (\overline{EP})_T - (\overline{EP})_{quiete} \longrightarrow \boxed{(\overline{EP})_{onda} = \frac{\rho g H^2}{16}}$$

Si noti come l'energia potenziale totale di un'onda per unità di area dipenda <u>solo</u> dall'altezza dell'onda!

ENERGIA E SUA PROPAGAZIONE (6/16)

ENERGIA CINETICA

L'energia cinetica è ovviamente associata al movimento delle particelle. Considerando una particella d'acqua di massa dm, si avrà:

$$d(EC) = dm\frac{v_x^2 + v_y^2}{2} = \rho dxdy\frac{v_x^2 + v_y^2}{2}$$

Per ottenere l'energia cinetica media per unità di superficie, l'espressione d(EC) deve essere integrata sull'intera profondità e mediata sulla lunghezza d'onda. In formule:

$$(\overline{EC}) = \frac{1}{L}\int_x^{x+L}\int_{-h}^{\eta}\rho\frac{v_x^2 + v_y^2}{2}dxdy$$

Dalle soluzioni analizzate circa il campo di velocità sotto un'onda progressiva, l'integrale può essere riscritto come segue:

$$(\overline{EC}) = \frac{\rho}{2L}\left(\frac{gHk}{2\sigma}\frac{1}{\cosh(kh)}\right)^2\int_x^{x+L}\int_{-h}^{\eta}\left(\cosh^2 k(h+y)\cos^2(kx-\sigma t) + \sinh^2 k(h+y)\sin^2(kx-\sigma t)\right)dydx$$

ENERGIA E SUA PROPAGAZIONE (7/16)

Usando le identità trigonometriche, l'espressione prima vista può essere riscritta come segue:

$$(\overline{EC}) = \frac{\rho}{2L}\left(\frac{gHk}{2\sigma}\frac{1}{\cosh(kh)}\right)^2 \cdot \int_x^{x+L}\int_{-h}^{\eta\approx 0}\frac{1}{2}\left(\cosh 2k(h+y)+\cos 2(kx-\sigma t)\right)dy\,dx$$

Integrando e semplificando si ottiene:

$$\boxed{(\overline{EC}) = \frac{1}{16}\rho g H^2}$$

ENERGIA E SUA PROPAGAZIONE (8/16)

ENERGIA TOTALE

L'energia totale media per unità di superficie di un'onda sarà quindi data dalla somma dell'energia potenziale e dell'energia cinetica. Chiamando con E detta quantità, si ottiene:

$$E = \overline{EP} + \overline{EC} = \frac{1}{8}\rho g H^2$$

L'energia totale di un'onda sarà quindi:

$$E = \frac{1}{8}\rho g H^2 L$$

Appare utile sottolineare ancora una volta come né l'energia potenziale, né l'energia cinetica dipendono dalla profondità o dalla lunghezza d'onda , ma solamente dal quadrato dell'altezza H.

ENERGIA E SUA PROPAGAZIONE (9/16)

FLUSSO DI ENERGIA

Le onde di piccola ampiezza non trasmettono massa. Infatti le traiettorie delle particelle sono composte da orbite chiuse. Tuttavia esse trasmettono energia.

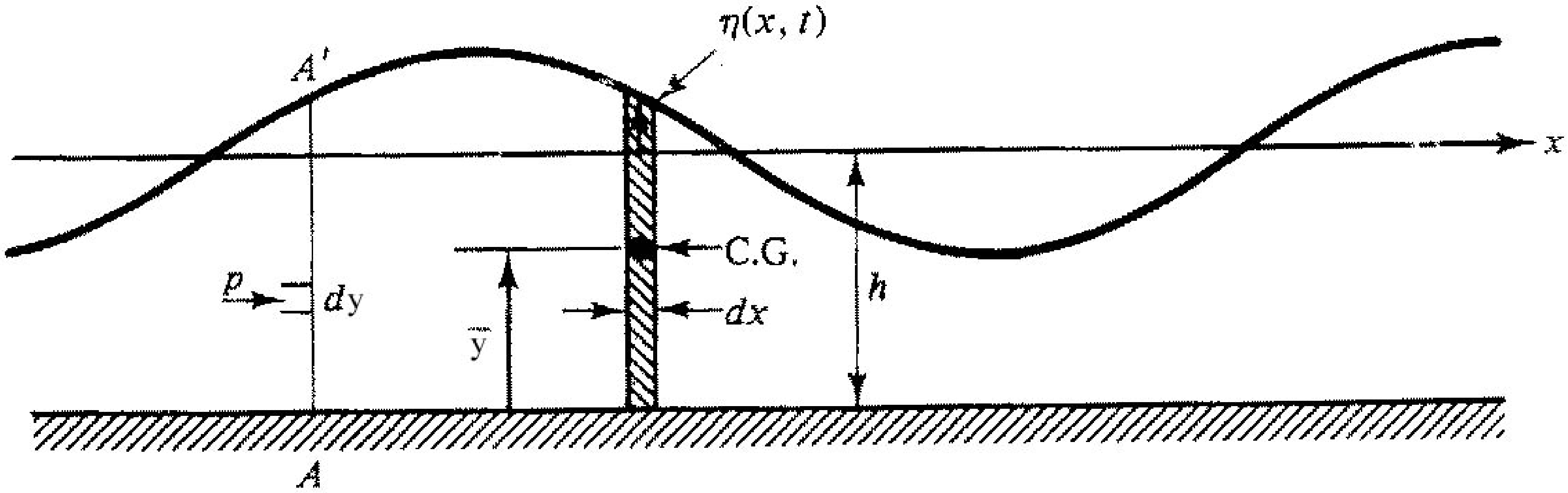
Per esempio, se si considerano le onde generate da una pietra che impatta su dell’acqua in quiete, parte dell’energia cinetica della pietra si trasforma in energia posseduta dal moto ondoso (sia potenziale che cinetica). Man mano che queste onde viaggiano fino, ad esempio, a frangersi sulla spiaggia, risulta chiaro un trasferimento di energia dalla zona di impatto fino alle zone vieppiù lontane.

La velocità con cui l’energia è trasferita viene detta flusso di energia F, e sulla base della teoria lineare detto flusso rappresenta la velocità con cui una superficie verticale di fluido compie lavoro sulla superficie prossima.

ENERGIA E SUA PROPAGAZIONE (10/16)

Con riferimento alla figura, la sezione verticale AA', la velocità istantanea con cui la pressione dinamica (p_D=(p+ρgy)) per unità di larghezza nella direzione di propagazione dell'onda è pari a :

$$F = \int_{-h}^{\eta} p_D V_x dy$$



ENERGIA E SUA PROPAGAZIONE (11/16)

Il flusso di energia medio è ottenuto mediando su di un periodo:

$$\overline{F} = \frac{1}{T}\int_{t}^{t+T}\int_{-h}^{\eta} p_D V_x \, dy dt =$$

$$= \frac{1}{T}\int_{t}^{t+T}\int_{-h}^{\eta}\left[\rho g \eta \frac{\cosh k(h+y)}{\cosh(kh)}\right]\left[\frac{gHk}{2\sigma}\frac{\cosh k(h+y)}{\cosh(kh)}\cos(kx-\sigma t)\right] dy dt =$$

$$= \frac{1}{T}\int_{t}^{t+T}\int_{-h}^{\eta}\left[\rho g \eta \frac{\cosh k(h+y)}{\cosh(kh)}\right]\left[\sigma\eta \frac{\cosh k(h+y)}{\sinh(kh)}\right] dy dt$$

Ottenuta dalla precedente utilizzando la relazione di dispersione.

ENERGIA E SUA PROPAGAZIONE (12/16)

Per mantenere solamente i termini del secondo ordine nell'altezza dell'onda, è sufficiente integrare fino al livello di quiete (η≅0), ottenendo:

$$\overline{F} = \frac{1}{T}\int_{t}^{t+T}\int_{-h}^{0}\rho g\sigma\eta^{2}\,\frac{\cosh^{2}k(h+y)}{\cosh(kh)\sinh(kh)}\,dydt$$

$$\overline{F} = \frac{\rho g\sigma}{4k}\left(\frac{H}{2}\right)^{2}\frac{\left(2kh+\sinh(2kh)\right)}{\sinh(2kh)}$$

$$\overline{F} = \left(\frac{1}{8}\rho g H^{2}\right)\cdot\frac{\sigma}{k}\cdot\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{2kh}{\sinh(2kh)}\right)\right]$$

$$\boxed{\overline{F} = E \cdot C \cdot n}$$

ENERGIA E SUA PROPAGAZIONE (13/16)

$$\overline{F} = E \quad \cdot \quad C \quad \cdot \quad n$$

Nell’espressione precedente, *Cn* rappresenta la velocità con cui l’energia viene trasmessa. Questa velocità viene chiamata velocità di gruppo C_g per motivi che saranno di seguito più chiari.

$$C_g = nC$$

Ovvero:

$$n = \frac{C_g}{C} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2kh}{sinh(2kh)}\right)$$

Il termine *n* presenta due limiti asintotici validi rispettivamente in acque profonde e acque basse. Detti limiti sono: 1/2 e 1. Da ciò ne segue che in acque profonde l’energia viene trasmessa ad una velocità pari ad un mezzo di quella di propagazione del profilo dell’onda, mentre in acque basse il profilo e l’energia viaggiano alla medesima velocità.

ENERGIA E SUA PROPAGAZIONE (14/16)

VELOCITÀ DI GRUPPO

Abbiamo già definito la celerità di gruppo come quella velocità a cui viaggia l'energia. Vediamo ora di dare una spiegazione più descrittiva, cioè a dire più vicina alla intuizione, derivante dallo studio della propagazione di un gruppo di onde: se pensiamo a due treni di onde di medesima altezza che viaggiano nella stessa direzione, caratterizzati da una frequenza e da un numero d'onda leggermente diversi, essi possono essere pensati come sovrapposti, cioè a dire:

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 = \frac{H}{2}\cos(k_1 x - \sigma_1 t) + \frac{H}{2}\cos(k_2 x - \sigma_2 t)$$

In cui (nell'ipotesi di Δk e $\Delta\sigma$ molto piccoli):

$$\sigma_1 = \sigma - \frac{\Delta\sigma}{2}; \quad k_1 = k - \frac{\Delta k}{2}$$

$$\sigma_2 = \sigma + \frac{\Delta\sigma}{2}; \quad k_2 = k + \frac{\Delta k}{2}$$

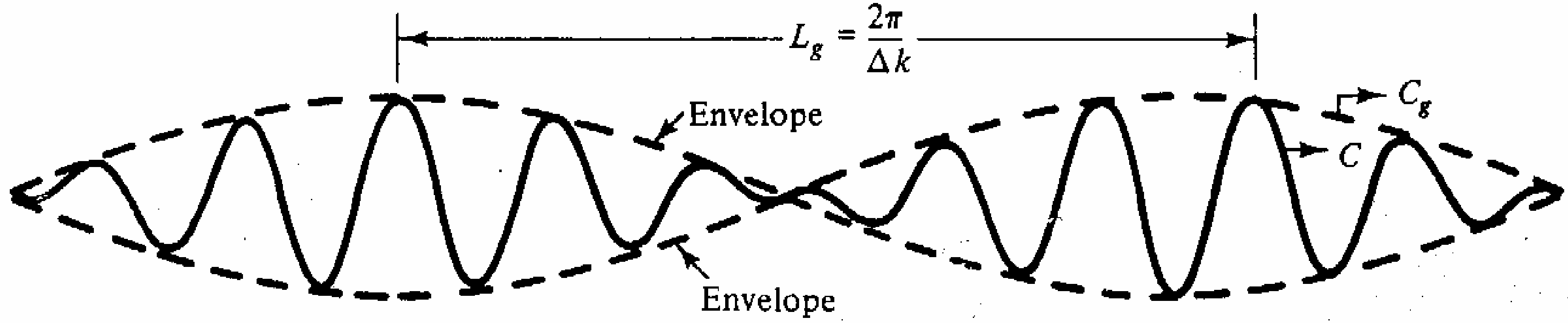
ENERGIA E SUA PROPAGAZIONE (15/16)

Utilizzando le solite identità trigonometriche, i due profili possono essere combinati tra loro come segue:

$$\eta = H\cos\left[\frac{1}{2}\left[(k_1 + k_2)x - (\sigma_1 + \sigma_2)t\right]\right]\cos\left[\frac{1}{2}\left[(k_1 - k_2)x - (\sigma_1 - \sigma_2)t\right]\right] =$$

$$= H\cos(kx - \sigma t)\cos\left[\frac{1}{2}\Delta k\left(x - \frac{\Delta\sigma}{\Delta k}t\right)\right]$$

Il profilo risultante, consiste in un'onda che si propaga con velocità C=σ/k, modulata da un inviluppo che si propaga a velocità Δσ/Δk. Il profilo risultante è mostrato in figura.



ENERGIA E SUA PROPAGAZIONE (16/16)

Ricordando che l'energia dipende solo dall'altezza, appare chiaro che non ci può essere propagazione di energia attraverso i nodi (in cui l'altezza e, quindi, la pressione dinamica, sono nulli). Per ciò l'energia deve viaggiare ad una velocità che è quella del gruppo d'onde, pari a:

$$C_g = \frac{\Delta\sigma}{\Delta k}$$

Al limite di $\Delta k \to 0$, si ottiene una velocità di gruppo per un gruppo d'onda di lunghezza L_g infinita (allora, un treno d'onda di altezza costante), $C_g = d\sigma/dk$. Questa derivata può essere valutata dalla relazione di dispersione:

$$\sigma^2 = gk\tanh(kh) \quad \text{che, derivata, diventa} \quad 2\sigma\frac{d\sigma}{dk} = g\tanh(kh) + gkh \cdot \sec h^2(kh)$$

$$C_g = \frac{d\sigma}{dk} = \frac{(g\tanh(kh) + gkh\sec h^2(kh))\sigma}{2gk\tanh(kh)} = \frac{C}{2}\left(1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)}\right)$$

Perciò, Cg=nC dove, ovviamente:

$$n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2kh}{sinh(2kh)}\right)$$