

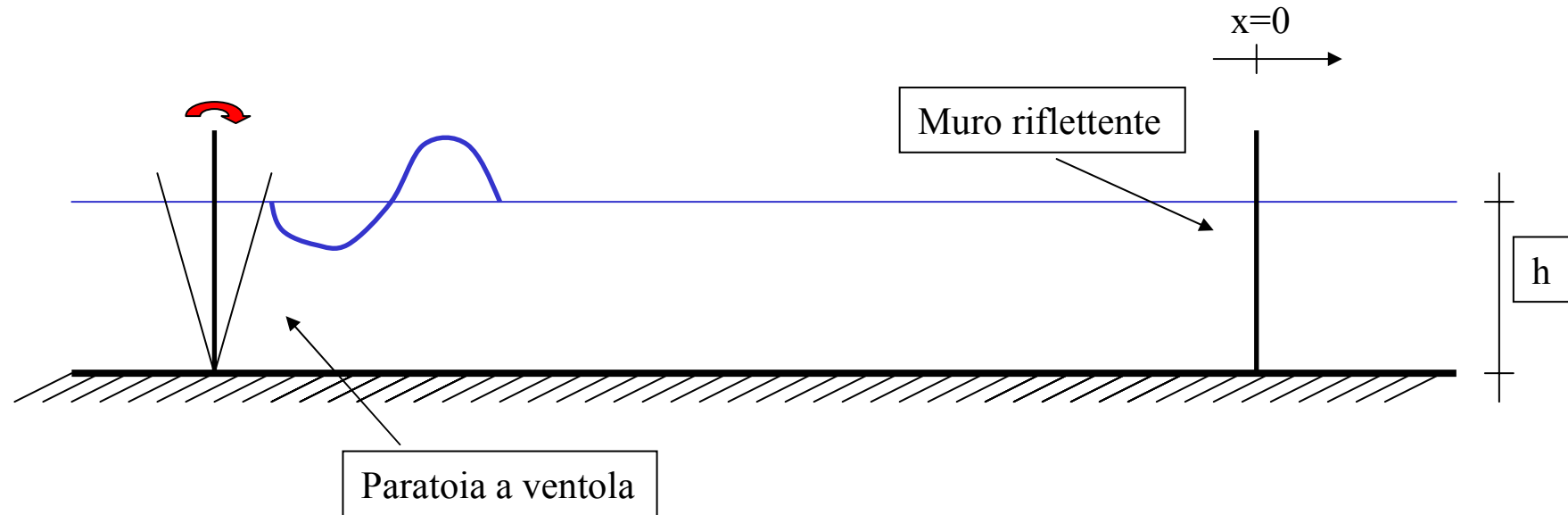


UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
FACOLTÀ DI INGEGNERIA
Corso di Regime e Protezione dei Litorali

RIFLESSIONE

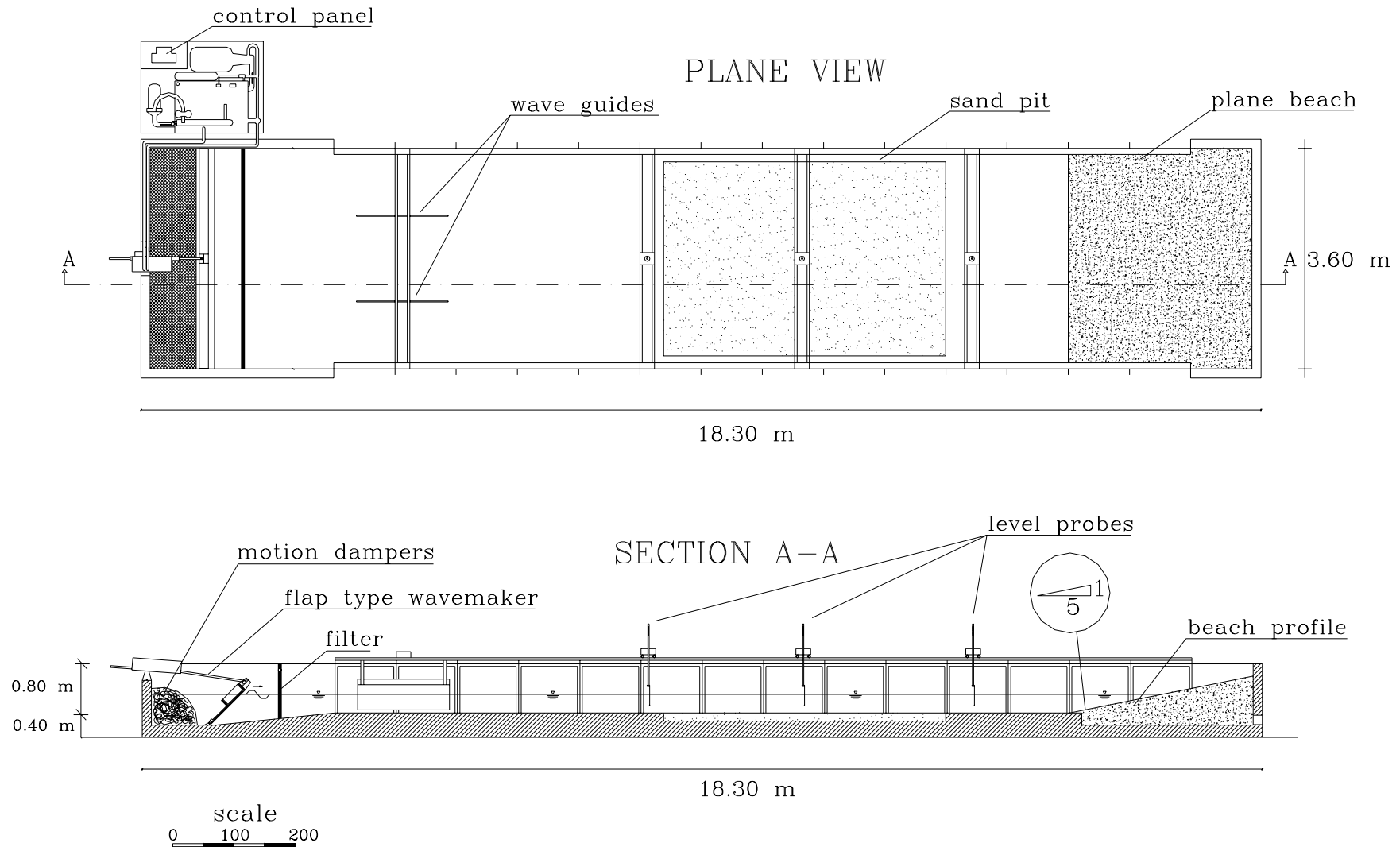
Prof. Ing. Enrico FOTI

SCHEMATIZZAZIONE DEL PROBLEMA (1/2)



- La paratoia oscilla periodicamente;
- Le onde così generate iniziano a propagarsi verso l'ostacolo e qui si riflettono;
- Ipotizziamo una profondità h costante.

SCHEMATIZZAZIONE DEL PROBLEMA (2/2)



Vasca per lo studio di fenomeni idrodinamici in presenza di onde in dotazione al D.I.C.A

FORMULAZIONE DEL PROBLEMA

Dal battitore parte l'onda progressiva caratterizzata da un profilo del tipo:

$$\eta(x,t) = \frac{H}{2} \cos(kx - \omega t) \Rightarrow \phi$$

A questa onda si somma l'onda riflessa (caratterizzata da uno sfasamento ε):

$$\eta_R(x,t) = \frac{H'}{2} \cos(k'x + \omega't + \varepsilon) \Rightarrow \phi'$$

Dal momento che stiamo affrontando un'analisi lineare (equazioni di Stokes al I ordine di approssimazione), se η e η' , ϕ e ϕ' soddisfano le equazioni, allora anche $(\eta + \eta')$, $(\phi + \phi')$ saranno soluzioni del problema.

E' chiaro come rispetto al caso in cui un'onda progressiva avanza in una regione indefinita, in questo caso abbiamo bisogno di un'altra condizione al contorno che mi traduca la presenza della parete a $x=0$. Tale condizione è:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{x=0} = 0$$

Attraverso quest'ultima condizione non solo ricaveremo ε , ma dimostreremo che $\omega = \omega'$.

SOLUZIONE ADOTTATA (1/4)

$$\eta_R(x,t) = \frac{H'}{2} \cos(k'x + \omega't + \varepsilon)$$

Ricordando che la relazione che lega la sopraelevazione del pelo libero alla funzione potenziale è data dalla relazione:

$$\eta(x,t) = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{z=0}$$

Ne segue che:

$$\left(\frac{\partial \phi_R}{\partial t} \right)_{z=0} = -g \eta_R = -g \frac{H'}{2} \cos(k'x + \omega't + \varepsilon)$$



$$\phi_R = -g \frac{H'}{2} (\omega')^{-1} \frac{\cosh(k'(h+z))}{\cosh(k'h)} \sin(k'x + \omega't + \varepsilon)$$

SOLUZIONE ADOTTATA (2/4)

Conosciamo η e ϕ che come η_R e ϕ_R soddisfano le equazioni di Stokes al primo ordine di approssimazione. Ne segue che per la linearità del problema trattato $\eta + \eta_R$ e $\phi + \phi_R$ le soddisfano. In formule:

$$\eta(x, t) = \eta + \eta_R = \frac{H}{2} \cos(kx - \omega t) + \frac{H'}{2} \cos(k'x + \omega' t + \varepsilon)$$

$$\begin{aligned} \phi(x, z, t) &= \phi + \phi_R = \\ &= g \frac{H}{2} (\omega)^{-1} \frac{\cosh(k(h+z))}{\cosh(kh)} \operatorname{sen}(kx - \omega t) - g \frac{H'}{2} (\omega')^{-1} \frac{\cosh(k'(h+z))}{\cosh(k'h)} \operatorname{sen}(k'x + \omega' t + \varepsilon) \end{aligned}$$

Poiché in corrispondenza della parete riflettente ($x=0$) abbiamo la condizione al contorno che impone:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{x=0} = 0 \Rightarrow [\forall z, \forall t]$$

SOLUZIONE ADOTTATA (3/4)

Si ricava:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{x=0} = g \frac{H}{2} (\omega)^{-1} \frac{\cosh(k(h+z))}{\cosh(kh)} k \cos(kx - \omega t) -$$

$$- g \frac{H'}{2} (\omega')^{-1} \frac{\cosh(k'(h+z))}{\cosh(k'h)} k' \cos(k'x + \omega't + \varepsilon) = 0 \quad [\forall z, \forall t]$$

In corrispondenza di una particolare z^* , l'espressione appena ricavata si particolarizza come segue:

$$A(z^*) \cos(\omega t) - B(z^*) \cos(\omega' t + \varepsilon) = 0 \quad [\forall t]$$

\Downarrow

$$A(z^*) \cos(\omega t) = B(z^*) \cos(\omega' t + \varepsilon)$$

Perché siano uguali ad ogni tempo, devono essere verificate le condizioni:

$$A(z^*) = B(z^*);$$

$$\omega = \omega'; \Rightarrow k = k'$$

$$\varepsilon = 0$$

E questo, per ogni z . Le superiori condizioni porgono:

$$g \frac{H}{2} (\omega)^{-1} \frac{\cosh(k(h+z))}{\cosh(kh)} \cdot k = g \frac{H'}{2} (\omega')^{-1} \frac{\cosh(k'(h+z))}{\cosh(k'h)} \cdot k' \quad \Rightarrow \quad \boxed{H = H'}$$

SOLUZIONE ADOTTATA (4/4)

Riscriviamo i risultati ottenuti in forma più compatta:

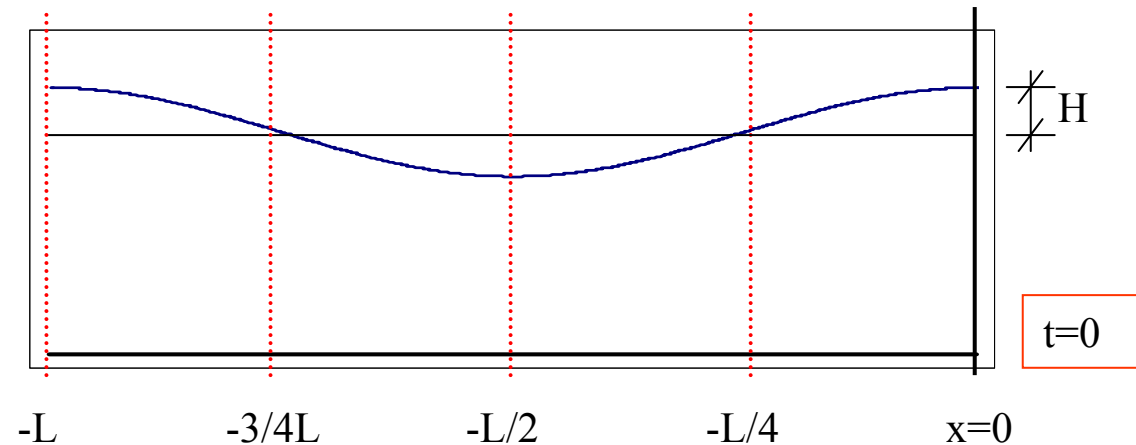
$$\begin{aligned}\eta(x, t) &= \frac{H}{2} [\cos(kx) \cos(\omega t) + \sin(kx) \sin(\omega t) + \cos(kx) \cos(\omega t) - \sin(kx) \sin(\omega t)] = \\ &= H \cos(kx) \cos(\omega t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi(x, z, t) &= g \frac{H}{2} (\omega)^{-1} \frac{\cosh(k(h+z))}{\cosh(kh)} \cdot [\sin(kx) \cos(\omega t) - \cos(kx) \sin(\omega t) - \sin(kx) \cos(\omega t) - \cos(kx) \sin(\omega t)] = \\ &= -g \frac{H}{2} (\omega)^{-1} \frac{\cosh(k(h+z))}{\cosh(kh)} 2 \cos(kx) \sin(\omega t)\end{aligned}$$

Ovvero:

$$\begin{aligned}\eta(x, t) &= H \cos(kx) \cos(\omega t) \\ \phi(x, z, t) &= -gH(\omega)^{-1} \frac{\cosh(k(h+z))}{\cosh(kh)} \cos(kx) \sin(\omega t)\end{aligned}$$

IL CAMPO DI MOTO RISULTANTE (1/5)



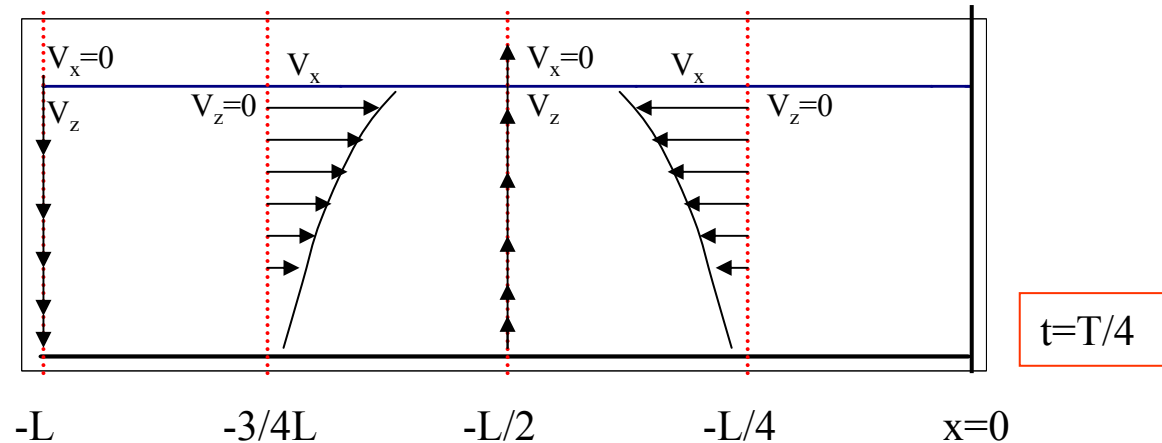
$$\eta(x, t) = H \cos\left(\frac{2\pi}{L} x\right) \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$$

$$V_x(x, z, t) \equiv \frac{\partial \phi}{\partial x} = gH(\omega)^{-1} k \frac{\cosh(k(h+z))}{\cosh(kh)} \sin\left(\frac{2\pi}{L} x\right) \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$$

$$V_z(x, z, t) \equiv \frac{\partial \phi}{\partial z} = -gH(\omega)^{-1} k \frac{\sinh(k(h+z))}{\cosh(kh)} \cos\left(\frac{2\pi}{L} x\right) \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$$

Per $t=0$ si ha una calma apparente. Infatti si ha $V_x = V_z = 0$ per ogni x e per ogni z .

IL CAMPO DI MOTO RISULTANTE (2/5)



$$\eta(x,t) = H \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \Rightarrow \eta(x,t) = 0 \quad \forall x$$

$$V_x(x,z,t) \equiv \frac{\partial \phi}{\partial x} = gH(\omega)^{-1} k \frac{\cosh(k(h+z))}{\cosh(kh)} \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

$$V_z(x,z,t) \equiv \frac{\partial \phi}{\partial z} = -gH(\omega)^{-1} k \frac{\sinh(k(h+z))}{\cosh(kh)} \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

$t=T/4$: momento di piatto ($\eta=0$ per ogni x); V_x ha un massimo a $x=-L/4$ ed è diretta in verso negativo; il suo andamento lungo z varia col \cosh . A $x=-L/2$ $V_x=0$; a $x=-3L/4$ V_x è massima e varia lungo z col \cosh . A $x=-L$ $V_x=0$. Nello stesso istante, le velocità verticali V_z sono massime e rivolte verso il basso a $x=0$ variando lungo z col \cosh fino a zero. A $x=-L/4$ $V_z=0$; a $x=-L/2$ la V_z è massima, diretta verso l'alto, e varia con z come anzi detto.

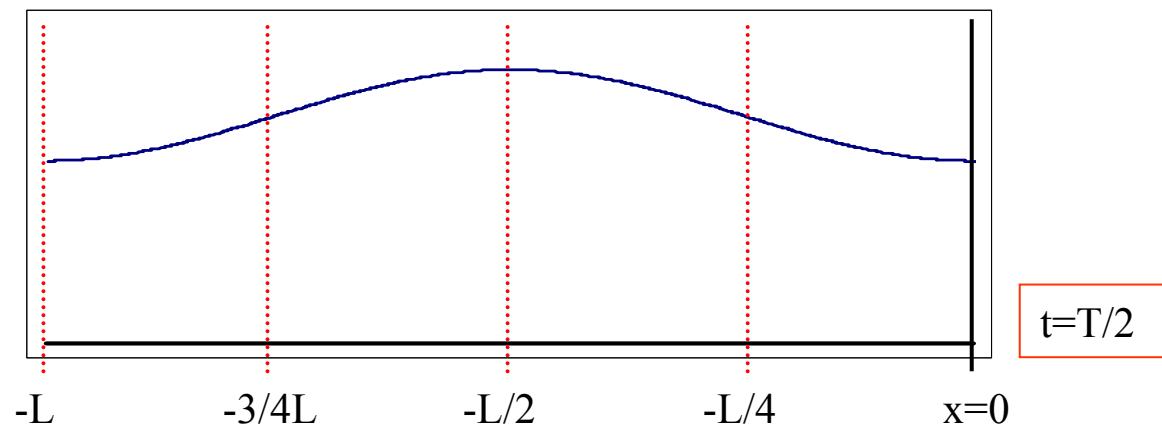
IL CAMPO DI MOTO RISULTANTE (3/5)

$$\eta(x,t) = H \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

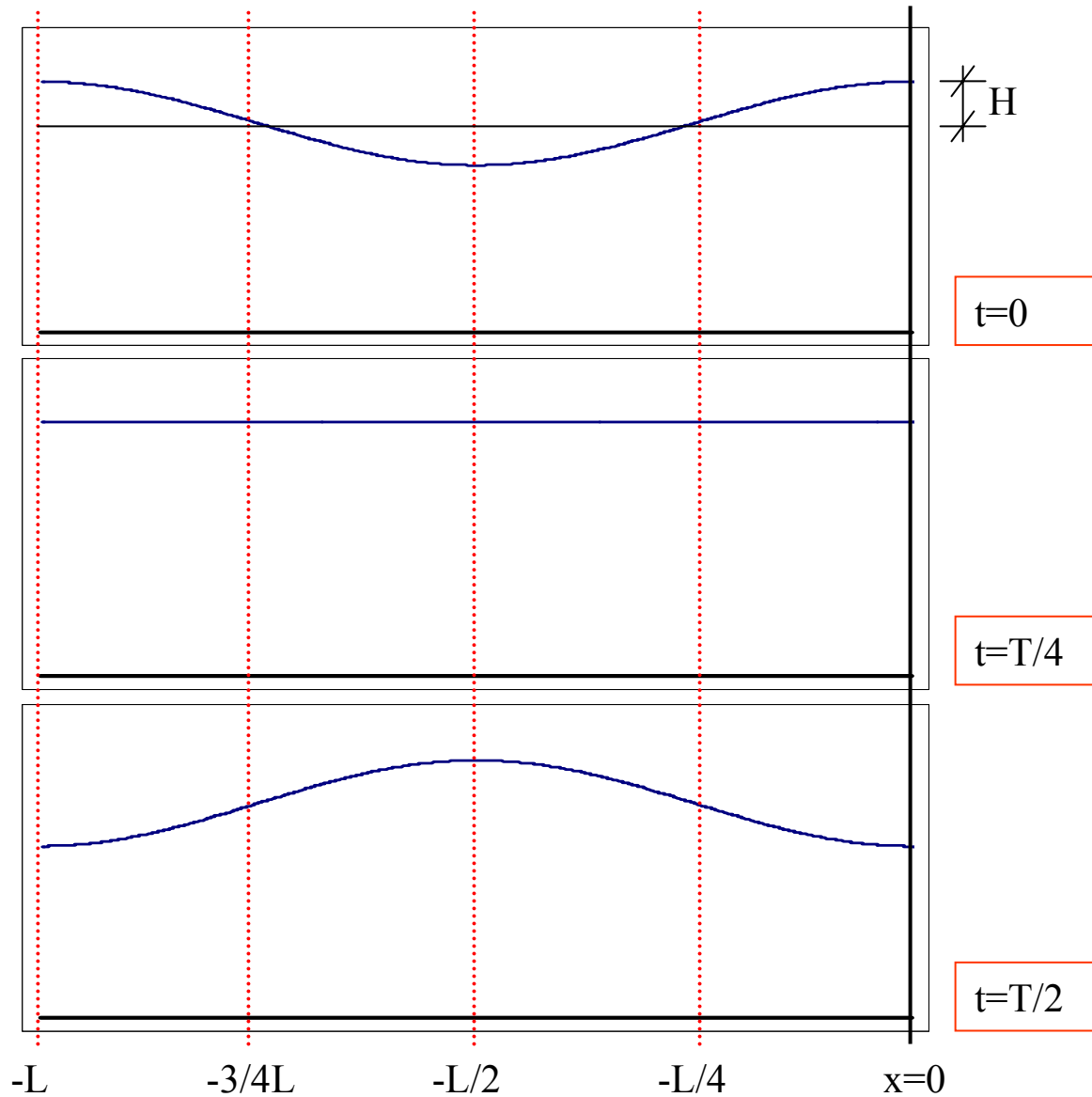
$$V_x(x,z,t) \equiv \frac{\partial \phi}{\partial x} = gH(\omega)^{-1}k \frac{\cosh(k(h+z))}{\cosh(kh)} \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

$$V_z(x,z,t) \equiv \frac{\partial \phi}{\partial z} = -gH(\omega)^{-1}k \frac{\sinh(k(h+z))}{\cosh(kh)} \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

Anche per $t=T/2$ si ha una calma apparente. Infatti si ha $V_x=V_z=0$ per ogni x e per ogni z).



IL CAMPO DI MOTO RISULTANTE (4/5)

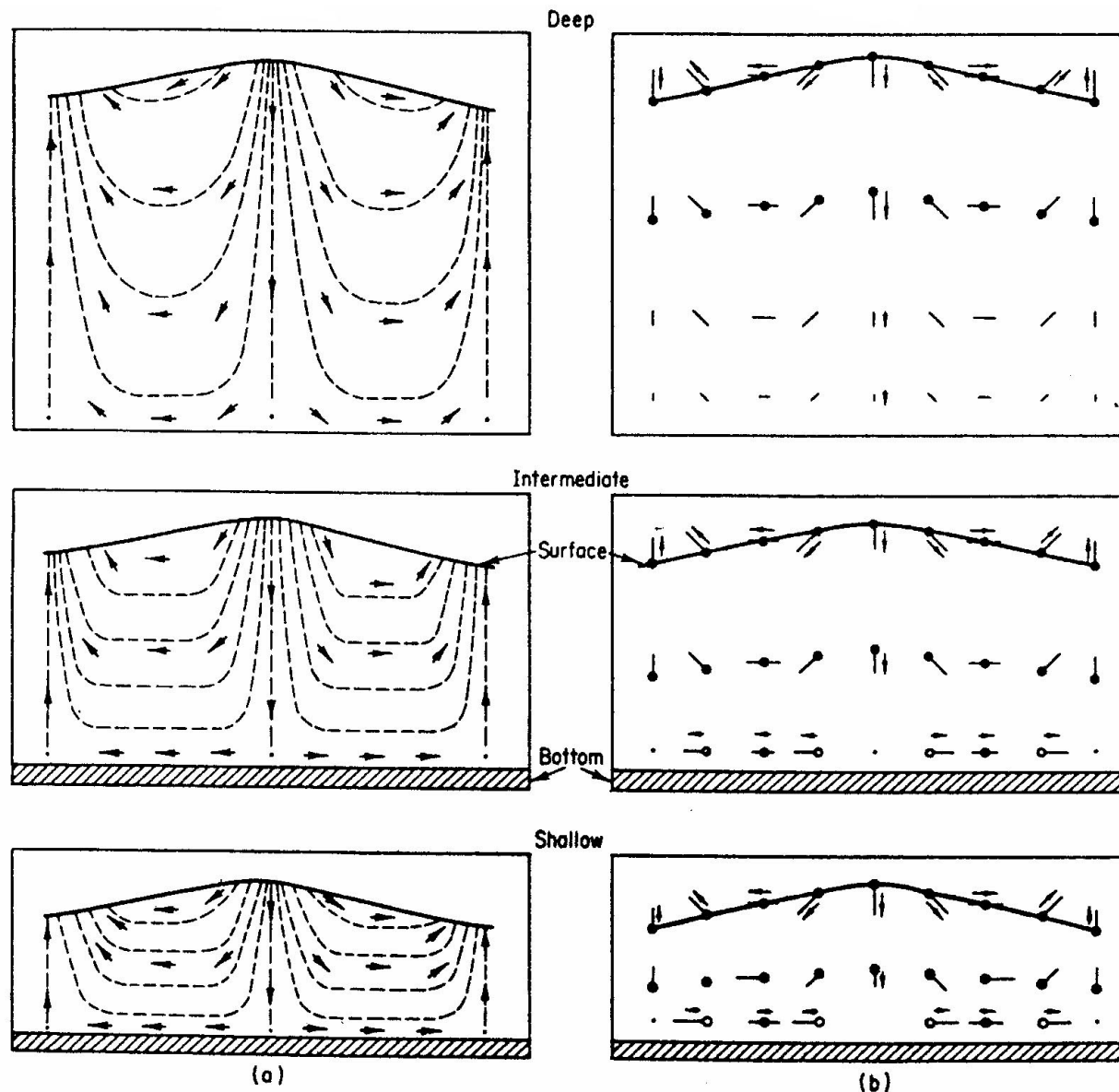


In definitiva, per $t=0$ e

per $t=T/2$, si ha $V_x = V_z = 0$.

Per $t=T/4$, si ha $\eta=0$.

IL CAMPO DI MOTO RISULTANTE (5/5)



- a) Percorso compiuto dalle particelle (visione lagrangiana);
- b) linee di corrente (visione euleriana).

Si noti che le tre coppie di immagini si riferiscono, rispettivamente, ad acque profonde, intermedie e basse.

DIAGRAMMA DI SAINTFLOU (1948) (1/2)

Noto l'andamento della funzione potenziale della velocità:

$$\phi(x, z, t) = -gH(\omega)^{-1} \frac{\cosh(k(h+z))}{\cosh(kh)} \cos(kx) \sin(\omega t)$$

e della pressione:

$$p = -\rho g z - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\rho g z + \rho g H \frac{\cosh(k(h+z))}{\cosh(kh)} \cos(kx) \cos(\omega t)$$

Alla parete, ovvero a $x=0$, si ha:

$$p = -\rho g z + \rho g H \frac{\cosh(k(h+z))}{\cosh(kh)} \cos(\omega t)$$

Sul fondo, ossia per $z=-h$, al primo ordine di Approssimazione si ha:

$$p = \rho g h + \frac{\rho g H}{\cosh(kh)}$$

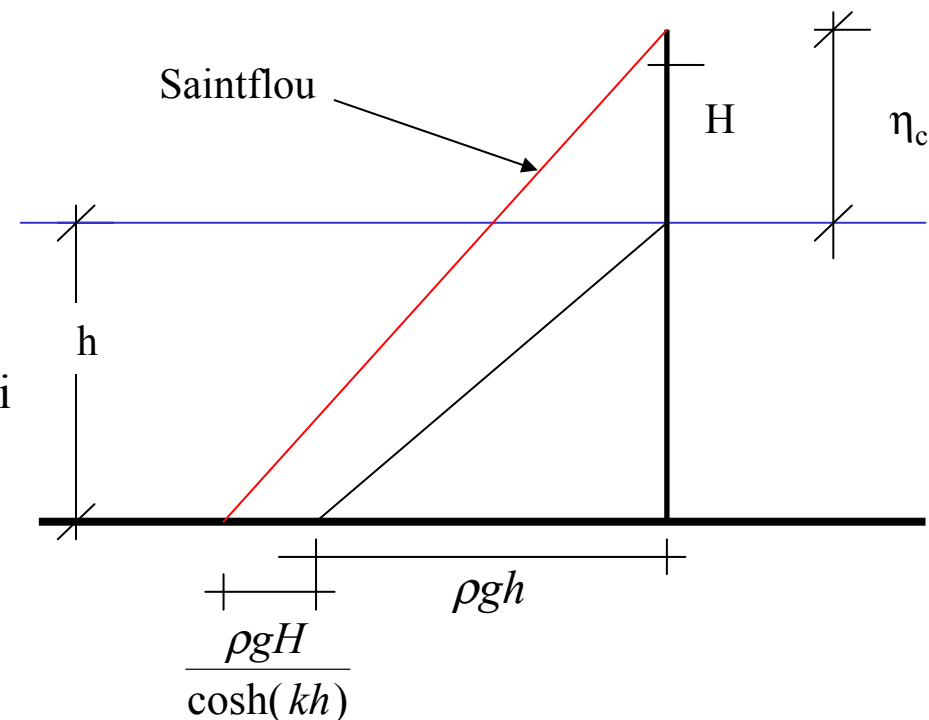


DIAGRAMMA DI SAINTFLOU (1948) (2/2)

In superficie, poiché i termini non lineari (II ordine) non sono trascurabili (l'acqua si solleva più di H e scende di meno, quindi ai fini di un'analisi degli effetti su di una struttura è opportuno considerarli), si ha:

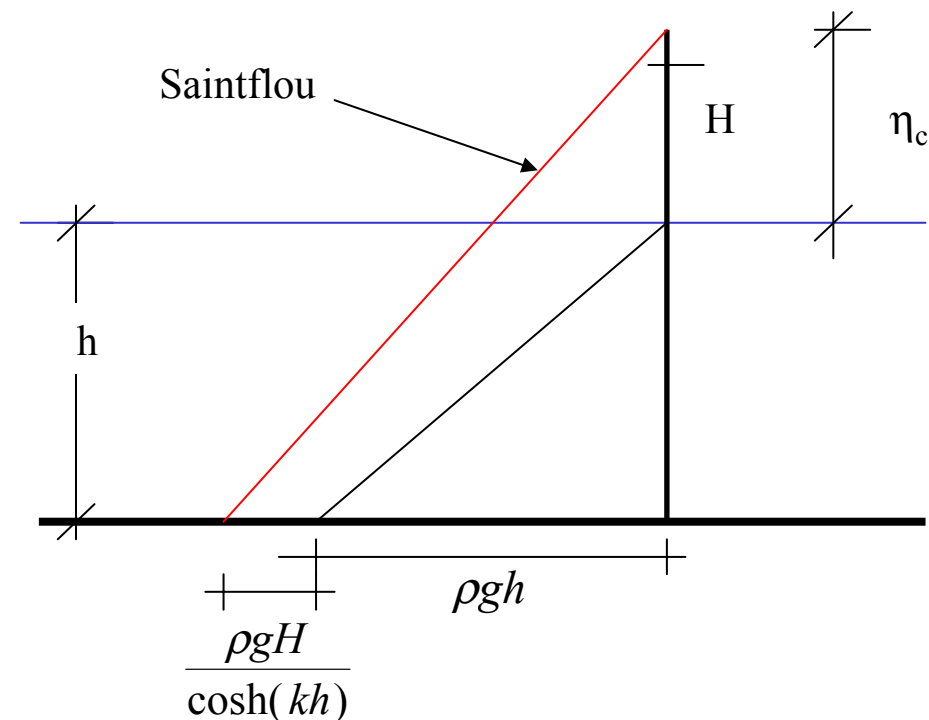
$$\eta_c = H + \frac{\pi H^2}{L} \frac{1}{\tanh(kh)}$$

In definitiva, la distribuzione delle pressioni su di una parete per effetto di un'onda incidente è quella di un triangolo di base:

$$\rho gh + \frac{\rho g H}{\cosh(kh)}$$

e altezza:

$$h + \eta_c$$



COEFFICIENTE DI RIFLESSIONE (1/3)

Si definisce coefficiente di riflessione K_r il rapporto tra l'altezza d'onda riflessa H_r e l'altezza d'onda incidente H_i :

$$K_r = \frac{H_r}{H_i}$$

Nel caso analizzato di parete totalmente riflettente si è mostrato come:

LE ONDE INCIDENTI E RIFLESSE DANNO LUOGO ALLE ONDE STAZIONARIE GIÀ ANALIZZATE CORRISPONDENTI AL “CLAPOTIS PERFETTO”.

Nel caso analizzato di parete parzialmente riflettente, ovvero parete in parte assorbente (con riguardo al flusso di energia), si avrà invece:

$$\begin{aligned} H_r &< H_i \\ K_r &< 1 \end{aligned}$$

COEFFICIENTE DI RIFLESSIONE (2/3)

Con riferimento alla teoria al primo ordine, tenendo presente il verso assunto per l'asse x, si ha:

$$\eta_i = a_i \cos(kx - \omega t)$$

$$\eta_r = a_r \cos(-kx - \omega t)$$

Essendo a_i e a_r le ampiezze delle onde incidenti e riflesse. Data la linearità, il profilo d'onda risultante si ottiene dalla semplice sovrapposizione dei due profili, in formule:

$$\begin{aligned} \eta &= \eta_i + \eta_r = a_i \cos(kx - \omega t) + a_r \cos(-kx - \omega t) = \\ &= (a_i + a_r) \cos(kx) \cos(\omega t) + (a_i - a_r) \sin(kx) \sin(\omega t) \end{aligned}$$

ed oscilla con ampiezze A che vanno dall'ampiezza massima:

$$A_{\max} = (a_i + a_r)$$

all'ampiezza minima:

$$A_{\min} = (a_i - a_r)$$

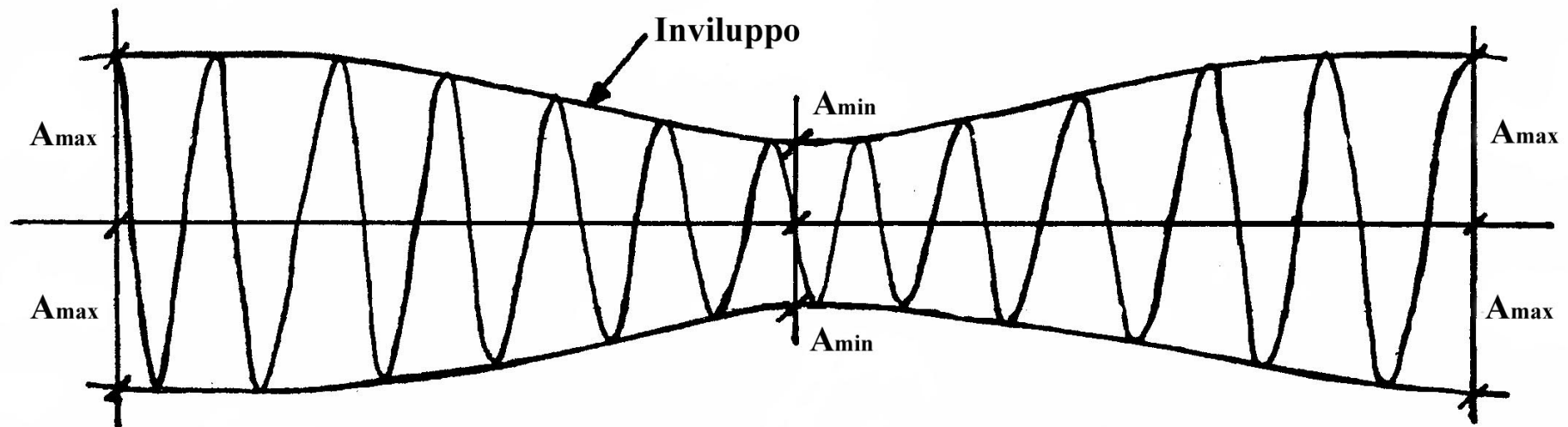
conducendo ad onde stazionarie con ampiezze modulate. Risulta:

$$\begin{aligned} a_i &= (A_{\max} + A_{\min}) / 2 & a_r &= (A_{\max} - A_{\min}) / 2 \\ K_r &= (A_{\max} - A_{\min}) / (A_{\max} + A_{\min}) \end{aligned}$$

Queste ultime consentono di dedurre a_i , a_r , K_r quando si conoscono A_{\max} e A_{\min} .

COEFFICIENTE DI RIFLESSIONE (3/3)

A_{\max} e A_{\min} possono essere dedotte da prove di laboratorio in vasca, facendo muovere con la velocità di fase delle onde incidenti un carrello porta sonde e deducendo l'involuppo delle predette onde, il quale presenterà l'andamento rappresentato in figura.



RIFLESSIONE PARZIALE

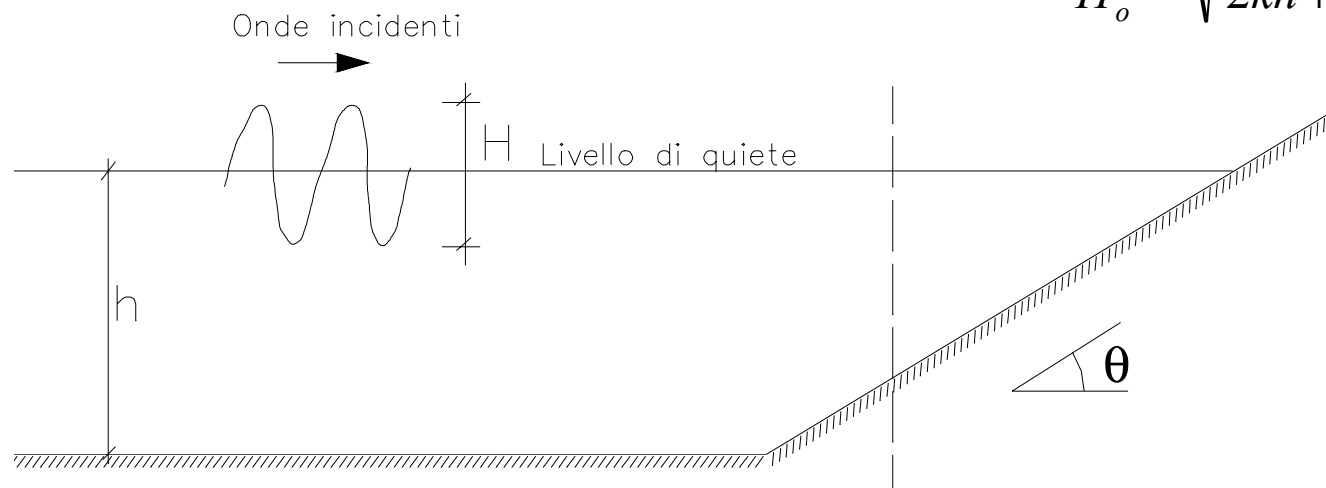
Involuppo delle onde che si generano per interferenza tra le onde progressive incidenti e quelle riflesse.

RIFLESSIONE PROVOCATA DA UNA PARETE PIANA INCLINATA (1/3)

Con riferimento alla figura, si consideri la parete piana inclinata come liscia e impermeabile. Il moto progressivo incidente è tanto più importante quanto maggiore è l'angolo θ di inclinazione della parete rispetto all'orizzontale e quanto minore è la ripidità. In particolare si può avere la riflessione completa anche con parete inclinata purché q superi un valore limite θ_L che, seguendo Miche (1951), viene a dipendere dal parametro adimensionale H_0/gT^2 dove H_0 è l'altezza d'onda al largo che corrisponde all'altezza d'onda locale H (immediatamente off-shore la parete) attraverso il processo di shoaling. Ovvero:

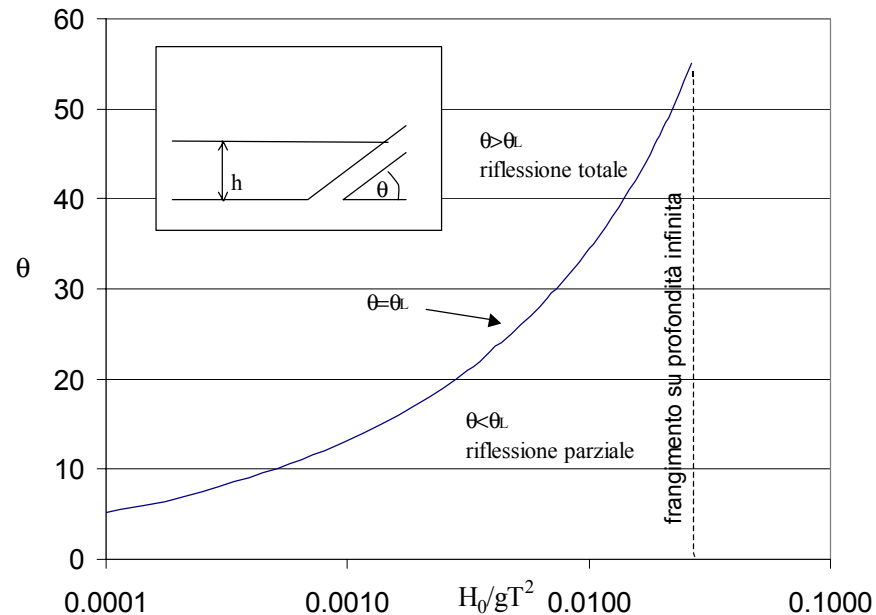
$$H_o = \frac{H}{K_s}$$

Con K_s dato dall'espressione già vista (per onde lineari): $K_s = \frac{H}{H_o} = \sqrt{\frac{2 \cosh^2(kh)}{2kh + \sinh(2kh)}}$



RIFLESSIONE PROVOCATA DA UNA PARETE PIANA INCLINATA (2/3)

L'angolo θ_L si ricava invece dalla espressione: $\frac{H_o}{gT^2} = \sqrt{\frac{2\theta_L}{\pi} \frac{\sin^2 \theta_L}{2\pi^2}}$ ed il suo andamento in funzione del citato parametro adimensionale è riportato nella figura seguente:



Dunque per $\theta > \theta_L$, $K_r = 1$, pertanto la riflessione è totale ed è equivalente a quella provocata da una parete verticale fittizia, la cui posizione (che condiziona la localizzazione dei nodi e degli antinodi) viene a dipendere da θ . Per $\theta < \theta_L$, $K_r < 1$, pertanto la riflessione è parziale ed il coefficiente di riflessione è espresso dalla seguente relazione:

$$K_r = \sqrt{\frac{2\theta}{\pi} \left(\frac{\sin^2 \theta_L}{2\pi^2} \right) \left(\frac{gT^2}{H_o} \right)}$$

RIFLESSIONE PROVOCATA DA UNA PARETE PIANA INCLINATA (3/3)

Dal momento che, usualmente, l'ipotesi di parete liscia ed impermeabile difficilmente può essere adottata, si usa moltiplicare il coefficiente di riflessione per un coefficiente d'attrito $\alpha < 1$.

Si può adottare:

Valori consigliati	Caratteristiche della parete
$\alpha=0.9-1$	Pareti rivestite in calcestruzzo
$\alpha=0.8$	Spiagge in condizioni normali
$\alpha=0.7-0.8$	Pareti rivestite in pietra
$\alpha=0.6-0.7$	Scarpate in pietra
$\alpha=0.5$	Paramenti in blocchi alla rinfusa

RIFLESSIONE E TRASMISSIONE ATTRAVERSO UN AMMASSO POROSO OMOGENEO ED ISOTROPO


Si definisce come coefficiente di porosità “n” dell’ammasso poroso il rapporto:

$$n = \frac{\text{volume dei vuoti}}{\text{volume totale}}$$


Che nelle situazioni usuali presenta un valori prossimo a 0.4.

Adottiamo per lo studio le onde lineari al primo ordine di approssimazione.

Nel seguito si affronteranno i casi di:



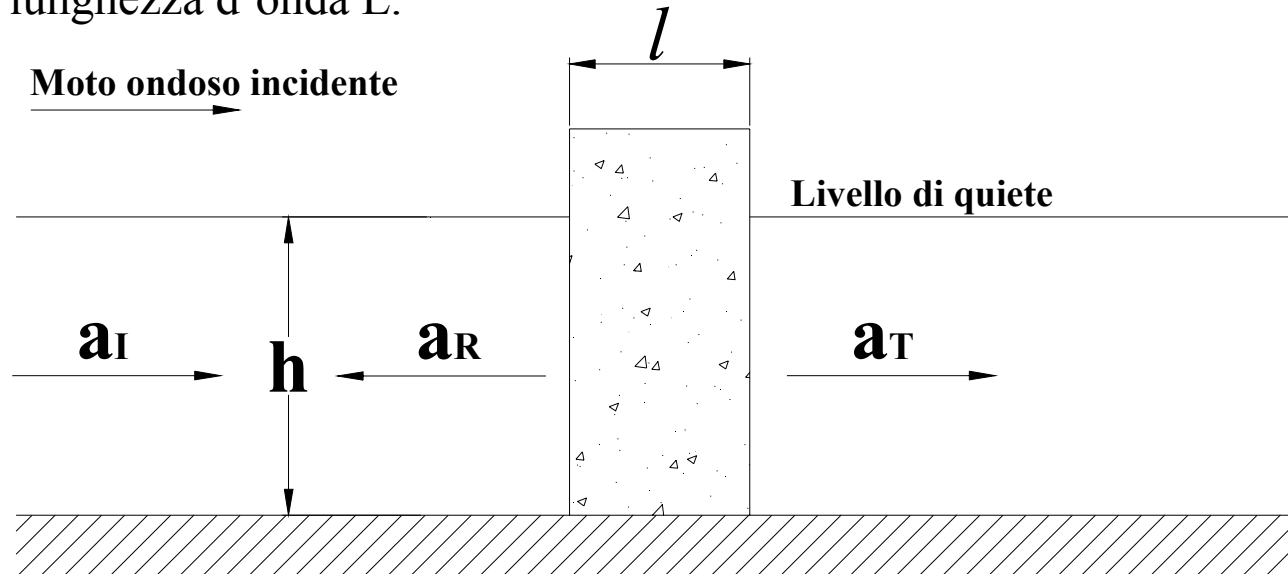
Ammasso poroso confinato
da piani verticali



Ammasso poroso confinato
da piani inclinati

AMMASSO POROSO CONFINATO DA PIANI VERTICALI (1/2)

Con riferimento alla figura seguente, la distanza l tra i piani verticali deve essere piccola rispetto alla lunghezza d'onda L .



Il modello di Madsen (1974), costruito a partire da dati sperimentali di laboratorio fornisce le seguenti formule empiriche:

$$K_r = \frac{\lambda}{1 + \lambda} \quad K_t = \frac{1}{1 + \lambda}$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \left\{ \left[1 + \left(1 + \frac{\text{Re}_c}{\text{Re}_d} \right) \left(\frac{16}{3\pi} \right) \beta a_i \left(\frac{l}{h} \right) \right]^{0.5} - 1 \right\}$$

AMMASSO POROSO CONFINATO DA PIANI VERTICALI (2/2)

Nella relazione appena mostrata, Re_c è il numero di reynolds critico per la transizione tra regime laminare e regime turbolento relativamente al moto vario di filtrazione che si ha nell'ammasso poroso; Re_d è il numero di Reynolds effettivo nel predetto ammasso. β è il parametro dimensionale (dimensioni pari all'inverso di una lunghezza) definito dalla seguente espressione:

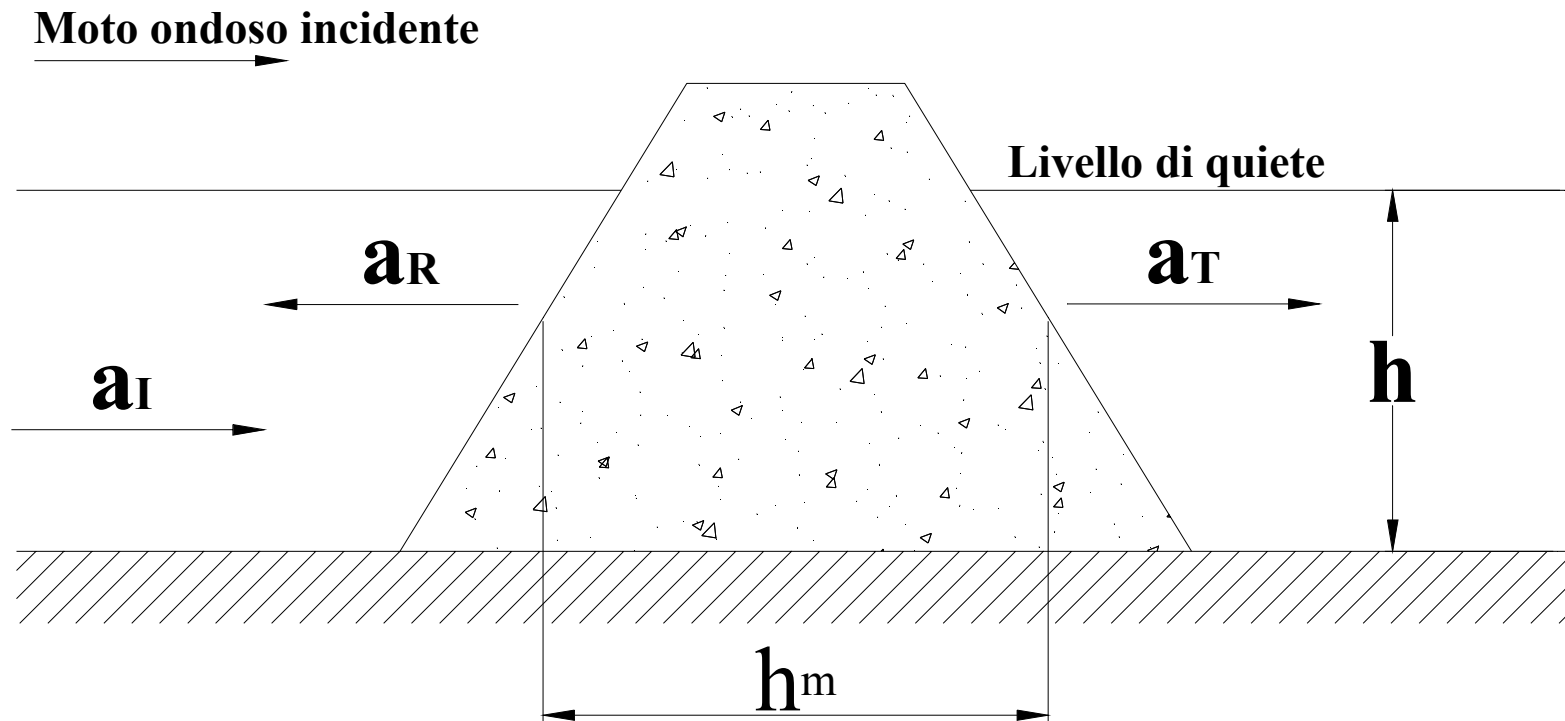
$$\beta = \frac{\beta_o}{d} \left[\frac{(1-n)}{n^3} \right]$$

d essendo il diametro caratteristico degli elementi solidi che costituiscono l'ammasso poroso. β_o è un parametro adimensionale che presenta valori da 1.8 a 3.6 crescenti con l'irregolarità dell'ammasso. Per le situazioni usuali è consigliabile il valore $\beta_o=2.7$. Poiché in tali situazioni il moto di filtrazione nell'ammasso risulta in regime turbolento si ha: $Re_c/Re_d \ll 1$ che permette di semplificare il calcolo di λ con l'espressione seguente di comune impiego:

$$\lambda = \frac{1}{2} \left\{ \left[1 + \left(\frac{16}{3\pi} \right) \beta a_i \left(\frac{l}{h} \right) \right]^{0.5} - 1 \right\}$$

AMMASSO POROSO CONFINATO DA PIANI INCLINATI

Con riferimento alla figura seguente, la larghezza media l_m tra i piani inclinati deve essere piccola rispetto alla lunghezza d'onda L , possono ancora essere utilizzate le espressioni anzi mostrate, precisate con $l=l_m$.

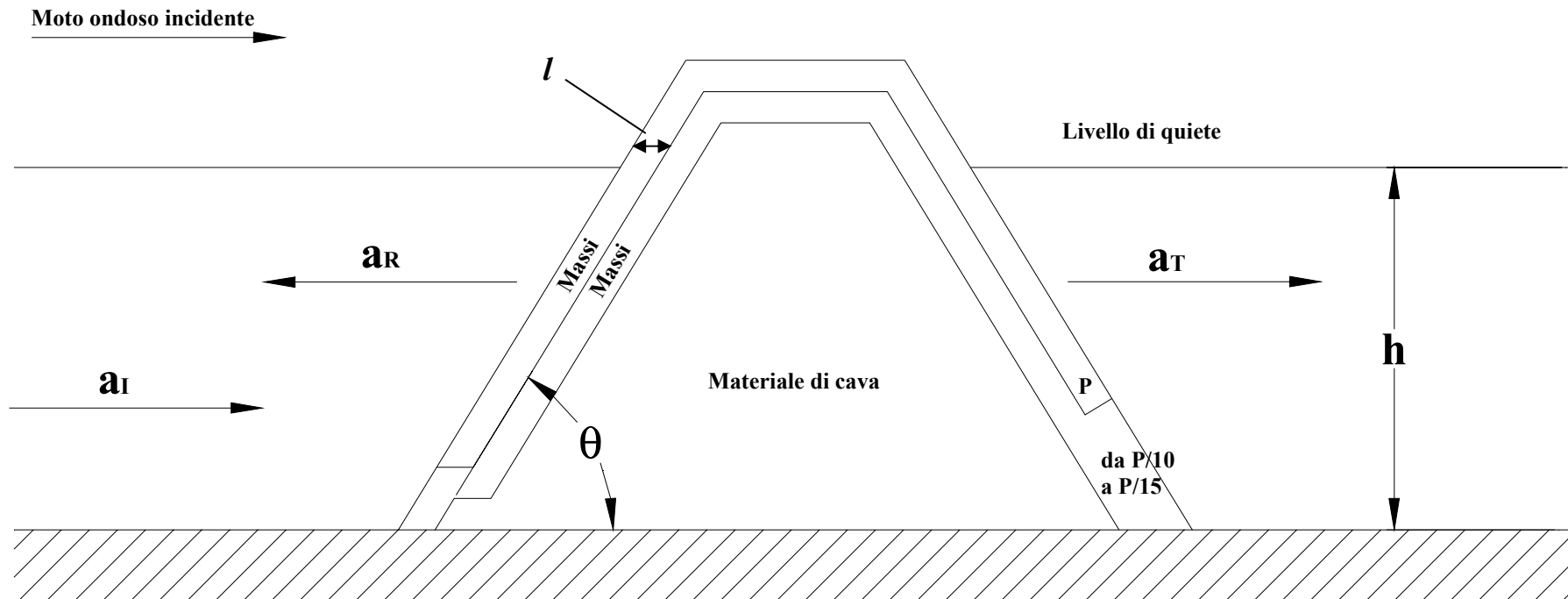


RIFLESSIONE PROVOCATA DA UNA DIGA A SCOGLIERA (1/3)

Le dighe marittime a scogliera vengono realizzate con ammassi non omogenei presentando strutture a più strati, con massi di diversa pezzatura.

Tale tipologia a più strati è adottata sia per ragioni economiche, in quanto i costi risultano più contenuti rispetto a quelli corrispondenti ad una diga con elementi di un'unica pezzatura, sia per ragioni di tranquillità del bacino protetto. Infatti il nucleo di materiale fino (tout-venant di cava) non consente la trasmissione del moto ondoso.

In figura è rappresentata una sezione tipica (Shore Protection Manual, 1984).



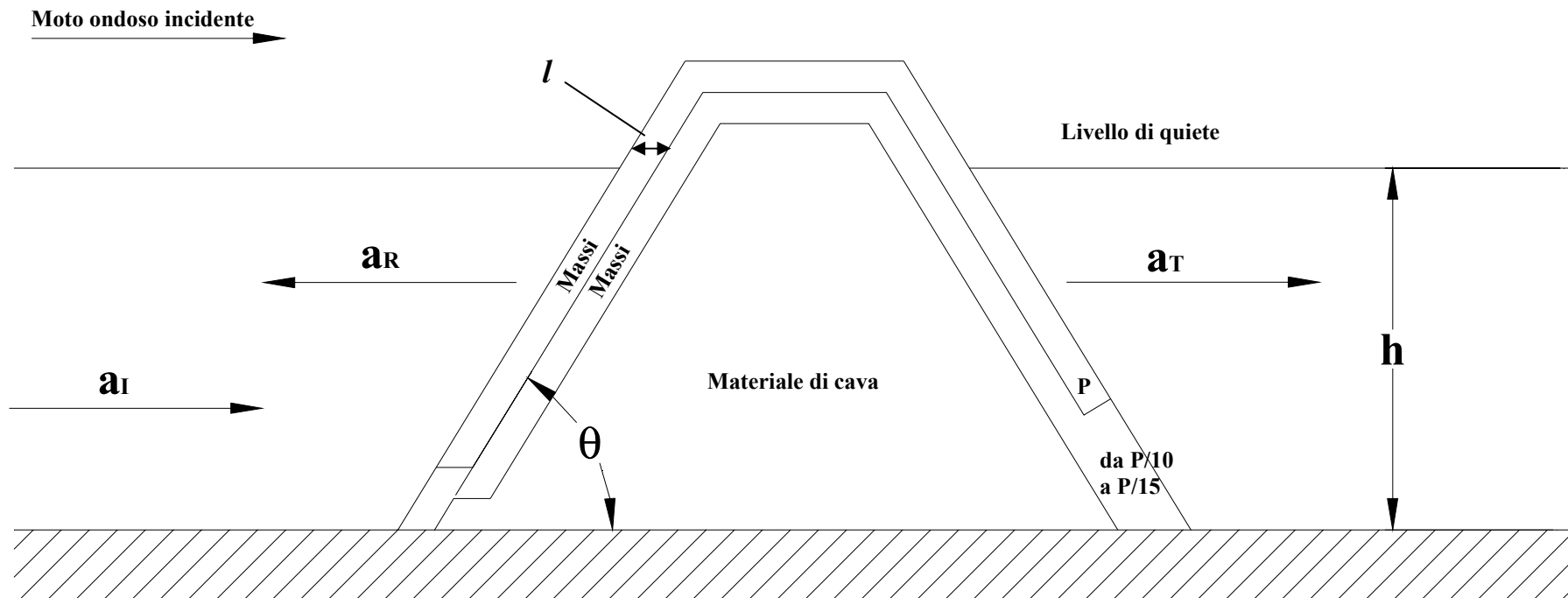
RIFLESSIONE PROVOCATA DA UNA DIGA A SCOGLIERA (2/3)

P indica il peso dei massi, sia naturali che artificiali, del primo strato di larghezza l nella direzione orizzontale e di inclinazione q ancora rispetto a tale direzione. Il peso dei massi degli altri strati è rapportato a P .

Adottando il modello di Swendsen e Jonsson (1976), il primo strato viene considerato permeabile, mentre il secondo strato e, anche il nucleo, vengono considerati impermeabili, per cui il coefficiente di trasmissione K_t risulta pari a zero.

Per quanto riguarda il coefficiente di riflessione, esso viene espresso attraverso la seguente relazione: Nella quale i parametri adimensionali μ e ψ sono dati dalle seguenti espressioni:

$$K_r = \exp(-2kl\mu) \cos(2kl\psi)$$



RIFLESSIONE PROVOCATA DA UNA DIGA A SCOGLIERA (3/3)

$$\mu = \sqrt{\frac{f}{2}} \left(1 - \frac{1}{2} f \right);$$

$$\psi = \sqrt{\frac{f}{2}} \left(1 + \frac{1}{2} f \right)$$

Essendo:

$$\sqrt{f} = \sqrt{f_0} \left[1 - (kl / 2\sqrt{2}) \sqrt{f_0} \right]$$

$$f_0 = \left(\frac{2n}{\pi \sin \theta} \right) \beta(2a_i)$$

Il parametro adimensionale β è dato anche in questo caso da:

$$\beta = \frac{\beta_0}{d} \left[\frac{(1-n)}{n^3} \right]$$

Ed n è la porosità assunta ancora pari a 0.4.

Si noti come la funzione $\cos(2kl\psi)$ tiene conto dello sfasamento tra l'onda incidente e quella riflessa.