

9. LE ONDE DI MARE

- 9.1. Le onde irregolari e il concetto di stato di mare
- 9.2. Cenni sulle distribuzioni di probabilità
- 9.3. Distribuzioni di probabilità degli spostamenti verticali
- 9.4. Descrizione sintetica degli stati di mare
 - 9.4.1. *Analisi nel dominio del tempo*
 - 9.4.1.1. *Applicazione del metodo down-crossing per la caratterizzazione dello stato di mare*
 - 9.4.2. *Analisi nel dominio della frequenza*
 - 9.4.2.1. *Gli spettri di energia*
 - 9.4.2.2. *Parametri di deduzione diretta*
 - 9.4.2.3. *Analisi dei dati: problematiche*
 - 9.4.2.3.1. *Massima frequenza risolta: aliasing*
 - 9.4.2.3.2. *Leakage e windowing*
 - 9.4.2.4. *Rappresentazione degli spettri*
 - 9.4.2.5. *Analisi spettrale di treni di onde random*
 - 9.4.2.6. *Spettri di frequenza delle onde di mare*
 - 9.4.2.7. *Spettri sintetici*
 - 9.4.2.7.1. *Lo spettro JONSWAP*
 - 9.4.2.7.2. *Lo spettro TMA*
 - 9.4.2.7.3. *Lo spettro direzionale*
- 9.5. Il modello SMB per la previsione “a breve termine”
- 9.6. I dati disponibili
- 9.7. Trasposizione geografica di dati ondametrici
- 9.8. Il concetto di mareggiata
 - 9.8.1. *Costruzione di una mareggiata su profondità infinita a partire dai dati di vento e di fetch*
- 9.9. Analisi di eventi estremi per la previsione “a lungo termine”
 - 9.9.1. *Periodo di ritorno e probabilità di incontro*
 - 9.9.2. *Adattamento di una distribuzione di probabilità a una serie di dati*

9.1. Le onde irregolari e il concetto di stato di mare

Il vento che agisce su una estensione di mare (*fetch*) genera e mantiene un moto ondoso caratterizzato da onde irregolari, che possono essere descritte come la realizzazione di un processo stocastico. In prima approssimazione esse possono essere considerate come dovute alla sovrapposizione di onde sinusoidali, con ampiezze, frequenze angolari e direzioni diverse e con fasi aleatorie distribuite uniformemente nell'intervallo $(0, 2\pi)$.

I principali metodi per schematizzare le “*onde random*” sono quelli “*zero upcrossing*” e “*zero downcrossing*” indicati nella Figura 9.1 con riferimento al dominio del tempo. Più precisamente, le onde “*zero upcrossing*” sono individuate da due successivi attraversamenti del livello di quiete con derivata positiva (attraversamenti verso l'alto). Le onde “*zero downcrossing*” sono individuate da due successivi attraversamenti del livello di quiete verso il basso.

Individuate le onde con uno dei metodi sopra menzionati e assumendo come riferimento per le sopraelevazioni il livello di quiete, si definisce:

- i) cresta: il massimo relativo più alto presente nell'onda;
- ii) cavo: il minimo relativo di minore ordinata;

- iii) altezza della cresta: ordinata della cresta;
- iv) profondità del cavo: il valore assoluto della profondità del cavo;
- v) altezza dell'onda: la somma dell'altezza di cresta e della profondità del cavo (in formule $H = \eta_{cresta} - \eta_{cavo}$);

Si definisce inoltre stato di mare (“sea state” nella letteratura anglosassone) un’agitazione ondosa stazionaria (dal punto di vista statistico il concetto di stazionarietà è richiamato nel seguente paragrafo). Nel Mediterraneo uno stato di mare può essere considerato stazionario per durate dell’ordine delle centinaia di onde (200÷300 onde).

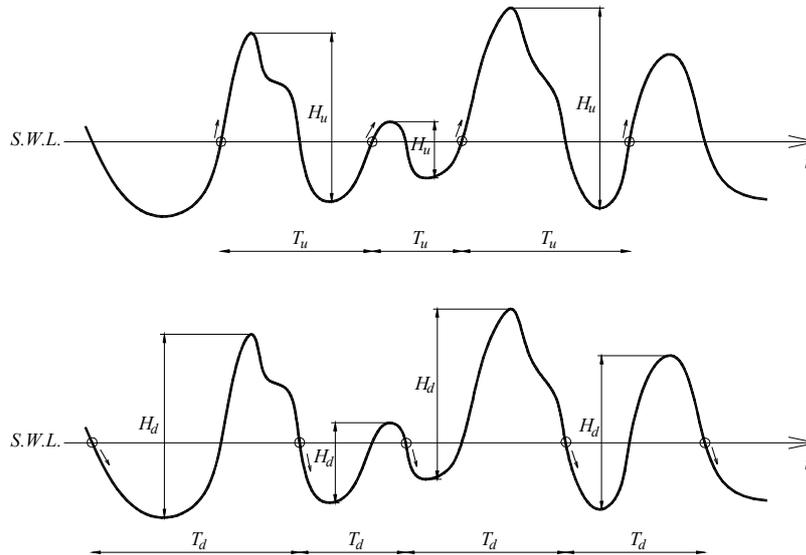


Figura 9.1. Segnale di sopraelevazione del pelo libero rispetto al livello di quiete nel dominio del tempo. a) Individuazione di onde con il metodo “zero up-crossing”; b) Individuazione di onde con il metodo “zero down-crossing”.

Consideriamo un intervallo di tempo molto lungo T , e ammettiamo di considerare gli intervalli in cui siano presenti un numero molto grande N di onde. Nei vari intervalli, se l’agitazione ondosa è stazionaria, le caratteristiche medie dei vari insiemi di N onde tendono ad essere le stesse e questa tendenza cresce al crescere di N . Se, ad esempio, si considera l’altezza media delle N onde (che è una variabile aleatoria), si osserva che la deviazione standard σ_N tende a zero per N tendente a infinito, ovvero:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left[\sigma_N = \sqrt{\langle (\bar{H}_i - \bar{H})^2 \rangle} \right] = 0 \quad (9.1)$$

dove \bar{H}_i è l’altezza media dell’ i -esimo gruppo di N onde, e \bar{H} è l’altezza media delle onde rilevate nell’intero intervallo.

9.2. Cenni sulle distribuzioni di probabilità

Ricordiamo alcuni concetti basilari della teoria delle probabilità. In particolare, si definisce:

- densità di probabilità $p(x)dx$, la probabilità che la variabile aleatoria x sia compresa tra x e $x + dx$;
- probabilità cumulata $P(x)$, la probabilità che la variabile x sia minore o uguale ad un valore prefissato \tilde{x} (anche indicata come $P(x \leq \tilde{x})$). In formule: $P(x) = \int_{-\infty}^{\tilde{x}} p(x)dx$.
- probabilità di superamento $P_s(x)$ rappresenta la probabilità che x sia maggiore di \tilde{x} :
 $P_s(x) = \int_{\tilde{x}}^{\infty} p(x)dx = 1 - P(x \leq \tilde{x})$;
- valore atteso della variabile x (coincidente con la media μ_x del processo):
 $E[x] = \mu_x = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$;
- momento n -esimo della variabile x : $E[x^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p(x)dx$;

Poiché spesso conviene riferirsi ai momenti centrali, ovvero a quei momenti valutati rispetto alla media della variabile aleatoria piuttosto che a quelli valutati rispetto a $x=0$, si definisce momento centrale n -esimo della variabile x : $E[(x - \mu_x)^n] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^n p(x)dx$.

La varianza σ_x^2 viene definita come momento centrale del secondo ordine. In formule: $\sigma_x^2 = E[(x - \mu_x)^2] = E[x^2] - \mu_x^2$; e la deviazione standard viene definita come la radice quadrata della varianza.

9.3. Distribuzioni di probabilità degli spostamenti verticali

Il teorema del limite centrale assicura che se una variabile casuale (per esempio l'elevazione $\eta(x,t)$) è data dalla somma di un gran numero di variabili casuali indipendenti (come, nella fattispecie, le azioni del vento in molti punti diversi della superficie libera del mare) tale variabile ha distribuzione gaussiana. Pertanto una proprietà che viene attribuita al processo stocastico degli spostamenti verticali $\eta(x,t)$ è che la loro densità di probabilità sia di tipo gaussiano a media nulla. In formule:

$$p(\eta) = \frac{1}{\sigma_\eta \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2\sigma_\eta^2}\right) \quad (9.2)$$

Introducendo la ben nota variabile ridotta $\tilde{\eta} = \eta / \sigma_\eta$, l'espressione precedente si può riscrivere come segue:

$$p(\tilde{\eta}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\tilde{\eta}^2}{2}\right) \quad (9.3)$$

dal momento che sussiste l'uguaglianza $p(\eta)d\eta = p(\tilde{\eta})d\tilde{\eta}$ i momenti della distribuzione sono dati da:

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\eta} p(\tilde{\eta}) d\tilde{\eta} = 0 \\ \mu_k &= \int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{\eta} - \mu_1)^k p(\tilde{\eta}) d\tilde{\eta} = 0\end{aligned}\quad (9.4)$$

in particolare:

$$\mu_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{\eta} - \mu_1)^2 p(\tilde{\eta}) d\tilde{\eta} = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\eta}^2 p(\tilde{\eta}) d\tilde{\eta} \quad (9.5)$$

E' opportuno ricordare che per la variabile stocastica η elevazione della superficie libera, essendo significativa di un processo stocastico a media nulla, la varianza della distribuzione coincide con la media quadratica.

I momenti del terzo e quarto ordine definiscono la *skewness* e la *kurtosis*, ossia grandezze che esprimono rispettivamente un'indicazione su:

- i) l'asimmetria rispetto alla media (spesso misurata nella distribuzione gaussiana attraverso il parametro $\mu_3 / \mu_2^{3/2} = 0$);
- ii) la tendenza della distribuzione a diventare più o meno sottile rispetto al valore medio misurato dal parametro $\mu_4 / \mu_2^2 = 3$ (si avranno pertanto distribuzioni platicurtiche per cui $\mu_4 / \mu_2^2 > 3$ nella distribuzione gaussiana e leptocurtiche per cui $\mu_4 / \mu_2^2 < 3$).

L'ipotesi di distribuzione gaussiana delle $\eta(t)$ con simmetria rispetto al livello medio è realistica solo per onde di piccola ampiezza su profondità infinita. L'osservazione sperimentale mostra infatti che le onde in prossimità della costa si presentano con creste più alte e cavi più bassi di quelli che competono alla distribuzione gaussiana, il che si traduce in uno skewness maggiore di zero e in un kurtosis maggiore di 3.

9.4. Descrizione sintetica degli stati di mare

9.4.1. Analisi nel dominio del tempo

Gli stati di mare possono essere interpretati, in una visione sintetica, attraverso il concetto di onde caratteristiche (*Sverdrup e Munk*, 1943). Queste vengono definite come onde regolari precisate in base ad una frazione delle onde più alte. Più precisamente, l'onda caratteristica ($1/c$) è definita come l'onda che presenta un'altezza $H_{1/c}$ pari alla media delle altezze delle onde random che compongono la frazione ($1/c$) delle onde più alte e un periodo $T_{H_{1/c}}$ pari alla media dei periodi delle onde che concorrono a costruire l'onda $H_{1/c}$.

Se si considera uno stato di mare con una successione continua di N onde random e si ordinano in senso crescente le altezze H_i , tale che $i=1, \dots, N$ (dove $i=1$ rappresenta l'onda più bassa e $i=N$ quella più alta), l'onda caratteristica contiene le N/c onde più alte a partire dall'altezza $H_j = H_j(1/c)$, dove:

$$j = N \left(1 - \frac{1}{c} \right) + 1 \quad j \in N \quad (9.6)$$

di conseguenza risulta:

$$H_{1/c} = \frac{c}{N} \sum_j^N H_i \quad (9.7)$$

$$T_{H_{1/c}} = \frac{c}{N} \sum_j^N T(H_i) \quad (9.8)$$

Le onde caratteristiche più frequentemente usate sono:

- i) l'onda media: $H_{1/1}$;
- ii) l'onda significativa: $H_{1/3}$ (spesso indicata anche con H_s);
- iii) l'onda un-decimo: $H_{1/10}$ (detta anche onda massima relativa).

Si ricorda anche l'onda quadratica media definita come:

$$H_{rms} = \left\{ \frac{1}{N} \sum_1^N H^2 \right\}^{1/2} \quad (9.9)$$

che può essere interpretata come una particolare onda caratteristica.

Nell'ipotesi di distribuzione Rayleiana delle altezze individuali, risulta:

$$\bar{H} = \sqrt{2\pi} \sigma_\eta \quad (9.10)$$

$$H_{rms} = 2\sqrt{2} \sigma_\eta \quad (9.11)$$

$$H_s = 4\sigma_\eta \quad (9.12)$$

da cui:

$$H_s = \sqrt{2} H_{rms} \quad (9.13)$$

$$\bar{H} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} H_{rms} \quad (9.14)$$

9.4.1.1. Applicazione del metodo down-crossing per la caratterizzazione dello stato di mare

In Figura 9.2 è riportato un esempio di registrazione del soprizzo η nel tempo. Come si vede, l'applicazione del metodo zero down-crossing consente di individuare N=15 onde individuali.

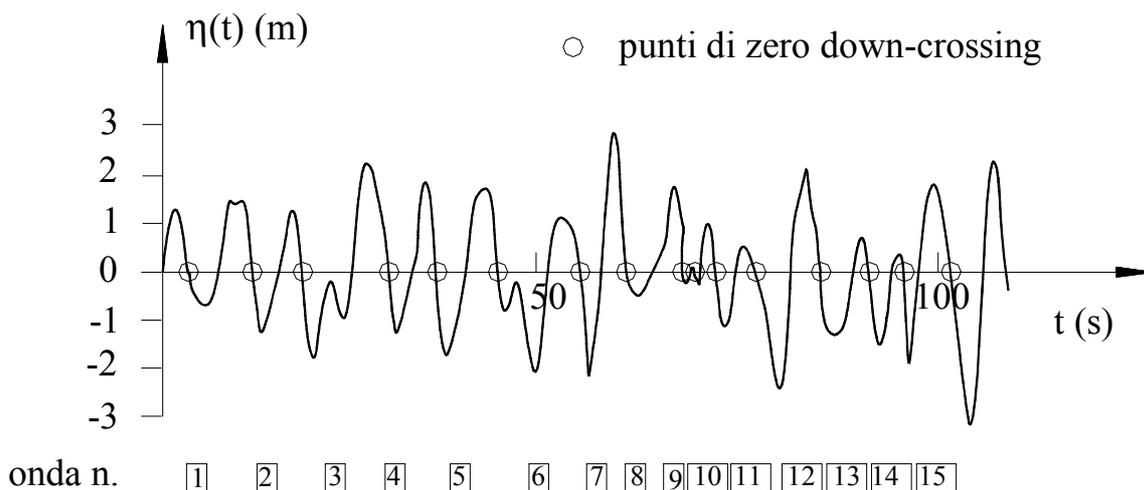


Figura 9.2. Segnale di sopraelevazione del pelo libero rispetto al livello di quiete nel dominio del tempo: individuazione di onde con il metodo “zero down-crossing”.

Dette onde sono poi riorganizzate nella tabella 9.I dalla più alta alla più bassa. E' appena il caso far notare che nella pratica l'analisi nel dominio del tempo è effettuata considerando un moto ondoso stazionario, ossia analizzando un segnale di parecchie centinaia di onde ($N=200\div 300$).

Tabella 9.I. Numerazione in ordine decrescente di onde individuali e dei corrispondenti periodi rilevati con il metodo dello zero-upcrossing da un segnale di sopraelevazione.

Numero d'ordine i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
H (m)	5.5	4.8	4.2	3.9	3.8	3.4	2.9	2.8	2.7	2.3	2.2	1.9	1.8	1.1	0.23
T (s)	7	12	15	3	5	4	2	11	6	1	10	8	13	14	9

Supponiamo di poter disporre delle onde riportate in tabella. Quale onda sceglieremmo per un problema di progetto? A questa domanda si può rispondere attraverso il metodo delle onde e dei periodi caratteristici. Le possibilità, infatti, sono diverse. E precisamente scegliendo:

- **l'onda massima:** H_{\max} e $T_{H_{\max}}$

Questa è l'onda che presenta l'altezza massima indipendentemente dal periodo che la caratterizza. Con riferimento alla tabella sopra riportata, essa è pari a:

$$H_{\max} = 5.5 \text{ m} \quad \text{e} \quad T_{H_{\max}} = 12.5 \text{ s}$$

L'altezza massima viene scelta come onda di progetto per strutture che non solo sono di notevole importanza ma che risultano particolarmente sensibili all'attacco del moto ondoso (come, ad esempio, le dighe frangiflutti).

E' appena il caso far notare che H_{\max} è una variabile casuale la cui distribuzione dipende dal numero di onde individuali.

- **l'onda un decimo:** $H_{1/10}$ e $T_{H_{1/10}}$

Questa è l'onda individuata effettuando la media del decimo delle onde più alte. $T_{H_{1/10}}$ è la media dei periodi che interessano le dieci onde che concorrono a formare $H_{1/10}$.

- **l'onda significativa:** $H_{1/3}$ e $T_{H_{1/3}}$

Questa è l'onda ottenuta mediando le altezze d'onda del terzo delle onde più alte. Il periodo significativo è ottenuto come media dei periodi che delle onde che concorrono ad ottenere $H_{1/3}$.

Con riferimento al segnale sopra analizzato si ottiene:

$$H_{1/3} = H_s = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 H_i = 4.44\text{m}$$

$$T_{H_{1/3}} = T_s = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 T_i = 12.8\text{s}$$

L'onda significativa è molto usata per la progettazione di opere. Ciò deriva verosimilmente dal fatto che, in passato, l'analisi del moto ondoso veniva effettuata sulla base di dati osservati e che l'esperienza ha mostrato che l'altezza d'onda e il periodo selezionati sulla base di indagini visive corrisponde approssimativamente all'onda significativa. Pertanto la scelta dell'onda significativa può oggi essere giustificata anche sulla base di una esperienza ingegneristica ormai consolidata.

Anziché riferirsi alle singole altezze onda, può risultare più efficace utilizzare un istogramma che ci informi sul numero di onde che ricadono in ciascun intervallo di altezze d'onda, come quello riportato nella Figura 9.3

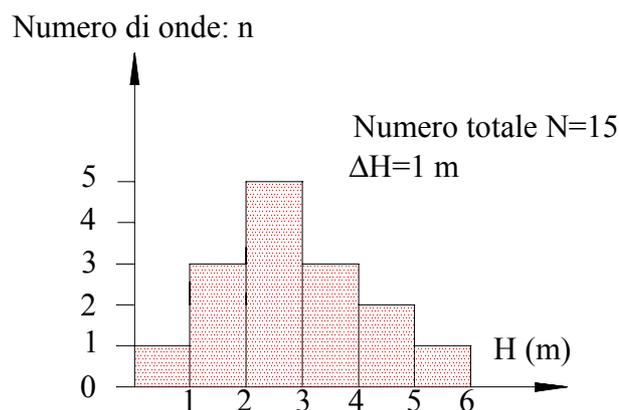


Figura 9.3. Distribuzione dei valori di altezza d'onda nel segnale di sopraelevazione.

Tuttavia, allo scopo di paragonare distribuzioni relative ad altezze d'onda diverse, è opportuno riferirsi a istogrammi adimensionalizzati come quello di seguito riportato.

E' noto che, al tendere a zero dell'intervallo (nella fattispecie, facendo tendere a zero $\Delta(H/\bar{H})$), la densità di probabilità tende ad una curva continua. L'esperienza ormai ha confermato che nel caso di altezze d'onda, tale curva è molto prossima alla distribuzione di probabilità di Rayleigh. Pertanto è lecito dire che la distribuzione di probabilità di onde random segue la distribuzione di Rayleigh che, in formule, presenta la seguente funzione densità di probabilità:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} x e^{\left(-\frac{\pi}{4}x^2\right)} \quad \text{con } x = H/\bar{H} \quad (9.15)$$

mentre la funzione di distribuzione di probabilità assume la seguente espressione:

$$F(x) = \text{Prob}\{X < x\} = 1 - x e^{\left(-\frac{\pi}{4}x^2\right)} \quad \text{con } x = H/\bar{H} \quad (9.16)$$

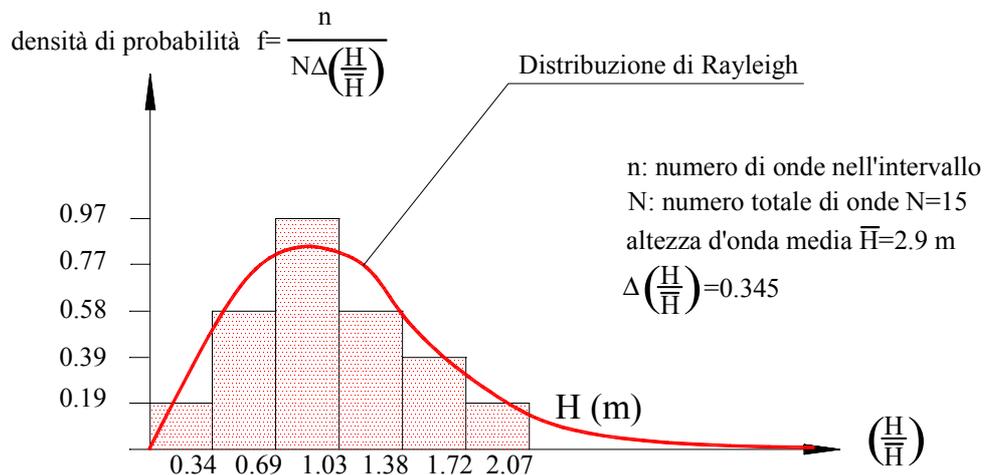


Figura 9.4. Distribuzione di Rayleigh che approssima i valori di altezza d'onda nel segnale di sopraelevazione.

Assodata la distribuzione di Rayleigh come utile approssimazione delle distribuzioni di onde individuali, è possibile ottenere le seguenti espressioni per le altezze d'onda caratteristiche in funzione dell'altezza d'onda media:

$$H_{1/10} = 2.03\bar{H};$$

$$H_{1/3} = 1.60\bar{H};$$

$$H_{\text{rms}} = 1.13\bar{H}.$$

La distribuzione di Rayleigh può essere anche espressa in termini di σ_η , in quanto, come si rileverà nel seguito, detta grandezza risulta di immediata determinazione a partire dalla serie di dati sull'elevazione del pelo libero.

$$p(H) = \frac{H}{4\sigma_\eta^2} \exp\left\{-\frac{H^2}{8\sigma_\eta^2}\right\} \quad (9.17)$$

$$P(H \leq \tilde{H}) = 1 - \exp\left\{-\frac{\tilde{H}^2}{8\sigma_\eta^2}\right\} \quad (9.18)$$

Il fatto che la distribuzione delle altezze d'onda segua una distribuzione di *Rayleigh* assume una rilevanza particolarmente significativa ai fini applicativi. Ad esempio, sarà possibile stimare sia l'altezza significativa (definita, come meglio descritto nel paragrafo seguente, come la media delle onde costituenti il terzo più alto), sia l'altezza massima attesa. Quest'ultima in particolare risulta pari a:

$$H_{max} = \left[\sqrt{\log N} + \frac{0.2886}{\sqrt{\log N}} - \frac{0.247}{(\log N)^{3/2}} \right] H_{rms} \quad (9.19)$$

Tale distribuzione infatti è in genere adeguata ai fini ingegneristici, tranne che per previsioni in acque basse, ossia laddove essa tende a sovrastimare il numero di onde elevate. In queste ultime condizioni è stato mostrato come la distribuzione effettiva devii dalla *Rayleiana*, a causa, si è ipotizzato, del frangimento delle onde più alte. Sfortunatamente in acque basse non è stata ancora individuata una distribuzione universalmente accettata; pertanto spesso la *Rayleiana* continua ad essere utilizzata pur con la consapevolezza di non essere affidabile nella stima delle onde più alte, magari con l'introduzione di alcuni coefficienti correttivi.

Per quanto concerne i periodi, *Bretshneider* (1959) ha suggerito le seguenti espressioni valide, rispettivamente, per la densità di probabilità e per la probabilità totale:

$$p(T) = 2.7 \frac{T^3}{T^4} \exp\left\{-0.675\left(\frac{T}{\bar{T}}\right)^4\right\} \quad (9.20)$$

$$P(T) = 1 - \exp\left\{-0.675\left(\frac{T}{\bar{T}}\right)^4\right\} \quad (9.21)$$

Purtroppo la distribuzione di Rayleigh è utile solo in acque alte. Infatti in acque basse, anche a causa del frangimento, la distribuzione delle altezze d'onda differisce in maniera significativa da quella di Rayleigh.

Per ovviare tale problema, *Stive* (1986) propose la seguente correzione empirica alla distribuzione di Rayleigh, basata per lo più su dati di laboratorio piuttosto che di campo:

$$\begin{aligned}
H_{1\%} &= H_{mo} \left(\frac{\ln 100}{2} \right)^{0.5} \left(1 + \frac{H_{mo}}{h} \right)^{-1/3} ; \\
H_{0.1\%} &= H_{mo} \left(\frac{\ln 1000}{2} \right)^{0.5} \left(1 + \frac{H_{mo}}{h} \right)^{-1/2} .
\end{aligned}
\tag{9.22}$$

in cui h è la profondità, $H_{1\%}$ indica il valore che eccede 1% dell'altezza d'onda determinate con il metodo dello zero-downcrossing, mentre l'altezza significativa H_{mo} è determinata dallo spettro. Queste correzioni si rivelano particolarmente utili per la verifica delle distribuzioni delle altezze d'onda in modelli fisici in scala.

9.4.2. Analisi nel dominio della frequenza

9.4.2.1. Gli spettri di energia

Il *metodo spettrale* tiene in conto gli effettivi processi che governano la generazione del moto ondoso, le interazioni tra le diverse componenti armoniche e la dissipazione di energia dovuta ai frangimenti parziali.

Con questo modello le onde vengono descritte non in termini dell'onda significativa ($H_{1/3}$) ma definendo l'intero spettro delle energie e dei periodi. In questo modo può essere meglio descritto il processo di generazione del moto ondoso. Anche questa metodologia risulta parzialmente empirica essendo stata calibrata utilizzando dati sperimentali.

Per comprendere tale metodo è opportuno richiamare alcuni concetti attinenti all'analisi armonica.

Una semplice rappresentazione analitica di uno stato di mare ideale, definito come una successione di onde generate dal vento che si prolunga indefinitamente nel tempo in condizioni stazionarie, si basa sulla decomposizione in serie di Fourier, per cui il segnale nel tempo della sopraelevazione del pelo libero può essere espresso come segue:

$$\eta(t) = \sum_{i=1}^N a_i \cos(\omega_i t + \varepsilon_i)
\tag{9.23}$$

in cui si assume che le frequenze ω_i siano tutte diverse tra loro, il numero N sia infinitamente grande, gli angoli di fase ε_i siano distribuiti uniformemente in $(0, 2\pi)$ e siano stocasticamente indipendenti tra loro e che le ampiezze a_i siano tra loro dello stesso ordine di grandezza.

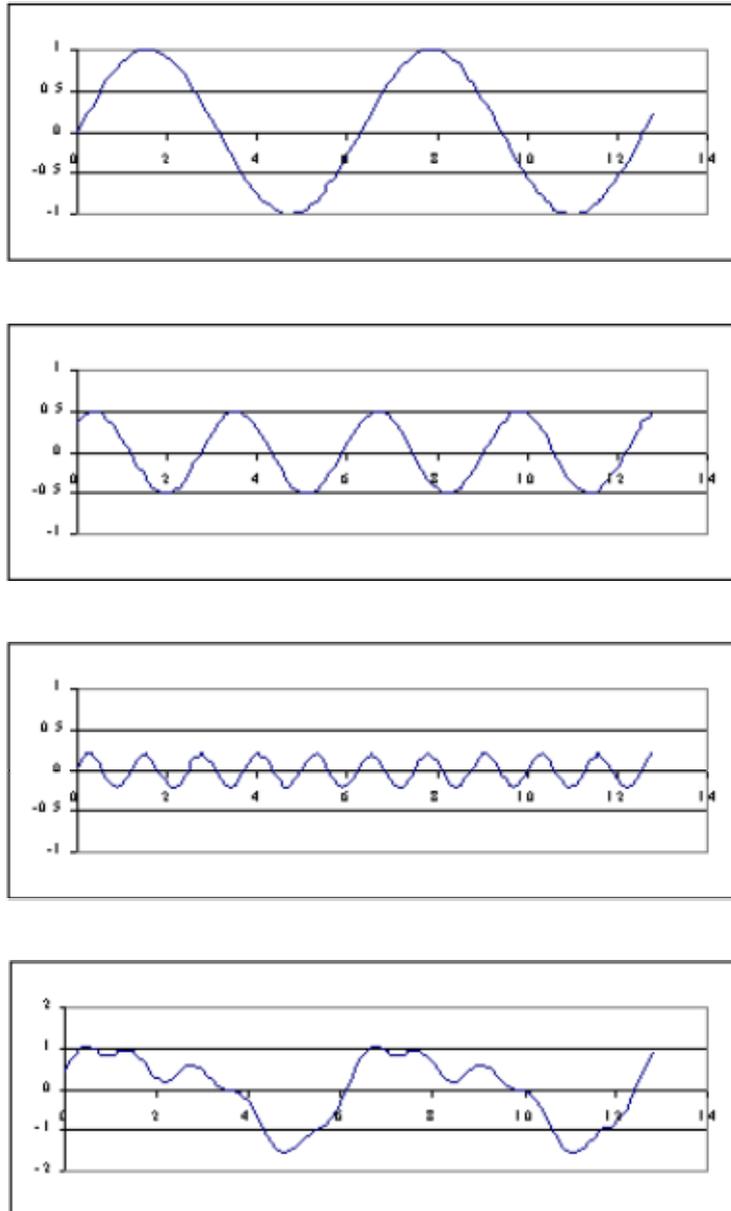


Figura 9.5. Esempio di segnale ottenuto come sovrapposizione di tre funzioni monocromatiche di ampiezza diverse, sfasate casualmente tra loro.

Come si ricava dalla Figura 9.5, la semplice sovrapposizione di onde sinusoidali caratterizzate da una frequenza diversa, comporta la generazione di un segnale certamente più simile a quello rilevabile in campo tramite, ad esempio, un ondametro.

Sulla base di quanto appena mostrato, si può definire lo spettro in frequenza come:

$$S(\omega)\delta\omega = \sum_i \frac{1}{2} a_i^2 \quad \text{per } i \text{ tale che } \omega < \omega_i < (\omega + \delta\omega) \quad (9.24)$$

Il significato fisico dello spettro è quello di essere proporzionale alla distribuzione di energia alle differenti frequenze (cioè lo spettro indica come l'energia si distribuisce tra le varie frequenze). In pratica si considerano solo le ampiezze delle componenti di frequenza comprese in un certo intervallo.

Ad esempio:

$$\begin{array}{ll} \omega = 0.550 & \delta\omega = 0.03 \\ \omega_1 = 0.508 & \omega_4 = 0.567 \\ \omega_2 = 0.542 & \omega_5 = 0.578 \\ \omega_3 = 0.556 & \omega_6 = 0.581 \end{array}$$

pertanto $I[3,4,5]$ e pertanto:

$$S(\omega)\delta\omega = S(0.55)0.03 = \frac{1}{2}(a_3^2 + a_4^2 + a_5^2)$$

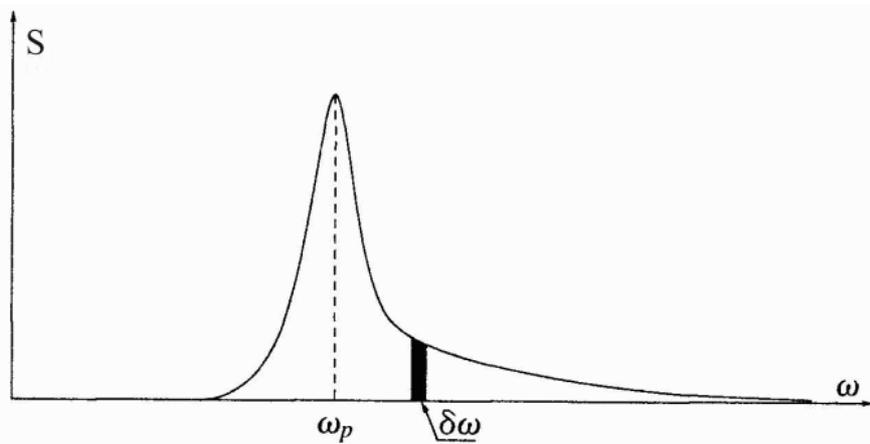


Figura 9.6. Rappresentazione tipica di uno spettro relativo alle onde di vento (ossia onde nell'area di generazione con il vento alle spalle).

Con riferimento alla Figura 9.6, si rileva come l'area sottesa dalla funzione spettro in corrispondenza di un assegnato $\delta\omega$, sia pari alla semisomma dei quadrati delle ampiezze delle componenti sinusoidali le cui frequenze ricadono nell'assegnato intervallo $\delta\omega$.

Sempre con riferimento alla Figura 9.6, possiamo anche introdurre una frequenza di riferimento ω_p , detto frequenza di picco o frequenza dominante, nonché un'altezza di riferimento H_s . Pertanto lavoreremo con una funzione $S(\omega)$ e con due parametri H_s e $T_p = 2\pi/\omega_p$.

E' evidente che nota $S(\omega)$ risulta noto T_p . Si può anche dimostrare, sebbene sia meno evidente, che nota $S(\omega)$ risulta determinata anche H_s . Infatti, ricordando che la deviazione standard del segnale delle sopraelevazioni risulta definita come segue:

$$\sigma = \sqrt{\langle \eta^2(t) \rangle} \quad (9.25)$$

Nell'ipotesi di distribuzione Rayleiana, ossia di spettro infinitamente stretto, l'altezza significativa risulta pari a:

$$H_s = 4\sigma \quad (9.26)$$

essendo inoltre:

$$\sigma_\eta = \sqrt{\langle \eta^2(t) \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \eta^2(t) dt} \quad (9.27)$$

da cui si ricava¹:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T \eta^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left[\sum_{i=1}^N a_i \cos(\omega_i t + \varepsilon_i) \right]^2 dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \left[\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_i \cos(\omega_i t + \varepsilon_i) a_j \cos(\omega_j t + \varepsilon_j) \right] dt = \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_i a_j \frac{1}{T} \int_0^T \cos(\omega_i t + \varepsilon_i) \cos(\omega_j t + \varepsilon_j) dt = \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{a_i^2}{2} \end{aligned} \quad (9.28)$$

Nell'ultimo passaggio si è utilizzata la proprietà delle funzioni ortogonali. In altre parole, poiché $\omega_i \neq \omega_j \Leftrightarrow i \neq j$ e poiché la media di $\cos(\alpha t) \cdot \cos(\beta t) = 0$ se $\alpha \neq \beta$ (ossia se le frequenze sono diverse), rimarranno nella sommatoria solo gli N termini caratterizzati da $i=j$. Pertanto, ricordando che:

$$S(\omega) \delta\omega = \sum_i \frac{1}{2} a_i^2 \quad \text{per } i \text{ tale che } \omega < \omega_i < (\omega + \delta\omega) \quad (9.29)$$

risulta:

$$\sigma^2 = \int_0^\infty [S(\omega)] d\omega \quad (9.30)$$

Abbiamo quindi dimostrato come noto lo spettro, è possibile ottenere sia T_p che H_s . L'integrale di $S(\omega)$ è il momento di ordine zero rispetto all'asse delle ordinate, dove per momento di ordine "j" si definisce:

$$m_j = \int_0^\infty \omega^j S(\omega) d\omega \quad (9.31)$$

¹ Ricordando che, in generale, $\left[\sum_{i=1}^N A_i \right]^2 = \left[\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N A_i A_j \right]$

per cui:

$$m_o = \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega \quad (9.32)$$

è proprio l'area dello spettro, per cui:

$$\sigma_{\eta}^2 = \langle \eta^2(t) \rangle = \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega = m_o = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} a_n^2 \quad (9.33)$$

e quindi, come già detto:

$$H_s = 4\sigma_{\eta} = 4\sqrt{m_o} \quad (9.34)$$

Da quanto tutto sopra mostrato si evince come lo spettro descriva la distribuzione dell'energia alle diverse frequenze e come l'altezza significativa H_s rappresenti un parametro fondamentale che, oltre a visualizzare l'entità dell'agitazione ondosa, fornisce una misura dell'energia dell'onda.

Un'altra funzione legata intimamente allo spettro è la funzione di autocovarianza che risulta definita come segue:

$$\begin{aligned} \psi(T) &= \langle \eta(t)\eta(t+T) \rangle = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \left[\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_i \cos(\omega_i t + \varepsilon_i) a_j \cos(\omega_j t + \varepsilon_j + \omega_j T) \right] dt = \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_i a_j \frac{1}{T} \int_0^T \left[\cos(\omega_i t + \varepsilon_i) \cos(\omega_j t + \varepsilon_j) \cos \omega_j T - \sin(\omega_j t + \varepsilon_j) \sin \omega_j T \right] dt = \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_i a_j \frac{1}{T} \int_0^T \left[\cos(\omega_i t + \varepsilon_i) \cos(\omega_j t + \varepsilon_j) \cos \omega_j T - \cos(\omega_i t + \varepsilon_i) \sin(\omega_j t + \varepsilon_j) \sin \omega_j T \right] dt = \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} a_i^2 \cos(\omega_i T) \end{aligned} \quad (9.35)$$

in cui, nell'ultimo passaggio, si è ancora una volta utilizzata la proprietà delle funzioni ortogonali. Ossia: poiché $\omega_i \neq \omega_j \Leftrightarrow i \neq j$ e poiché la media di $\cos(\alpha t) \cdot \cos(\beta t) = 0$ e quella di $\sin(\alpha t) \cdot \cos(\beta t) = 0$ se $\alpha \neq \beta$ (ossia se le frequenze sono diverse), tenendo anche conto che $\cos \omega_j T$ e $\sin \omega_j T$ sono indipendenti dal tempo e, quindi, ai fini dell'operazione di media risultano costanti, rimarranno solo gli N termini caratterizzati da $i=j$, ossia $\omega_i = \omega_j$ per cui la media di $\cos^2 \alpha t = 1/2$.

Inoltre, essendo lo spettro definito come: $S(\omega)\delta\omega = \sum_i \frac{1}{2} a_i^2$ per i tale che $\omega < \omega_i < (\omega + \delta\omega)$ e

potendosi approssimare $\sum_i \frac{1}{2} a_i^2 \cos \omega T = S(\omega)\delta\omega \cos \omega T$ si ricava:

$$\psi(T) = \int_0^{\infty} S(\omega) \cos(\omega T) d\omega \quad (9.36)$$

da cui:

$$\psi(0) = \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega = \sigma_{\eta}^2 \quad (9.37)$$

Il significato fisico dell'autocovarianza non è immediato. Tuttavia se ne può cogliere l'essenza confrontando il segnale di autocorrelazione di onde di mare con quello di onde sinusoidali. Infatti, è possibile dimostrare che l'andamento tipico per onde è quello rappresentato in Figura 9.7 (vedere *Boccotti, 1997*) con un primo minimo che è anche un minimo assoluto.

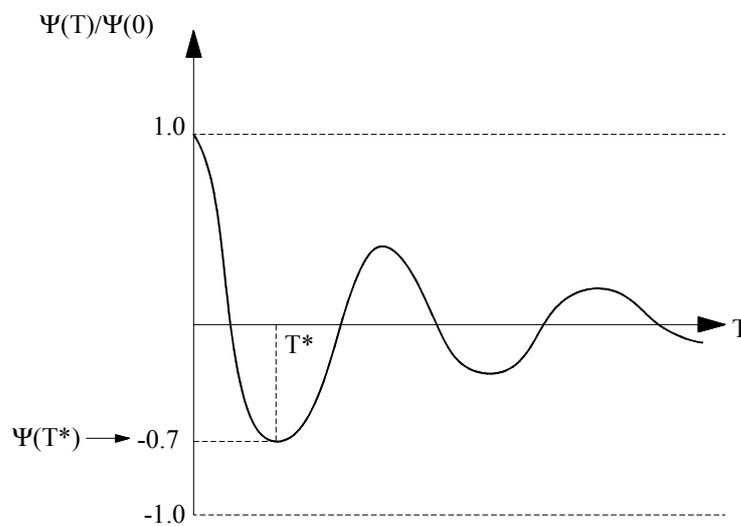


Figura 9.7. Andamento tipico della funzione di autocovarianza per onde di vento.

D'altro canto, l'autocovarianza di una funzione sinusoidale è sinusoidale. Ciò implica che nel caso di onde sinusoidali (ossia di onde caratterizzate da uno spettro di *Dirac*) $\Psi(T^*) = -1$.

Da questo semplice confronto qualitativo si ricava che: tanto più la funzione di autocovarianza presenta un minimo prossimo allo zero, tanto più lo spettro risulterà "allargato" e, pertanto, tanto più lo stato di mare risulta disordinato e caotico.

9.4.2.2. Parametri di deduzione diretta

Come sappiamo l'elevazione d'onda di uno stato di mare viene acquisita con una scansione temporale prefissata. L'intervallo di tempo tra due acquisizioni consecutive viene detto intervallo di campionamento Δt_{camp} e il suo inverso frequenza di campionamento (per una buona rappresentazione delle onde Δt_{camp} non deve superare $1/15$ di T_p).

Si arriva a disporre di una serie n di sopraelevazioni η relative ad uno stato di mare reale (cioè relative a 200÷300 onde consecutive). Da tale insieme è possibile ricavare direttamente la deviazione standard:

$$\sigma_{\eta} = \sqrt{\frac{\eta_1^2 + \eta_2^2 + \dots + \eta_n^2}{n}} \quad (9.38)$$

Quindi moltiplicando σ_{η} per 4 si ottiene l'altezza significativa.

Anche l'autocovarianza è molto semplice da ricavare. Supponiamo infatti:

- i) di avere effettuato una registrazione per 10 minuti;
- ii) che la frequenza di campionamento sia di 10 Hz (cioè 10 campioni al secondo per 600 secondi consecutivi).

Disporremo quindi di 6000 valori di sopraelevazione η ($\eta_1, \dots, \eta_{6000}$) presi ad intervalli regolari di 0.1 secondi l'uno dall'altro.

Allora, per calcolare, ad esempio, $\psi(1s)$, sarà sufficiente operare la media:

$$\psi(1s) = \frac{\eta_1\eta_{11} + \eta_2\eta_{12} + \dots + \eta_{5990}\eta_{6000}}{5990} \quad (9.39)$$

9.4.2.3. Analisi dei dati: problematiche

Le serie di dati disponibili sotto forma di record (ad esempio l'andamento dell'elevazione della superficie libera durante un determinato periodo di campionamento) sono in genere serie discrete. Normalmente, a partire da tali serie si vogliono ricavare informazioni, in particolare di natura statistica, su una funzione continua e non periodica (ad esempio l'elevazione della superficie libera nel tempo).

La serie temporale è caratterizzata da:

- i) un intervallo di campionamento, Δt ;
- ii) una frequenza di campionamento, $f = (\Delta t)^{-1}$;
- iii) un numero di dati registrati, N (di solito si assume N pari per motivi che vedremo);
- iv) la lunghezza del record, $L_r = N\Delta t$;
- v) il periodo della serie T , al più pari alla lunghezza del record stesso ossia $T = N\Delta t$.

La scelta di questi parametri influenza drasticamente ed inevitabilmente la successiva analisi dei dati campionati.

Quando si fa un'analisi in serie di *Fourier* di una serie di dati si assume sempre che essa sia periodica, cioè che si ripeta in maniera esattamente uguale nel tempo.

Si noti che la frequenza di base dell'analisi è definita in termini di frequenza angolare come:

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T} \quad (9.40)$$

ovvero come:

$$f_1 = \frac{1}{T} \quad (9.41)$$

in termini di frequenza naturale. Le frequenze addizionali sono multipli di ω_1 e f_1 . Poiché:

$$T = N\Delta t \quad (9.42)$$

segue che:

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{N\Delta t} \quad (9.43)$$

il che implica che aumentare N per Δt fissato (o aumentare Δt per N fissato) migliora la risoluzione spettrale.

Quando si discretizza una funzione continua con una serie di N dati, è possibile determinare solo N coefficienti della serie di *Fourier* (vedere appendice). Inoltre, poiché è possibile dimostrare che esiste una simmetria complessa attorno allo zero e a $N/2$, il numero di coefficienti significativi risulta sempre $N/2$ (per questo è conveniente che N sia pari).

In particolare sussistono le seguenti relazioni di simmetria complessa:

$$F_{-N} = F_N^* \quad (9.44)$$

$$F_{-\frac{N}{2}+k} = F_{\frac{N}{2}-k}^* \quad (9.45)$$

$$F_{-\frac{N}{2}+k} = F_{\frac{N}{2}+k} \quad (9.46)$$

$$F_{\frac{N}{2}+k} = F_{\frac{N}{2}-k}^* \quad (9.47)$$

in cui “*” indica il complesso coniugato della variabile immaginaria.

9.4.2.3.1. *Massima frequenza risolta: aliasing*

Nella fase di acquisizione è particolarmente importante la frequenza a cui avviene il campionamento. Campionare ad una frequenza

$$f = \frac{1}{\Delta t} \quad (9.48)$$

non risolve la struttura dell'onda, il valore medio determinato dipende dalla fase a cui inizia il campionamento. La frequenza

$$f = \frac{1}{2\Delta t} \quad (9.49)$$

consente di risolvere la struttura dell'onda, tuttavia l'ampiezza dipende dalla fase a cui inizia il campionamento. Questa frequenza è detta *frequenza di Nyquist* o *frequenza di cutoff*.

Per frequenze $\frac{1}{2\Delta t} < f < \frac{1}{\Delta t}$ l'onda ricostruita ha una frequenza apparente, non coincidente con la frequenza reale. Soluzioni possono essere: ridurre il Δt , in modo da risolvere tutte le frequenze

rilevanti del segnale; pre-filtrare analogicamente il segnale (filtro passa-basso) in modo da eliminare a priori tutte le frequenze non risolte.

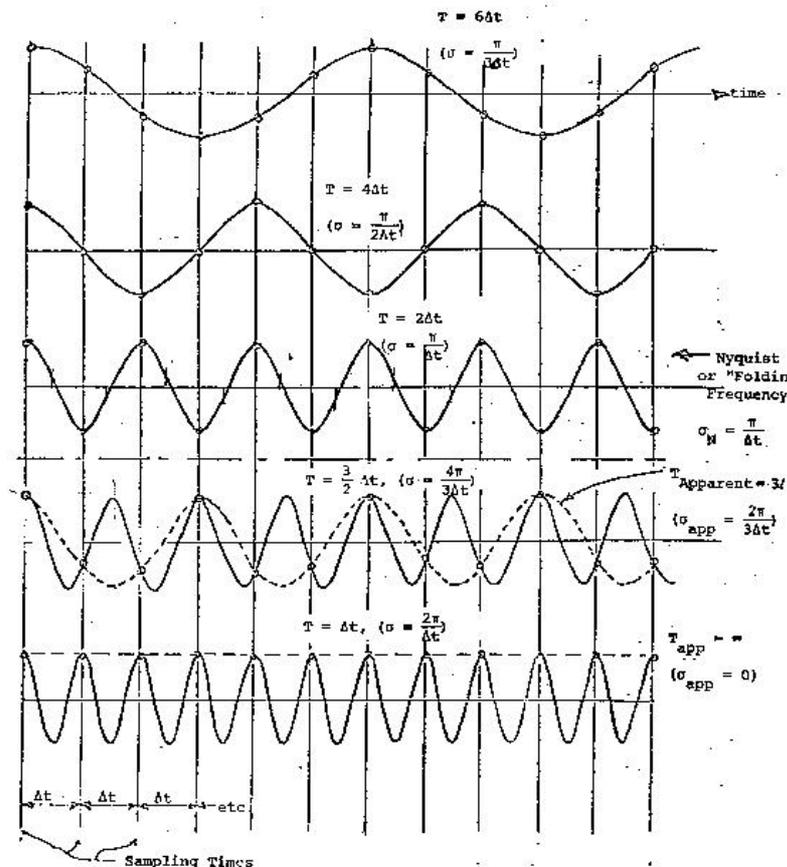


Figura 9.8. Esempio di ricostruzione dell'onda a partire da dati con Δt di campionamento. Si evince come quando la frequenza di campionamento è superiore alla frequenza di Nyquist, non è possibile ricostruire il segnale di partenza.

L'assunzione di periodicità della registrazione su un intervallo di lunghezza T presenta diverse conseguenze:

- Se il segnale è quasi periodico, ma con una frequenza che non è quella del campione, tale periodicità non può essere rappresentata dal campione
- Se il segnale è aperiodico, allora lo spettro è continuo, ma solo un numero finito di frequenze saranno presenti nello spettro stimato.

9.4.2.3.2. Leakage e windowing

Si consideri una funzione continua $f(t)$ e si consideri una "finestra" di osservazione. Sostanzialmente è come osservare la funzione:

$$g(t) = w(t)f(t) \quad (9.50)$$

in cui $w(t)$ è la "window function" e può avere diverse forme, ma ha in generale un'espressione del tipo:

$$w(t) = \begin{cases} 0 & |t| > T/2 \\ \neq 0 & |t| \leq T/2 \end{cases} \quad (9.51)$$

Se si considera la trasformata di Fourier della funzione $g(t)$, $F_g(\omega)$, si ottiene:

$$F_g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_f(\omega') F_w(\omega - \omega') d\omega' \quad (9.52)$$

in cui $F_f(\omega')$ è la trasformata di Fourier della funzione $f(t)$, mentre $F_w(\omega - \omega')$ è la trasformata di Fourier della window function.

Quindi dall'analisi di un campione di lunghezza finita non è possibile ottenere lo spettro reale del processo, ma piuttosto una sua stima ottenuta usando una qualche funzione di peso (o window function appunto).

Esistono diversi tipi di window function. Il più semplice è la box car window function, che ha la seguente espressione:

$$w(t) = \begin{cases} 0 & |t| > T/2 \\ 1 & |t| \leq T/2 \end{cases} \quad (9.53)$$

Fornisce una buona valutazione del picco (sia in valore che in ampiezza), ma presenta anche una serie di oscillazioni laterali.

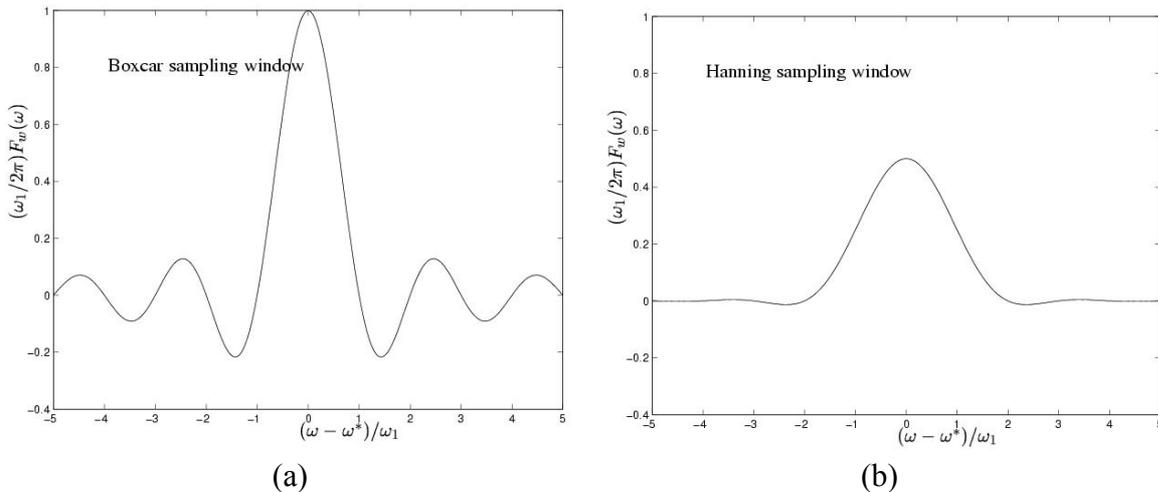


Figura 9.9. Esempio di box car window (a) e di Hanning window (b).

Un altro tipo di window function è la Hanning window, la cui formulazione analitica è individuata dalla relazione:

$$w(t) = \begin{cases} 0 & |t| > T/2 \\ \cos^2\left(\omega_1 \frac{t}{2}\right) & |t| \leq T/2 \end{cases} \quad (9.54)$$

Essa presenta minori oscillazioni laterali, ma il picco può essere sottostimato e lo spettro può essere più largo.

9.4.2.4. Rappresentazione degli spettri

Data la caratteristica simmetria degli spettri (attorno allo zero per lo spettro continuo e attorno alla frequenza di Nyquist per l'output dell'FFT), è usuale rappresentare solo metà dello spettro. Tale proprietà prende il nome di *folding*.

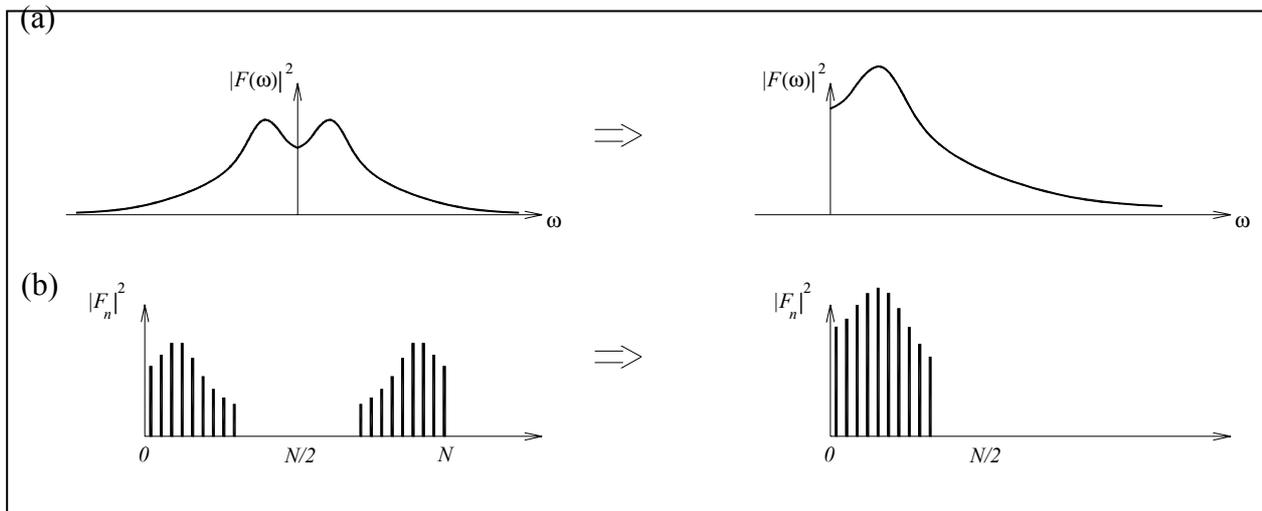


Figura 9.10. Esempio di folding per uno spettro continuo (a) e per uno spettro a righe (b).

Gli spettri sono di solito rappresentati in modo che i valori spettrali plottati nel dominio della frequenza coprano l'intera varianza del segnale (densità spettrale $S(f)$). Sono necessarie quindi alcune manipolazioni. La relazione di normalizzazione che deve essere rispettata è:

$$\int_0^{\infty} S(f) df = \sigma^2 \quad (9.55)$$

9.4.2.5. Analisi spettrale di treni di onde random

Analizzando un segnale random, e utilizzando per esempio una finestra del tipo box-car di lunghezza T per determinare i segmenti analizzati, si ottengono diverse stime dello spettro, che in generale non coincidono, né nel picco, né nella forma.

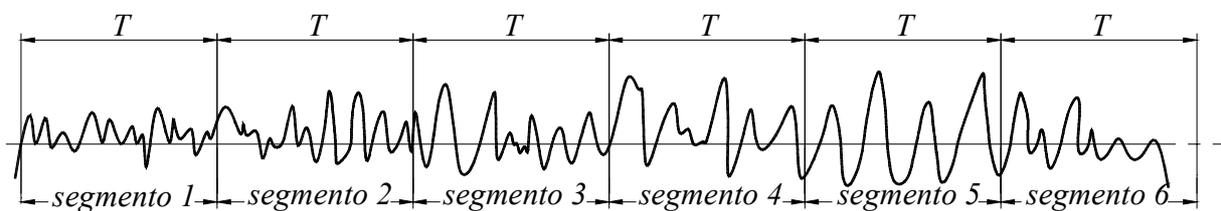


Figura 9.11. Segmenti di un segnale random individuato tramite una finestra del tipo box car

Il risultato di tale procedura è ad esempio quello mostrato in Figura 9.12, dove si evince come al variare della finestra di osservazione cambi lo spettro risultante.

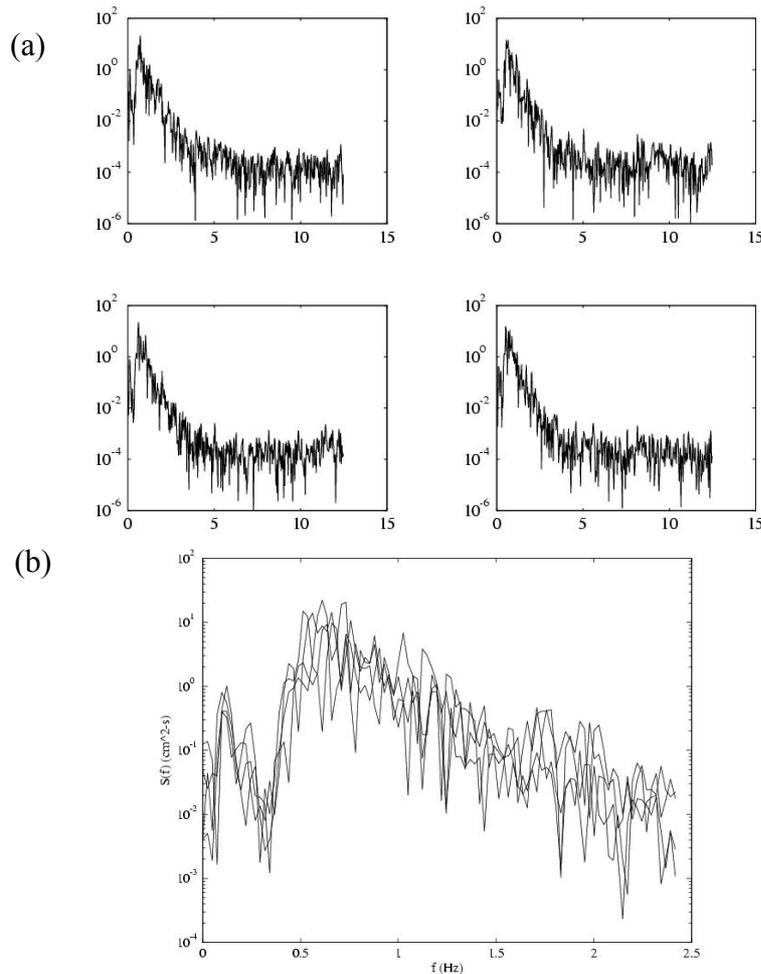


Figura 9.12. Spettro di quattro segmenti di un segnale random (a) e gli stessi quattro spettri sovrapposti (b).

È possibile dimostrare che lo spettro risultante da una analisi diretta di una funzione random è anch'esso una funzione random. Infatti se si considera l'espressione della serie di Fourier:

$$\eta(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t \quad (9.56)$$

con:

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{2}{T} \int_0^T \eta(t) \begin{Bmatrix} \cos n\omega t \\ \sin n\omega t \end{Bmatrix} dt \quad (9.57)$$

in cui $\eta(t)$ è un processo random normalmente distribuito, anche a_n e b_n sono funzioni random normalmente distribuite, e così lo spettro:

$$|F_n|^2 = \frac{1}{4}(a_n^2 + b_n^2) \quad (9.58)$$

è una funzione random che segue una distribuzione di probabilità χ^2 , con due gradi di libertà (dato che dipende da *due* variabili random).

Per ricavare una stima statistica dello spettro, è necessaria quella che viene chiamata operazione di *smoothing*.

I metodi per effettuare lo smoothing dello spettro tendono a ridurre

- 1) il *bias della stima dello spettro*, $B(f)$, definito come la differenza tra la stima dello spettro e lo spettro effettivo del processo:

$$B(f) = E[\tilde{S}(f)] - S(f) \quad (9.59)$$

- 2) la *varianza* dello spettro stimato:

$$\text{var}[\tilde{S}(f)] = \frac{S(f)^2}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_p^2(\tau) d\tau \quad (9.60)$$

Si noti che il *bias* può essere ridotto aumentando il periodo di osservazione: si pensi infatti che per T tendente ad infinito la stima dello spettro dovrebbe coincidere con lo spettro reale. Invece la varianza non dipende dal periodo di osservazione e quindi non può essere ridotta aumentando T .

Tra i metodi di smoothing uno tra i più usati è il metodo di *Welch*. Quest'ultimo consiste nelle seguenti operazioni:

- Suddividere la serie di lunghezza T , in K sottointervalli di lunghezza $M=T/K$
- Stimare gli spettri dei singoli sottointervalli $\tilde{S}^{(j)}(f)$, $j=1, \dots, K$. Si noti che ogni sottointervallo ha una risoluzione in frequenza pari a $1/K$, o K/T , mentre l'intera serie avrebbe avuto una migliore risoluzione pari a $1/T$
- Calcolare la media d'insieme dello spettro

$$\bar{S}(f) = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K \tilde{S}^{(j)}(f) \quad (9.61)$$

Questo metodo aumenta il *bias* (perché riduce il periodo di osservazione), quindi riduce la risoluzione in frequenza, ma riduce la varianza.

9.4.2.6. Spettri di frequenza delle onde di mare

La forma dello spettro di frequenza dipende dalle condizioni di generazione esterne (velocità, *fetch* e durata del vento, presenza di onde di vento, etc) e da meccanismi interni al campo ondoso (interazioni non lineari tra le componenti dell'onda, dissipazioni di energia dovute al frangimento e all'attrito al fondo).

In passato sono state condotte numerose ricerche volte a determinare una relazione tra le grandezze che intervengono nella generazione delle onde e la funzione di densità spettrale, in condizioni di saturazione. Quest'ultima definita come quello stato di equilibrio tra perdita di

energia, principalmente dovuta al frangimento, e l'energia acquistata dalle onde grazie all'azione del vento).

La condizione di saturazione dovrebbe essere descritta esclusivamente da grandezze fisiche locali che governano la configurazione finale dell'onda, (accelerazione di gravità g , velocità d'attrito del vento sul pelo libero u^* , frequenza locale ω).

In effetti la funzione di densità spettrale viene legata a grandezze quali il *fetch* adimensionale gX/U^2 oppure alla durata adimensionale del vento gT/U , dove x è il *fetch*, U è la velocità del vento a 19,5 m dal livello medio del mare, t è la durata del vento.

Si noti che se sono presenti due famiglie di curve (ad esempio onde di vento più onde lunghe generate in precedenza) lo spettro può assumere l'andamento in Figura 9.12:

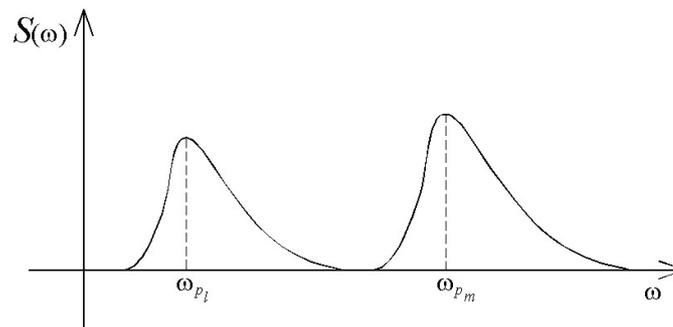


Figura 9.13. Esempio di spettro relativo alla contemporanea presenza di onde lunghe e di onde vive generate in tempi diversi.

In particolare, nella Figura 9.13 è rappresentato un esempio di andamento dello spettro relativo ad uno stato di mare che vede la sovrapposizione di onde lunghe e vive, generate in tempi diversi e caratterizzate da un'altezza significativa pressoché simile e da periodi diversi. Con l'andare del tempo lo spettro dovuto alle onde di vento, ossia quello caratterizzato da una frequenza più grande, predominerà sullo spettro delle onde lunghe.

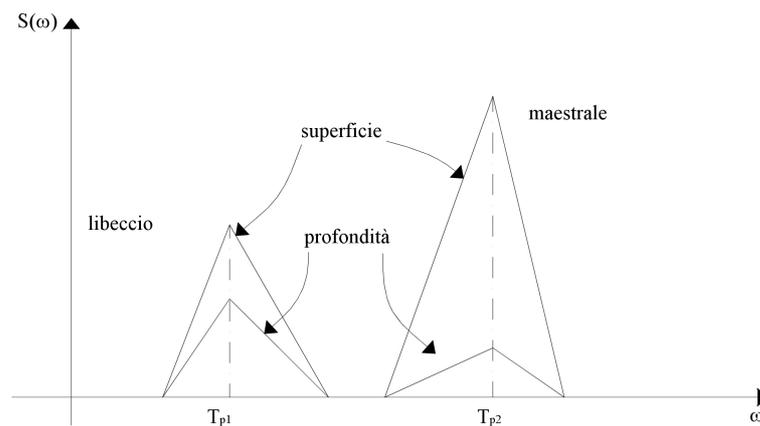


Figura 9.14. Esempio di contemporanea presenza di onde lunghe e vive generate in tempi diversi: schematizzazione di spettri alle diverse profondità.

Schematizzando i due spettri relativi alle onde lunghe e vive come in Figura 9.14, in cui si sono rappresentati gli stessi spettri a due diverse profondità, si può notare quanto segue: all'aumentare del periodo aumenta anche la lunghezza d'onda. Pertanto se $T_{p1} > T_{p2}$, ne segue che $L_1 > L_2$ e, quindi, $k_1 < k_2$. Ricordando i fattori di attenuazione del carico piezometrico, si avrà (essendo al di sotto del pelo libero $z < 0$):

$$e^{k_1 z} > e^{k_2 z} \quad (9.62)$$

Esisterà dunque una profondità alla quale i due spettri saranno uguali e, ancora più in profondità, prevarrà il contributo delle onde lunghe. Questa situazione si realizza con alta probabilità: in superficie prevalgono le onde di vento, in profondità le onde lunghe. La trattazione di questo tipo di spettri è piuttosto complessa, non essendo infatti possibile una loro schematizzazione immediata con spettri sintetici. Tuttavia il loro interesse pratico è piuttosto limitato e pertanto essi non saranno presi in considerazione nel prosieguo.

9.4.2.7. Spettri sintetici

L'idea che sta alla base della formulazione degli spettri sintetici è che il fenomeno della generazione delle onde, per effetto dell'azione del vento sulla superficie del mare (onde di vento), possa essere descritto attraverso delle leggi universali.

Forse la più universale di queste è la "legge di crescita del fetch", che sostiene che dato un vento che spira con velocità e direzione costante su un fetch fissato, le onde da esso generate raggiungeranno uno stato di mare stazionario su un fetch limitato (l'altezza d'onda resta costante in senso statistico nel tempo, ma varia lungo il fetch). E' importante anche comprendere che l'altezza d'onda non aumenta al passare del tempo e all'aumentare del fetch (come si potrebbe erroneamente pensare), ma che per azione del vento si raggiunge uno stato di altezza d'onda completamente sviluppata.

La descrizione degli stati di mare in termini spettrali venne solo in un secondo momento intorno agli anni '50 (Pierson, Neumann e James, 1955), insieme alla spiegazione teorica del processo di generazione delle onde (Philips, 1958 e Miles 1957).

L'uso di forme spettrali è molto utile in quanto consente di rappresentare, noti *pochi parametri* relativi al "wave climate", un intero stato di mare.

Come è stato più volte ribadito, in mare le onde vengono generate dal vento e vengono per questo dette *onde di vento*.

Dall'analisi di serie di dati rilevati in campo si vede come gli spettri ricavati per tale tipo di onde abbiano una forma caratteristica, con una *frequenza di picco*, f_p o ω_p , ben definita e una coda più alta alle frequenze più elevate.

L'uso degli spettri sintetici (es. spettri di tipo JONSWAP o TMA) consente di generare treni di onde irregolari sia in laboratorio sia numericamente, i quali simulano il moto ondoso in modo più realistico di quanto facciano in molti casi treni di onde regolari.

Gli spettri sintetici vengono di solito espressi in funzione dei parametri rappresentativi delle caratteristiche energetiche di uno stato di mare, ed in particolare dell'*altezza d'onda significativa* H_s e del *periodo di picco* T_p .

9.4.2.7.1. Lo spettro JONSWAP

Nel caso di onde di vento che si propagano su profondità infinita, è comunemente utilizzato il cosiddetto spettro JONSWAP, acronimo di Joint North Sea Wave Project, ricavato

negli anni 1968 e 1969 in seguito alla realizzazione di una campagna di misura condotta nel Mare del Nord in quegli anni.

In effetti, già negli anni '50 *Phillips* osservò che lo spettro tende a zero per grandi valori della frequenza angolare ω , secondo una legge del tipo ω^{-5} , mentre la forma dello spettro JONSWAP deriva dallo spettro formulato da *Pierson* e *Moskowitz* negli anni '60.

L'espressione dello spettro è:

$$S(\omega) = Ag^2 \omega^{-5} \exp\left[-\frac{5}{4}\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^4\right] \exp\left\{\ln \chi_1 \exp\left[-\frac{(\omega - \omega_p)^2}{2\chi_2 \omega_p^2}\right]\right\} \quad (9.63)$$

con:

- A parametro di *Phillips*

- χ_1 e χ_2 parametri di forma

I valori comunemente usati per i parametri di forma sono:

$$\chi_1 = 3.3 \quad (9.64)$$

e

$$\chi_2 = \begin{cases} 0.07 & \text{se } \omega \leq \omega_p \\ 0.09 & \text{se } \omega > \omega_p \end{cases} \quad (9.65)$$

Boccotti (1997) consiglia i valori $\chi_1 = 3$ e $\chi_2 = 0.08$.

Il parametro di *Phillips* dipende invece dalle caratteristiche di generazione e in particolare dal fetch X e dalla velocità del vento U :

$$A = 0.076 \left(\frac{gX}{U^2}\right)^{-0.22} \quad (9.66)$$

Per ω_p si assume invece valida la relazione:

$$\omega_p = 7\pi \left(\frac{g}{U}\right) \left(\frac{gX}{U^2}\right) \quad (9.67)$$

Un valore tipico per A è 0.01.

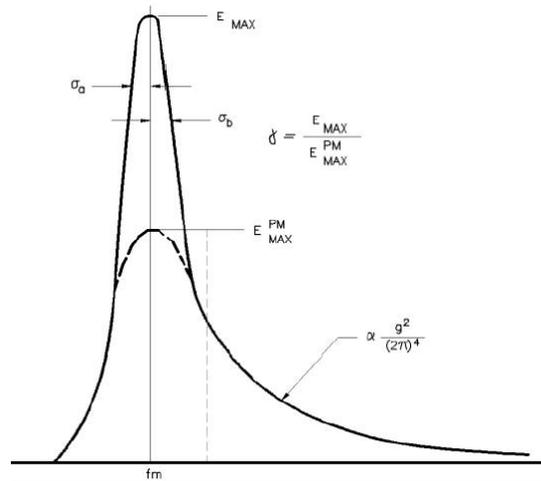


Figura 9.15. Esempio di uno spettro Jonswap (da: Coastal Engineering Manual)

Se si definisce il momento di ordine zero:

$$m_0 = \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega \quad (9.68)$$

e si esprime lo spettro in forma adimensionale, in funzione della frequenza adimensionale ω :

$$S'(\omega) = \omega^{-5} \exp\left(-\frac{5}{4}\omega^{-4}\right) \exp\left\{\ln \chi_1 \exp\left[-\frac{(\omega-1)^2}{2\chi_2^2}\right]\right\} \quad (9.69)$$

si può scrivere, risolvendo numericamente l'integrale, che:

$$m_0 = 0.305 A g^2 \omega_p^{-4} \quad (9.70)$$

Poiché poi si può dimostrare che $m_0 = \frac{H_s^2}{16}$, ricordando che il periodo di picco può essere espresso come $T_p = \frac{2\pi}{\omega_p}$, si ricava infine:

$$T_p = 4 \sqrt{\frac{1}{0.305 A}} 2\pi \sqrt{\frac{H_s}{4g}} \quad (9.71)$$

9.4.2.7.2. Lo spettro TMA

Lo spettro JONSWAP è stato determinato per profondità infinita e per stati di mare limitati dal fetch, infatti nella formulazione dello spettro non c'è alcun riferimento alla profondità h .

Per acque di intermedia e bassa profondità è stato proposto da *Bouws et al.* (1985) lo spettro TMA, che cerca di interpretare il processo di propagazione delle onde di vento in acque

basse, durante il quale invece le onde “sentono” il fondo e la profondità h diventa una variabile fondamentale.

Il nome deriva dalle campagne sperimentali sulle quali è stato calibrato il modello spettrale:

- TEXEL (Olanda, inverno 1976)
- MARSEN (Mare del Nord, autunno 1979)
- ARSLOE (Chesapeake Bay, autunno 1980)

Le misure sono state effettuate, nella maggior parte dei casi, in una fascia che va dalla breaking zone a circa 40 m di profondità.

L’idea alla base dello spettro JONSWAP è che ci sia un bilancio tra l’azione atmosferica, trasferimenti energetici all’interno dello spettro dovuti a interazioni nonlineari risonanti e dissipazioni. In acque basse si ipotizza che tale bilancio esista, ma in esso giochi un ruolo fondamentale la profondità.

Lo spettro pertanto assume la forma:

$$S_{TMA} = \alpha g^2 \frac{\omega^{-5}}{(2\pi)^4} \Phi(\omega, h) e^{-\frac{5}{4} \left(\frac{\omega}{\omega_p} \right)^4} \gamma \exp \left[\frac{-(\omega - \omega_p)^2}{2\sigma^2 \omega_p^2} \right] \quad (9.72)$$

Tutti i parametri sono definiti in maniera analoga rispetto allo spettro JONSWAP. Fa eccezione il termine:

$$\Phi(\omega, h) = \frac{k(\omega, h)^{-3} \frac{\partial k(\omega, h)}{\partial f}}{k(\omega, h_\infty)^{-3} \frac{\partial k(\omega, h_\infty)}{\partial f}} \quad (9.73)$$

in cui $k(f, h)$ è la funzione del numero d’onda per fissato valore di frequenza e di profondità. Tale termine costituisce il parametro caratteristico dello spettro TMA: esso consente di tenere conto dell’interazione del moto ondoso, in acque basse e intermedie, con il fondo. Se si adotta la teoria lineare, la (9.73) può essere approssimata come

$$\Phi(f, h) \cong \begin{cases} \frac{1}{2} \omega^2 & \omega \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{2} (2 - \omega)^2 & \omega > 1 \end{cases} \quad (9.73 \text{ bis})$$

Il modello spettrale TMA è stato messo a punto per la previsione dello stato ondoso. I meccanismi di attenuazione delle onde, quali attrito al fondo, percolazione e breaking, dovrebbero essere inclusi nel modello attraverso la funzione Φ . Tuttavia è opportuno porre una certa attenzione nell’applicazione dello spettro TMA a problemi reali di trasformazione delle onde in acque basse, in quanto lo spettro è stato pensato per descrivere la fase di sviluppo e non una fase di stato di mare completamente sviluppato e in equilibrio (Goda, 1990).

9.4.2.7.3. Lo spettro direzionale

Una formulazione che tiene conto del fatto che, in effetti, in campo le onde provengono da differenti direzioni, è quella offerta dallo spettro direzionale.

Considerando pertanto la sopraelevazione del pelo libero come somma di una serie di onde provenienti da differenti direzioni, quest'ultima può essere espressa come:

$$\eta(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(k_n x \cos \theta_n + k_n y \sin \theta_n - \omega_n t + \varepsilon_n) \quad (9.74)$$

in cui:

a_n è l'ampiezza di ogni singola componente

k_n è il numero d'onda di ogni singola componente

θ_n è la direzione di propagazione di ogni singola componente

ω_n è la frequenza angolare di ogni singola componente

ε_n è la fase di ogni singola componente

La funzione densità spettrale direzionale è definita come:

$$S(f, \theta) df d\theta = \sum_f^{f+df} \sum_{\theta}^{\theta+d\theta} \frac{1}{2} a_n^2 \quad (9.75)$$

oppure, analogamente, come:

$$S(k, \theta) dk d\theta = \sum_k^{k+dk} \sum_{\theta}^{\theta+d\theta} \frac{1}{2} a_n^2 \quad (9.76)$$

Tali espressioni evidenziano la dipendenza dello spettro non solo dalla frequenza f (oppure dal numero d'onda k) ma anche dalla direzione di propagazione θ delle onde.

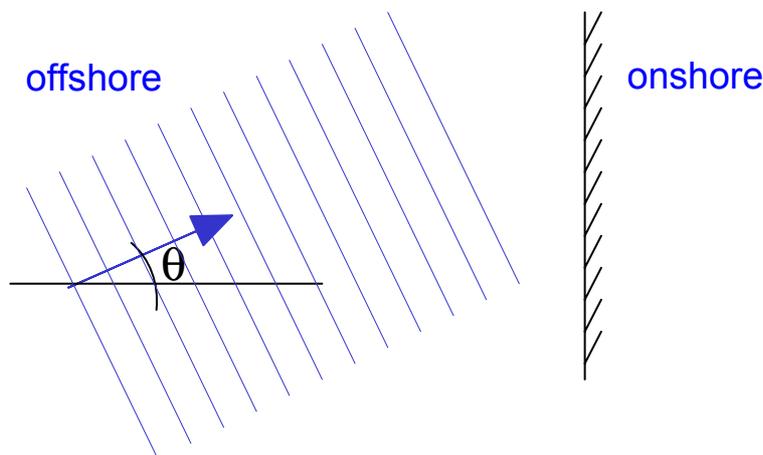


Figura 9.16. Propagazione di una singola onda monocromatica con un angolo di attacco θ .

9.5. Il modello SMB per la previsione “a breve termine”

Per caratterizzare lo stato di mare in un paraggio nel breve periodo (circa un'ora) si determinano le caratteristiche di un'onda rappresentativa della severità dello stato di mare. Usualmente l'onda scelta è quella significativa determinata, ad esempio, con il metodo *SMB*.

Il metodo *SMB* (*Sverdrup e Munk*; 1943,1947, *Bretshneider*; 1958) fornisce infatti l'altezza ed il periodo dell'onda significativa a partire da relazioni empiriche espresse in termini della velocità del vento U rilevata a 10m s.l.m.m. (vedere cap.8), dell'estensione del *fetch* X (ovvero della distesa di mare libero su cui il vento spirava con intensità e direzione costanti), e della durata t dell'evento eolico. Questo metodo è stato più volte migliorato e costituisce l'approccio di previsione più largamente utilizzato, anche a causa della sua semplicità ed efficienza.

Una sua corretta interpretazione e applicazione passa da un'analisi del bilancio energetico nell'area di generazione del moto ondoso ad opera del vento. Detto bilancio, in assenza di corrente, può essere espresso dalla seguente equazione:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (\underline{C}_g E) = Q_{in} + Q_{ds} \quad (9.77)$$

in cui E rappresenta l'energia del moto ondoso, \underline{C}_g la celerità di gruppo, ossia la velocità di propagazione dell'energia (vedere cap.5). La quantità a secondo membro rappresenta l'apporto netto di energia nell'unità di tempo nell'area di generazione, dato dalla somma algebrica dell'energia fornita dall'azione del vento Q_{in} e dell'energia dissipata dai frangimenti parziali Q_{ds} . Tale apporto di energia nell'unità di tempo viene utilizzato in parte per incrementare localmente l'energia delle onde, in parte per trasportare tale energia al di fuori dell'area di generazione.

Da un punto di vista funzionale, l'energia può essere rappresentata dalla seguente espressione:

$$E = f(\rho, g, X, t, U) \quad (9.78)$$

in cui ρ e g indicano rispettivamente la densità dell'acqua e l'accelerazione di gravità. Assumendo ρ , g ed U come grandezze fondamentali, l'espressione (9.78), con l'ausilio del teorema Π (vedere appendice), assume la seguente espressione funzionale tra gruppi adimensionali:

$$\frac{gE}{\rho U^4} = f\left(\frac{gt}{U}, \frac{gX}{U^2}\right) \quad (9.79)$$

in cui si distinguono due parametri adimensionali definiti rispettivamente:

- i) $\frac{gt}{U}$ parametro di durata.
- ii) $\frac{gX}{U^2}$ parametro del fetch;

L'esame dell'equazione di bilancio energetico dà luogo a diversi regimi di generazione che possono essere discriminati proprio sulla base dei valori assunti dai citati parametri. Se l'input di energia fornito dal vento non è sufficiente a trasferire energia al di fuori dell'area di generazione, si ha un *regime transitorio* in cui si ha solo un incremento locale di energia, ovvero l'energia E dipende dal solo parametro della durata. In formule:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = Q_{in} + Q_{ds} \quad (9.80)$$

$$\frac{gE}{\rho U^4} = f\left(\frac{gt}{U}\right) \quad (9.81)$$

Questo regime ha luogo quando il parametro della durata è inferiore ad un valore minimo che dipende dal parametro del fetch: ($gt/U < gt_{min}/U$ essendo $t_{min} = \tilde{f}\left(\frac{gX}{U^2}\right)$).

Se, d'altra parte, l'input di energia fornito dal vento è sufficiente a trasferire energia al di fuori dell'area di generazione, si ha un *regime stazionario*, in cui si ha solo trasferimento di energia, ovvero l'energia E dipende dal solo parametro del *fetch*:

$$\nabla \cdot (\underline{C}_g E) = Q_{in} + Q_{ds} \quad (9.82)$$

$$\frac{gE}{\rho U^4} = f\left(\frac{gX}{U^2}\right) \quad (9.83)$$

Questo regime ha luogo quando il parametro della durata è superiore al valore minimo definito precedentemente ($gt/U > gt_{min}/U$), e quando il parametro del *fetch* è inferiore ad un altro valore di soglia ($gX/U^2 < gX_{min}/U^2$).

Infine, se viene superata anche quest'ultima soglia del parametro del *fetch*, si ha un *regime di mare completamente sviluppato* in cui, fissata la velocità del vento, l'input di energia corrispondente al *fetch* ed alla durata dell'evento è già la massima possibile, l'ulteriore input di energia viene immediatamente dissipato, pertanto l'energia del moto ondoso è costante:

$$Q_{in} + Q_{ds} = 0 \quad (9.84)$$

$$\frac{gE}{\rho U^4} = \text{cost} \quad (9.85)$$

Definiti i tre regimi di generazione del moto ondoso ad opera del vento, risulta più agevole la comprensione del metodo *SMB* che, come detto, consente di determinare l'altezza H_s ed il periodo T_s dell'onda significativa su profondità infinita in funzione della velocità del vento U a 10m s.l.m.m., dell'estensione del *fetch* X , e della durata t dell'evento.

Detto metodo parte da alcune considerazioni circa la dipendenza funzionale dell'altezza significativa e del periodo significativo. In formule:

$$H_s = f_1(U, X, t, g) \quad (9.86)$$

$$T_s = f_2(U, X, t, g) \quad (9.87)$$

Applicando l'analisi dimensionale, l'altezza ed il periodo dell'onda significativa possono essere espressi come segue:

$$\frac{gH_s}{U^2} = f_1\left(\frac{gX}{U^2}, \frac{gt}{U}\right) \quad (9.88)$$

$$\frac{gT_s}{U} = f_2\left(\frac{gX}{U^2}, \frac{gt}{U}\right) \quad (9.89)$$

Assegnata la velocità del vento, l'estensione del *fetch* e la durata dell'evento, le (9.88) e (9.32) si particularizzano in maniera simile a quanto mostrato per l'equazione dell'energia. Infatti, in *regime transitorio*, ovvero quando $gt/U < gt_{min}/U$, l'altezza e il periodo dell'onda significativa sono funzioni del solo parametro della durata gt/U e quindi si dice che il mare è limitato per durata, per cui:

$$\frac{gH_s}{U^2} = f_1\left(\frac{gt}{U}\right) \quad (9.90)$$

$$\frac{gT_s}{U} = f_2\left(\frac{gt}{U}\right) \quad (9.91)$$

In regime stazionario, ovvero quando $gt/U > gt_{min}/U$, l'altezza ed il periodo dell'onda significativa sono funzioni del solo parametro del *fetch* gX/U^2 , e quindi si dice che il mare è limitato per *fetch*:

$$\frac{gH_s}{U^2} = f_1\left(\frac{gX}{U^2}\right) \quad (9.92)$$

$$\frac{gT_s}{U} = f_2\left(\frac{gX}{U^2}\right) \quad (9.93)$$

In regime di mare *completamente sviluppato*, ovvero quando $gt/U > gt_{min}/U$ e $gX/U^2 > gX_{min}/U^2$ il mare non è limitato né per *fetch* né per durata. In questo caso, i parametri dimensionali significativi dell'altezza e del periodo sono costanti e pertanto essi vengono a dipendere soltanto dalla velocità U del vento:

$$\frac{gH_s}{U^2} = \text{cost} \quad (9.94)$$

$$\frac{gT_s}{U} = \text{cost} \quad (9.95)$$

La dipendenza dell'altezza e del periodo dell'onda significativa dai parametri del *fetch* e della durata è stata esplicitata da *Bretshneider* (1958,1973) che ha proposto le seguenti formule:

$$\frac{gH_s}{U^2} = 0.283 \tanh\left[0.0125\left(\frac{gX}{U^2}\right)^{0.42}\right] \quad (9.96)$$

$$\frac{gT_s}{2\pi U} = 1.2 \tanh\left[0.077\left(\frac{gX}{U^2}\right)^{0.25}\right] \quad (9.97)$$

Più recentemente dette formule sono state rivisitate da *Wilson* (1965) che ha proposto le seguenti curve di previsione di H_s e T_s ampiamente validate su dati sperimentali:

$$\frac{gH_s}{U^2} = 0.3 \left\{ 1 - \left[1 + 0.004 \left(\frac{gX}{U^2} \right)^{1/2} \right]^{-2} \right\} \quad (9.96 \text{ bis})$$

$$\frac{gT_s}{2\pi U} = 1.37 \left\{ 1 - \left[1 + 0.008 \left(\frac{gX}{U^2} \right)^{1/3} \right]^{-5} \right\} \quad (9.97 \text{ bis})$$

Nel caso di fetch limitati, inoltre possono essere utilizzate anche le seguenti leggi:

$$\frac{gH_s}{U^2} = 1.6 \cdot 10^{-3} \left| \frac{gX}{U} \right|^{\frac{1}{2}} \quad (9.96 \text{ ter})$$

$$\frac{gT_s}{U^2} = 2.857 \cdot 10^{-1} \left| \frac{gX}{U} \right|^{\frac{1}{3}} \quad (9.97 \text{ ter})$$

Nel caso in cui il vento spira per un tempo limitato, le onde non possono raggiungere l'altezza e il periodo corrispondenti alla velocità U e al *fetch* X . Pertanto è necessario calcolare il parametro minimo di durata (che ovviamente, come detto, dipende dal parametro del *fetch*). Ciò implica da un punto di vista concettuale calcolare, integrandolo numericamente, l'integrale:

$$t_{min} = \int_0^X \frac{dX}{C_g}$$

essendo C_g la celerità di gruppo (espressa in m/s). Ovvero, in forma adimensionale:

$$\frac{gt_{min}}{U} = \int_0^{gX/U^2} \frac{d(gX/U^2)}{gT_s/(4\pi U)}$$

Wilson (1965) aveva proposto la seguente espressione:

$$\frac{gt_{min}}{U} = 6.5882 \exp \left\{ \left[0.0161\lambda^2 - 0.3692\lambda + 2.2024 \right]^{0.5} + 0.8798\lambda \right\}$$

essendo $\lambda = \ln(gX/U^2)$.

Goda (2003) ha recentemente riproposto il calcolo dell'integrale sopra citato nell'intervallo gX/U^2 da 10 a 10^5 . Il risultato è riportato nella Figura 9.2.

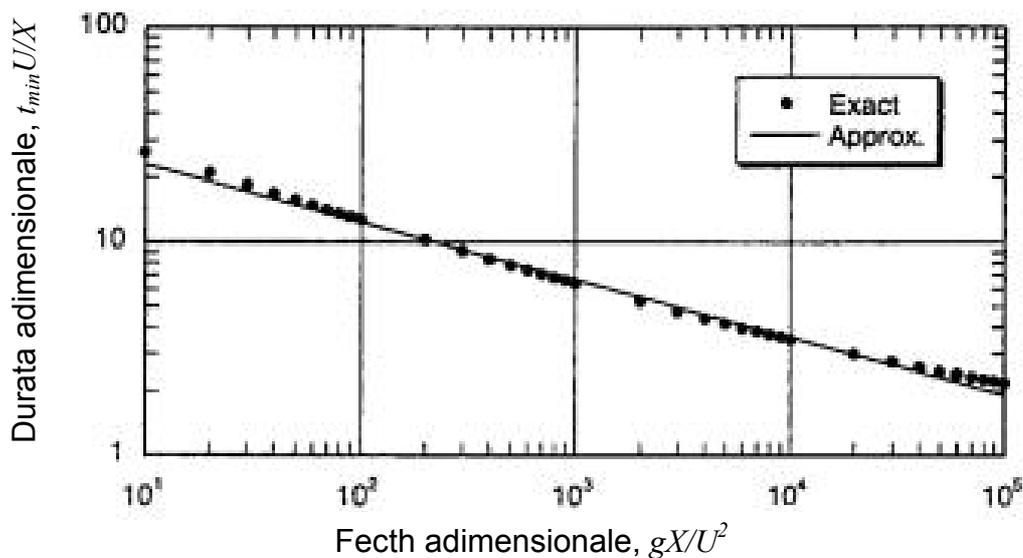


Figura 9.17. Misura della minima durata t_{min} in funzione della lunghezza del *fetch* (grafico in forma adimensionale).

Nello stesso grafico è anche riportata l'espressione approssimata:

$$\frac{t_{min}U}{X} = 43 \left(\frac{gX}{U^2} \right)^{-0.27} \quad (9.98)$$

Anche se come si vede dalla citata Figura 9.17 rimangono differenze di qualche percentuale tra la soluzione esatta e la formula approssimata (9.98), poiché la previsione dell'altezza e del periodo d'onda è poco sensibile a piccole variazioni nella durata minima, l'equazione (9.98) può essere ragionevolmente utilizzata nelle normali applicazioni ingegneristiche. In dette applicazioni risulta anzi più comodo esprimere la durata minima in ore e la lunghezza del *fetch* in chilometri, mantenendo invece la velocità del vento in (m/s). In queste condizioni la precedente si può esprimere nella forma:

$$t_{min} = X^{0.73} U^{-0.46} \quad (9.98 \text{ bis})$$

Alternativamente può anche calcolarsi il minimo *fetch* X_{min} (in km) necessario per la crescita completa per un fenomeno ventoso di durata t (in ore):

$$X_{min} = t^{1.37} U^{0.63} \quad (9.98 \text{ ter})$$

Le curve di previsione di H_s e T_s (9.96) e (9.97), così come le (9.96bis) e (9.97bis) e le (9.96ter) e (9.97ter), essendo funzioni del solo parametro del *fetch* gX/U^2 , sono valide in regime stazionario, ossia per $t > t_{min}$, essendo t_{min} fornito dall'eq. (9.98). Quando $t < t_{min}$ bisogna calcolare un *fetch* equivalente (o efficace) minore di quello effettivo. Se invece gX/U_{min}^2 è

sufficientemente grande (condizione piuttosto difficile da realizzare in pratica) si ha il regime di mare completamente sviluppato, in cui le equazioni. (9.94) e (9.95) diventano rispettivamente:

$$\frac{gH_s}{U^2} = 0.283 \quad (9.99)$$

$$\frac{gT_s}{2\pi U} = 1.2 \quad (9.100)$$

In definitiva, qualunque ingegnere che intendesse predire l'altezza e il periodo di un'onda a partire da dati di vento (ossia conoscendone la velocità U , la durata t e la lunghezza X del *fetch*) con i metodi approssimati in questione può adottare la seguente procedura:

- i)** si calcola il *fetch* minimo attraverso la relazione $X_{min} = t^{1.37} U^{0.63}$;
- ii)** se $X > X_{min}$, allora la crescita del moto ondoso è limitata dalla durata. Pertanto basta

utilizzare X_{min} nell'applicazione delle relazioni $\frac{gH_s}{U^2} = 0.3 \left\{ 1 - \left[1 + 0.004 \left(\frac{gX_{min}}{U^2} \right)^{1/2} \right]^{-2} \right\}$ e

$$\frac{gT_s}{2\pi U} = 1.37 \left\{ 1 - \left[1 + 0.008 \left(\frac{gX_{min}}{U^2} \right)^{1/3} \right]^{-5} \right\}$$

- iii)** se $X < X_{min}$, allora la crescita del moto ondoso è limitata dal *fetch*. Pertanto basta

utilizzare X nell'applicazione delle relazioni $\frac{gH_s}{U^2} = 0.3 \left\{ 1 - \left[1 + 0.004 \left(\frac{gX}{U^2} \right)^{1/2} \right]^{-2} \right\}$ e

$$\frac{gT_s}{2\pi U} = 1.37 \left\{ 1 - \left[1 + 0.008 \left(\frac{gX}{U^2} \right)^{1/3} \right]^{-5} \right\}$$

Esempio:

Caso 1: Dati $U=20\text{m/s}$, $X=120\text{km}$ e $t=10\text{h}$, dall'equazione $X_{min} = t^{1.37} U^{0.63}$ si ricava $X_{min} = 154.8\text{km}$. Poiché $X < X_{min}$ allora bisogna utilizzare proprio $X=120\text{km}$. Ciò implica: $H_s=4.0\text{m}$ e $T_s=7.4\text{s}$.

Caso 2: Dati $U=25\text{m/s}$, $X=350\text{km}$ e $t=15\text{h}$, dall'equazione $X_{min} = t^{1.37} U^{0.63}$ si ricava $X_{min} = 310.4\text{km}$. Poiché $X > X_{min}$ allora bisogna utilizzare proprio $X_{min}=310.4\text{km}$. Ciò implica: $H_s=7.4\text{m}$ e $T_s=10.3\text{s}$.

Alternativamente è possibile utilizzare una procedura grafica. Infatti, dalle eqq.(9.96) e (9.97) è stato ricavato un abaco (vedere Figura 9.18), attraverso il quale si possono determinare H_s e T_s conoscendo U , t ed X .

Per individuare il regime del moto ondoso bisogna intersecare la retta orizzontale $U=U^*$ con la retta verticale $X=x^*$. In corrispondenza dell'intersezione di tali due rette passa la retta tratteggiata $t=t_{min}$ che indica la durata minima dell'evento affinché il regime sia stazionario. Se $t < t_{min}$ allora il regime è transitorio ed il mare è limitato per durata. In tal caso si calcola un *fetch* efficace x_e attraverso l'intersezione della retta orizzontale $U=U^*$ con la retta tratteggiata $t=t^*$,

ottenuto il quale si cercano le curve $H_s = \text{cost}$ e $T_s = \text{cost}$ che passano per l'intersezione della retta orizzontale $U = U^*$ con la retta verticale $X = x^*$.

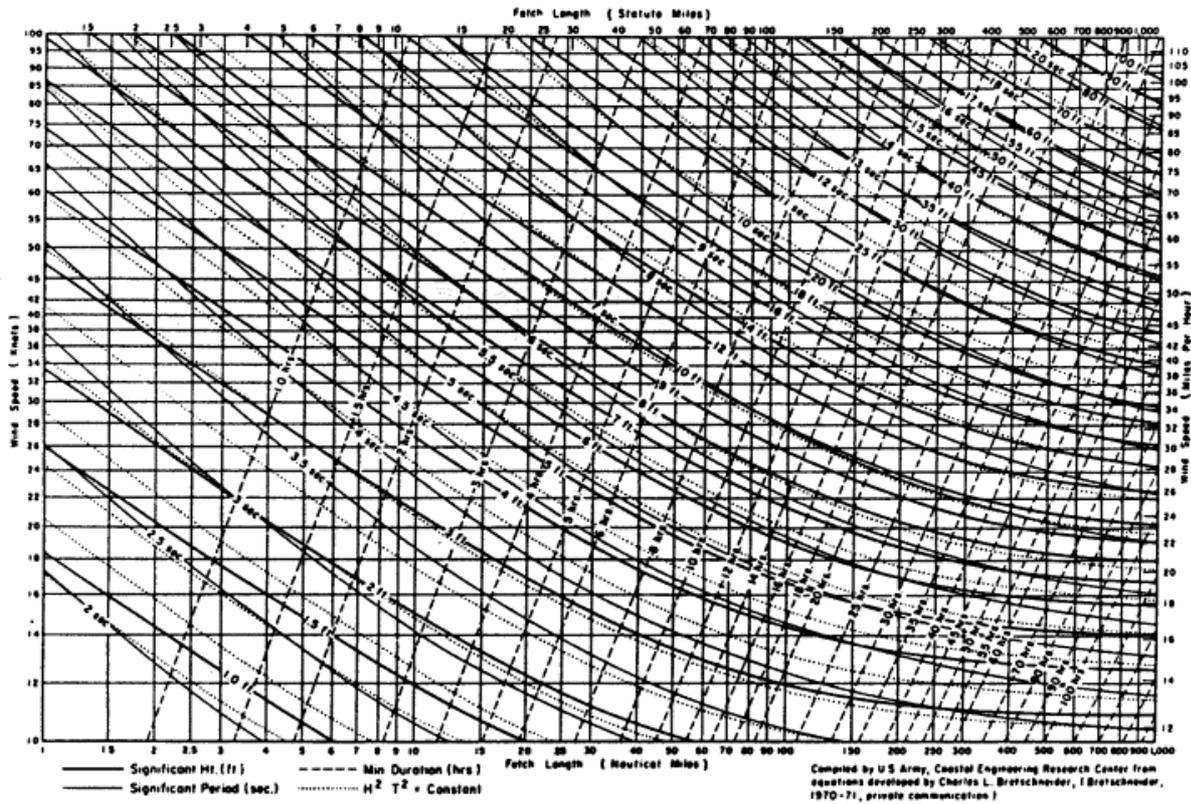


Figura 9.18. Abaco per il calcolo dell'altezza e del periodo significativi secondo il metodo *SMB*.

Esempio:

Caso 1: siano dati i seguenti valori di velocità del vento, di lunghezza del fetch e di durata dell'evento eolico: $U = 35 Kn$. $x = 60 n.m.$ $t = 10 h$. Intersecando la retta orizzontale $U = 35 Kn$. con la retta verticale $X = 60 n.m.$ si ottiene $6h < t_{min} < 7h$. Poiché risulta $t > t_{min}$ ci si trova in condizioni di regime stazionario (mare limitato per fetch). Pertanto dall'intersezione $U = 35 Kn$. con $x = 60 n.m.$ si ottiene $H_s \approx 11 ft \approx 3.3 m$ e $T_s \approx 7.3 s$

Caso 2: siano dati i seguenti valori di velocità del vento, di lunghezza del fetch e di durata dell'evento eolico: $U = 35 Kn$. $F = 200 n.m.$ $t = 10 h$. Intersecando la retta orizzontale $U = 35 Kn$ con la retta verticale $X = 200 n.m.$ si ottiene $t_{min} = 18h$, ossia $t < t_{min}$ e pertanto ci si trova in regime transitorio (mare limitato per durata). Bisogna quindi far valere un fetch inferiore rispetto a quello disponibile e pertanto dall'intersezione $U = 35 Kn$. con $t = 10 h$ si ottiene $H_s \approx 13 ft \approx 4.0 m$ $T_s = 9.0 s$.

9.6.I dati disponibili

In Italia i dati ondametrici vengono forniti dal Servizio Idrografico e Mareografico Nazionale (S.I.M.N.) che, come illustrato nel capitolo 4, gestisce la R.O.N. (Rete Ondametrica

Nazionale). Tali dati sono disponibili sotto forma di bollettini trimestrali sia in formato cartaceo che in formato numerico, pubblicati sul sito web <http://www.dstn.it/simn/>.



Figura 9.19. Boe Ondametriche della Rete Ondametrica Nazionale

I dati forniti dalle boe delle R.O.N. sono suddivisi in :

- Tabulati dei dati elaborati nel trimestre (registrazioni triorarie giornaliere dell'altezza d'onda significativa H_s , periodo di picco T_s e direzione media di propagazione D_m);
- Serie temporali dei parametri ondosi (stessi parametri di prima, mostrati in forma grafica, insieme alla serie dei periodi medi T_m)
- Serie temporale dell'altezza d'onda significativa per tutte le stazioni (analogo al precedente, ma come un'overview per tutte le stazioni contemporaneamente)
- Analisi spettrale trioraria per H_s superiori a valori di soglia prefissati
- Analisi spettrale per dati rilevati in continuo per H_s superiori a valori di soglia prefissati

Nelle Figure che seguono vengono riportati degli esempi delle serie temporali e delle analisi spettrali sopra menzionate.

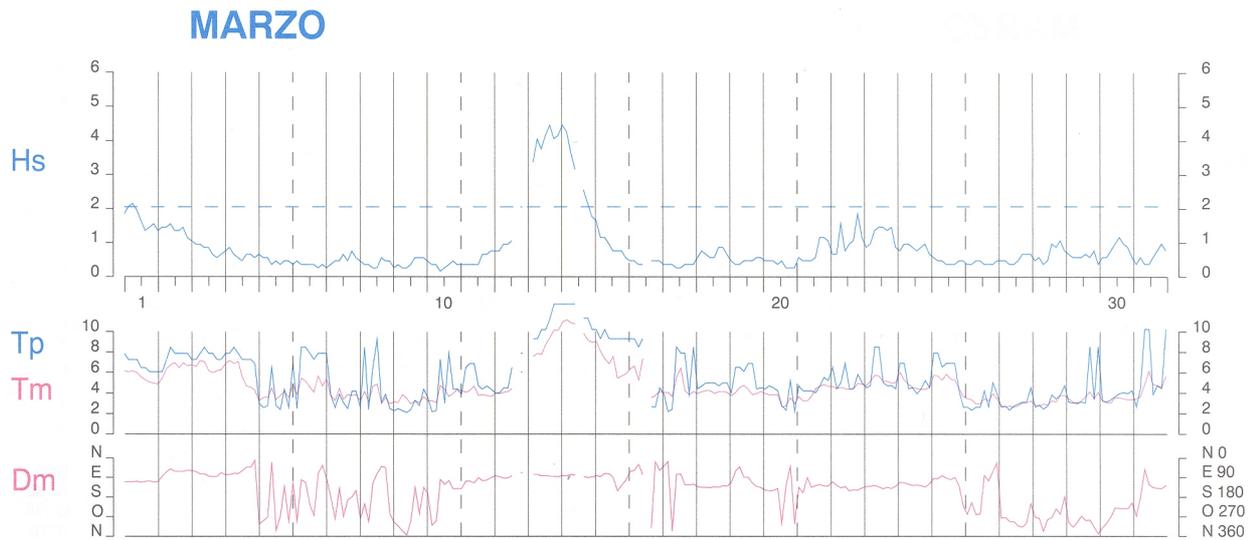


Figura 9.20. Serie temporale dei parametri del moto ondoso registrati nel marzo 1995 alla stazione di Catania.

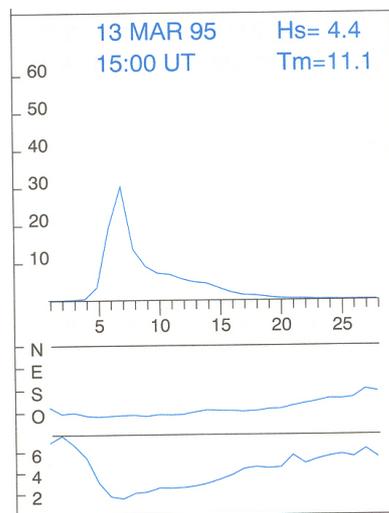


Figura 9.21. Analisi spettrale trioraria per H_s superiori a valori di soglia prefissati, effettuata nel marzo 1995 alla stazione di Catania.

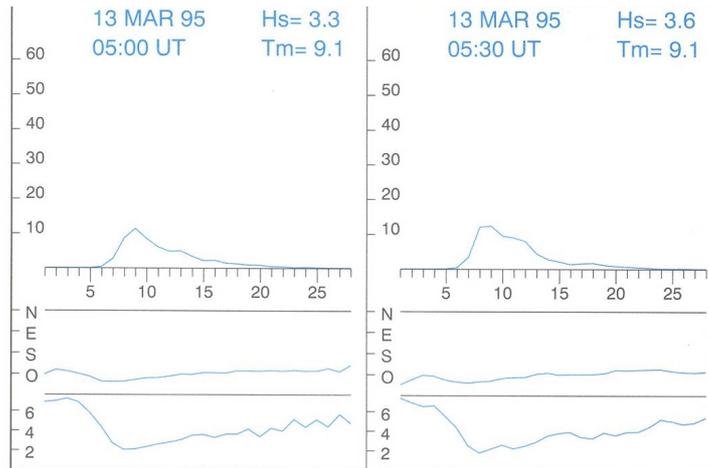


Figura 9.22. Analisi spettrale per dati rilevati in continuo per H_s superiori a valori di soglia prefissati, effettuata nel marzo 1995 alla stazione di Catania.

9.7. Trasposizione geografica di dati ondametrici

Come si evince dalla Figura 9.19, solo una parte limitata delle coste italiane è sufficientemente vicina ad uno degli ondometri RON da permettere l'impiego diretto dei dati registrati da boa. Ai fini pratici, molto più frequente è la situazione in cui il sito di interesse, pur ricadendo nella stessa area geografica dell'ondametro di interesse, è spesso situato in una posizione decentrata rispetto al tratto di mare "sotteso" dall'ondametro stesso. In tale situazione si deve ricorrere ad un metodo che consenta di "trasporre" geograficamente le misure ondametriche dal punto di misura a quello di interesse.

L'ipotesi alla base della metodologia illustrata nel seguito consiste nel supporre che le stesse condizioni di vento (velocità e direzione), che hanno determinato le caratteristiche del moto ondoso registrate dall'ondametro, abbiano interessato anche l'area di generazione situata al largo del sito di interesse. Ulteriore ipotesi è che le aree di generazione del moto ondoso possano essere descritte attraverso il concetto di "fetch efficace". Il metodo consiste nel determinare la corrispondenza tra le direzioni, le altezze ed i periodi del moto ondoso relativi al punto di misura e a quello di interesse. È opportuno sottolineare come normalmente il metodo ha validità soprattutto per le mareggiate molto intense.

Nel caso di fetch limitati, si possono considerare le seguenti leggi che permettono di calcolare l'altezza d'onda significativa spettrale H_s e il periodo di picco spettrale T_s in funzione della lunghezza del fetch e della velocità del vento:

$$\frac{gH_s}{U^2} = 1.6 \cdot 10^{-3} \left| \frac{gX}{U} \right|^{\frac{1}{2}} \quad (9.101)$$

$$\frac{gT_s}{U^2} = 2.857 \cdot 10^{-1} \left| \frac{gX}{U} \right|^{\frac{1}{3}} \quad (9.102)$$

Indicando con gli apici O e P rispettivamente le grandezze relative al punto di misura ed al punto di trasposizione, e fissata una direzione geografica (direzione media da cui spira il vento) alla quale risultano associati i fetch efficaci X^P e X^O , le precedenti relazioni permettono di

stabilire la ricercata corrispondenza tra le altezze ed i periodi delle onde relative al punto O e al punto P :

$$\frac{H_s^P}{H_s^O} = \left| \frac{X^P}{X^O} \right|^{\frac{1}{2}} \quad (9.103)$$

$$\frac{T_s^P}{T_s^O} = \left| \frac{X^P}{X^O} \right|^{\frac{1}{3}} \quad (9.104)$$

Per ottenere le precedenti relazioni si deve ovviamente supporre che il fattore limitante degli eventi sia il fetch e non la durata del vento (ipotesi spesso ragionevole per l'analisi degli eventi estremi, ma meno per lo studio dell'azione medie) e che la velocità del vento sia la stessa nel punto di misura e in quello di interesse.

9.8. Il concetto di mareggiata

La mareggiata può essere vista come una successione di stati di mare durante la quale l'altezza significativa cresce gradualmente dai valori caratteristici di calma, sino ad un massimo, per poi ritornare, sempre gradualmente, alla calma.

La mareggiata può essere intesa come la storia dell'evolversi dell'altezza significativa (vedere Figura 9.23). Caso per caso si può definire un'altezza di calma rispetto alla quale valutare la mareggiata

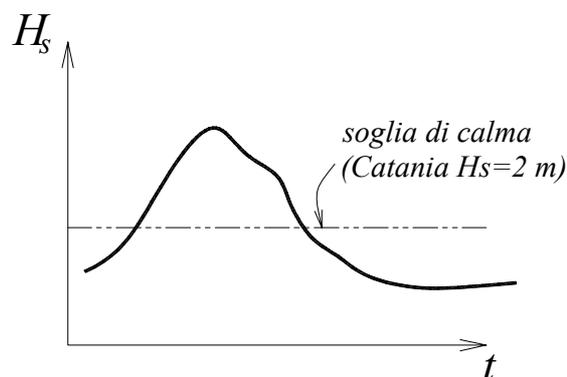


Figura 9.23. Schematizzazione dell'andamento dell'altezza significativa durante una mareggiata.

Come già detto, le boe accelerometriche, che misurano a determinati intervalli di campionamento Δt (3h), quando si supera il valore di soglia (che nel caso di Catania è fissato pari a $H_s=2\text{m}$) cominciano a registrare in continuo. I risultati delle registrazioni vengono poi messi in grafico su intervalli di riferimento mensili ricavando grafici del tipo di quello schematizzato in Figura 9.24.

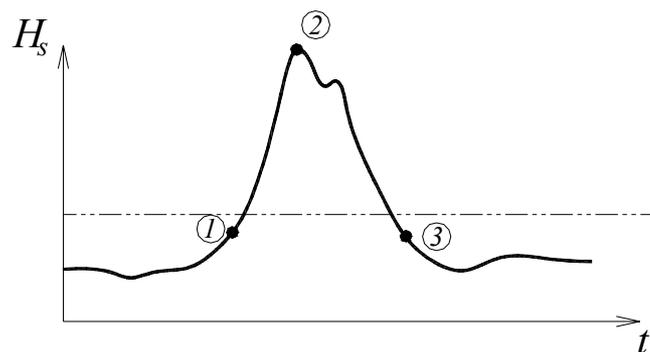


Figura 9.24. Esempio di andamento mensile dell'altezza significativa rilevata da una boa accelerometrica.

Gli spettri corrispondenti sono riportati nella figura seguente. Si noti come al crescere dell'altezza significativa cresce l'area dello spettro (aumenta l'energia!)

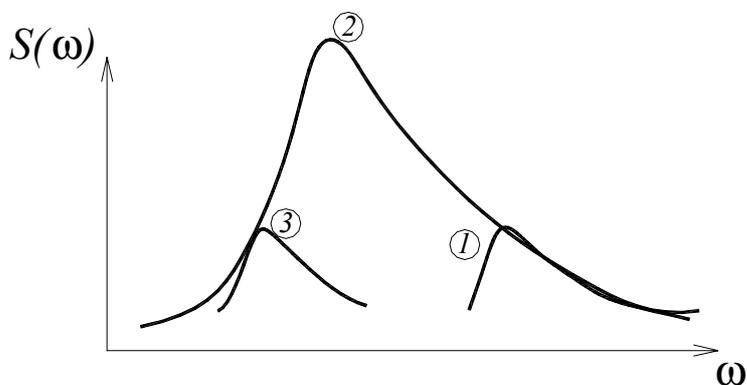


Figura 9.25. Schematizzazione degli spettri relativi alle situazioni rappresentate in Figura 9.24.

Con riferimento alla Figura 9.25, si noti come lo spettro:

- i) venga generato alle alte frequenze;
- ii) si espanda alle basse frequenze mantenendo sempre la tipica forma a campana asimmetrica;
- iii) si mantenga alle basse frequenze (onde lunghe in assenza di vento).

Se il vento, anziché cessare forzando quindi la situazione indicata come (3), modifica le proprie caratteristiche (esempio, direzione), si ricomincia dalla situazione indicata nella citata Figura 9.25 come (1).

Quindi, le onde lunghe possono nascere sia per propagazione di mareggiate realizzatisi in zone diverse da quella in esame (delle quali arrivano solo le componenti a bassa frequenza), sia come “coda” di mareggiate locali.

Da precisare infine come le onde lunghe, in genere, non superino le onde di vento, tranne che in casi di amplissimi *fetch* (come nell'Oceano Pacifico) e non presentino spettri “stretti”.

9.8.1. Costruzione di una mareggiata su profondità infinita a partire dai dati di vento e di *fetch*

Una mareggiata può essere considerata una successione continua di stati di mare. Essa può essere costruita in modo indiretto, ossia a partire da dati di vento, una volta che siano noti il fetch X e la successione delle velocità del vento U (a 10 m s.l.m.m.), relativa ad uguali Δt di tempo. Le ipotesi assunte alla base del metodo di seguito descritto sono:

- che ogni intervallo di tempo Δt si riferisca a ciascun stato di mare;
- che per tutta la durata della mareggiata la direzione del vento si mantenga sensibilmente costante.

I modelli di previsione fanno riferimento a singoli stati di mare tra loro disaccoppiati che invece, in una mareggiata, devono essere accoppiati nel caso in cui si riferisca ad una generazione in regime transitorio, come peraltro avviene usualmente per i primi stati caratterizzanti la mareggiata. Tale accoppiamento può avvenire secondo lo schema di seguito riportato:

Stato di mare 1

- velocità: U_1 ;
- durata: $t_1 = \Delta t$;
- durata per la generazione in regime stazionario: t_{m1} ;
- generazione in regime stazionario se $gt_1/U_1 > gt_{m1}/U_1$;
- generazione in regime transitorio se $gt_1/U_1 < gt_{m1}/U_1$: determinazione del fetch ridotto X_{m1} ;
- valutazione di H_{s1} e, quindi, di T_{s1} ;

Stato di mare 2

- velocità: U_2 ;
- durata: $t_2 = t_1' + \Delta t$ essendo t_1' la durata dello stato di mare 1 che con la velocità U_2 corrisponde alla densità di energia E_1 , in formule: $t_1' = t_1 (U_1/U_2)^{1.67}$ ². Così facendo, operiamo

² Si consideri il parametro del fetch

$$\frac{gX}{U^2} = 0.00175 \left(\frac{gt}{U} \right)^{1.5}$$

caratterizziamolo per U_1 , T_1 e U_2 , t_1'

$$\begin{cases} \frac{gX}{U_1^2} = 0.00175 \left(\frac{gt_1}{U_1} \right)^{1.5} \Rightarrow X = f(t_1, U_1) \\ \frac{gX}{U_2^2} = 0.00175 \left(\frac{gt_1'}{U_2} \right)^{1.5} \Rightarrow X = f(t_1', U_2) \end{cases}$$

poiché per regime stazionario si ha

$$\frac{gH_s}{U^2} = 0.0016 \left(\frac{gX}{U^2} \right)^{0.5}$$

ne segue che ricavando X e uguagliando le energie corrispondenti ai due stati di mare si può scrivere

$$\begin{cases} \frac{gH_{s1}}{U_1^2} = 0.0016 \left(\frac{0.00175 g^{1.5} t_1^{1.5}}{U_1^{2.5}} \right)^{0.5} \\ \frac{gH_{s1}}{U_2^2} = 0.0016 \left(\frac{0.00175 g^{1.5} t_1'^{1.5}}{U_2^{2.5}} \right)^{0.5} \end{cases}$$

da cui si ha che

considerando il secondo stato di mare disaccoppiato dal primo, ma ad esso associato tramite una durata incrementata che tenga conto del fatto che lo stato di mare 2 parte da una velocità U_1 .

- durata per la generazione in regime stazionario: t_{m2} ;
- generazione in regime stazionario se $gt_2/U_2 > gt_{m2}/U_2$;
- generazione in regime transitorio se $gt_2/U_2 < gt_{m2}/U_2$: determinazione del fetch ridotto X_{m2} ;
- valutazione di H_{s2} e, quindi, di T_{s2} ;

Stato di mare i -esimo

- velocità: U_i ;
- durata: $t_i = t_{i-1}' + \Delta t$ essendo t_{i-1}' la durata dello stato di mare 1 che con la velocità U_2 corrisponde alla densità di energia E_1 , in formule: $t_{i-1}' = t_{i-1} (U_{i-1}/U_i)^{1.67}$;
- durata per la generazione in regime stazionario: t_{mi} ;
- generazione in regime stazionario se $gt_i/U_i > gt_{mi}/U_i$;
- generazione in regime transitorio se $gt_i/U_i < gt_{mi}/U_i$: determinazione del fetch ridotto X_{mi} ;
- valutazione di H_{si} e, quindi, di T_{si} ;

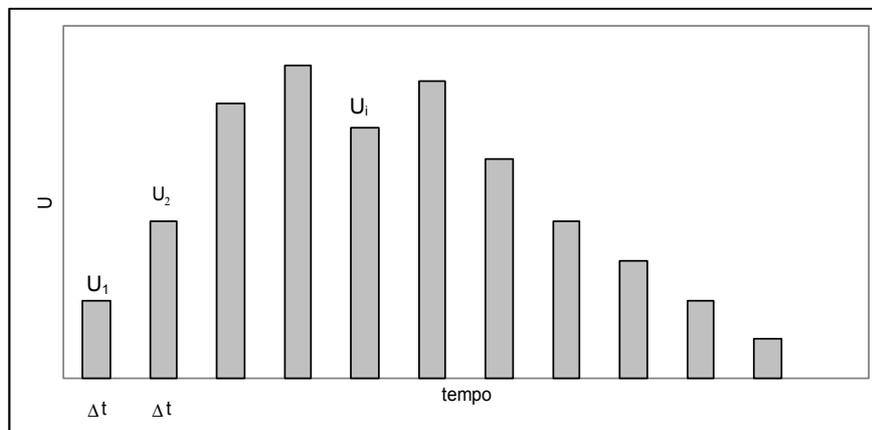


Figura 9.26. Schematizzazione della successione degli stati di mare in una mareggiata.

9.9. Analisi di eventi estremi per la previsione “a lungo termine”

L'onda di progetto è spesso rappresentata da una particolare onda significativa. Tuttavia, l'onda significativa è una variabile casuale; essa infatti varia oltre che in funzione del paraggio, anche in funzione del tempo.

Se in un determinato sito bisogna realizzare una opera costiera, partendo dall'ipotesi di poter disporre di una serie pluriennale di dati di altezze d'onda, la domanda a cui bisogna poter rispondere è la seguente: Come si determina l'onda di progetto, ossia l'onda in base alla quale vanno effettuate tutte le verifiche idrauliche e strutturali?

L'analisi di eventi estremi, talvolta anche menzionata come previsione a lungo termine, risponde a tale domanda. Essa infatti, partendo dall'importanza della struttura (quello che nella letteratura

$$t_1' = \left(\frac{U_1}{U_2} \right)^{1.67} t_1$$

anglosassone si definisce come “design level”) e dall’analisi statistica di serie di dati di lungo periodo permette di ottenere l’altezza d’onda di progetto.

9.9.1. Periodo di ritorno e probabilità di incontro

L’importanza della struttura che si vuole progettare viene rappresentata attraverso il periodo di ritorno, ovvero dalla probabilità di incontro.

Per quanto concerne il periodo di ritorno, conviene anzitutto introdurre le seguenti grandezze:

- X altezza significativa (che, per quanto anzi detto, è una variabile casuale);
- x realizzazione di X .
- $F(x)$ funzione di distribuzione di probabilità cumulata: $F(x) = Prob\{X \leq x\}$.
- t numero di anni di osservazione di X .
- n Numero di osservazioni in un periodo t .
- λ Intensità: $\lambda = n/t$;

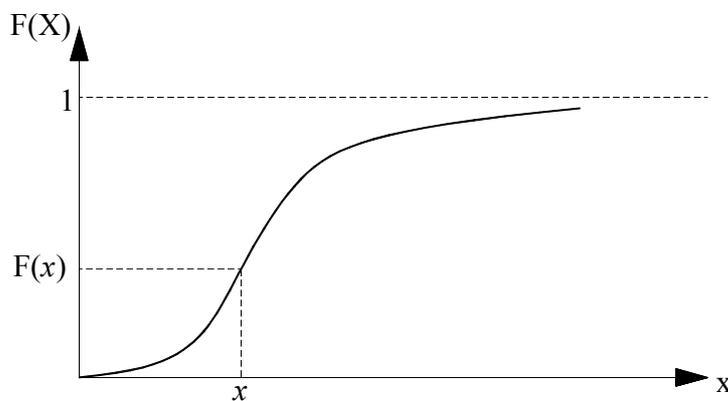


Figura 9.27. Distribuzione di probabilità cumulata.

La Figura 9.27 illustra la distribuzione di probabilità cumulata di X . Pertanto la probabilità di non superamento di x è $F(x)$, mentre la probabilità di superamento è $(1-F(X))$. In altre parole, $(1-F(X))$ indica la probabilità con cui un’altezza significativa sarà più grande di x .

Se si assume che il numero di anni di osservazione sia n , il numero di evenienze su tutta la serie osservata in cui $(X > x)$ è dato da:

$$k = n(1-F(X)) = t\lambda(1-F(X)) \quad (9.105)$$

Da ciò segue la definizione di periodo di ritorno come:

$$T = \frac{1}{\lambda(1-F(x))} \quad (9.106)$$

ossia quel periodo di tempo T espresso in anni in cui l’evento x (cioè, l’altezza significativa x) viene mediamente superato una sola volta.

Per quanto riguarda la probabilità di incontro, sulla base di quanto sopra detto, cioè sulla base del fatto che x viene superato mediamente una volta ogni T anni, ne segue che la probabilità di superamento di x in un anno è pari a $1/T$. Pertanto:

- la probabilità di non superamento in 1 anno è: $Prob\{X \leq x\} = 1 - \frac{1}{T}$
- la probabilità di non superamento in 2 anni è: $Prob\{X \leq x\} = \left(1 - \frac{1}{T}\right)^2$
- la probabilità di non superamento in L anni è: $Prob\{X \leq x\} = \left(1 - \frac{1}{T}\right)^L$

da cui ne segue che la probabilità di incontro, cioè la probabilità di superamento di x in un tempo di vita della struttura pari a L anni, è:

$$p = 1 - \left(1 - \frac{1}{T}\right)^L \quad (9.107)$$

che, in caso di T molto grandi, può essere approssimato nella seguente espressione:

$$p = 1 - \exp\left(-\frac{L}{T}\right) \quad (9.108)$$

Da tutto quanto sopra si ricava che ai fini progettuali, la scelta di un'onda di progetto si effettua determinando l'altezza dell'onda significativa che corrisponde ad un periodo di ritorno prefissato. Per esempio, se l'onda di progetto che corrisponde ad un periodo di ritorno di 100 anni è di 10 m, ciò significa che, in media, l'altezza d'onda di 10m sarà superata una volta ogni 100 anni.

In effetti, nella progettazione di opere, bisogna anche tenere conto del concetto di affidabilità, pertanto risulta più appropriato riferirsi alla probabilità di incontro, ossia alla probabilità di superamento dell'onda di progetto nel periodo di vita utile della struttura. Da ciò ne segue che, se la vita utile della struttura è $L=25$ anni, la probabilità di incontro dell'onda di progetto di 10 m è:

$$p = 1 - \left(1 - \frac{1}{T}\right)^L = 22\%$$

Questo significa che l'onda di progetto di 10 m ha una probabilità del 22% di essere superata nel periodo di vita utile dell'opera pari a 25 anni.

E' opportuno ricordare che le norme (vedere le Istruzioni Tecniche per la Progettazione delle Dighe Marittime del Ministero dei LL.PP.) fissano in base al tipo di struttura sia la vita di progetto della struttura " L " sia il rischio sostenibile. Più precisamente, per ogni opera marittima si valuterà la durata di vita presunta, in relazione al progetto in cui è inserita, tenuto conto delle sue caratteristiche funzionali.

Si valuterà, inoltre, *il livello di rischio o probabilità di superamento dell'onda di progetto*, tenuto conto dei danni che tali onde possono arrecare all'opera e della possibilità di ripristinare la normale funzionalità con operazioni di manutenzione.

Si consigliano i valori riportati nelle seguenti tabelle.

Tabella 9.II. Durata minima di vita per opere o strutture (T_v).

Tipo dell'opera	Livello di sicurezza richiesto		
	1	2	3
	Vita di progetto (anni)		
Infrastrutture di uso generale	25	50	100
Infrastrutture ad uso specifico	15	25	50

Per infrastrutture di uso generale si intendono opere di difesa di complessi civili, commerciali e industriali, che non siano destinati ad uno specifico.

Per infrastrutture ad uso specifico si intendono le opere di difesa di singole installazioni industriali, di porti industriali, di depositi o piattaforme di carico e scarico, di piattaforme petrolifere, ecc.

Il livello di sicurezza 1 si riferisce ad opere ed installazioni di interesse locale ed ausiliario, comportanti un rischio minimo di perdita di vite umane e di danni ambientali in caso di collasso della stessa (difese costiere, opere in porti minori o marina, scarichi a mare, strade litoranee, ecc...).

Il livello di sicurezza 2 si riferisce ad opere ed installazioni di interesse generale, comportanti un moderato rischio di perdita di vite umane e di danni ambientali in caso di collasso dell'opera (opere di grandi porti, scarichi a mare di grandi città, ecc...).

Il livello di sicurezza 3 si riferisce ad opere ed installazioni per la protezione dall'inondazione, opere di interesse sopranazionale, comportanti un elevato rischio di perdita di vite umane o di danno ambientale in caso di collasso della stessa (difese di centri urbani e industriali, ecc...).

Bisogna anche valutare la probabilità di danneggiamento della struttura. Si assumeranno le probabilità corrispondenti al danneggiamento incipiente o alla distruzione totale in relazione alle deformazioni-modificazioni subite dall'opera in caso di danneggiamento ed alla difficoltà di riparare il danno subito.

Per strutture rigide (dighe a parete verticale), per le quali è estremamente difficile riparare il danno, si assume la probabilità di distruzione totale.

Per strutture flessibili o comunque per opere riparabili, si assume la probabilità corrispondente al danneggiamento incipiente inteso come il livello di danneggiamento predefinito in relazione al tipo di struttura, al di sopra del quale il danno è apprezzabile e risulta necessario intervenire con lavori di manutenzione.

Tabella 9.III. Massima probabilità di danneggiamento ammissibile nel periodo operativo dell'opera.

Danneggiamento incipiente	Rischio per la vita umana	
	Limitato	Elevato
<i>Ripercussione economica</i>		
Bassa	0.50	0.30
Media	0.30	0.20

Alta	0.25	0.15
Distruzione totale	Rischio per la vita umana	
<i>Ripercussione economica</i>	<i>Limitato</i>	<i>Elevato</i>
Bassa	0.20	0.15
Media	0.15	0.10
Alta	0.10	0.05

In relazione a questo tempo di ritorno, dalla statistica degli eventi estremi, si desumerà l'altezza d'onda di progetto, e dalla statistica altezza-periodo, il periodo di questa.

L'onda così valutata ha approssimativamente la probabilità P_f (detta anche probabilità di incontro) di essere superata nell'arco di vita dell'opera. In relazione a questa intensità della sollecitazione ondosa, si sceglierà il valore caratteristico della altezza d'onda come specificato nel seguito caso per caso; valore in relazione al quale dovranno essere assunti nei calcoli ulteriori margini di sicurezza, che assicurino una probabilità di danneggiamento dell'opera effettivamente prossima a P_f .

Tutto ciò deriva dalla incertezza:

- i) delle caratteristiche stimate dell'onda di progetto;
- ii) della intensità della sollecitazione effettiva per data onda sollecitante, cioè del modello;
- iii) dell'azione ondosa utilizzata nei calcoli;
- iv) del comportamento dell'opera e della fondazione, cioè dei modelli di verifica strutturale e geotecnica utilizzati.

Per queste opere si deve comunque verificare anche lo scenario di rovina totale, cioè del superamento di un livello di danneggiamento predefinito in relazione al tipo di struttura, al di sopra del quale l'opera cessa di svolgere un'apprezzabile funzione protettiva.

Per rischio limitato per la vita umana si intendono i casi in cui, a seguito del danneggiamento, non è logico prevedere alcuna perdita di vite umane. Quando queste perdite sono preventivabili, il rischio è elevato.

Per ripercussione economica bassa, media ed alta si intendono casi in cui il rapporto fra i costi diretti del danneggiamento, sommati a quelli indiretti dovuti alla perdita di funzionalità delle opere protette ed il costo totale per la realizzazione dell'opera è minore di 5, è compreso fra 5 e 20, è maggiore di 20.

La combinazione del tempo di vita dell'opera T_v e della probabilità di danneggiamento P_f determina il tempo di ritorno dell'evento di progetto T_{rp} :

$$T_{rp} = \frac{T_v}{-\ln(1-P_f)} \quad (9.109)$$

Da quanto detto se ne evince che nella pratica ingegneristica risulta spesso necessario determinare una altezza d'onda significativa che corrisponda ad un fissato tempo di ritorno. La procedura per realizzare questo obiettivo può essere la seguente:

- Scelta di un insieme di dati relativi ad eventi estremi sulla base di rilievi di lungo periodo;

- Scelta di distribuzioni di probabilità teoriche per descrivere la distribuzione degli eventi estremi
- Interpolazione dei dati estremi (ad esempio, con il metodo dei minimi quadrati, utilizzando un'appropriata formula per il posizionamento del "plotting point");
- Scelta di una distribuzione teorica tra quelle preselezionate sulla base della bontà di adattamento con i dati;
- Calcolo dell'altezza dell'onda di progetto sulla base del tempo di ritorno fissato;
- Determinazione dell'intervallo di confidenza dell'onda di progetto, allo scopo di poter tenere conto della variabilità del campione, degli errori di misura e di altre incertezze.

Ovviamente, se viene assegnata la vita utile dell'opera e la probabilità di incontro, allora bisogna da queste determinare il tempo di ritorno e poi procedere secondo la procedura sopra rappresentata.

Per quanto riguarda la scelta dei dati, nella pratica, si può fare riferimento a tre tipologie di dati. E precisamente:

- Data set completo: rilievi diretti contenenti tutte le altezze d'onda ugualmente spaziate nel tempo e rilevate nel lungo periodo;
- Data set annuale: consistente nella serie dei massimi annuali delle altezze d'onda;
- Data set parziali: composti dalla serie delle altezze d'onda massime in ogni singola mareggiata, che abbiano ecceduto un determinato valore di soglia (noto anche come metodo POT, acronimo di Peak Over Threshold il cui significato emerge anche da quanto rappresentato in Figura 9.28, dalla quale si evince come il massimo annuale può coincidere o meno con il valore sopra soglia).

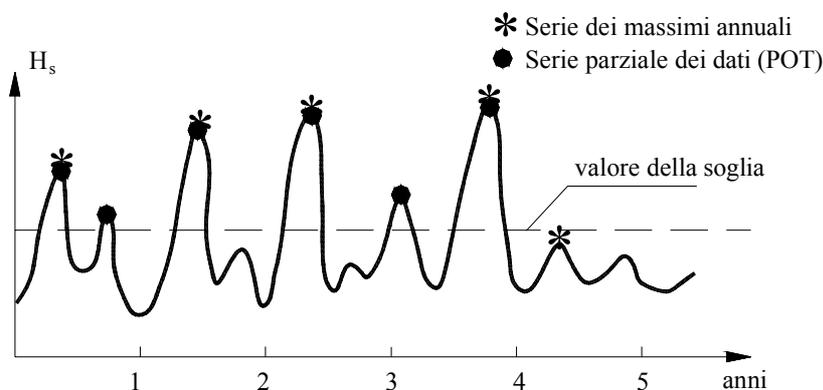


Figura 9.28. Applicazione del metodo Peak Over Threshold a una serie di dati di altezze d'onda.

L'insieme dei dati di valori estremi deve garantire le seguenti tre condizioni:

- i) Indipendenza: E' necessario che i dati relativi agli eventi estremi non siano tra loro correlati. Ovviamente questa condizione è immediatamente verificata dai data set annuali e da quelli parziali poiché riportano onde di mareggiate diverse. Tale condizione non è invece spesso verificata dal data set completo che, per questo motivo, è raramente utilizzato nelle pratiche applicazioni.

- ii) Omogeneità: L'insieme di dati deve riferirsi alla stessa popolazione statistica (tutte le onde estreme, ad esempio, devono riferirsi ad onde di vento);
- iii) Stazionarietà: Deve essere verificata l'ipotesi di stazionarietà di lungo periodo. Tale ipotesi sebbene spesso contraddetta dalle misure dirette che, spesso, mostrano tendenze climatologiche variabili, può essere certamente assunta come sempre verificata a fini pratici, anche perché le variazioni climatologiche di lungo periodo dovrebbero essere deboli rispetto al fenomeno in studio.

In definitiva, i set di dati usualmente impiegati a fini applicativi sono quello dei massimi annuali, oppure quello derivante dal metodo POT. Tuttavia nella pratica spesso si preferisce utilizzare questo ultimo insieme di dati poiché fornisce onde maggiori e, quindi, permette di realizzare opere, a parità di tempo di ritorno, più importanti e più affidabili.

9.9.2. Adattamento di una distribuzione di probabilità a una serie di dati

Per quanto concerne la scelta delle distribuzioni teoriche, usualmente essa ricade tra la distribuzione di Weibull, di Gumbel, e la Log-normale. In formule:

$$\text{Weibull} \quad F = F(x) = P(X < x) = 1 - e^{-\left(\frac{x-B}{A}\right)^k} \quad (9.110)$$

$$\text{Gumbel} \quad F = F(x) = P(X < x) = 1 - e^{-e^{\left(\frac{x-B}{A}\right)}} \quad (9.111)$$

$$\text{Log-normale} \quad F = F(x) = P(X < x) = \Phi\left(\frac{\ln(x) - B}{A}\right) \quad (9.112)$$

In cui:

- X indica un'altezza d'onda caratteristica, come l'altezza significativa o l'altezza un decimo o anche l'altezza massima, a seconda dell'insieme di dati disponibili;
- x realizzazione X ;
- F probabilità di non superamento di x (frequenza cumulata);
- A, B, k parametri della distribuzione che devono essere determinati sulla base del set di dati (nel caso della Log-normale A e B rappresentano, rispettivamente, la deviazione standard e la media).
- Φ Distribuzione di probabilità normale.

Non vi è nessuna giustificazione teorica che porti a privilegiare una funzione piuttosto che un'altra. Nella pratica si tende tuttavia a privilegiare la distribuzione di Gumbel, pertanto nel prosieguo ci si riferirà solamente ad essa. Inoltre, per quanto concerne la determinazione dei parametri, essa può essere effettuata in diversi modi (massima verosimiglianza, minimi quadrati, metodo dei momenti, etc.). Tuttavia, volendosi riferire solo al metodo dei minimi quadrati, si ricava quanto segue.

Ricordando che la funzione di Gumbel può risciversi come $X = AY + B$, in cui Y è la variabile ridotta pari a: $Y = -\ln(1 - F)$, la procedura di interpolazione può riassumersi nella maniera seguente.

- si organizzano i dati relativi agli " n " eventi estremi in maniera tale da averli in ordine decrescente (ossia, $x_i = 1, 2, \dots, n$, con $X_1 = \max$);

- si assegna una probabilità di non superamento F_i a ciascun valore x_i con una delle formule relative al “plotting point” così da ottenere n coppie di punti (F_i, x_i) . Tale probabilità di non superamento F_i viene usualmente calcolata tramite la frequenza del campione, ossia: $F_i = 1 - \frac{i}{n}$ in cui, con riferimento al campione ordinato in ordine decrescente, $i=1, \dots, n$ (n essendo la dimensione del campione).
- si calcolano i corrispondenti valori y forniti dall'espressione di Gumbel, ottenendo così un ulteriore insieme di coppie di n punti (y_i, x_i) ;
- si determinano i coefficienti di regressione della equazione lineare $X = AY + B$ con le formule seguenti:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i ; \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad (9.113)$$

$$Var(Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{Y})^2 \quad (9.114)$$

$$Covar(Y, X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{Y})(x_i - \bar{X}) \quad (9.115)$$

$$A = \frac{Cov(Y, X)}{Var(Y)} ; B = \bar{X} - A\bar{Y} \quad (9.116)$$

Se si utilizzano più funzioni di distribuzione (Weibull e Gumbel), è opportuno scegliere la migliore interpolazione al campione sulla base del valore assunto dal coefficiente di correlazione lineare ($\rho = \frac{Cov(Y, X)}{\sqrt{Var(Y)Var(X)}}$) oppure sulla base dell'errore medio

($E = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|x_{i,stimata} - x_{i,osservata}|}{x_{i,stimata}}$), che peraltro presenta una più immediata interpretazione fisica.

Infatti, $E=5\%$, significa che, in media, la stima dell'altezza d'onda differisce da quella osservata del 5%. Pertanto a valori più piccoli di E corrisponde una migliore interpolazione.

Infine, per quanto attiene alla determinazione dell'altezza d'onda x^T cui compete il prefissato tempo di ritorno T , essa si può ricavare una volta che sia definita l'intensità di campionamento $\lambda=(\text{numero di dati estremi})/(\text{numero di anni di osservazione})$ e calcolata la frequenza associata al periodo di ritorno prefissato come: $F = 1 - \frac{1}{\lambda T}$. Infatti dalla distribuzione di Gumbel si può ricavare: $x = A(-\ln(-\ln(1 - F))) + B$.

Determinata l'altezza d'onda, è necessario stabilire per essa il periodo. In effetti non sono disponibili teorie per la determinazione del periodo di progetto nota che sia l'altezza dell'onda di progetto tramite l'analisi di valori estremi. Nella pratica, si assegnano diversi periodi all'onda per formare un insieme di valori possibili. Quindi, sulla base di studi di laboratorio, ovvero di analisi teoriche, si sceglie quello più pericoloso. E' consigliabile scegliere nel range:

$$\sqrt{\frac{130H_s}{g}} < T_p < \sqrt{\frac{280H_s}{g}} \quad (9.117)$$