

5. LE ONDE DI GRAVITÀ REGOLARI

- 5.1. Generalità
- 5.2. Formulazione del problema bidimensionale
- 5.3. Determinazione del campo di moto nell'ipotesi di ampiezza infinitesima
 - 5.3.1. *La relazione di dispersione*
 - 5.3.2. *Approssimazioni asintotiche: acque basse e profonde*
- 5.4. Proprietà ingegneristiche delle onde lineari
 - 5.4.1. *Cinematica delle particelle d'acqua sotto onde di piccola ampiezza*
 - 5.4.2. *Traiettorie delle particelle*
 - 5.4.3. *Campo di pressioni*
 - 5.4.4. *Energia e sua propagazione*
- 5.5. Teorie non lineari del moto ondoso
 - 5.5.1. *Onde di Stokes ai vari ordini di approssimazione*
 - 5.5.2. *Equazioni Non-Linearari per acque basse*
 - 5.5.3. *Equazioni di Boussinesq*
 - 5.5.4. *Onde solitarie*

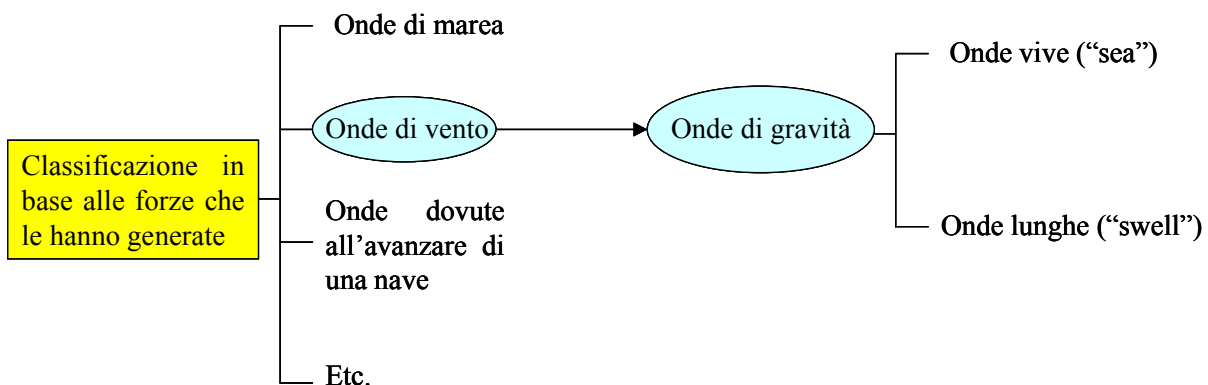
5.1 Generalità

L'esperienza comune ci porta ad affermare che è pressoché impossibile osservare uno specchio liquido senza che esso sia interessato da onde. Queste onde sono la manifestazione di forze che, agendo sull'acqua, tendono a deformarne la superficie contro l'azione della gravità e della tensione superficiale che, come forze stabilizzanti, tendono invece a ricostituire l'equilibrio preesistente.

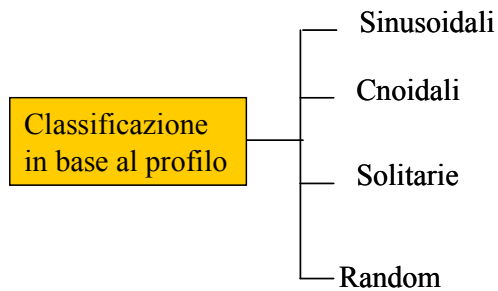
Da quanto appena detto se ne deduce che la presenza di onde è occasionata da forze che possono essere esercitate dal vento che spira sull'acqua o, più semplicemente, da una pietra lanciata contro la superficie liquida. Ovviamente, una volta che le onde sono generate, le forze di gravità e di tensione superficiale operano in maniera tale da farle propagare.

Le onde si realizzano in una grandissima varietà di dimensioni e forme, soprattutto in funzione dell'entità delle forze che le hanno generate. La loro importanza è notevolissima per le molteplici ricadute applicative in moltissimi settori dell'ingegneria e, particolarmente, in quella costiera. Ad esempio, oltre all'azione diretta sui manufatti costieri (moli, frangiflutti, ecc.), il moto ondoso agisce lungo i litorali sabbiosi mobilitando i sedimenti. Ne deriva un'evoluzione della linea di costa che, in alcuni casi, può comportare modificazioni tali da compromettere la funzionalità, o, addirittura, l'integrità strutturale di molte opere marittime, ovvero di alcune infrastrutture civili (per esempio, strade o ferrovie) spesso ubicate in prossimità dei litorali.

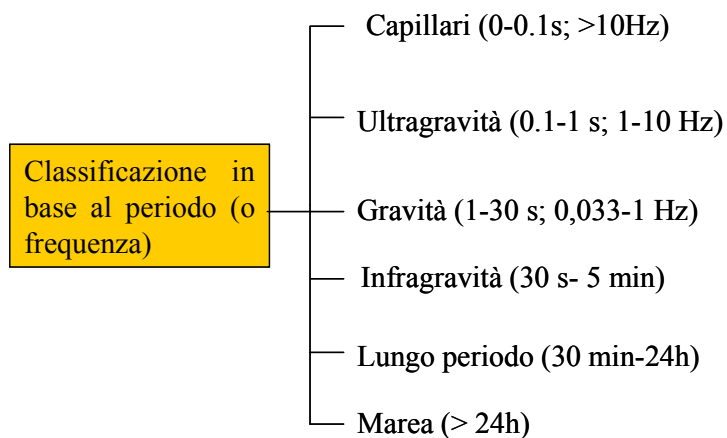
La classificazione delle onde di mare può essere effettuata secondo diversi criteri. Una prima classificazione, che si basa sulle forze che le hanno generate, le distingue in:



Un'altra classificazione spesso adottata si riferisce alla forma dell'onda, ossia al suo profilo. Esse pertanto vengono classificate in:



Tuttavia la classificazione più diffusa si riferisce al periodo dell'onda T (misurato in secondi) o, il che è lo stesso, alla frequenza f (misurata in Hertz) che, come si ricorderà rappresenta l'inverso del periodo.



Con questo tipo di classificazione, si può ottenere un'analogia con le bande di uno spettro di onde elettromagnetiche. Nella Figura 5.1. è infatti riportato una schematizzazione del contenuto energetico posseduto dalle onde caratterizzate da varie frequenze (*Kinsman*, 1983). Questa figura, sebbene si riferisca a dati mai misurati, consente di mostrare che la maggior parte del contenuto energetico sia attribuibile alla banda delle onde generate dal vento cui nel prosieguo si farà quasi esclusivamente riferimento.

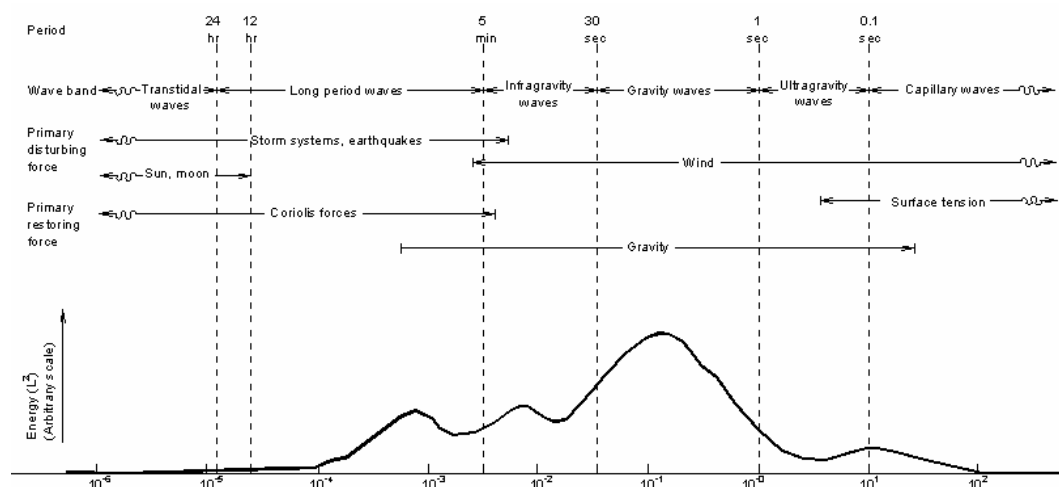


Figura 5.1. Rappresentazione schematica dell'energia contenuta alle diverse frequenze dalle onde di mare (da *Kinsman*, 1983).

Le onde di vento, come detto in precedenza, sono anche ulteriormente distinguibili in “onde vive”, ovvero in “onde lunghe”. Le prime si riferiscono a onde, piuttosto irregolari caratterizzate da un periodo più piccolo, che si vengono a formare nell’area di generazione. Le seconde, invece, si riferiscono a quelle onde regolari che, uscite dall’area di generazione, si propagano anche per distanze notevolissime. Un modo molto grossolano per distinguerle è quello di considerare per le prime un periodo caratteristico inferiore a 10s.

5.2. Formulazione del problema bidimensionale

Si consideri un’onda monocromatica (ossia rappresentabile da un semplice seno o coseno) che si propaghi su di un fondale caratterizzato da una profondità h costante sia nel tempo che nello spazio (l’ipotesi di invariabilità spaziale indica un fondale orizzontale, mentre l’invariabilità nel tempo sottolinea il fatto che si sta considerando un fondo non erodibile). Sia inoltre (x,y,z) un sistema di riferimento tale che il piano (x,y) coincida con il livello di quiete, mentre (z) sia positiva rivolta verso l’alto.

Nella Figura 5.2 è riportata una schematizzazione delle caratteristiche geometriche necessarie alla descrizione delle onde.

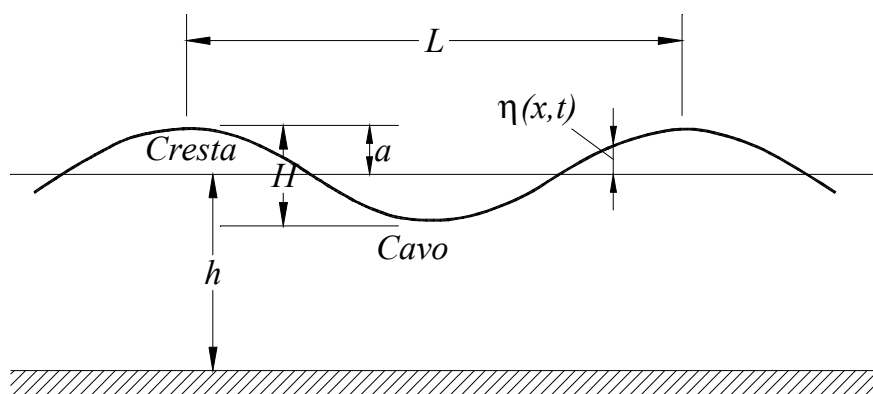


Figura 5.2. Schema delle grandezze geometriche caratteristiche di un’onda.

Con riferimento alla Figura 5.2., i parametri fondamentali per la descrizione delle onde sono:

- i) la lunghezza d’onda L , definita come distanza orizzontale tra due creste successive;
- ii) l’altezza d’onda H , definita come la distanza verticale tra la cresta e il cavo dell’onda ($a = H/2$ viene invece indicata come ampiezza dell’onda);
- iii) la profondità su cui l’onda si propaga h .

Tutti gli altri parametri (periodo, velocità delle particelle, accelerazione, etc) possono essere ricavate da queste. In particolare riconosceremo come sia possibile individuare una relazione che leghi tra loro L , T e h , in maniera univoca, ovvero una relazione funzionale del tipo:

$$f(L, T, h) = 0 \quad (5.1)$$

Si ricorda che il periodo T è definito come il tempo che intercorre fra il passaggio per un punto assegnato di due creste successive. Inoltre si definisce celerità dell’onda, o celerità di fase, il rapporto $C = L/T$, mentre con la grandezza $\eta(x,t)$ si indica la sopraelevazione del pelo libero rispetto alla condizione di quiete.

E’ chiaro come nella realtà le onde non siano mai monocromatiche, infatti un tipico segnale di sopraelevazione del pelo libero assume l’andamento rappresentato nella Figura 5.3.

Tuttavia questo può essere visto come la sovrapposizione di un gran numero di sinusoidi. Per esempio, se sovrapponiamo due onde perfettamente sinusoidali, ma caratterizzate da ampiezze e lunghezze d'onda diverse, come nella seguente Figura 5.3., il risultato è già più simile ad una situazione realistica, quale quella riportata in Figura 5.4.

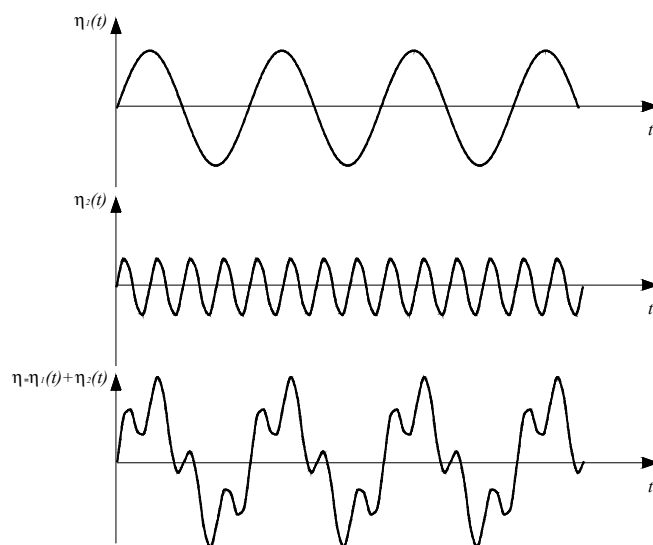


Figura 5.3. Esempio di segnale di sopraelevazione del pelo libero ottenuto come sovrapposizione di due onde monocromatiche.



Figura 5.4. Esempio di segnale relativo alla registrazione della sopraelevazione del pelo libero in un punto.

La sovrapposizione di onde caratterizzate da una lunghezza d'onda diversa non è priva di conseguenze. Il risultato di detta sovrapposizione può infatti avere drammatiche conseguenze, come schematicamente rappresentato in Figura 5.5, in cui la sovrapposizione di tre onde di diversa lunghezza d'onda, che per un certo periodo si ritrovano in fase, può produrre un'onda anomala di notevole altezza proprio in corrispondenza della prua di una nave.

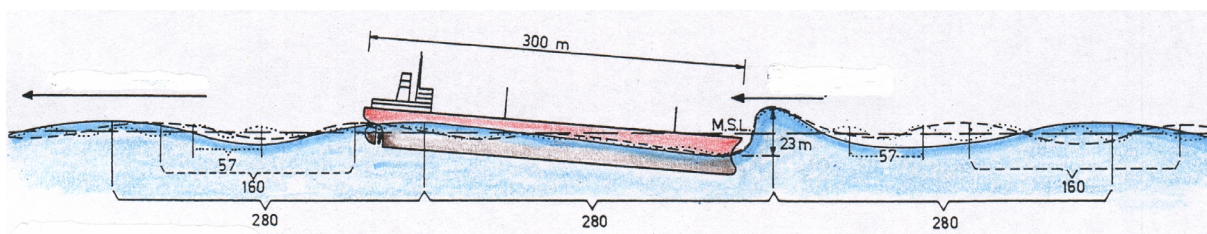


Figura 5.5. Esempio di segnale di sopraelevazione del pelo libero ottenuto come sovrapposizione di tre onde caratterizzate da una lunghezza d'onda pari, rispettivamente, a 280m, 160m e 57m (da Massie, 1982).

Prima di formulare il problema della determinazione del campo di moto sotto un'onda di mare, è opportuno rivedere in termini generali la struttura di un problema governato da equazioni differenziali e da opportune condizioni al contorno (*"boundary value problem"*) come schematicamente riportato in Figura 5.6, dalla quale si evince come un problema, per essere

correttamente formulato, deve essere espresso attraverso opportune equazioni differenziali valide in una determinata regione, ai contorni della quale vanno specificati opportuni vincoli, ossia opportune condizioni al contorno (che in figura sono indicate con B.C., ossia Boundary Conditions).

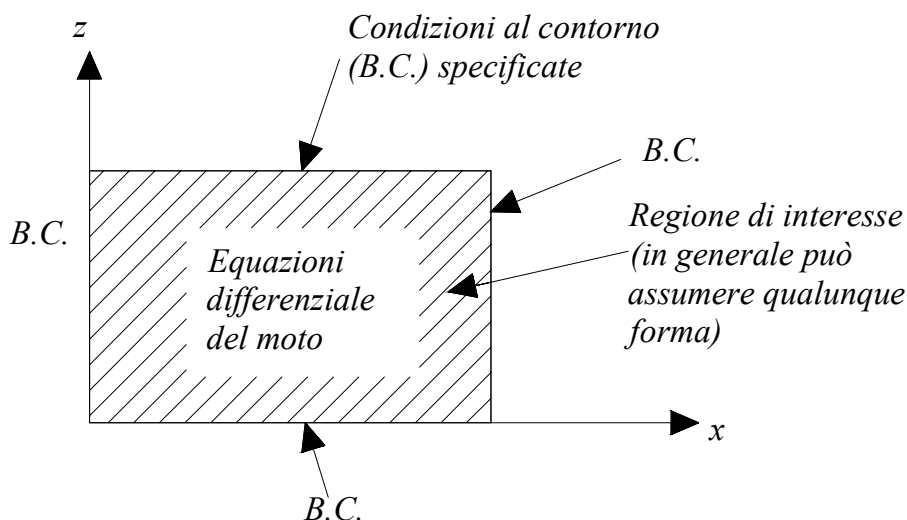


Figura 5.6. Struttura schematica di un “Boundary value problem”.

Quanto appena visto nel caso del tutto generale, si particolarezza nel caso di onde monocromatiche come in Figura 5.7.

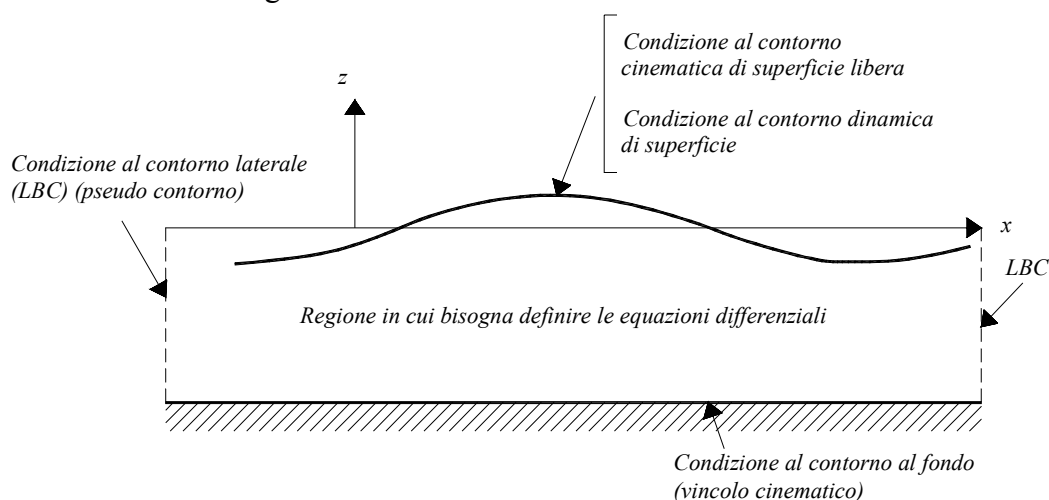


Figura 5.7. Rappresentazione schematica del “boundary value problem” relativo alla determinazione del campo di moto generato da un’onda monocromatica.

Le onde reali che si propagano in un fluido viscoso generano un campo di moto estremamente complesso ma che, nella maggior parte dei casi di interesse pratico, può essere considerato irrotazionale (vedere appendice A.3.4). Ciò è dovuto essenzialmente al fatto che le tensioni viscose risultano rilevanti solo in prossimità del fondo e comunque in uno strato assai modesto rispetto alle dimensioni del campo di moto in esame.

Pertanto per lo studio del campo di moto generato da un’onda monocromatica possono quindi introdursi le seguenti ipotesi semplificative:

- i) moto irrotazionale (ossia $\text{rot}(\mathbf{u})=0$ dove \mathbf{u} è il vettore velocità);

- ii) fluido incompressibile (ossia caratterizzato da un'equazione di stato del tipo $\rho = \text{cost}$, essendo ρ la densità del fluido);
- iii) fluido ideale (ossia caratterizzato da una viscosità dinamica nulla $\mu=0$);
- iv) onda bidimensionale (in direzione y si considerano onde cilindriche, ossia identiche per piani paralleli di normale y).

L'ipotesi di moto irrotazionale implica (postula) l'esistenza di una funzione $\phi(x,y,z;t)$ potenziale della velocità $\mathbf{u}=(v_x, v_y, v_z)$, per cui:

$$\mathbf{u} = \nabla \phi \quad (5.2)$$

mentre dall'ipotesi di fluido incompressibile, per il principio di conservazione della massa, si ottiene l'equazione di continuità nella seguente forma:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (5.3)$$

La (5.3), combinata con la (5.2), conduce alla ben nota equazione di *Laplace*:

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (5.4)$$

La (5.4) possiede la proprietà di essere un'equazione differenziale alle derivate parziali (di tipo ellittico) lineare, pertanto la somma di due soluzioni è anch'essa una soluzione (ossia per essa risulta valido il principio di sovrapposizione degli effetti).

L'ipotesi di onda bidimensionale cilindrica (*long-crested* nella letteratura anglosassone) implica un campo di moto identico su ogni piano parallelo a quello in cui verranno sviluppate tutte le considerazioni; per cui la (5.4) può essere studiata nel piano (x,z) , ossia particolarizzata e semplificata come segue:

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (5.5)$$

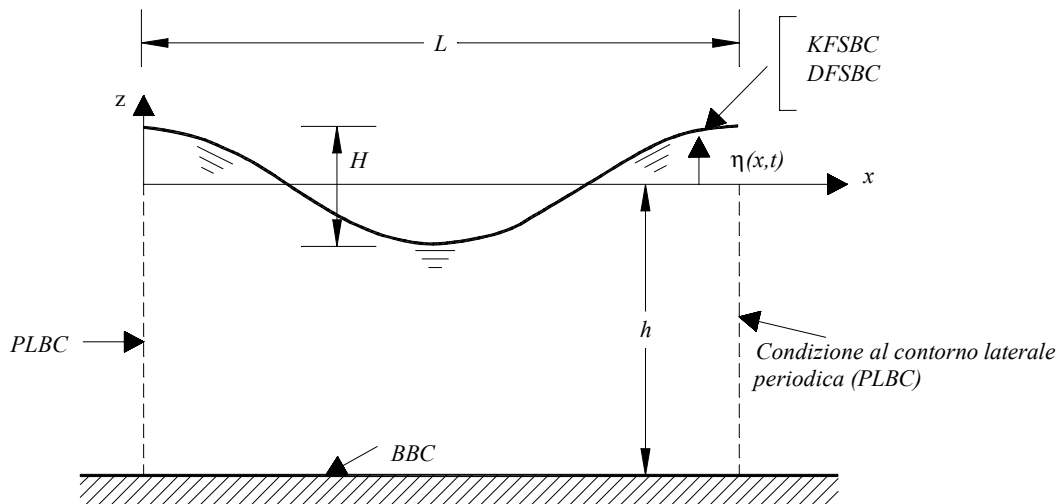


Figura 5.8. Schematizzazione del problema della determinazione del campo di moto generato da un'onda monocromatica "long crested", ossia cilindrica, che si propaga su di un fondale caratterizzato da una profondità h costante.

Per quanto attiene alla formulazione delle condizioni al contorno, bisogna ricordare che su qualunque tipo di contorno sia esso fisso, come, ad esempio, il fondo del mare, o libero di

deformarsi sotto l'azione delle forze, come una qualunque superficie liquida, le componenti della velocità del fluido devono soddisfare particolari condizioni fisiche. Si possono quindi distinguere:

- i) *condizioni di tipo cinematico*, se riguardano le caratteristiche cinematiche delle particelle di fluido;
- ii) *condizioni di tipo dinamico*, se invece stabiliscono la distribuzione delle pressioni su una superficie libera o su un'interfaccia.

L'espressione analitica che descrive tali condizioni risulta chiaramente funzione dell'equazione che descrive la superficie di contorno e per la risoluzione dei casi tipici di studio si rimanda il lettore all'appendice A.2.5.

Esistono inoltre altre condizioni al contorno che assicurano la periodicità della soluzione nello spazio e nel tempo. Infatti tra le diverse possibili soluzioni, si sta ricercando quella che risulti anche periodica nello spazio (ossia tale che l'onda che stiamo analizzando si ripeta identicamente a se stessa lungo la direzione x) e nel tempo.

E' opportuno precisare sin d'ora che, poiché l'equazione che descrive la superficie libera risulta a priori non nota, le condizioni al contorno che la caratterizzano introducono, dal punto di vista analitico, forti non-linearità. Dette non-linearità rappresentano un ostacolo insormontabile per una risoluzione del problema in forma analitica chiusa. Pertanto una soluzione analitica, come si mostrerà nel seguito, sarà possibile solo tramite l'adozione di drastiche ipotesi semplificative.

Condizione cinematica sulla superficie libera

La superficie libera è definita implicitamente dall'equazione:

$$F(x, z, t) = \eta(x, t) - z = 0 \quad (5.6)$$

La condizione cinematica impone che la superficie di separazione sia costituita sempre dalle stesse particelle fluide; la particella appartenente alla superficie libera è pervenuta lungo una traiettoria alla nuova configurazione; deve dunque essere sempre verificata la:

$$F = 0 \quad (5.7)$$

Nella configurazione finale la precedente relazione assume la forma:

$$F(x + v_x dt, z + v_z dt, t + dt) = 0 \quad (5.8)$$

essendo v_x e v_z le componenti del vettore velocità nella direzione x e z rispettivamente. Poiché deve essere $DF/Dt=0$, la condizione cinematica sulla superficie libera (non lineare) si formula come segue:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla F = 0 \quad (5.9)$$

Condizione cinematica al fondo

Poiché il fondo si considera fisso, rigido e impermeabile (almeno fintantoché non si tratteranno processi costieri), la superficie del fondo in tali condizioni è descritta dalla relazione:

$$\tilde{F} = z + h = 0 \quad (5.10)$$

La (5.10), essendo indipendente dal tempo (fondo non erodibile), impone che:

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial t} = 0 \quad (5.11)$$

e pertanto, analogamente a quanto visto per la condizione cinematica di superficie, si ottiene:

$$v_x \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x} + v_z \frac{\partial \tilde{F}}{\partial z} = 0 \quad (5.12)$$

Ricordando che il versore ortogonale al fondo ha componenti rispettivamente:

$$n_x = \frac{\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial z}\right)^2}}; n_z = \frac{\frac{\partial \tilde{F}}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial z}\right)^2}} \quad (5.13)$$

la (5.12) può essere riscritta come segue:

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial z}\right)^2}} (v_x n_x + v_z n_z) = 0 \quad (5.14)$$

ossia

$$(v_x n_x + v_z n_z) = 0 \quad (5.15)$$

che in termini vettoriali può anche porsi come segue:

$$\mathbf{u} \cdot \underline{n} = 0 \quad (5.16)$$

Da un punto di vista fisico ciò significa che se la superficie è rigida e impermeabile il fluido non vi può penetrare e neppure distaccarsi (potrebbe distaccarsi solo in presenza di cavitazione, cioè quando la pressione eguaglia la tensione di vapore). Poiché per un fluido reale si ha anche che:

$$\mathbf{u} \cdot \underline{t} = 0 \quad (5.17)$$

ne segue che al fondo deve quindi valere la condizione di aderenza (*no-slip condition* nella letteratura anglosassone), ovvero:

$$\mathbf{u} = 0 \quad (5.18)$$

Tale condizione di aderenza è tuttavia valida solo per un fluido reale e viene pertanto applicata quando si considera lo strato limite. Nel caso in esame di fluido ideale in moto irrotazionale in tutto il campo di moto la condizione da imporre è pertanto solo quella descritta dalla (5.16).

Condizione dinamica sulla superficie libera

L'azione meccanica deve trasmettersi attraverso l'interfaccia e deve essere continua. Dati due differenti fluidi separati da una superficie la continuità dell'azione meccanica dovrà essere verificata sia per azioni perpendicolari sia per azioni tangenziali. In formule:

azioni tangenziali $p_1 \underline{t} \, dA = p_2 \underline{t} \, dA;$

azioni normali $p_1 \cdot \underline{n} dA = p_2 \cdot \underline{n} dA + p_c \cdot \underline{n} dA$;

con:

- i) p_1 pressione esercitata sull'interfaccia dal fluido 1;
- ii) p_2 pressione esercitata sull'interfaccia dal fluido 2;
- iii) p_c pressione di capillarità che nasce per effetto della tensione superficiale.

Nel caso di un'onda, in cui si considera l'acqua come fluido ideale e l'aria come un gas ideale sottoposto a velocità modeste, non esistono condizioni sulle azioni tangenziali. Inoltre, poiché in tal caso il raggio di curvatura è molto grande, è possibile trascurare la pressione di capillarità; la condizione diventa quindi:

$$p_1 = p_2$$

che, assumendo come pressione di riferimento la pressione atmosferica ($p_1 = p_{\text{atm}}$), si riscrive nella seguente:

$$p_2 = 0 \quad (5.19)$$

Quest'ultima condizione va a caratterizzare il teorema di *Bernoulli* in corrispondenza della superficie (infatti il problema che stiamo affrontando di moto irrotazione di un fluido ideale rende disaccoppiato il problema cinematico da quello dinamico che, pertanto, viene appunto considerato separatamente tramite l'applicazione del teorema di *Bernoulli*).

Infine, si ricordi che al fondo non c'è condizione dinamica fintantoché non viene presa in considerazione la mobilità del fondo stesso.

Riassunto del problema della determinazione del campo di moto sotto onde regolari 2D

L'equazione differenziale del secondo ordine per la determinazione del campo di moto sotto onde di mare regolari bidimensionali è l'equazione di *Laplace*. In formule:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (5.20)$$

Le condizioni al contorno sulla superficie sono quella cinematica (che si ricava dalla 5.9. sostituendovi la 5.6, ricordando che $\mathbf{u} = \nabla \phi$) e quella dinamica (che si ricava dal teorema di *Bernoulli* una volta imposta la 5.19). In formule:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} &= 0; \\ -\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] + g\eta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad su \quad z = \eta(x, t) \quad (5.21)$$

Per quanto concerne la condizione al fondo, si ha:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad su \quad z = -h \quad (5.22)$$

Inoltre non bisogna dimenticare che stiamo ricercando soluzioni periodiche sia nello spazio che nel tempo, ossia soluzioni per cui risultino valide le seguenti due condizioni:

$$\begin{aligned} \phi(x, t) &= \phi(x + L, t); \\ \phi(x, t) &= \phi(x, t + T) \end{aligned} \quad (5.23)$$

5.3. Determinazione del campo di moto nell'ipotesi di ampiezza infinitesima

Le (5.21) sono condizioni al contorno non lineari. Pertanto, il problema da risolvere, pur essendo governato da un'equazione lineare (equazione di *Laplace*) è non lineare. Poiché, come è noto, a tutt'oggi non esiste una teoria per la risoluzione di problemi governati da equazioni differenziali non lineari, ne segue che per ricercare una soluzione analitica bisogna introdurre alcune semplificazioni. In particolare, viene qui presentata una soluzione derivante dall'ipotesi semplificativa di onde caratterizzate da un'ampiezza "infinitesima". Tale ipotesi, come si vedrà, consente l'uso di metodi perturbativi attraverso i quali il problema non lineare sarà ricondotto ad una serie di problemi lineari.

Separando le variabili, è possibile scrivere:

$$\phi(x, z, t) = X(x)Z(z)T(t) \quad (5.24)$$

Dal momento che sappiamo che vogliamo risolvere il problema linearizzato e che, inoltre, stiamo ricercando soluzioni periodiche nel tempo della funzione potenziale, possiamo già dire che:

$$T(t) = \sin(\sigma t) \quad (5.25)$$

Per trovare σ , che rappresenta la frequenza angolare dell'onda, dalla condizione di periodicità si ha che:

$$\sin(\sigma t) = \sin(\sigma(t+T)) \quad \text{cioè} \quad \sin(\sigma t) = \sin(\sigma t)\cos(\sigma T) + \cos(\sigma t)\sin(\sigma T) \quad (5.26)$$

Quest'ultima risulta vera se $\sigma T = 2\pi$, cioè se e solo se $\sigma = 2\pi/T$. Pertanto possiamo affermare già che:

$$\phi(x, z, t) = X(x)Z(z)\sin(\sigma t) \quad (5.27)$$

Sostituendo la relazione appena trovata nell'equazione di *Laplace* (5.20), si ottiene:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} Z \sin(\sigma t) + X \frac{d^2 Z}{dz^2} \sin(\sigma t) = 0 \quad (5.28)$$

Da quest'ultima, dividendo per ϕ , si ricava:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0 \quad (5.29)$$

Chiaramente, il primo termine di questa equazione dipende solo da x , mentre il secondo solamente da z , pertanto l'equazione è soddisfatta solamente se i due addendi sono uguali alla medesima costante, eccetto che per un segno di differenza. In formule:

$$\begin{aligned} \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} &= -k^2 \\ \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} &= k^2 \end{aligned} \quad (5.30)$$

In definitiva, possono realizzarsi le possibili soluzioni per l'equazione di *Laplace* riportate nella Tabella 5.I.

Queste equazioni sono adesso delle semplici equazioni differenziali ordinarie che possono essere risolte separatamente. Possono realizzarsi tre casi, a secondo che k sia reale, nullo o immaginario.

Tabella 5.I. Possibili soluzioni dell'equazione di Laplace, in funzione del valore assunto dalla costante k .

Carattere di k , costante di separazione	Equazioni differenziali ordinarie (ODE)	Soluzioni
Reale	$\frac{d^2 X}{dx^2} + k^2 X = 0$	$X(x) = A \cos kx + B \sin kx$
$k^2 > 0$	$\frac{d^2 Z}{dz^2} - k^2 Z = 0$	$Z(z) = C e^{kz} + D e^{-kz}$
$k = 0$	$\frac{d^2 X}{dx^2} = 0$	$X(x) = Ax + B$
	$\frac{d^2 Z}{dz^2} = 0$	$Z(z) = Cz + D$
Immaginario	$\frac{d^2 X}{dx^2} - k ^2 X = 0$	$X(x) = A e^{ k x} + B e^{- k x}$
$k^2 < 0, k = i k $	$\frac{d^2 Z}{dz^2} + k ^2 Z = 0$	$Z(z) = C \cos k z + D \sin k z$
$ k = \text{magnitude of } k$		

Imposizione della condizione al contorno di periodicit  laterale

Tra le soluzioni della tabella prima mostrata, non tutte sono periodiche in x , infatti la soluzione risulta periodica solo nel caso in cui k   reale e non nullo. Pertanto come soluzione dell'equazione di Laplace si ottiene la seguente funzione potenziale delle velocit :

$$\phi(x, z, t) = (A \cos kx + B \sin kx)(C e^{kz} + D e^{-kz}) \sin(\sigma t) \quad (5.31)$$

Inoltre, per poter soddisfare la condizione di periodicit  laterale, in forma esplicita, deve essere:

$$\begin{aligned} A \cos kx + B \sin kx &= A \cos k(x+L) + B \sin k(x+L) = \\ &= A(\cos kx \cos kL - \sin kx \sin kL) + B(\sin kx \cos kL + \cos kx \sin kL) \end{aligned} \quad (5.32)$$

Quest'ultima risulta soddisfatta solamente per $\cos(kL)=1$ e $\sin(kL)=0$, il che significa che $kL=2\pi$, ovvero $k=2\pi/L$. Inoltre, dal momento che stiamo risolvendo un problema lineare,   possibile adottare il principio di sovrapposizione degli effetti, per cui ϕ pu  essere decomposta nei suoi addendi. Concentriamo l'attenzione sul "pezzo" (la rimanente parte potr  essere aggiunta in un secondo momento):

$$\phi(x, z, t) = A \cos kx (C e^{kz} + D e^{-kz}) \sin(\sigma t) \quad (5.33)$$

Imposizione della condizione al contorno al fondo (fondo orizzontale)

Sostituendo l'espressione fin qui trovata per ϕ nella condizione al contorno al fondo, si ricava:

$$v_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} = -A \cos kx (k C e^{kz} - k D e^{-kz}) \sin(\sigma t) = 0 \quad \text{su} \quad z = -h \quad (5.34)$$

Affinché questa equazione sia verificata per ogni x e per ogni t i termini dentro parentesi devono essere identicamente nulli, il che comporta che:

$$C = De^{2kh} \quad (5.35)$$

e pertanto:

$$\begin{aligned} \phi(x, z, t) &= A \cos kx (De^{2kh} e^{kz} + De^{-kz}) \sin(\sigma t) = \\ &= \frac{G}{2} \cos kx (e^{k(h+z)} + e^{-k(h+z)}) \sin(\sigma t) = \\ &= G \cos kx \cosh(k(h+z)) \sin(\sigma t) \end{aligned} \quad (5.36)$$

dove:

$$G = 2ADe^{kh} \quad (5.37)$$

è una nuova costante.

Imposizione della condizione al contorno dinamica di superficie

In corrispondenza della superficie bisogna applicare *Bernoulli*. La posizione della superficie stessa, tuttavia, è a priori non nota. Pertanto per applicare la condizione al contorno si può sviluppare in serie di *Taylor* attorno a $z=0$. In formule:

$$\begin{aligned} (\text{Bernoulli equation})_{z=\eta} &= (\text{Bernoulli equation})_{z=0} + \\ &\eta \frac{\partial}{\partial z} (\text{Bernoulli equation})_{z=0} + \dots \end{aligned} \quad (5.38)$$

Ovvero:

$$\begin{aligned} \left(gz - \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v_x^2 + v_z^2}{2} \right)_{z=\eta} &= \left(gz - \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v_x^2 + v_z^2}{2} \right)_{z=0} + \\ &+ \eta \left[g - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} (v_x + v_z) \right]_{z=0} + \dots = C(t) \end{aligned} \quad (5.39)$$

Nell'ipotesi di onde di ampiezza infinitesima, ossia tali che $\eta \ll l$ e $v_x \ll 1$ e quindi $\eta^2 \ll \eta$ e $v_x \eta \ll \eta$, è lecito trascurare i termini non lineari. Tale operazione di linearizzazione conduce alla seguente espressione:

$$\left(-\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta \right)_{z=0} = C(t) \quad \text{cioè} \quad \eta = \frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{z=0} + \frac{C(t)}{g} \quad (5.40)$$

Se sostituiamo in questa espressione l'espressione di ϕ (5.36) si ottiene:

$$\eta = \frac{G\sigma}{g} \cos kx \cosh k(h+z) \cos \sigma t \Big|_{z=0} + \frac{C(t)}{g} = \left[\frac{G\sigma \cosh kh}{g} \right] \cos kx \cos \sigma t + \frac{C(t)}{g} \quad (5.41)$$

Poiché per definizione η avrà media sia temporale che spaziale nulla, allora $C(t)=0$.

$$\eta = \left[\frac{G \sigma \cosh kh}{g} \right] \cos kx \cos \sigma t \quad (5.42)$$

I termini entro parentesi rappresentano valori costanti. Per cui possiamo riscrivere questa funzione nella maniera seguente:

$$\eta = \frac{H}{2} \cos kx \cos \sigma t \quad (5.43)$$

Quest'ultimo risultato viene fuori dal confronto tra l'espressione di η e il modello fisico dell'onda il cui profilo è sinusoidale, per cui l'ultima costante diviene pari a:

$$G = \frac{Hg}{2\sigma \cosh kh} \quad (5.44)$$

La funzione potenziale risulta uguale a:

$$\phi = \frac{Hg \cosh k(h+z)}{2\sigma \cosh kh} \cos kx \sin \sigma t \quad (5.45)$$

La funzione potenziale risulta dipendere da H , σ , h e k . I primi tre dipenderanno dai dati e la quarta sarà derivata dalla relazione di dispersione (di seguito ricavata).

Imposizione della condizione al contorno cinematica di superficie

Quest'ultima condizione al contorno pone una relazione tra σ e k . Anche in questo caso, dovendo imporre la condizione su di una superficie incognita, utilizzeremo l'espansione di Taylor attorno a $z=0$.

$$\left(v_z - \frac{\partial \eta}{\partial t} - v_x \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)_{z=\eta} = \left(v_z - \frac{\partial \eta}{\partial t} - v_x \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)_{z=0} + \eta \frac{\partial}{\partial z} \left(v_z - \frac{\partial \eta}{\partial t} - v_x \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)_{z=0} + \dots = 0 \quad (5.46)$$

Nell'ipotesi di onde di piccola ampiezza, ancora una volta manteniamo solamente i termini lineari. La condizione cinematica di superficie si riduce pertanto alla seguente espressione:

$$v_z = \frac{\partial \eta}{\partial t} \Big|_{z=0} \quad \text{ovvero} \quad - \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (5.47)$$

Sostituendo le espressioni di ϕ e η prima viste si ricava:

$$- \frac{H}{2} \frac{gk}{\sigma} \frac{\sinh k(h+z)}{\cosh kh} \cos kx \sin \sigma t \Big|_{z=0} = - \frac{H}{2} \sigma \cos kx \sin \sigma t \quad (5.48)$$

ovvero:

$$\sigma^2 = gk \tanh(kh) \quad (5.49)$$

Riscrivendo la precedente equazione nella forma:

$$\frac{\sigma^2}{gk} = \tanh(kh) \quad (5.50)$$

e plottando ognuno dei due membri in funzione di kh per un particolare valore di $\sigma^2 h/g$, si ricava la Figura 5.9, dalla quale si evince che l'equazione ha una e una sola soluzione di k per assegnati valori di σ e h , come si ricava peraltro dall'intersezione delle due curve (intersezione che rappresenta proprio la soluzione dell'equazione).

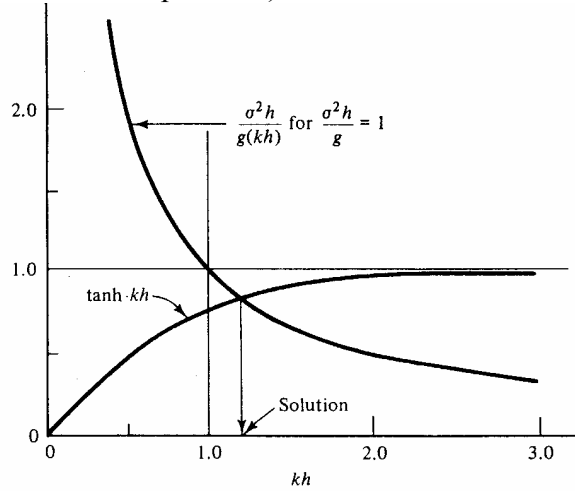


Figura 5.9. Rappresentazione della relazione di dispersione in funzione di kh .

5.3.1. La relazione di dispersione

Notando che, per definizione, un'onda progressiva coprirà una lunghezza d'onda L in un periodo T , e ricordando inoltre che $\sigma=2\pi/T$ e che $k=2\pi/L$, chiaramente la velocità di propagazione dell'onda potrà essere espressa come segue:

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = g \frac{2\pi}{L} \tanh kh \quad \text{ovvero} \quad C^2 = \frac{L^2}{T^2} = \frac{g}{k} \tanh kh \quad (5.51)$$

Dall'espressione precedente può anche ricavarsi la seguente:

$$L = \frac{g}{2\pi} T^2 \tanh \frac{2\pi h}{L} \quad (5.52)$$

Poiché in acque profonde kh è molto grande e, pertanto, $\tanh(kh)=1$, si ottiene $L=L_o=gT^2/2\pi$ dove il pedice "o" sta ad indicare il valore in acque profonde. Pertanto:

$$L = L_o \tanh kh \quad (5.53)$$

Da ciò se ne deduce che: la lunghezza d'onda decresce monotonamente al decrescere della profondità.

Le relazioni prima viste sono "facce" diverse della stessa equazione, detta di dispersione poiché essa descrive la maniera in cui un campo di onde progressive costituite da molte frequenze diverse vengono separate (ovvero "disperse") in funzione delle diverse celerità delle singole componenti. Per come è stata definita la celerità si ha inoltre:

$$C = \frac{L_0}{T} \tanh kh \quad \text{ovvero} \quad C = C_0 \tanh kh \quad (5.54)$$

La Figura 5.10 rappresenta alcune variabili comunemente usate nel calcolo del moto ondoso. In particolare, essa rappresenta un valido metodo grafico per ottenere i valori in acque basse e intermedie di questi parametri.

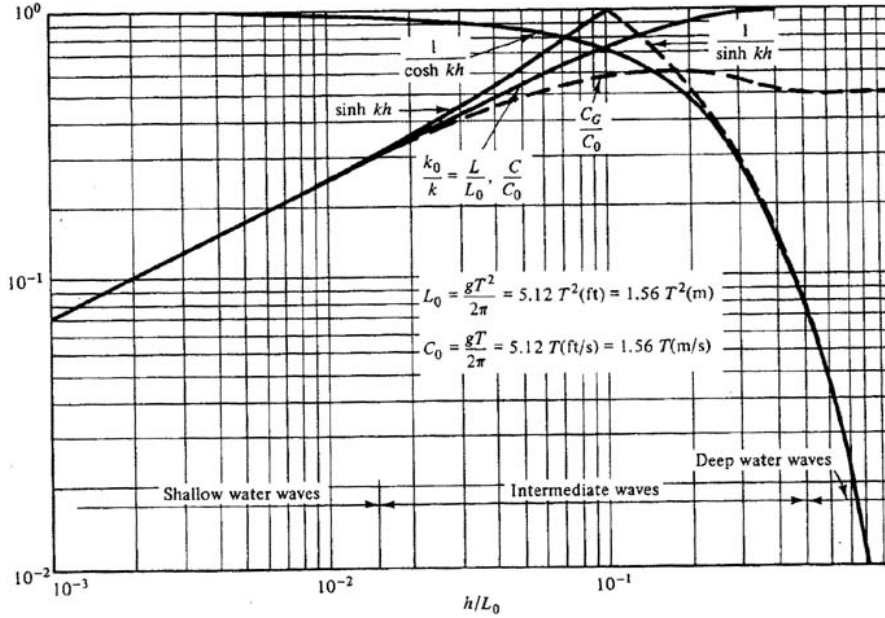


Figura 5.10. Andamento in funzione del rapporto h/L_0 di variabili utili per il calcolo della relazione di dispersione anche in acque basse e profonde.

5.3.2. Approssimazioni asintotiche: acque basse e profonde

Le funzioni iperboliche presentano asintoti che si rivelano particolarmente utili per lo studio delle acque basse e profonde. Per esempio, la funzione $\cosh(kh)$ che compare nel denominatore del potenziale delle velocità è definita come segue:

$$\cosh kh = \frac{e^{kh} + e^{-kh}}{2} \quad (5.55)$$

Per argomenti piccoli, la funzione esponenziale e^{kh} può essere sviluppata in serie di Taylor, cioè, ponendo per semplicità $kh = \zeta$

$$e^\zeta = 1 + \left. \frac{d e^\zeta}{d \zeta} \right|_{\zeta=0} \zeta + \left. \frac{d^2 e^\zeta}{d \zeta^2} \right|_{\zeta=0} \frac{(\zeta)^2}{2!} + \dots \quad (5.56)$$

Ovvero:

$$e^{kh} = 1 + kh + \frac{(kh)^2}{2} + \dots \quad (5.57)$$

Analogamente:

$$e^{-kh} = 1 - kh + \frac{(kh)^2}{2} + \dots \quad (5.58)$$

Per piccoli valori di kh (ossia in *acque basse*) allora:

$$\begin{aligned} \cosh kh &= \frac{1}{2} \left[\left(1 + kh + \frac{(kh)^2}{2} \dots \right) + \left(1 - kh + \frac{(kh)^2}{2} \dots \right) \right] \\ &\cong 1 + \frac{(kh)^2}{2} \end{aligned} \quad (5.59)$$

Per grandi valori di kh (ossia in *acque profonde*) allora $\cosh(kh) = e^{kh}/2$ poiché e^{-kh} diventa trascurabile. Di seguito, nella Tabella 5.II vengono rappresentati gli asintoti:

Tabella 5.II. Approssimazioni asintotiche per acque basse e profonde delle funzioni iperboliche.

Funzione	Grandi valori di kh	Piccoli valori di kh
$\cosh kh$	$e^{kh}/2$	1
$\sinh kh$	$e^{kh}/2$	kh
$\tanh kh$	1	kh

Appare utile suddividere le regioni entro cui queste approssimazioni asintotiche appaiono valide. Nella Figura 5.11. sono rappresentate le funzioni iperboliche insieme ai loro asintoti $f_1=kh$, $f_2=1$, $f_3=e^{kh}/2$. Le percentuali rappresentano, per particolari valori di kh , l'errore che si commette nell'uso dell'asintoto piuttosto che della funzione. La scala più in basso riporta la profondità relativa. Si noti che un'onda avente $L=200$ m in 1000 m di profondità ha la stessa profondità relativa di un'onda di altezza di 0.2 m in 1 m di profondità.

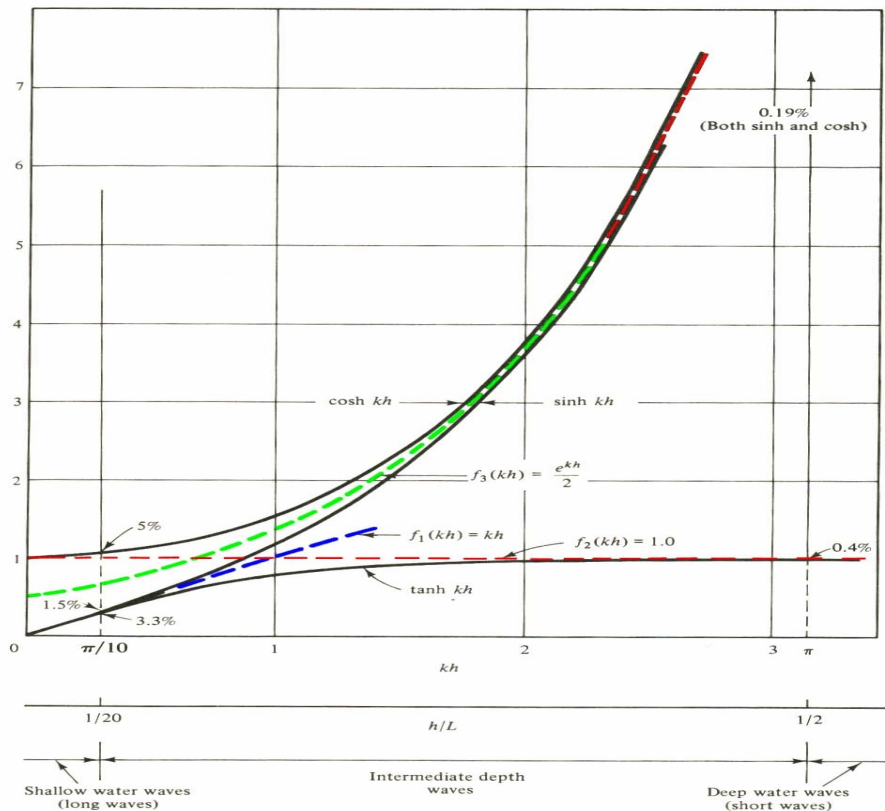


Figura 5.11. Andamento in funzione di kh delle funzioni iperboliche.

Sulla base delle approssimazioni asintotiche prima viste, è possibile ricavare espressioni semplificate per la relazione di dispersione in acque basse e profonde. In particolare, in *acque basse* si ottiene:

$$\sigma^2 = gk \tanh kh = gk^2 h \quad \text{ovvero} \quad \frac{\sigma^2}{k^2} = C^2 = gh \quad (5.60)$$

da cui la celerità

$$C = \sqrt{gh} \quad (5.61)$$

Quest'ultima evidenza che la velocità delle onde in acque basse dipenda solo dalla profondità. Inoltre, ricordando che la definizione di acque basse è basata su di una profondità relativa, per gli oceani, dove la profondità è dell'ordine del km, un'onda caratterizzata da una lunghezza di 20km è in acque basse. Per esempio, gli Tsunami generati dai maremoti hanno lunghezze d'onda superiori ai 20 km e pertanto raggiungono velocità di propagazione dell'ordine di 100 m/s.

In *acque profonde* ($kh > \pi$) si ottiene:

$$\sigma^2 = gk \tanh kh = gk \quad (5.62)$$

ossia $L = L_o$ dove $L_o = gT^2/2\pi = 1.56 T^2$ [m] e $C_o = gT/2\pi = 1.56 T$ [m/s]

5.4. Proprietà ingegneristiche delle onde lineari

Le soluzioni sviluppate per onde di piccola ampiezza rappresentano le basi per applicazioni pratiche, ossia per la risoluzione di numerosi problemi ingegneristici. Ad esempio, la cinematica delle particelle d'acqua e il campo di pressione all'interno del corpo dell'onda sono direttamente correlati al calcolo delle forze sui corpi immersi. Così come la trasformazione delle onde durante il loro propagarsi dal largo alla riva risulta importante, poiché per la realizzazione di molte opere costiere si può disporre solo di previsione del clima ondoso al largo.

Con riferimento al caso di onde progressive, in quanto segue, analizzeremo la distribuzione di alcune grandezze; precisamente, saranno calcolate le distribuzioni di velocità, l'andamento delle pressioni, il valore dell'energia associata ad un'onda e la sua propagazione.

5.4.1. Cinematica delle particelle d'acqua sotto onde di piccola ampiezza

Consideriamo un'onda progressiva il cui profilo è descritto dalla seguente espressione:

$$\eta = \frac{H}{2} \cos(kx - \sigma t) \quad (5.63)$$

La funzione potenziale delle velocità risulta:

$$\phi = -\frac{Hg \cosh k(h+z)}{2\sigma \cosh kh} \sin(kx - \sigma t) \quad (5.64)$$

Ricordando l'espressione della relazione di dispersione (i.e. $\sigma^2 = gk \tanh(kh)$) possiamo riscrivere:

$$\phi = -\frac{H}{2} C \frac{\cosh k(h+z)}{\sinh kh} \sin(kx - \sigma t) \quad (5.65)$$

Vogliamo determinare le componenti di velocità delle singole particelle d'acqua. Per definizione, la componente orizzontale delle velocità è:

$$v_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{H}{2} \sigma \frac{\cosh k(h+z)}{\sinh(kh)} \cos(kx - \sigma t) \quad (5.66)$$

ovvero:

$$v_x = \frac{gHk}{2\sigma} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh(kh)} \cos(kx - \sigma t) \quad (5.67)$$

L'accelerazione locale sarà quindi:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{H\sigma^2}{2} \frac{\cosh k(h+z)}{\sinh(kh)} \sin(kx - \sigma t) \quad (5.68)$$

Per quanto concerne la direzione verticale, la componente della velocità e dell'accelerazione locale risultano rispettivamente pari a:

$$v_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{H}{2} \sigma \frac{\sinh k(h+z)}{\sinh(kh)} \sin(kx - \sigma t) \quad (5.69)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{H\sigma^2}{2} \frac{\sinh[k(h+z)]}{\sinh(kh)} \cos(kx - \sigma t) \quad (5.70)$$

Esaminando le componenti di velocità verticale e orizzontale si nota come esse siano “sfasate” di 90° . Chiaramente (vedere Figura 5.12.) i massimi di velocità orizzontale si hanno per $(kx - \sigma t) = 0, \pi, \dots$ mentre i massimi di velocità verticale si hanno per $(kx - \sigma t) = \pi/2, 3\pi/2$.

La variazione verticale delle componenti di velocità (sia orizzontale che verticale) può essere meglio colta se si parte dal fondo dove $k(h+z)=0$. Ivi, i termini iperbolici che contengono z sia in v_x che in v_z hanno il loro minimo, 1 e 0 rispettivamente. Man mano che ci si sposta verso l'alto il modulo delle componenti di velocità aumenta.

Per quanto concerne le accelerazioni, la massima verticale si realizza quando la velocità orizzontale è massima (lo stesso per l'accelerazione orizzontale con la componente verticale di velocità).

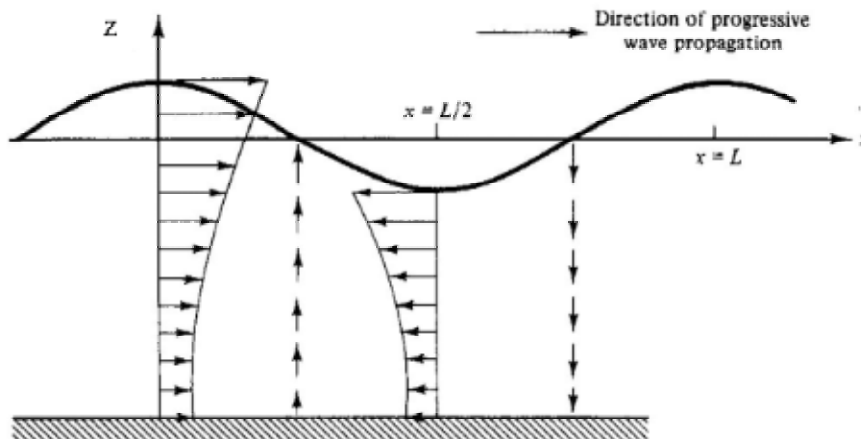


Figura 5.12. Andamento con la profondità delle componenti verticale ed orizzontale di velocità.

5.4.2. Traiettorie delle particelle

Una particella d'acqua che abbia posizione media nel punto (x_1, z_1) (vedere Figura 5.13) sarà spostata dal campo di pressione nella nuova posizione istantanea $(x_1 + \zeta, z_1 + \xi)$.

Le componenti dello spostamento (ζ, ξ) possono essere ricavate per integrazione delle componenti di velocità:

$$\zeta(x_1, z_1, t) = \int v_x(x_1 + \zeta, z_1 + \xi) dt \quad (5.71)$$

$$\xi(x_1, z_1, t) = \int v_z(x_1 + \zeta, z_1 + \xi) dt \quad (5.72)$$

Nell'ipotesi di onde di piccola ampiezza, per cui sostituire $v_x(x_1 + \zeta, z_1 + \xi)$ con $v_x(x_1, z_1)$ implica, in un'espansione in serie di *Taylor*, trascurare i termini del tipo $\frac{\partial v_x}{\partial x} \zeta$, dalla semplice integrazione si ottiene per lo spostamento orizzontale:

$$\zeta = -\frac{H}{2} \frac{gk}{\sigma^2} \frac{\cosh k(h + z_1)}{\cosh(kh)} \sin(kx_1 - \sigma t) \quad (5.73)$$

Ovvero, usando la relazione di dispersione:

$$\zeta = -\frac{H}{2} \frac{\cosh k(h + z_1)}{\sinh(kh)} \sin(kx_1 - \sigma t) \quad (5.74)$$

Similmente per lo spostamento verticale si ottiene:

$$\xi = \frac{H}{2} \frac{\sinh k(h + z_1)}{\sinh(kh)} \cos(kx_1 - \sigma t) \quad (5.75)$$

In definitiva quindi, gli spostamenti (ζ, ξ) possono essere riscritti come segue:

$$\zeta(x_1, z_1, t) = -A \sin(kx_1 - \sigma t) \quad (5.76)$$

$$\xi(x_1, z_1, t) = B \cos(kx_1 - \sigma t) \quad (5.77)$$

Elevando la (5.76) e la (5.77) al quadrato e sommando membro a membro si ricava:

$$\left(\frac{\zeta}{A}\right)^2 + \left(\frac{\xi}{B}\right)^2 = 1 \quad (5.78)$$

che è l'equazione di un'ellisse di semiassi A e B rispettivamente come rappresentato in figura:

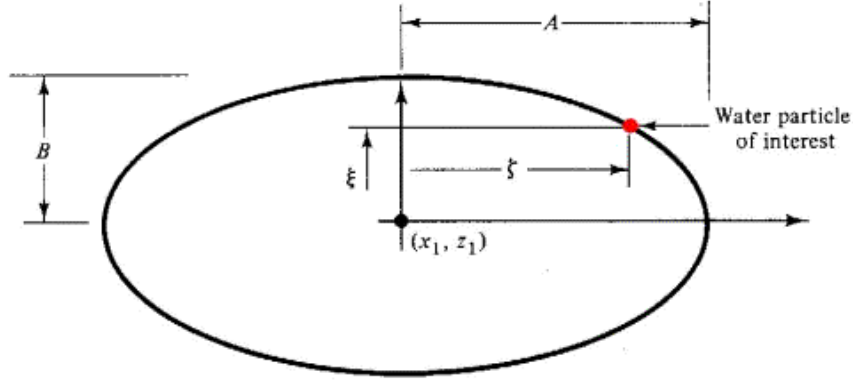


Figura 5.13. Andamento delle traiettorie sotto un'onda progressiva di ampiezza infinitesima.

Si noti come il semiasse A sia sempre più grande di B . Infatti, in corrispondenza del livello di quiete (m.w.l.), le particelle con elevazione media $z=0$, seguono una traiettoria con spostamento verticale $H/2$. Non ci sono particelle con posizione media superiore a $z=0$.

Determiniamo adesso la traiettoria delle particelle sotto onde progressive in condizioni di *acque basse* (ossia in condizioni per cui vale la condizione $h/L < 1/20$). In questo caso, usando i valori asintotici delle funzioni iperboliche, si ottiene:

$$A = \frac{H}{2} \frac{\cosh k(h+z_1)}{\sinh(kh)} = \frac{H}{2} \frac{1}{kh} = \frac{HL}{4\pi h} = \frac{HT}{4\pi} \sqrt{\frac{g}{h}} \quad (5.79)$$

in cui sono state introdotte le uguaglianze valide per acque basse (i.e. $L=CT=(gh)^{1/2}T$).

Da notare come la (5.79) metta in evidenza il fatto che A sia indipendente dalla quota rispetto al fondo!

Per quanto concerne il semiasse B , risulta:

$$B = \frac{H}{2} \frac{\sinh k(h+z_1)}{\sinh(kh)} = \frac{H}{2} \left(1 + \frac{z_1}{h}\right) \quad (5.80)$$

La (5.80) esprime il fatto che l'escursione verticale aumenta linearmente con la quota rispetto al fondo, essendo zero (ovviamente) al fondo e massima ($H/2$) per $z=0$.

Determiniamo adesso la traiettoria delle particelle sotto onde progressive in condizioni di *acque profonde* ($h/L > 1/2$). Anche in questo caso saranno utilizzati i valori asintotici delle funzioni iperboliche ottenendo:

$$A = \frac{H}{2} \frac{e^{kh} e^{kz_1}}{e^{kh}} = \frac{H}{2} e^{kz_1} \quad (5.81)$$

$$B = \frac{H}{2} e^{kz_1} = A \quad (5.82)$$

Le traiettorie, in questo caso, risultano essere cerchi con raggio decrescente esponenzialmente con la profondità. Da notare come per una profondità di $z=-L/2$, i valori di A e B si sono ridotti di una quantità pari a $e^{-\pi}$ il che implica che il raggio è già trascurabile!

La Figura 5.14 sotto riportata rappresenta le traiettorie seguite dalle particelle rispettivamente nella situazione di acque basse, acque intermedie e acque profonde.

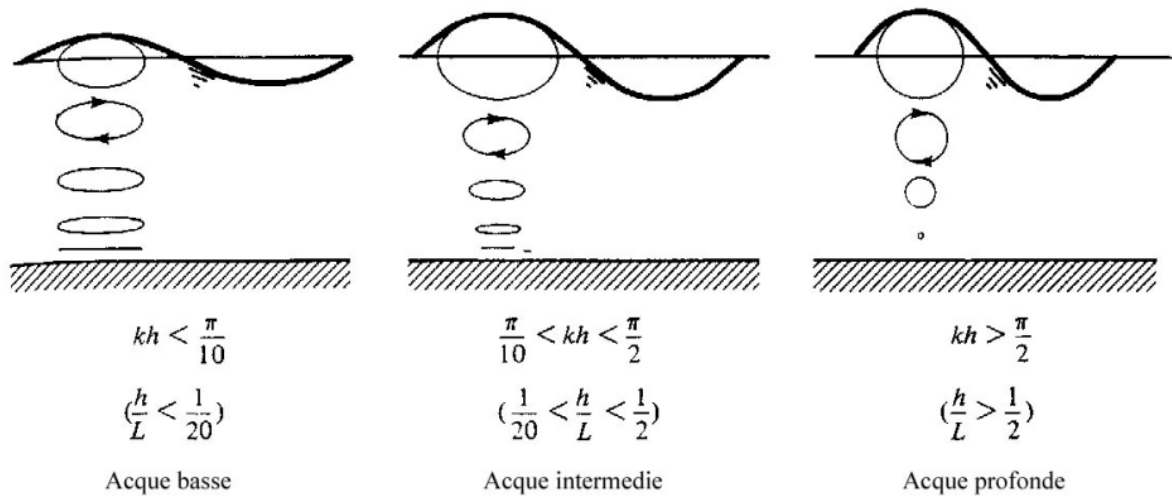


Figura 5.14. Andamento delle traiettorie rispetto al fondo nelle diverse situazioni di acque basse, intermedie e profonde.

5.4.3. Campo di pressioni

Si vuole adesso determinare il campo di pressioni determinato dall'avanzamento di un'onda progressiva di ampiezza infinitesima. In questo caso si adotta il teorema di *Bernoulli* (ovviamente nell'ipotesi di moto non stazionario):

$$\frac{p}{\rho} + gz + \frac{1}{2}(v_x^2 + v_z^2) - \frac{\partial \phi}{\partial t} = C(t) \quad (5.83)$$

Uguagliando quest'ultima scritta per la generica quota z con la stessa in corrispondenza della superficie libera dove la pressione è nulla e, linearizzando, si ricava:

$$\left(\frac{p}{\rho} + gz - \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_z = g\eta - \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{\eta=0} \quad (5.84)$$

Ricordando che la forma linearizzata della DFSBC (condizione dinamica di superficie) si riduce alla $\eta = \frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{z=0}$ si può vedere come la pressione possa essere espressa come:

$$\frac{p}{\rho} = -gz + \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (5.85)$$

Ricordando l'espressione della funzione potenziale, si ricava:

$$p = -\rho gz + \rho g \frac{H}{2} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh(kh)} \cos(kx - \sigma t) \quad (5.86)$$

o, più semplicemente.

$$p = -\rho gz + \rho g \eta k_p(z) \quad \text{con} \quad k_p(z) = \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh(kh)} \quad (5.87)$$

Il primo termine dell'espressione che fornisce la pressione è, ovviamente, il termine idrostatico, presente anche in assenza di campo di moto. Il termine $k_p(z)$ è invece detto fattore di risposta della pressione e, al di sotto del livello di quiete, è sempre inferiore all'unità.

La pressione dinamica è quindi il risultato di due contributi: il primo dato dallo spostamento della superficie libera (se il coefficiente k_p fosse sempre pari a 1, ci sarebbe una risposta puramente di tipo idrostatico), il secondo è associato alla presenza di un'accelerazione verticale che è 180° fuori fase rispetto allo spostamento η e che modifica la distribuzione delle pressioni dal caso idrostatico. Infatti, con riferimento alla Figura 5.15., si può notare come il fattore di risposta delle pressioni k_p presenti un massimo ($k_p=1$) in corrispondenza del livello di quiete, e un minimo di $1/(\cosh(kh))$ al fondo. Per ottenere la pressione sopra il livello di quiete, ancora una volta, si può sviluppare in serie di *Taylor*, ottenendo, al primo ordine di approssimazione:

$$\begin{aligned} p(z_1) &= (-\rho g z + \rho g \eta k_p)_{z=0} + z_1 \frac{\partial}{\partial z} (-\rho g z + \rho g \eta k_p)_{z=0} + \dots = \\ &= \rho g \eta - \rho g z_1 = \rho g (\eta - z_1) \end{aligned} \quad (5.88)$$

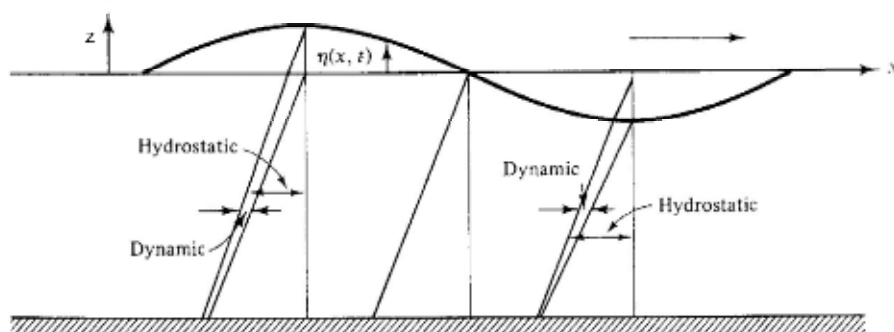


Figura 5.15. Distribuzione delle pressioni al di sotto di un'onda progressiva di piccola ampiezza.

Dall'espressione (5.88) sopra riportata, si ricava come al di sotto della cresta, al minimo ordine, la distribuzione delle pressioni sia di tipo idrostatico, mentre al di sotto di $z=0$, essa devia dalla legge idrostatica. La Figura 5.16 riporta le isolinee nel caso di $h/L=0.2$

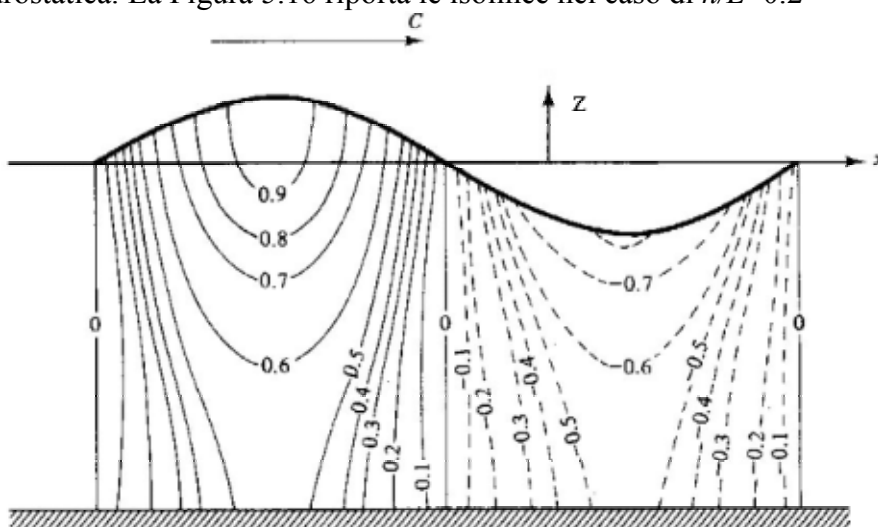


Figura 5.16. Isolinee di pressione nel caso di un'onda progressiva di piccola ampiezza ($h/L=0.2$).

E' opportuno qui ricordare che un metodo per misurare le onde sia in laboratorio sia in campo è legato al rilievo delle pressioni. Infatti, dal rilievo delle pressioni è possibile poi risalire agli spostamenti della superficie libera attraverso la relazione:

$$p = -\rho g z + \rho g \eta k_p(z) \quad (5.89)$$

Più precisamente, utilizzando la relazione precedente, un misuratore di pressione poggiato sul fondo rileva sia la componente idrostatica, sia la componente dinamica della pressione (cfr. cap. 2 laddove, tra i diversi metodi di misura dell'altezza d'onda, è stato presentato il sensore di pressione per rilevare il segnale di sopraelevazione del moto ondoso).

La pressione, per un particolare periodo, è proporzionale allo spostamento η , (che è la variabile di interesse). Se la pressione dinamica (p_D) viene isolata, sottraendo dalla totale la componente idrostatica, allora η risulta dato dalla seguente espressione:

$$\eta = \frac{p_D}{\rho g k_p(-h)} \quad \text{con} \quad k_p(-h) = \frac{1}{\cosh(kh)} \quad (5.90)$$

in cui $k_p(-h)$ risulta funzione della frequenza angolare delle onde. Pertanto bisogna utilizzare la relazione di dispersione per determinare (kh) dalla frequenza osservata delle onde.

Sebbene il fattore di risposta della pressione sia stato ricavato per una sola onda, laddove sia ragionevole assumere onde lineari, le precedenti possono essere utilizzate anche per determinare la pressione in presenza di onde random.

Infine, poiché k_p dipende dalla frequenza, onde corte presentano un k_p molto piccolo (al fondo) al contrario delle onde lunghe. In altre parole ciò significa che onde molto piccole non possono essere rilevate dai misuratori di pressione al fondo.

5.4.3. Energia e sua propagazione

L'energia complessivamente contenuta in un'onda si compone di un'energia potenziale, derivante dalla sopraelevazione della superficie liquida rispetto allo stato di quiete, e di un'energia cinetica, dovuta al fatto che le particelle fluide sono dotate di movimento.

La determinazione dell'energia, nonché le sue modalità di propagazione, risultano essere particolarmente importanti per determinare, tra l'altro:

- i) le variazioni delle caratteristiche dell'onda allorché essa si propaga verso la riva;
- ii) la potenza necessaria a generare il moto ondoso;
- iii) la potenza estraibile ai fini della produzione di energia elettrica.

L'energia potenziale deriva dallo spostamento di una massa (l'acqua) dalla posizione di equilibrio rispetto al campo gravitazionale. Quando l'acqua è in quiete, essa presenta il minimo di energia potenziale. Tuttavia, uno spostamento di un insieme di particelle, con un conseguente spostamento della superficie libera, richiederà del lavoro compiuto sul sistema che provoca un aumento di energia potenziale.

Di seguito, l'energia potenziale associata ad un'onda sinusoidale verrà ricavata determinando l'energia media per unità di superficie associata all'onda come differenza tra la presenza e l'assenza dell'onda.

Con riferimento alla Figura 5.17, l'energia potenziale di una colonna di fluido di massa dm (relativamente al fondo) è pari a:

$$d(EP) = dm(gz) \quad (5.91)$$

in cui z è l'altezza del baricentro della colonna di fluido, che può essere scritta nella forma:

$$z = \frac{h + \eta}{2} \quad (5.92)$$

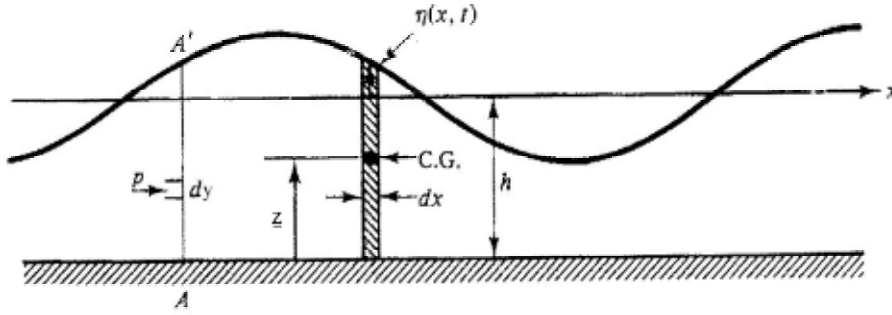


Figura 5.17. Schema per il calcolo dell'energia potenziale associata ad un'onda monocromatica.

La massa per unità di larghezza sarà pari a:

$$dm = \rho(h + \eta)dx \quad (5.93)$$

L'energia potenziale mediata su di una lunghezza d'onda, nel caso di onda progressiva di altezza H sarà pertanto pari a:

$$\begin{aligned} (\overline{EP})_{Tot} &= \frac{1}{L} \int_x^{x+L} d(EP) = \frac{1}{L} \int_x^{x+L} \rho g \frac{(h + \eta)^2}{2} dx = \\ &= \frac{\rho g}{L} \int_x^{x+L} \left[\frac{1}{2} (h^2 + \eta^2 + 2h\eta) \right] dx \end{aligned} \quad (5.94)$$

Il pedice *Tot* sta ad indicare il fatto che si sta considerando l'energia potenziale totale, ossia dell'intera colonna di fluido. Se si considera un'onda progressiva, ossia caratterizzata da un profilo del tipo $\eta = \frac{H}{2} \cos(kx - \sigma)$, allora l'energia potenziale totale media risulta pari a:

$$(\overline{EP})_{Tot} = \frac{\rho g}{L} \left(\frac{1}{2} h^2 L + h \int_x^{x+L} \eta dx + \frac{1}{2} \int_x^{x+L} \eta^2 dx \right) \quad (5.95)$$

L'integrazione dell'espressione (5.95) è immediata. Il risultato che si ottiene risulta pari a:

$$(\overline{EP})_{Tot} = \rho g \frac{1}{2} h^2 + \rho g \frac{H^2}{16} \quad (5.96)$$

E' chiaro come l'espressione (5.96) indichi l'energia potenziale totale media. Volendo ricavare quella dovuta solo alla presenza dell'onda, bisognerà effettuare la differenza tra l'energia potenziale in presenza dell'onda e in assenza dell'onda, cioè:

$$(\overline{EP})_{onda} = (\overline{EP})_T - (\overline{EP})_{quiete} \quad (5.97)$$

da cui si ottiene:

$$(\overline{EP})_{onda} = \frac{\rho g H^2}{16} \quad (5.98)$$

Si noti come l'energia potenziale totale di un'onda per unità di area dipenda solo dall'altezza dell'onda!

Per quanto concerne l'energia cinetica, essa è ovviamente associata al movimento delle particelle. Considerando una particella d'acqua di massa $d\overline{m}$, si avrà:

$$d(EC) = d\overline{m} \frac{v_x^2 + v_z^2}{2} = \rho dx dz \frac{v_x^2 + v_z^2}{2} \quad (5.99)$$

Per ottenere l'energia cinetica media per unità di superficie, l'espressione $d(EC)$ deve essere integrata sull'intera profondità e mediata sulla lunghezza d'onda. In formule:

$$(\overline{EC}) = \frac{1}{L} \int_x^{x+L} \int_{-h}^{\eta} \rho \frac{v_x^2 + v_z^2}{2} dx dz \quad (5.100)$$

Dalle soluzioni analizzate circa il campo di velocità sotto un'onda progressiva, l'integrale espresso dalla (5.100) può essere riscritto come segue:

$$(\overline{EC}) = \frac{\rho}{2L} \left(\frac{gHk}{2\sigma} \frac{1}{\cosh(kh)} \right)^2 \cdot \int_x^{x+L} \int_{-h}^{\eta} \left(\cosh^2 k(h+z) \cos^2(kx - \sigma t) + \sinh^2 k(h+z) \sin^2(kx - \sigma t) \right) dz dx \quad (5.101)$$

Usando le identità trigonometriche, l'espressione prima vista può essere riscritta come segue:

$$(\overline{EC}) = \frac{\rho}{2L} \left(\frac{gHk}{2\sigma} \frac{1}{\cosh(kh)} \right)^2 \cdot \int_x^{x+L} \int_{-h}^{\eta=0} \frac{1}{2} (\cosh 2k(h+z) + \cos 2(kx - \sigma t)) dz dx \quad (5.102)$$

Integrando e semplificando si ottiene:

$$(\overline{EC}) = \frac{1}{16} \rho g H^2 \quad (5.103)$$

In definitiva, l'energia totale media per unità di superficie di un'onda sarà quindi data dalla somma dell'energia potenziale e dell'energia cinetica. Chiamando con E detta quantità, si ottiene:

$$E = \overline{EP} + \overline{EC} = \frac{1}{8} \rho g H^2 \quad (5.104)$$

L'energia totale di un'onda sarà quindi:

$$E = \frac{1}{8} \rho g H^2 L \quad (5.105)$$

Appare utile sottolineare ancora una volta come né l'energia potenziale, né l'energia cinetica dipendono dalla profondità o dalla lunghezza d'onda, ma solamente dal quadrato dell'altezza H .

Da quanto fin qui visto, si intuisce che le onde di piccola ampiezza non trasmettono massa, essendo le traiettorie delle particelle composte da orbite chiuse. Tuttavia, esse trasmettono energia. Per esempio, se si considerano le onde generate da una pietra che impatta su dell'acqua in quiete, parte dell'energia cinetica della pietra si trasforma in energia posseduta dal moto ondoso (sia potenziale che cinetica). Man mano che queste onde viaggiano fino, ad esempio, a frangersi sulla spiaggia, risulta chiaro un trasferimento di energia dalla zona di impatto fino alle zone viepiù lontane.

5.4.4. Flusso di energia

La velocità con cui l'energia è trasferita viene detta flusso di energia F , e, sulla base della teoria lineare, detto flusso rappresenta la velocità con cui una superficie verticale di fluido compie lavoro sulla superficie prossima. Con riferimento alla Figura 5.17, la velocità istantanea con cui la pressione dinamica ($p_D = (p + \rho g z)$) per unità di larghezza nella direzione di propagazione dell'onda è pari a:

$$F = \int_{-h}^{\eta} p_D v_x dy \quad (5.106)$$

Il flusso di energia medio è ottenuto mediando su di un periodo:

$$\begin{aligned} \bar{F} &= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \int_{-h}^{\eta} p_D v_x dz dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \int_{-h}^{\eta} \left[\rho g \eta \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh(kh)} \right] \left[\frac{gHk}{2\sigma} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh(kh)} \cos(kx - \sigma t) \right] dz dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \int_{-h}^{\eta} \left[\rho g \eta \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh(kh)} \right] \left[\sigma \eta \frac{\cosh k(h+z)}{\sinh(kh)} \right] dz dt \end{aligned} \quad (5.107)$$

Ottenuta dalla precedente utilizzando la relazione di dispersione. Per mantenere solamente i termini del secondo ordine nell'altezza dell'onda, è sufficiente integrare fino al livello di quiete ($\eta \approx 0$), ottenendo:

$$\bar{F} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \int_{-h}^0 \rho g \sigma \eta^2 \frac{\cosh^2 k(h+z)}{\cosh(kh) \sinh(kh)} dz dt \quad (5.108)$$

ossia:

$$\bar{F} = \frac{\rho g \sigma}{4k} \left(\frac{H}{2} \right)^2 \frac{(2kh + \sinh(2kh))}{\sinh(2kh)} \quad (5.109)$$

da cui:

$$\bar{F} = \left(\frac{1}{8} \rho g H^2 \right) \cdot \frac{\sigma}{k} \cdot \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)} \right) \right] = E \cdot C \cdot n \quad (5.110)$$

laddove Cn rappresenta la velocità con cui l'energia viene trasmessa, pari alla velocità di gruppo C_g (ossia: $C_g = nC$) da cui:

$$n = \frac{C_g}{C} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)} \right) \quad (5.111)$$

5.4.5. Velocità di gruppo

Abbiamo già definito la celerità di gruppo come quella velocità a cui viaggia l'energia. Vediamo ora di dare una spiegazione più descrittiva, cioè a dire più vicina alla intuizione, derivante dallo studio della propagazione di un gruppo di onde: se pensiamo a due treni di onde di medesima altezza che viaggiano nella stessa direzione, caratterizzati da una frequenza e da un numero d'onda leggermente diversi, essi possono essere pensati come sovrapposti, cioè a dire:

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 = \frac{H}{2} \cos(k_1 x - \sigma_1 t) + \frac{H}{2} \cos(k_2 x - \sigma_2 t) \quad (5.112)$$

in cui (nell'ipotesi di Δk e $\Delta \sigma$ molto piccoli):

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma - \frac{\Delta \sigma}{2}; & k_1 &= k - \frac{\Delta k}{2} \\ \sigma_2 &= \sigma + \frac{\Delta \sigma}{2}; & k_2 &= k + \frac{\Delta k}{2} \end{aligned} \quad (5.113)$$

Utilizzando le solite identità trigonometriche, i due profili possono essere combinati tra loro come segue:

$$\begin{aligned} \eta &= H \cos \left[\frac{1}{2} [(k_1 + k_2)x - (\sigma_1 + \sigma_2)t] \right] \cos \left[\frac{1}{2} [(k_1 - k_2)x - (\sigma_1 - \sigma_2)t] \right] = \\ &= H \cos(kx - \sigma t) \cos \left[\frac{1}{2} \Delta k \left(x - \frac{\Delta \sigma}{\Delta k} t \right) \right] \end{aligned} \quad (5.114)$$

Il profilo risultante consiste in un'onda che si propaga con velocità $C = \sigma/k$, modulata da un inviluppo che si propaga a velocità $\Delta \sigma / \Delta k$. Il profilo risultante è mostrato in Figura 5.18.

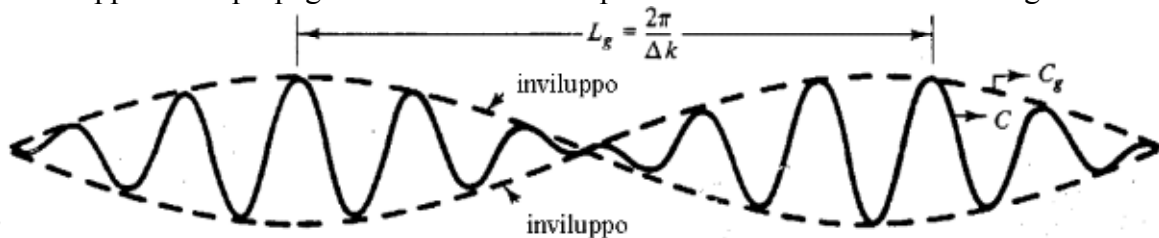


Figura 5.18. Profilo risultante dalla sovrapposizione di due onde progressive caratterizzate da frequenze e lunghezze d'onda poco differenti.

Ricordando che l'energia dipende solo dall'altezza, appare chiaro che non ci può essere propagazione di energia attraverso i nodi (ossia attraverso quei punti della superficie liquida in

cui l'altezza d'onda e, quindi, la pressione dinamica, sono nulle). Per ciò l'energia deve viaggiare ad una velocità che è quella del gruppo d'onde, pari a:

$$C_g = \frac{\Delta\sigma}{\Delta k} \quad (5.115)$$

Al limite di $\Delta k \rightarrow 0$, si ottiene una velocità di gruppo per un gruppo d'onda di lunghezza L_g infinita (allora, un treno d'onda di altezza costante), $C_g = d\sigma/dk$. Questa derivata può essere valutata dalla relazione di dispersione:

$$\begin{aligned} \sigma^2 = gk \tanh(kh) \quad \text{che, derivata, diventa} \quad 2\sigma \frac{d\sigma}{dk} &= g \tanh(kh) + gkh \cdot \sec^2(kh) \\ C_g = \frac{d\sigma}{dk} &= \frac{(g \tanh(kh) + gkh \sec^2(kh))\sigma}{2gk \tanh(kh)} = \frac{C}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)} \right) \end{aligned} \quad (5.116)$$

Perciò, $C_g = nC$ dove, ovviamente:

$$n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)} \right) \quad (5.117)$$

Il termine n presenta due limiti asintotici validi rispettivamente in acque profonde e acque basse. Detti limiti sono: 1/2 e 1. Da ciò ne segue che in acque profonde l'energia viene trasmessa ad una velocità pari ad un mezzo di quella di propagazione del profilo dell'onda, mentre in acque basse il profilo e l'energia viaggiano alla medesima velocità.

5.5. Teorie non lineari del moto ondoso

Le onde lineari e quelle non lineari possono essere descritte specificando due parametri adimensionali: la ripidità dell'onda (H/L) e la profondità relativa (h/L). La dipendenza dalla profondità relativa è stata ampiamente discussa nei paragrafi precedenti (si vedano, ad esempio, le approssimazioni asintotiche in acque basse e profonde). Si è infatti mostrato come dal rapporto (h/L) si può vedere se le onde sono dispersive o meno e se la celerità, la lunghezza e l'altezza d'onda risultano influenzate dalla profondità. La ripidità dell'onda ci fornisce invece informazioni circa la validità dell'ipotesi di linearità del moto ondoso: valori grandi della ripidità suggeriscono infatti che tale ipotesi possa non essere adeguata.

Un terzo parametro adimensionale che può essere utilizzato al posto della ripidità e della profondità relativa è dato proprio dal rapporto tra la ripidità e la stessa profondità relativa (H/h), definito altezza d'onda relativa. Come per la rapidità, grandi valori di detto parametro indicano che l'ipotesi di onde di piccola ampiezza (ossia lineari) potrebbe non essere valida. Un quarto parametro che viene spesso utilizzato per definire il campo di validità di una teoria del moto ondoso rispetto ad un'altra è il numero di *Ursell*. Esso è definito come segue:

$$U_R = \left(\frac{L}{h} \right) \frac{H}{h} = \frac{LH}{h^3} \quad (5.118)$$

Alti valori del numero di *Ursell* indicano onde alte, o comunque di ampiezza finita, ovvero onde lunghe in acque basse. Tutte tipologie di onde che necessitano di teorie non lineari per lo studio del moto ondoso.

E' opportuno ribadire che la teoria lineare del moto ondoso descritta nei paragrafi precedenti rappresenta un'utile prima approssimazione allo studio del moto ondoso. Tuttavia, le onde di mare non sono generalmente caratterizzate da un'ampiezza piccola. Ad esempio, da un punto di vista ingegneristico, sono proprio le onde più grandi che devono essere studiate per la

progettazione di opere marittime, e per lo studio morfologico dei litorali essendo in grado di mobilitare grandi quantitativi di sedimenti.

Allo scopo di affrontare il problema della determinazione delle caratteristiche delle onde di mare in maniera più accurata, è possibile adottare una soluzione basata sui metodi perturbativi sviluppata, per successive approssimazioni, a partire dalla soluzione lineare prima vista. In effetti ogni ordine di approssimazione dell'approccio asintotico allo studio del moto ondoso, può essere considerato come una correzione dell'ordine precedente, il cui risultato complessivo produce accordi quasi sempre migliori tra teoria e dati sperimentali.

Le teorie non lineari sono in grado di descrivere fenomeni come il trasporto di massa associato alla propagazione di un'onda.

5.5.1. Onde di Stokes ai vari ordini di approssimazione

Sin dal lavoro di *Stokes* (1847,1880), molti lavori successivi hanno poi assunto nello studio delle onde con metodi perturbativi, una pendenza ka modesta (con k numero d'onda e a ampiezza d'onda $a=H/2$). Si postula che la soluzione perturbata, sviluppata in serie di potenze del parametro $\varepsilon=ka$, converga nell'espansione quanto più termini vengono presi in considerazione.

In generale, l'espansione asintotica per il potenziale delle velocità ϕ , può essere scritto come segue:

$$\phi = \varepsilon\phi_1 + \varepsilon^2\phi_2 + \dots \quad (5.119)$$

Ogni termine nella serie è più piccolo del termine precedente per almeno un fattore ka . In questa espansione, ϕ_1 è la funzione potenziale così come la si ricava dalla teoria lineare, ϕ_2 è la funzione al secondo ordine di approssimazione, e così via.

Sostituendo l'espressione (5.119) e le analoghe espressioni per le altre variabili dipendenti (elevazione d'onda η , velocità u e v , pressione p , etc.) nelle opportune equazioni e condizioni al contorno che descrivono il moto ondoso, si ottengono soluzioni agli ordini superiori per le onde di gravità. Uguagliando quindi i coefficienti di uguali potenze di ka , si ottengono relazioni per soluzioni ad ogni ordine di approssimazione.

Una caratteristica di quest'approccio è che ogni ordine risulta espresso intermini degli ordini precedenti più bassi.

Il metodo delle espansioni asintotiche di *Stokes* è formalmente valido sotto le condizioni: $H/h \ll (kh)^2$ per $kh < 1$ e $H/L \ll 1$ (*Peregrine*, 1972)¹. In termini del numero di *Ursell*

1

Le approssimazioni introdotte dal processo di linearizzazione possono essere meglio individuate focalizzando l'attenzione sui termini che sono stati trascurati, ossia stimandone l'ordine di grandezza. Se ipotizziamo $h(x)=cost$, allora, come si è visto, una soluzione al problema delle onde di gravità è data dalle seguenti relazioni:

$$\eta = \frac{H}{2} \cos(kx - \sigma t) = a \cos k(x - ct)$$

$$\phi = -\frac{H}{2} \frac{g}{\sigma} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \sin(kx - \sigma t) = -ac \frac{\cosh k(h+z)}{\sinh kh} \sin k(x - ct)$$

Sulla base di tale risultato è possibile valutare l'ordine di grandezza del rapporto tra i termini trascurati e quelli mantenuti nelle condizioni al contorno. Ad esempio, l'ordine di grandezza del rapporto $\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) / \frac{\partial \eta}{\partial t}$ può essere calcolato facilmente ponendo le funzioni seno e coseno pari a 1 e fissando $z=0$. Si ricava quindi:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -ack \coth(kh)$$

questi requisiti impongono che $U_R < 79$, condizione che restringe il range di applicabilità della teoria di *Stokes* che pertanto non risulta applicabile in acque basse. Per esempio, la massima altezza d'onda in acque basse consentita dalla teoria di *Stokes* al secondo ordine non deve superare metà della profondità.

Poiché agli ordini superiori emergono nelle soluzioni componenti con frequenza più alta (superarmoniche), il profilo d'onda non risulta più descritto da una sinusoide ma presenta delle creste più appuntite e dei cavi più piatti. Inoltre, le orbite delle particelle non risultano più chiuse e pertanto si realizza un “*drift*”, ossia un trasporto di massa, nella direzione di propagazione del moto ondoso.

In definitiva, al secondo ordine di approssimazione, la teoria di *Stokes* fornisce un contributo non lineare per il sopralzo dell'onda dato dalla seguente espressione:

$$\eta_2 = \frac{kH_1^2}{16} \frac{\cosh(kh)}{\sinh^3(kh)} [2 + \cosh(2kh) \cos 2(kx - \sigma t)] \quad (5.120)$$

essendo quindi dalla teoria lineare:

$$\eta_1 = \frac{H_1}{2} \cos(kx - \sigma t) \quad (5.121)$$

in definitiva si ha un andamento del pelo libero descritto in Figura 5.19. da:

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 \quad (5.122)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -ak$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = akc$$

allora la condizione che detto rapporto sia piccolo si traduce nelle seguenti espressioni:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) / \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right) = a^2 k^2 c \coth(kh) \frac{1}{akc} \ll 1$$

da cui segue:

$$ak \ll 1 \quad \tanh(kh) \ll 1 \quad \coth(kh) \ll 1$$

per cui se kh non è piccolo le suddette condizioni sono verificate per $ak \ll 1$, il che implica che la ripidità dell'onda deve essere molto piccola (cioè $a \ll k$). D'altro canto se kh dovesse essere piccolo dovendo anche essere $\tanh(kh) \ll 1$ si deve anche verificare la condizione:

$$ak \ll kh \quad \text{cioè} \quad a \ll h$$

cioè per profondità più piccole della lunghezza d'onda, l'ampiezza deve essere molto più piccola della profondità locale. Osservando inoltre la soluzione di Stokes, si ricava che il rapporto tra la soluzione al secondo ordine ϕ_2 e quella al primo ordine ϕ_1 è piccolo fintanto che $ak \ll 1$ e $a \ll k$ indipendentemente da kh .

Se invece $kh \ll 1$ allora bisogna che sia verificata anche la condizione $\frac{a}{k^2 h^3} \ll 1$. Quest'ultima condizione è

particolarmente vincolante poiché richiede che $\frac{a}{h} \ll (kh)^2$ essendo al contempo (kh) piccolo. Da quanto detto si evince che se kh è piccolo (acque poco profonde rispetto alla lunghezza d'onda, ovvero acque basse) la strategia di risoluzione posta dal sistema lineare non rappresenta una buona approssimazione ed è quindi indispensabile adottare un altro approccio.

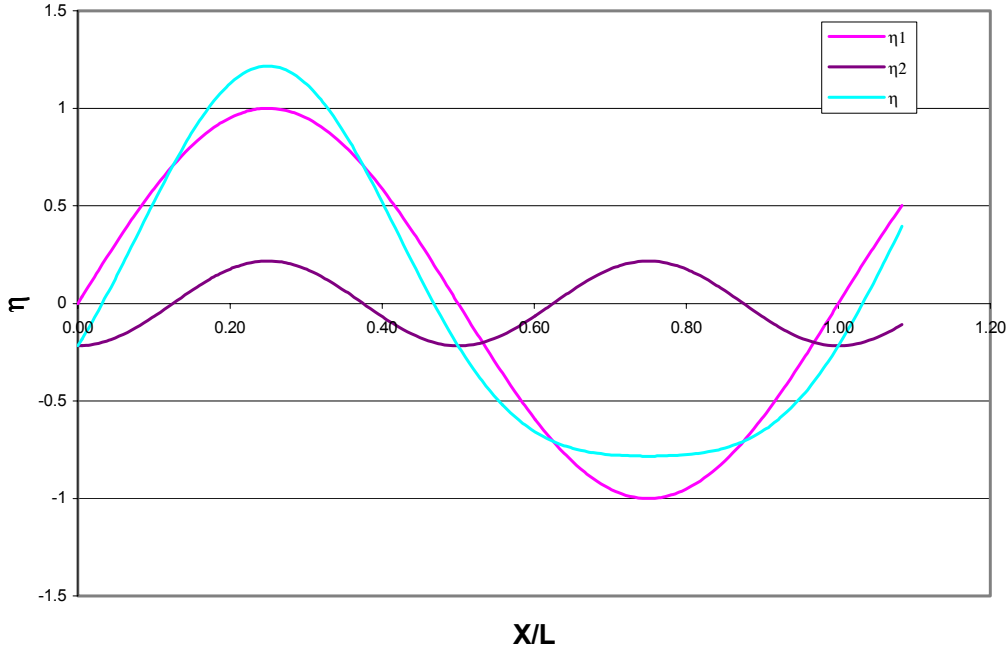


Figura 5.19. Profilo (in verde) al tempo $t=0.25T$ di un'onda di *Stokes* al secondo ordine di approssimazione ($H=2\text{m}$, $h=10\text{m}$, $T=10\text{s}$).

E' opportuno precisare che al secondo ordine di approssimazione la relazione di dispersione, così come ricavata dalla teoria lineare, risulta ancora valida. Inoltre, sia la lunghezza d'onda che la celerità risultano indipendenti dall'altezza d'onda.

Come detto in precedenza, la teoria di *Stokes* agli ordini superiori impone la presenza di orbite descritte dalle particelle d'acqua "aperte". Con ciò si realizza un trasporto di massa nella direzione del verso di propagazione dell'onda. Detto trasporto di massa viene caratterizzato attraverso una velocità data proprio dallo spostamento netto della particella d'acqua in un periodo, diviso il periodo dell'onda. Al secondo ordine di approssimazione detta velocità è data dalla seguente espressione:

$$\bar{U}(z) = \left(\frac{\pi H}{L} \right)^2 \frac{C}{2} \frac{\cosh[4\pi(z+h)/L]}{\sinh^2(2\pi h/L)} \quad (5.123)$$

E' appena il caso di notare che se il trasporto di massa induce un accumulo di massa in qualche regione, allora la superficie libera deve aumentare, e, di conseguenza, si innescherà un gradiente di pressione che, a sua volta, genererà una corrente capace di riequilibrare la distribuzione di massa in maniera tale che, rispetto ad un qualunque piano verticale, il trasporto di massa complessivo medio sia nullo.

Infine si riporta l'espressione della distribuzione di pressione, così come si ricava dalla teoria al secondo ordine di approssimazione. Nell'espressione seguente i termini proporzionali al quadrato dell'altezza d'onda rappresentano proprio i termini correttivi della teoria lineare.

$$\begin{aligned} p = & -\rho g z + \rho g \frac{H}{2} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh(kh)} \cos(kx - \sigma) + \\ & + \frac{3}{8} \rho g \frac{\pi H^2}{L} \frac{\tanh(kh)}{\sinh^2(kh)} \left\{ \frac{\cosh[2k(z+h)]}{\sinh^2(kh)} - \frac{1}{3} \right\} \cos[2(kx - \sigma)] - \\ & - \frac{1}{8} \rho g \frac{\pi H^2}{L} \frac{\tanh(kh)}{\sinh^2(kh)} \{ \cosh[2k(z+h)] - 1 \} \cos[2(kx - \sigma)] \end{aligned} \quad (5.124)$$

Il terzo termine a secondo membro rappresenta proprio la componente stazionaria prima descritta legata al trasporto di massa.

5.5.2. Equazioni non-lineari per acque basse (NLSWE)

Si suggerisce la lettura di questo paragrafo solo dopo aver letto, anche sommariamente, i capitoli successivi.

La teoria di *Stokes* risulta inapplicabile quando il rapporto $h/L > 1/8$, ovvero quando $kh > 0.78$, oppure quando $U_R < 0.79$. Pertanto per onde più lunghe dovrebbero essere utilizzate altre teorie.

Quando un'onda si propaga in acque basse, parte dell'onda viaggia più velocemente poiché vi è anche una dispersione in ampiezza oltre che in frequenza. Dal punto di vista matematico, pertanto, la rappresentazione delle onde in acque basse viene effettuata introducendo un ulteriore parametro perturbativo per tenere conto proprio della dispersione sia in ampiezza che in frequenza.

I limiti della teoria di *Stokes* emergono, da un punto di vista pratico, in diverse situazioni. Ad esempio, nella mappatura del rischio di aree costiere è di primaria importanza la determinazione del *run-up*, ossia della massima risalita dell'onda su spiagge di fissate caratteristiche geometriche. In passato sono state effettuate ricerche per la determinazione di formule ed abachi che fornissero il *run-up* massimo sulle strutture costiere (*Faville*, 1955; *Owen*, 1980, *Owen and Steele*, 1993). Queste formulazioni empiriche si sono rivelate abbastanza soddisfacenti ma sono largamente basate su esperimenti su onde monocromatiche o spettri d'onda con spettri stretti e la loro applicazione è limitata ad un esiguo numero di opere. Un modello numerico ha, invece, la potenzialità di predire il run up per treni d'onda più complessi e per spiagge non semplici, soprattutto nel caso in cui le onde frangano durante il loro avvicinamento alla spiaggia.

In passato sono stati sviluppati diversi modelli basati sulle “Non Linear Shallow Water Equation” (NLSWE) (*Stoker* 1957, *Hibberd and Peregrine* 1979; *Kobayashi and Watson* 1987; *Kobayashi et al.* 1987, 1989; *Mase* 1995; *Titov and Synolakis*, 1995; *Dodd*, 1998).

Il modello illustrato di seguito è anch'esso basato sulle NLSWE, tuttavia la formulazione effettuata è particolarizzata ai fini di una integrazione numerica utilizzando lo schema di McCormack, ossia di uno schema shock capturing, necessario per risolvere le discontinuità in corrispondenza delle onde al frangimento.

Schematizzazione e formulazione del problema

Si consideri il campo di moto generato dal moto ondoso che si propaga su di un fondo non erodibile. Si considerino inoltre le condizioni di acque basse cioè $h^*/L^* < 1/20$, in cui h^* è la profondità ed L^* è la lunghezza d'onda. Si fissi inoltre un sistema di riferimento (x^*, z^*) tale che x^* coincida con il pelo libero in condizioni di quiete e presenti il verso positivo in direzione *on-shore* e z^* sia diretto verso l'alto. Con riferimento alla schematizzazione rappresentata in Figura 5.20 in cui $\eta^*(x^*, t^*)$ indica l'elevazione della superficie libera rispetto al livello di quiete, $d^*(x^*, t^*) = h^*(x^*) + \eta^*(x^*, t^*)$ la profondità totale, ν e ρ , rispettivamente, la viscosità cinematica e la densità del fluido, il problema della determinazione del campo di moto risulta governato dall'equazione del moto, dall'equazione di continuità e dalle opportune condizioni al contorno e iniziali.

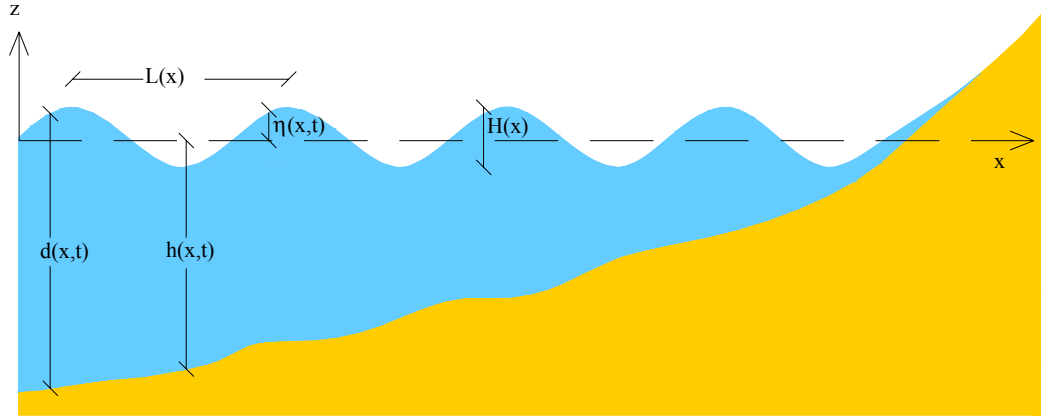


Figura 5.20. Schematizzazione del problema per la definizione delle *NLSWE*.

Le equazioni di seguito illustrate possono essere utilizzate per risolvere il campo di moto in presenza di fondali poco profondi, in cui le onde risentono degli effetti delle forze esercitate dal fondo, ed a causa dei quali esse diventano asimmetriche fino a frangersi. Da frangenti, le onde dissipano la maggior parte dell'energia che possiedono, diminuiscono in altezza fino ad annullarsi in corrispondenza della nuova linea di battigia. In formule:

- Equazione del moto

$$\frac{\partial}{\partial t^*} [(h^* + \eta^*) U^*] + \frac{\partial}{\partial x^*} \left[U^{*2} (h^* + \eta^*) + \frac{1}{2} g (h^* + \eta^*)^2 \right] = g (h^* + \eta^*) \frac{\partial h^*}{\partial x^*} - \frac{f_w}{2} U^* |U^*| \quad (5.125)$$

- Equazione di continuità

$$\frac{\partial (h^* + \eta^*)}{\partial t^*} + \frac{\partial [(h^* + \eta^*) \cdot U^*]}{\partial x^*} = 0 \quad (5.126)$$

in cui, $U^*(x^*, t^*)$ è la velocità mediata lungo la verticale, f_w è il coefficiente di attrito e g l'accelerazione di gravità.

Le condizioni al contorno

E' chiaro come la risoluzione del problema possa essere affrontata solo dopo aver definito le opportune condizioni al contorno. Le condizioni iniziali utilizzate sono quelle di quiete. Le condizioni al contorno lato mare sono legate sia all'onda incidente nella zona di interesse, che alla possibilità di consentire la fuoriuscita dal campo di studio delle onde riflesse, mentre lungo la spiaggia si è imposta una profondità minima al di sotto della quale la sezione si considera asciutta.

Per quanto riguarda la condizione al contorno al largo, oltre ad imporre il segnale del treno d'onda in ingresso al dominio in esame, si è anche implementata la condizione al contorno trasmissiva che consente alle onde riflesse di abbandonare il dominio in esame. Più precisamente, seguendo l'approccio di *Kobayashi e Wurjanto* (1989) e particolarizzandolo al sistema di riferimento in esame, detta condizione trasmissiva può essere ricavata riscrivendo le equazioni (5.125) e (5.126) in termini di invarianti di *Riemann* lungo le linee caratteristiche

$$\frac{dx^*}{dt^*} = U^* + c^* \text{ e } \frac{dx^*}{dt^*} = U^* - c^* :$$

$$\frac{\partial R^{*+}}{\partial t^*} + (U^* + c^*) \frac{\partial R^{*+}}{\partial x^*} = g \frac{\partial h^*}{\partial x^*} - \frac{1}{2} f_w \frac{U^* |U^*|}{d^*} \quad (5.127)$$

$$\frac{\partial R^{*-}}{\partial t^*} + (U^* - c^*) \frac{\partial R^{*-}}{\partial x^*} = g \frac{\partial h^*}{\partial x^*} - \frac{1}{2} f_w \frac{U^* |U^*|}{d^*} \quad (5.128)$$

in cui:

$$\begin{aligned} R^{*+} &= U^* + 2c^* \\ R^{*-} &= U^* - 2c^* \end{aligned} \quad (5.129)$$

E' assunto che in prossimità del contorno a largo si abbia $|U^*| < c^*$. Una differenziazione di tipo up-wind permette di esprimere R_0^{*-} al nuovo passo temporale in termini delle altre variabili al vecchio passo temporale all'interno del dominio di interesse. La chiusura del problema si ha imponendo la seconda condizione al contorno. Con essa si esprime R_0^{*+} come combinazione di onde incidenti e riflesse, allo stesso modo di *Kobayashi e al.* (1987). In definitiva, la condizione di altezza d'onda è data dalla seguente relazione:

$$d^* = h_0^* + \eta_i^*(t^*) + \eta_r^*(t^*) \quad (5.130)$$

in cui $\eta_i^*(t^*)$ e $\eta_r^*(t^*)$ sono le variazioni della superficie libera dovute rispettivamente alle onde incidenti e riflesse. Si precisa che la sovrapposizione di $\eta_i^*(t^*)$ e $\eta_r^*(t^*)$ ad $x^*=0$ viene fatta assumendo che gli effetti non lineari siano sufficientemente piccoli in prossimità di $x^*=0$, cosicché le onde riflesse non interagiscono con le onde incidenti. Le onde incidenti sono specificate come input in termini di serie temporali. Le onde riflesse a $x^*=0$ in prima approssimazione sono stimate sulla base delle ipotesi di onde lineari a largo. Infatti, dalla teoria lineare per le acque basse è possibile determinare le velocità:

$$U_i^* \cong \eta_i^* \sqrt{\frac{g}{h_0^*}} \quad (5.131)$$

$$U_r^* \cong \eta_r^* \sqrt{\frac{g}{h_0^*}} \quad (5.132)$$

associate rispettivamente a $\eta_i^*(t^*)$ e $\eta_r^*(t^*)$. Noto $(R_0^{*-})^{n+1}$ ed utilizzando la (5.131) e la (5.132) si ha:

$$R_0^{*-} = U^* - 2c^* = U_i^* + U_r^* - 2\sqrt{g(h_0^* + \eta_i^* + \eta_r^*)} \quad (5.133)$$

Inoltre, se $\eta_{\text{tot}}^* = \eta_i^* + \eta_r^* \ll h_0^*$ si ha:

$$\sqrt{h_0^* + \eta_i^*} \cong \sqrt{h_0^*} + \eta_i^* \left[\frac{1}{2\sqrt{h_0^* + \eta_i^*}} \right]_{\eta_i^*=0} + O(\eta_i^{*2}) \quad (5.134)$$

Per cui si ottiene:

$$R_{0}^{*-} \equiv \eta_i^* \sqrt{\frac{g}{h_0^*}} - \eta_r^* \sqrt{\frac{g}{h_0^*}} - 2\sqrt{gh_0^*} - 2\sqrt{g}\eta_i^* \frac{1}{2\sqrt{h_0^*}} -$$

$$2\sqrt{g}\eta_r^* \frac{1}{2\sqrt{h_0^*}} = -2\eta_r^* \sqrt{\frac{g}{h_0^*}} - 2\sqrt{gh_0^*}$$
(5.135)

Si determina in tal modo η_r^* come:

$$\eta_r^* = -h_0^* - \frac{R_{0}^{*-}}{2} \sqrt{\frac{h_0^*}{g}}$$
(5.136)

Infine la velocità associata alla sezione $x^*=0$ viene ricavata attraverso la relazione:

$$U^*(t^*) = R_{0}^{*-} + 2c^*$$
(5.137)

Il contorno lato spiaggia non ha bisogno di particolare condizione al contorno, infatti è sufficiente scegliere come ultimo punto computazionale una sezione talmente lontana da non essere interessata dalla propagazione del campo di moto. Pertanto, all'interno del dominio è definita una profondità minima (d_{min}^*) al di sotto della quale la sezione si considera asciutta e vengono annullate sia la profondità che la portata (Dodd, 1998).

Risoluzione del problema

Per una più semplice integrazione è opportuno riscrivere il problema in forma adimensionale. Nella fattispecie, sono state utilizzate le seguenti variabili:

$$h = \frac{h^*}{h_0^*}; \eta = \frac{\eta^*}{h_0^*}; d = \frac{d^*}{h_0^*}; U = \frac{U^*}{\sqrt{gh_0^*}}; x = \frac{x^*}{h_0^*}; t = \frac{t^* \sqrt{gh_0^*}}{h_0^*}$$

in cui:

g è l'accelerazione di gravità

h_0^* è la profondità nella sezione $x^*=0$.

Quindi, le equazioni scritte in forma adimensionale sono:

$$\frac{\partial d}{\partial t} + \frac{\partial(dU)}{\partial x} = 0$$
(5.138)

$$\frac{\partial(dU)}{\partial t} + \frac{\partial\left(dU^2 + \frac{1}{2}d^2\right)}{\partial x} = d \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{f_w}{2} U|U|$$
(5.139)

Lo schema numerico utilizzato per risolvere il campo di moto è quello di *McCormack*. La scelta di tale schema è dovuta al fatto che si tratta di uno schema *shock capturing*, necessario per la presenza del frangimento dell'onda, esplicito del secondo ordine, per cui relativamente semplice da applicare. Inoltre per eliminare le oscillazioni numeriche prodotte da tale metodo in corrispondenza dei punti delle discontinuità si è adottato uno schema di *McCormack* con un

passo aggiuntivo adottando la formulazione in accordo con la teoria della *Total Variation Diminishing* o *TVD* (Toro, 1997).

Lo schema di McCormack

L'algoritmo di *McCormack* appartiene ai metodi del tipo *predictor-corrector*. Si tratta di una categoria di schemi a passi multipli, in cui il valore al passo temporale $n+1$, inizialmente stimato con una formula di tipo esplicito (fase di predizione), viene utilizzato per determinare il valore di correzione. Il valore definitivo al passo $n+1$ si determina infine come media dei valori delle variabili ricavate al passo di predizione e al passo di correzione.

Lo schema richiede che le equazioni siano scritte in forma di legge conservativa, cioè:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = \mathbf{D}(\mathbf{U}) \quad (5.140)$$

dove x e t sono le variabili indipendenti, \mathbf{U} è il vettore delle variabili dipendenti, $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ è il vettore di flusso e $\mathbf{D}(\mathbf{U})$ è il vettore dei termini sorgente.

Tenendo conto delle equazioni (5.138) e (5.139), nel caso in specie la (5.140) può essere riscritta come segue:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} d \\ q \end{bmatrix}; \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} q \\ \frac{q^2}{d} + \frac{1}{2}d^2 \end{bmatrix}; \mathbf{D}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} 0 \\ d \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{2}f_w \frac{q|q|}{d^2} \end{bmatrix} \quad (5.141)$$

in cui si è posto $q = d \cdot U$.

La risoluzione dell'equazione (5.140) nello schema di *McCormack* si attua nei due passi di predizione:

$$\mathbf{U}_i^p = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+1}^n) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_i^n)] + \Delta t \cdot \mathbf{D}(\mathbf{U}_i^n) \quad (5.142)$$

e di correzione:

$$\mathbf{U}_i^c = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathbf{F}(\mathbf{U}_i^p) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_{i-1}^p)] + \Delta t \cdot \mathbf{D}(\mathbf{U}_i^p) \quad (5.143)$$

essendo i ed n rispettivamente gli indici spaziale e temporale dei punti sul piano (x,t) . Con gli apici p e c sono indicati rispettivamente i valori di predizione e di correzione della variabile \mathbf{U} .

Nel primo passo vengono calcolati i valori approssimati delle variabili sulla base dei valori al tempo precedente. Questi sono poi utilizzati nel secondo passo per determinare i valori corretti da attribuire alle stesse variabili. I valori definitivi, assunti alla fine dell'incremento di tempo Δt considerato, si calcolano come media tra quelli di predizione e quelli di correzione:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \frac{1}{2} (\mathbf{U}_i^p + \mathbf{U}_i^c) \quad (5.144)$$

Occorre inoltre precisare che, per migliorare l'accuratezza dello schema, la derivata del temine di flusso $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ è stata discretizzata alle differenze finite all'indietro (tra $i-1$ e i) nella fase di predizione e in avanti (tra i e $i+1$) nella fase di correzione quando l'indice n del passo temporale è pari, mentre viene condotta la procedura inversa per indice n dispari

La stabilità dello schema è garantita dalla condizione di *Courant-Friedrichs-Lewy* o semplicemente condizione di *Courant* che impone:

$$\hat{C} = \frac{\left(|V^*| + c^* \right)_{\max} \Delta t^*}{\Delta x^*} \leq 1 \quad (5.145)$$

in cui $c = \sqrt{g \cdot d}$ rappresenta la celerità delle piccole propagazioni.

Poiché utilizzando lo schema di *McCormack* si rileva spesso un'eccessiva oscillazione numerica in corrispondenza dei punti di discontinuità. Per risolvere tale problema si suggerisce l'adozione dello schema di *McCormack* in accordo alla teoria degli schemi *Total Variation Diminishing*.

Schema di McCormack con TVD

Per ridurre la presenza di oscillazioni numeriche conviene modificare lo schema di McCormack in accordo alla teoria degli schemi *Total Variation Diminishing (TVD)* in grado di eseguire brusche discontinuità puntuali senza la generazione di oscillazioni indesiderate che molti metodi classici indicano. Tali schemi sono inoltre capaci di conservare il secondo ordine di accuratezza nel tempo e nello spazio in tutto il campo eccetto i punti estremi (*Navarro et al.*, 1992). In tale schema, rispetto al metodo di *McCormack*, si aggiunge un passo temporale di dissipazione, la cui formulazione è basata su considerazioni aderenti alla realtà fisica del fenomeno (*Toro*, 1997).

Per illustrare la formulazione del passo *TVD* è opportuno riformulare le equazioni nella forma non conservativa equivalente alla (5.140):

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{J}(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \mathbf{D}(\mathbf{U}) \quad (5.146)$$

In cui, $\mathbf{J}(\mathbf{U})$ è la matrice Jacobiana del vettore di flusso \mathbf{F} : in particolare, se \mathbf{F} assume l'espressione (5.141) la matrice $\mathbf{J}(\mathbf{U})$ si può scrivere:

$$\mathbf{J}(\mathbf{U}) = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ d - \frac{q^2}{d^2} & 2 \frac{q}{d} \end{bmatrix} \quad (5.147)$$

i cui autovalori sono:

$$a_1 = U + c; \quad a_2 = U - c \quad (5.148)$$

e rappresentano le celerità assolute di propagazione delle perturbazioni, essendo c la celerità relativa della perturbazione in forma adimensionale pari a:

$$c = \sqrt{d} \quad (5.149)$$

I corrispondenti autovettori sono:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ U + c \end{bmatrix}; \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ U - c \end{bmatrix} \quad (5.150)$$

La formulazione dello schema di *McCormack* con *TVD* per l'equazione (5.146) risulta quindi essere la seguente:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \frac{1}{2}(\mathbf{U}_i^p + \mathbf{U}_i^c) + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\mathbf{S}_{i+\frac{1}{2}}^n - \mathbf{S}_{i-\frac{1}{2}}^n \right) \quad (5.151)$$

da cui si evince come la presenza del *TVD* introduce un passo aggiuntivo di dissipazione in cui il termine $\mathbf{S}_{i+\frac{1}{2}}^n$ (e analogamente il termine $\mathbf{S}_{i-\frac{1}{2}}^n$) è esprimibile nella forma:

$$\mathbf{S}_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \alpha_{i+\frac{1}{2}}^k \psi \left(a_{i+\frac{1}{2}}^k \right) \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left| a_{i+\frac{1}{2}}^k \right| \right) \left[1 - \chi \left(r_{i+\frac{1}{2}}^k \right) \right] \mathbf{e}_{i+\frac{1}{2}}^k \quad (5.152)$$

Nella (5.152), la velocità $U_{i+1/2}$ e la celerità $c_{i+1/2}$ che compaiono nell'espressione della celerità assoluta $a_{i+1/2}$ sono approssimate per mezzo delle espressioni:

$$U_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{q_{i+1}}{\sqrt{d_{i+1}}} + \frac{q_i}{\sqrt{d_i}}}{\sqrt{d_{i+1}} + \sqrt{d_i}} \quad c_{i+\frac{1}{2}} = \frac{c_{i+1} + c_i}{2} \quad (5.153)$$

$\alpha_{i+1/2}^k$ rappresenta la proiezione del salto nel valore di \mathbf{U} tra gli stati i e $i+1$ sull'autovettore approssimato $\mathbf{e}_{i+1/2}^k$ e assume l'espressione (Navarro e al. 1992):

$$\alpha_{i+\frac{1}{2}}^k = \frac{\pm 1}{2c_{i+1/2}} [(q_{i+1} - q_i) + (-U_{i+1/2} \pm c_{i+1/2})(d_{i+1/2} - d_i)] \quad (5.154)$$

La funzione ψ è una correzione di $\alpha_{i+1/2}^k$ che elimina la presenza di salti non fisici ed è assunta nella forma:

$$\psi(a) = \max(|a|, \delta) \quad (5.155)$$

dove δ è un valore piccolo, scelto pari a 0.2.

Il termine χ introduce una dissipazione numerica ed è funzione del rapporto:

$$r_{i+1/2}^k = \frac{\alpha_{i+1/2}^k}{\alpha_{i+1/2}^k} \quad (5.156)$$

essendo:

$$s = \text{segno}(a_{i+1/2}^k) \quad (5.157)$$

La funzione χ scelta assume l'espressione (Sweby, 1984):

$$\chi(r) = \frac{|r| + r}{1 + |r|} \quad (5.158)$$

L'effetto della funzione χ è quello di aggiungere una sufficiente dissipazione numerica allo schema, dove esiste una discontinuità, lasciando inalterate le regioni con variazioni graduali.

La condizione di stabilità è più restrittiva di quella di *Courant-Friedrichs-Lewy* prima menzionata per lo schema di *McCormack*, infatti il numero di *Courant* deve ora soddisfare la

seguente relazione:

$$\hat{C} \leq \frac{2}{2 + \chi_{\max}} \quad (5.159)$$

dove χ_{\max} rappresenta il valore massimo assunto nel dominio dalla χ ricavata nella (5.158).

Applicazione del modello presentato per l'analisi del processo di trasformazione di un gruppo d'onde

I dati sperimentali di seguito utilizzati sono quelli presentati da *Mase* (1995) ottenuti in una canaletta costituita da una prima regione a profondità costante pari a 0.47 m, seguita da una seconda debolmente acclive a pendenza costante 1:20 (vedere Figura 5.21). L'analisi della trasformazione del moto ondoso è affidata a dodici sonde di misura poste nei punti a profondità pari a 0.47, 0.35, 0.30, 0.25, 0.20, 0.175, 0.15, 0.125, 0.10, 0.075, 0.05, 0.025 m. Inoltre, l'installazione di un misuratore di *run-up* consente la determinazione della risalita dell'onda sulla spiaggia.

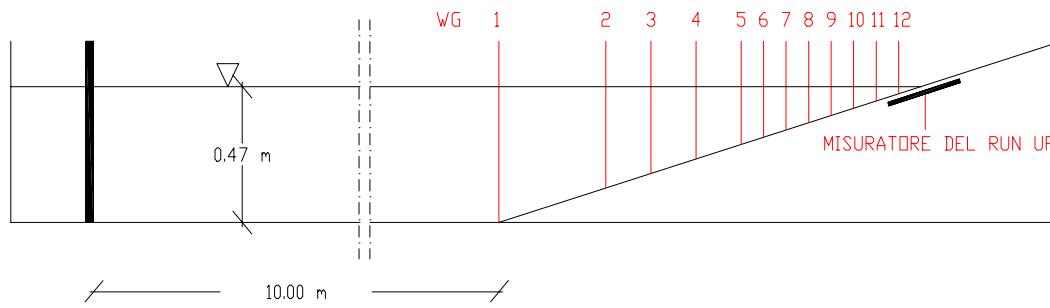


Figura 5.21. Schema della canaletta sperimentale utilizzata da *Mase* (1995).

Per la validazione del modello in questione, tra i differenti esperimenti effettuati da *Mase* (1995), si è utilizzato quello relativo allo studio di un gruppo d'onde generate dalla legge rappresentata in Figura 5.22 ed espressa dalle seguenti equazioni:

$$\frac{\eta}{\eta_{\max}} = \cos(\alpha t) \cos(0.1\alpha t) \quad (5.160)$$

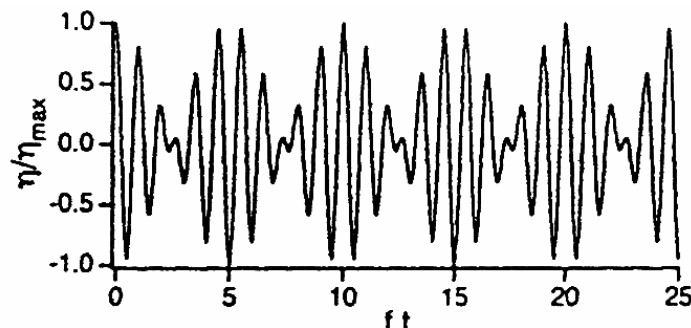


Figura 5.22. Il treno d'onda riprodotto da *Mase* (1995).

La serie temporale descritta dalla (5.160) e illustrata nella Figura 5.22 rappresenta dieci onde individuali con frequenza pari a 0.4 Hz. I dati inerenti alla trasformazione d'onda ed al

corrispondente *run-up* misurati da *Mase* sono stati confrontati con i risultati ottenuti dall'applicazione del modello numerico sopra descritto, in cui gli output sono stati imposti in corrispondenza delle stesse posizioni di misura dell'apparato sperimentale. Dal momento che il codice implementato richiede che la condizione di onde su acque basse sia verificata, si sono utilizzati solamente i dati relativi alle sonde 8÷12, mentre come segnale in ingresso si è adottato quello fornito dalla sonda 7.

La simulazione numerica rappresentata in Figura 5.23 è stata ottenuta utilizzando un coefficiente di resistenza al fondo costante e pari a $f_w=0.01$, un passo spaziale $\Delta x=0.05$ m e un passo temporale di circa $\Delta t=0.015$ s ricavato dalla condizione (5.159).

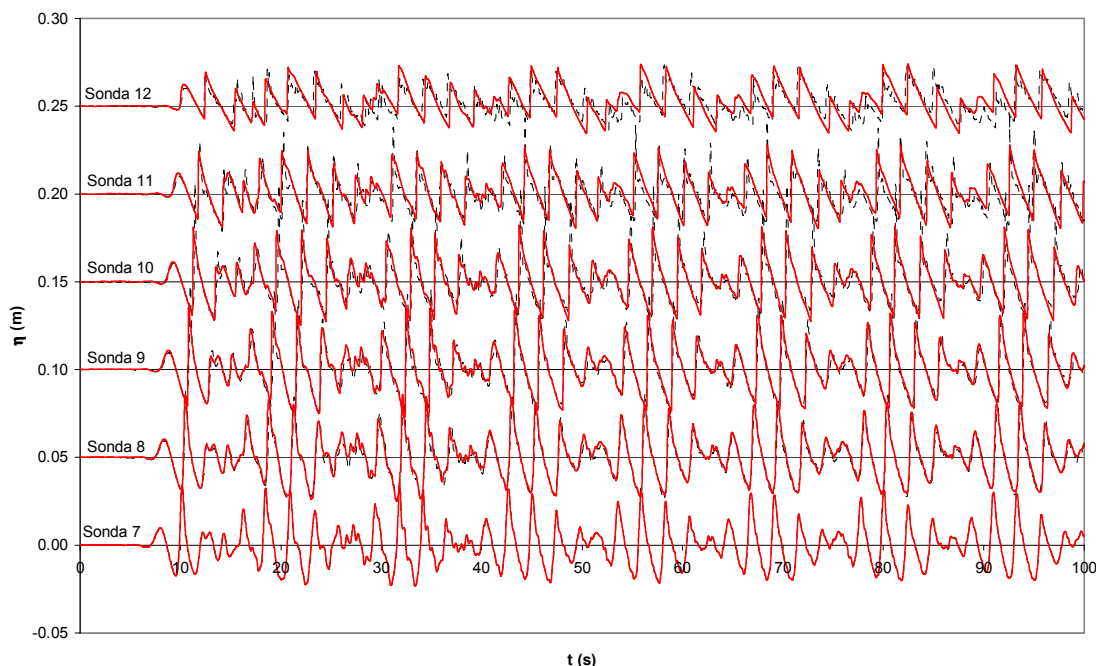


Figura 5.23. Confronto tra i dati sperimentali di *Mase* (1995) e i risultati forniti dall'applicazione del modello proposto sulla trasformazione d'onda.

Complessivamente, la riproduzione delle elevazioni della superficie libera in corrispondenza di ciascun punto di misura può ritenersi molto buona. Le onde si propagano alla corretta celerità. Sono tuttavia evidenti alcune discrepanze principalmente in corrispondenza delle sonde 10 e 11. In tale regione, nei test sperimentali di *Mase*, le onde divengono asimmetriche e caratterizzate da un brusco picco seguito da una serie di oscillazioni minori.

In Figura 5.24 è, invece, riportato il confronto tra l'analisi del *run-up* di *Mase* e quella effettuata tramite il modello proposto utilizzando gli stessi parametri sopra descritti.

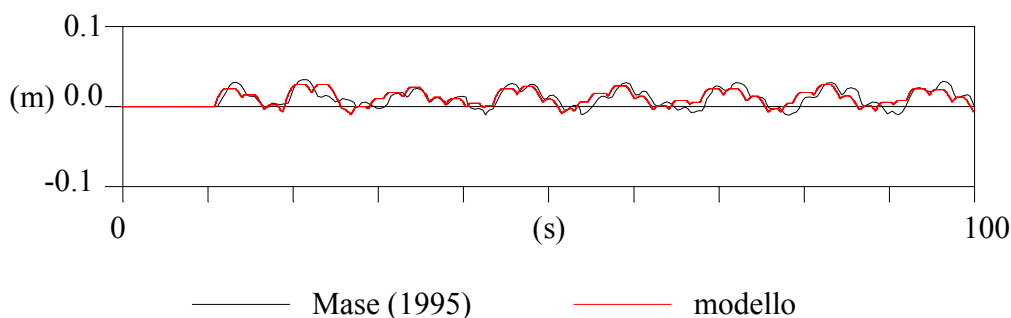


Figura 5.24. Confronto tra i dati sperimentali di *Mase* (1995) e i risultati forniti dall'applicazione del modello proposto sul *run-up*.

L'analisi del segnale del *run-up* risulta essere soddisfacente: infatti il valore massimo del *run-up* è definito in modo abbastanza corretto anche se non altrettanto può dirsi del valore minimo, comunque l'andamento temporale è corretto.

E' importante evidenziare come il valore del coefficiente di resistenza non sia molto rilevante per la trasformazione dell'onda quanto, invece, per la predizione del *run-up*.

5.5.3. Equazioni di Boussinesq

Le equazioni di *Boussinesq*, così come le NLSWE, sono equazioni integrate sulla verticale normalmente impiegate per lo studio di onde di gravità nelle regioni prossime alla costa. Assumendo un profilo di velocità sulla verticale, oltre che ad una distribuzione delle pressioni non idrostatica, i modelli alla *Boussinesq* includono effetti di non-linearità e di dispersione in frequenza, mentre non prevedono l'automatica descrizione del fenomeno del frangimento.

Si può notare come nel caso di profondità costante, le equazioni alla *Boussinesq* differiscano dalle NLSWE per un solo termine nell'equazione della quantità di moto. Detto termine permette di rappresentare proprio la dispersione in frequenza tenendo conto dell'accelerazione verticale sia sulla componente orizzontale della velocità che sulla pressione.

Peregrine (1966, 1967) fu il primo a derivare le equazioni alla *Boussinesq* per come le conosciamo oggi. Più precisamente, egli derivò le equazioni nel caso di profondità variabile sotto le ipotesi di moto irrotazionale, ossia di onde non frangenti, integrando sulla profondità le equazioni di *Eulero* e adottando poi un approccio perturbativo. Le equazioni che ricavò sono le seguenti:

$$\frac{\partial d}{\partial t} + \nabla \cdot [(h+d)\bar{\mathbf{u}}] = 0 \quad (5.161)$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} + \nabla d = \frac{1}{2} h \frac{\partial}{\partial t} \nabla [\nabla \cdot (h\bar{\mathbf{u}})] - \frac{1}{6} h^2 \frac{\partial}{\partial t} \nabla (\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}) \quad (5.162)$$

in cui $\bar{\mathbf{u}}$ è il vettore velocità mediato sulla verticale.

E' opportuno sottolineare che una delle ipotesi alla base delle citate equazioni è che il fondale sia leggermente acclive così da poter trascurare gli effetti legati alla riflessione dell'onda.

Inoltre, la cosiddetta approssimazione di *Boussinesq* impone che gli effetti non lineari del moto ondoso bilancino esattamente gli effetti dispersivi. In altre parole si assume che $O(U_R)=1$. Invero, proprio sulla base di questo bilancio tra effetti non lineari e dispersione in frequenza, è possibile ricavare per il caso di profondità costante, soluzioni esatte dell'equazioni di *Boussinesq* come quelle dell'onda solitaria e dell'onda cnoidale.

In definitiva, le limitazioni poste dalle equazioni in oggetto sono sostanzialmente due. La prima riguarda le deboli non linearità. Infatti in acque basse, soprattutto in prossimità del frangimento, le non linearità dell'onda sono rilevanti. La seconda, invece, è direttamente associata all'approssimazione di *Boussinesq*. Infatti, mentre in acque basse il parametro non lineare a/h può raggiungere elevati valori, il parametro dispersivo kh , al diminuire della profondità, diventa sempre più piccolo. Pertanto il profilo descritto dalle equazioni di *Boussinesq* risulta, in prossimità del frangimento, più simmetrico di quanto non si osservi sperimentalmente. Pertanto, più di recente, la ricerca è stata principalmente rivolta ad estendere i modelli alla *Boussinesq* al di là dei menzionati ambiti di applicabilità, ossia ampliando i modelli verso regioni

a più elevate profondità (cioè per valori di kh più grandi), nonché sviluppando modelli totalmente non lineari in modo tale da non avere limiti sui valori di a/h .