

6. PROPAGAZIONE DEL MOTO ONDOSO SU FONDALI GRADUALMENTE VARIABILI

6.1. Generalità

6.2. Il fenomeno di *shoaling*

6.3. Il fenomeno di frangimento

6.3.1. *Le principali figure di frangimento*

6.4. La rifrazione

6.4.1. *Formulazione del problema*

6.4.2. *Strategia numerica di risoluzione*

6.4.3. *Esempio di applicazione del modello numerico*

6.5. La diffrazione

6.5.1. *Modelli generali di propagazione*

6.5.2. *Diagrammi di Wiegel (1962)*

6.5.3. *Il boundary element method*

6.1. Generalità

Come si è già avuto modo di dire nei capitoli precedenti, i dati riguardanti la caratterizzazione del moto ondoso sono usualmente disponibili al largo (ossia laddove sono ubicate le stazioni ondametriche, ovvero dove i metodi indiretti di previsione possono essere adottati). Tuttavia, dal punto di vista applicativo, risulta indispensabile poter disporre di informazioni sotto costa. Basti pensare, ad esempio, al fatto che le opere di difesa costiera sono proprio ubicate in prossimità della riva.

Questa discrasia spaziale relativa alla disponibilità dei dati e alla necessità degli stessi, impone l'adozione di modelli di propagazione del moto ondoso, ossia di modelli che, assegnate le caratteristiche delle onde al largo (altezza, periodo e direzione di propagazione), consentano di conoscere le grandezze dell'onda in prossimità della costa.

In effetti, la propagazione dal largo alla riva è un processo estremamente complesso che, implicando la trasformazione delle caratteristiche dell'onda, risulta di difficile analisi senza l'adozione di drastiche semplificazioni. Pertanto nel presente capitolo verranno esaminati e descritti solamente alcuni dei principali fenomeni di trasformazione (*shoaling*, rifrazione, frangimento e diffrazione), peraltro dovuti a “graduali” (ovvero, come spesso si usa dire, “lente”) variazioni topografiche dei fondali.

6.2. Il fenomeno di *shoaling*

Quando il fondale presenta batimetriche¹ rettilinee e parallele, e il moto ondoso su profondità infinita ha direzione ortogonale alla linea di costa (ossia in presenza di un attacco frontale), allora le onde, nella loro propagazione dal largo verso la riva, si mantengono perfettamente bidimensionali (ossia “*long-crested*”).

Una situazione simile a quella appena descritta si può anche realizzare in una vasca con ondogeno all'interno della quale vengono generate onde cilindriche.

Nelle situazioni suddette, sia in mare aperto, sia in vasca, il fenomeno di *shoaling* (ossia di irripidimento dell'onda) rende conto delle variazioni delle caratteristiche delle onde per effetto delle variazioni di profondità attraverso un processo conservativo che impone, per l'appunto, dalla profondità infinita alla generica profondità h , la conservazione del flusso medio di energia per unità di larghezza della cresta.

¹ Si definiscono batimetriche, o isobate, quelle linee che congiungono punti ad uguale profondità. Pertanto la batimetrica zero individua la linea di riva.

Ricordando che la definizione di profondità infinita viene data sulla base del rapporto tra la profondità locale e la lunghezza d'onda, lo studio del fenomeno di shoaling può essere affrontato adottando lo schema concettuale di Figura 6.1.

Si consideri infatti un'oscillazione della paratoia di tipo periodico con conseguente generazione di onde regolari che, per le loro caratteristiche, possono essere considerate su profondità infinita. Si noti inoltre che nel passaggio dal punto A al punto B (ossia nel processo di propagazione da profondità infinita a profondità finita), sebbene vi sia una variazione di altezza d'onda, non vi è variazione di periodo (il periodo di ogni fenomeno nel canale è quello imposto dalla paratoia a ventola).

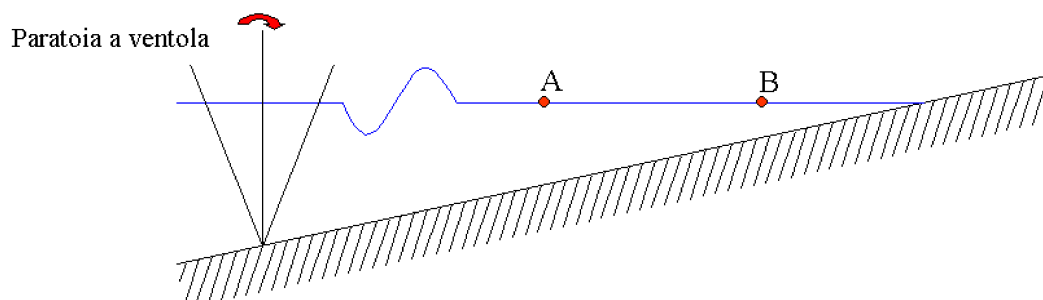


Figura 6.1. Generazione di onde regolari mediante oscillazione periodica della paratoia (si consideri il punto A su profondità infinita).

Si ipotizzi un fondale acclive di pendenza modesta e un trascurabile effetto degli attriti sia interni che al fondo.

Con riferimento alla Figura 6.2, si consideri quindi un volume di controllo individuato da due piani verticali perpendicolari alla direzione di propagazione delle onde. Sulla base delle citate ipotesi, in particolare per l'assenza di dissipazioni, la quantità media di energia nell'unità di tempo (potenza media) che attraversa la sezione (1-1), deve essere uguale a quella che attraversa la sezione (2-2). Ricordiamo che la potenza è data dal prodotto di una forza per una velocità, ovvero di una pressione per un'area per una velocità.

Esprimiamo la conservazione del flusso medio di energia tra la profondità infinita e la generica profondità h come:

$$E_o C_{g_o} = E C_g \quad (6.1)$$

avendo indicato con il pedice "o" le quantità su profondità infinita, con E la densità di energia e con C_g la velocità di propagazione dell'energia (celerità di gruppo). Il periodo dell'onda, come già detto, è considerato un invariante della propagazione.

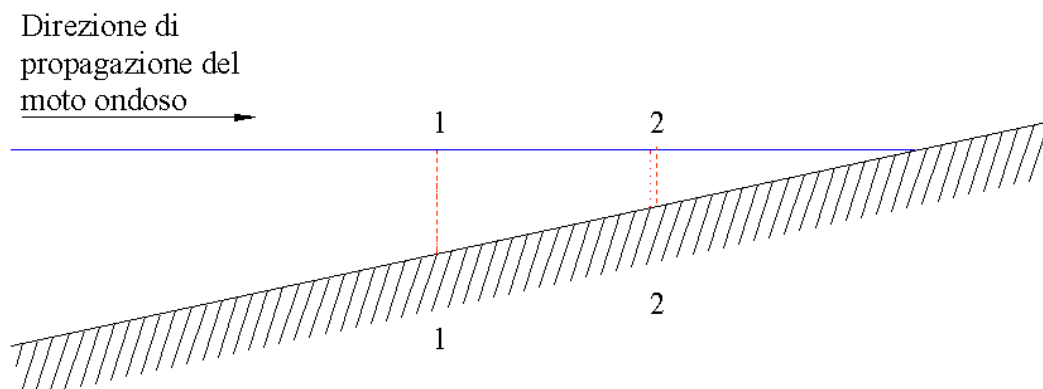


Figura 6.2. Schema del volume di controllo adottato per lo studio del fenomeno di *shoaling*.

Su profondità infinita e alla profondità h si ha, rispettivamente:

$$\begin{aligned} E_o &= \rho g H_o^2 & C_g &= \frac{C_o}{2} & C_o &= \frac{gT}{2\pi} \\ E &= \rho g H^2 & C_g &= \frac{C}{2} \left\{ 1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)} \right\} & C &= \frac{gT}{2\pi} \tanh(kh) \end{aligned} \quad (6.2)$$

Introducendo queste relazioni nell'equazione (6.1), si ottiene il coefficiente di *shoaling*:

$$k_s = \frac{H}{H_o} = \sqrt{\frac{C_{go}}{C_g}} = \sqrt{\frac{2 \cosh^2(kh)}{2kh + \sinh(2kh)}}. \quad (6.3)$$

Esso correla l'altezza d'onda H , corrispondente alla profondità locale h , all'altezza d'onda H_o al largo (su profondità infinita).

Possiamo anche rappresentare il coefficiente di *shoaling* H/H_o in funzione del rapporto h/L_o , ossia della profondità relativa (vedere Figura 6.3). Tale grafico va letto ricordando che nel processo di propagazione dal largo alla riva, l'onda procede verso profondità decrescenti (ossia da valori h/L_o più alti a valori h/L_o più bassi). Pertanto, come si vede, la variazione dell'altezza dell'onda per effetto della variazione della profondità (effetto di *shoaling*) è comunque piccolo (<10%). Infatti, l'asintoto rappresentato dall'asse delle ordinate cui tende l'altezza dell'onda al tendere a zero della profondità, è da considerarsi un'astrazione analitica: l'altezza d'onda non andrà mai all'infinito (ciò, tra l'altro, implicherebbe dal punto di vista fisico anche una crescita infinita del contenuto energetico dell'onda che, invece, può soltanto diminuire) perché prima subentrerà il fenomeno di frangimento, di seguito discusso, che porterà l'onda a ripiegarsi su se stessa e a trasformare l'energia organizzata del moto ondoso in energia turbolenta.

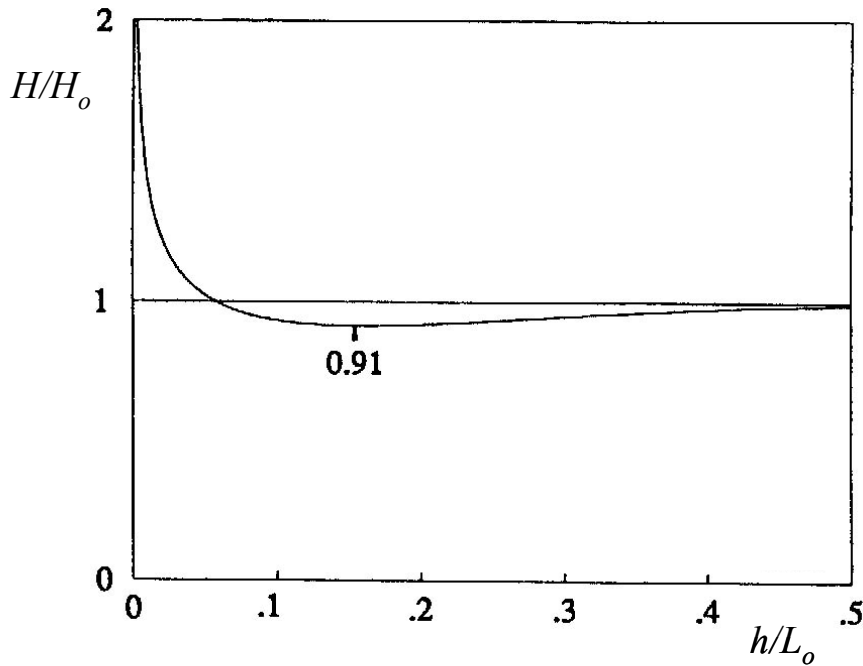


Figura 6.3. Rappresentazione dell'andamento del coefficiente di *shoaling* in funzione della profondità relativa (attacco frontale del moto ondoso).

6.3. Il fenomeno di frangimento

Un'onda regolare di lunghezza L (o periodo T) che si propaga su di una profondità h del fondo è instabile e frange quando la sua altezza H raggiunge e supera un valore H_b (altezza limite di stabilità o altezza di frangimento) che dipende da h e da L (ovvero da T).

Il criterio di frangimento più utilizzato è quello di *Stokes* (1880), in base al quale le onde frangono quando la velocità euleriana orizzontale u , in corrispondenza della cresta, uguaglia la velocità di fase $C=L/T$, cioè quando:

$$u_b = C_b \quad \text{per } \eta = \eta_c \quad (6.4)$$

avendo indicato con il pedice b le grandezze corrispondenti alla situazione di frangimento.

In tali condizioni il profilo d'onda presenta un angolo di 120° in corrispondenza di $\eta = \eta_c$, come mostra la Figura 6.4., la quale evidenzia inoltre che la cresta si mantiene simmetrica rispetto ad un asse verticale (frangimento cosiddetto di tipo *spilling*).

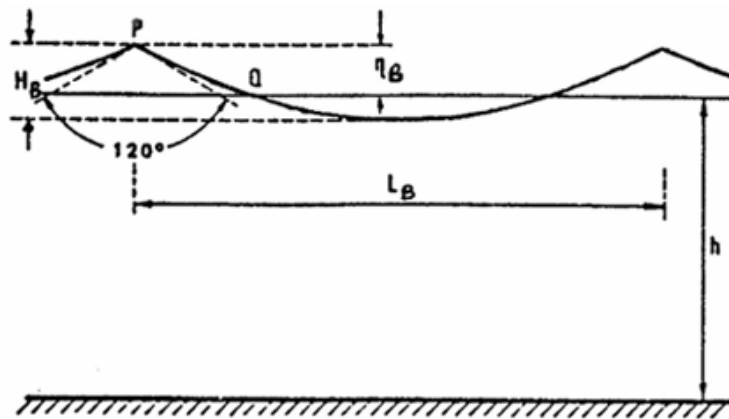


Figura 6.4. Profilo d'onda limite secondo il criterio di frangimento di *Stokes* (1880).

Applicando il citato criterio di *Stokes* nella condizione di profondità infinita, *Mitchell* (1893) ha invece proposto per la ripidità limite la seguente condizione dedotta a partire da un modello di rappresentazione del moto ondoso di tipo lineare:

$$H_b / L_b = 0.142 \approx \frac{1}{7} \quad (6.5)$$

In tale relazione la lunghezza d'onda al frangimento L_b è correlata alla lunghezza d'onda al primo ordine di approssimazione che, si ricorderà, è pari a:

$$L = L_o = \frac{gT^2}{2\pi} \quad (6.6)$$

attraverso la relazione:

$$L_b = 1.2L = 1.2 \frac{gT^2}{2\pi} \quad (6.7)$$

la quale conduce alla velocità di fase al frangimento

$$C_b = 1.2C = \frac{1.2gT}{2\pi} \quad (6.8)$$

Applicando lo stesso criterio di *Stokes* nella condizione di profondità finita, *Miche* (1944) ha proposto per la ripidità limite la relazione:

$$H_b / L_b = 0.142 \tanh\left(\frac{2\pi \cdot h}{L_b}\right) \quad (6.9)$$

valida per profondità relative:

$$\frac{h}{L_b} \geq 0.11 \quad (6.10)$$

Si noti come con la relazione di *Miche*, imponendo $L_b=L$, ovvero:

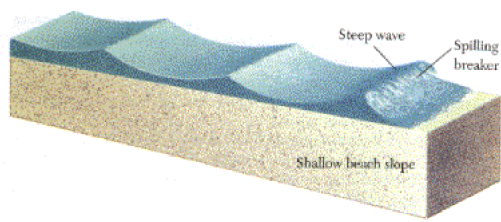
$$L_b = L = \left(\frac{gT^2}{2\pi}\right) \tanh(kh) \quad (6.11)$$

non venga verificata per la condizione di profondità infinita la relazione di *Mitchell*. In altre parole, la relazione di *Mitchell* per profondità infinita e quella di *Miche* per profondità finita sembrano, quando l'una viene fatta tendere nel campo di validità dell'altra, incongruenti. Proprio per questi motivi spesso si usa su profondità finita un altro criterio di frangimento, che lega la condizione limite alla sola profondità locale. Sulla base di tale criterio si ha frangimento quando:

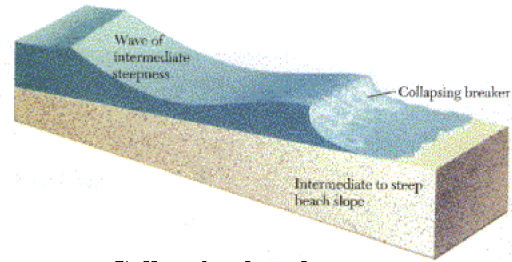
$$\frac{H}{h} > 0.8 \quad (6.12)$$

6.3.1. Le principali figure di frangimento

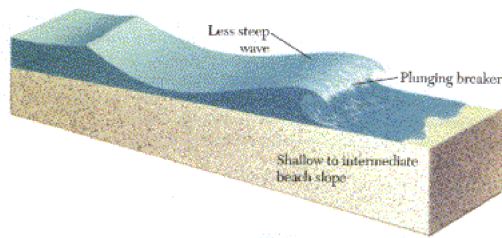
Come è esperienza comune, il frangimento può avvenire secondo diverse figure che si realizzano in funzione delle diverse caratteristiche delle onde e della pendenza dei fondali. Le principali figure di frangimento sono riportate in Figura 6.5.



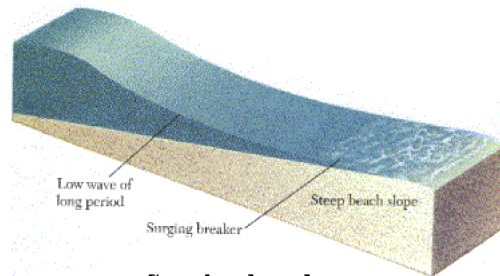
Spilling breaker



Collapsing breaker



Plunging breaker



Surging breaker

Figura 6.5. Principali figure di frangimento.

- a) *Spilling breaker*: il frangimento di tipo *spilling* è caratterizzato da cresta simmetrica rispetto all'asse verticale che passa per il punto più alto della cresta stessa. Presenta schiuma sul lato della cresta dalla parte del verso di propagazione del moto ondoso. Esso risulta associato a fondali orizzontali o a modesta pendenza e ad onde con elevata ripidità H_o/L_o al largo, essendo H_o l'altezza d'onda al largo che corrisponde all'altezza locale H prima del frangimento attraverso il processo di *shoaling*.
- b) *Plunging breaker*: il frangimento di tipo *plunging* è caratterizzato da una cresta non simmetrica rispetto alla verticale che passa per il punto più alto della cresta stessa, con la presenza di un "getto" e di una successiva "caduta" dalla parte del verso della propagazione del moto ondoso. Esso è associato a fondali a media pendenza e ad onde con media ripidità H_o/L_o al largo.
- c) *Collapsing breaker*: il frangimento di tipo *collapsing* è intermedio tra il frangimento di tipo *plunging* e il frangimento di tipo *surging* (spiegato nel seguito).
- d) *Surging breaker*: il frangimento di tipo *surging* è caratterizzato da una cresta non simmetrica rispetto alla verticale che passa per il punto più alto della cresta stessa, senza la presenza di un "getto" ma con schiuma dalla parte del verso di propagazione del moto ondoso. Esso è associato a fondali a forte pendenza (elevata riflessione) e ad onde con modesta ripidità H_o/L_o al largo.

Per individuare il tipo di frangimento, sono stati introdotti diversi indici empirici in funzione della pendenza del fondo e della ripidità dell'onda; tra essi ricordiamo quello di *Battjes* (1974):

$$\tilde{\beta} = \frac{s}{\sqrt{\frac{H_b}{L_o}}} \quad (6.13)$$

con s pendenza del fondo.

Come riportato nella Tabella 6.I, ovvero nella Figura 6.6, è possibile predire la figura di frangimento in funzione del parametro $\tilde{\beta}$ dato dalla (6.13).

Tabella 6.I. Indice di *Battjes* per i vari tipi di frangimento.

Tipo di frangimento	$\tilde{\beta}$
Spilling	<0.4
Plunging	$0.4 \div 0.2$
Surging	>0.2

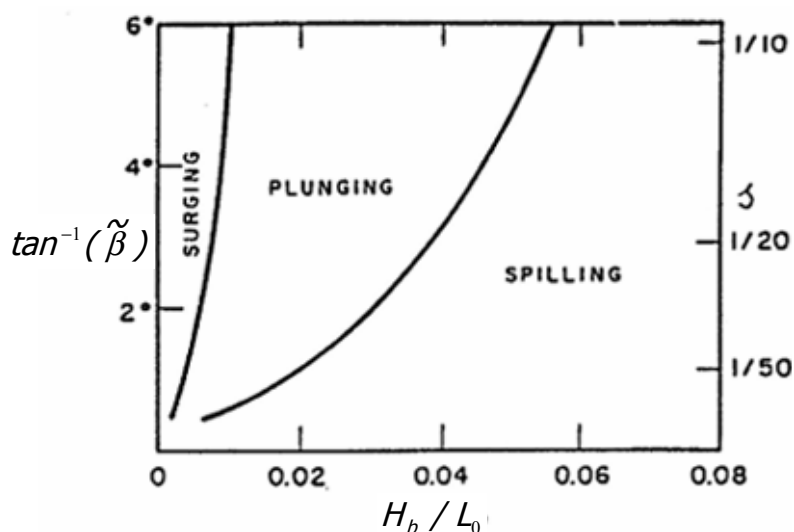


Figura 6.6. Regioni tipiche delle diverse figure di frangimento (s indica la pendenza del fondo).

6.4. La rifrazione

Come già accennato, la propagazione di un'onda dal largo verso la riva è un processo estremamente complesso anche a causa dei molteplici fenomeni fisici che intervengono, come i fenomeni di frangimento parziale, le influenze delle correnti di varia natura, le riflessioni in prossimità della costa, oltre alle irregolarità del fondo. Pertanto, ai fini di un suo studio analitico, si impone l'adozione di sensibili semplificazioni.

Nell'ambito del presente paragrafo la propagazione del moto ondoso caratterizzato da un angolo d'attacco qualunque, ossia da una qualunque direzione di propagazione, è affrontata tenendo conto solo del processo di rifrazione, ossia seguendo l'evoluzione dell'onda nel piano orizzontale.

E' esperienza comune rilevare come un'onda cilindrica che si propaghi su di un fondo leggermente acclive subisca un aumento di velocità di propagazione in acque profonde piuttosto che in acque basse. Queste variazioni di celerità fanno sì che, quando un'onda si propaga con un certo angolo di inclinazione rispetto alle isobate, la parte dell'onda che si trova ad una profondità inferiore sia caratterizzata da una velocità di propagazione inferiore rispetto a quella che si trova in acque più profonde. Tali differenze hanno come effetto quello di far "ruotare" la cresta dell'onda in maniera tale da allinearla alle isobate. Questo fenomeno, detto appunto di rifrazione, può essere meglio definito come quel processo per cui, a seguito di modeste variazioni di profondità, l'onda modifica la propria direzione di propagazione, la propria lunghezza d'onda nonché la propria altezza (vedere Figura 6.6.).

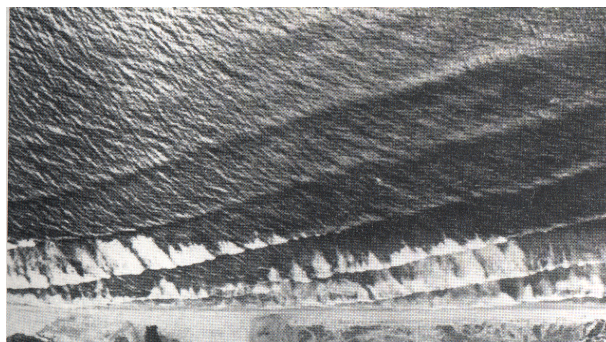


Figura 6.6. Immagine di onde che, propagandosi dal largo verso la riva, subiscono il processo di rifrazione (da Komar, 1998).

6.4.1. Formulazione del problema e strategia di risoluzione tramite i raggi d'onda

In quanto segue, viene sviluppata una teoria approssimata per la rifrazione che si basa sul tracciamento dei raggi d'onda. Questi ultimi sono definiti come curve localmente tangenti alla direzione di propagazione dell'onda. Tale tecnica, nonostante presenti l'indubbio vantaggio della semplicità di implementazione, non tiene conto di eventuali diffusioni laterali di energia dovute alla presenza di ostacoli e pertanto essa risulta inadatta a descrivere la propagazione del moto ondoso in prossimità, ad esempio, di porti, frangiflutti e pennelli. Un'altra limitazione di questa tecnica attiene alla localizzazione delle informazioni che vengono fornite solamente in corrispondenza dei raggi d'onda, peraltro non distribuiti uniformemente nel piano orizzontale.

La presente formulazione viene derivata dalla teoria lineare del moto ondoso utilizzando il metodo noto in letteratura come WKB (Mei, 1989). Si precisa che tale teoria assume che la ripidità dell'onda sia piccola ($H/L \ll 1$) e, nel caso in cui ci si trovi in acque basse, che anche il rapporto fra l'altezza d'onda e la profondità locale sia estremamente modesto ($H/h \ll 1$).

Sia data un'onda progressiva di periodo T , lunghezza L e altezza H che si propaghi con un fissato angolo di attacco θ su di un fondo lievemente acclive. Sia inoltre fissato un sistema di riferimento con l'asse x ortogonale alla linea di costa rivolto verso di essa, l'asse y lungo la linea di costa e l'asse z rivolto verso l'alto e tale che il piano $z=0$ coincida con il pelo libero.

Si introduca la funzione di fase definita come segue:

$$S(x, y, t) = k_x x + k_y y - \omega t = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t \quad (6.14)$$

dove:

$$|k| = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2} = 2\pi/L$$

k_x

k_y

$$\omega = 2\pi/T$$

numero d'onda;

numero d'onda nella direzione x ;

numero d'onda nella direzione y ;

frequenza angolare.

Detta funzione, per un tempo t_0 fissato, permette di ricavare:

$$S(x, y, t_0) = \text{cost} = S_0 \quad (6.15)$$

che descrive una linea dritta lungo la quale la superficie libera risulta ovunque alla stessa quota caratterizzata dal vettore normale:

$$\mathbf{e} = \left(\frac{k_1}{k}, \frac{k_2}{k} \right) \quad (6.16)$$

In particolare le linee tali che $S_0 = 2n\pi$ individuano le creste, mentre le linee tali che $S_0 = (2n+1)\pi$ individuano i cavi. Dal momento che tali linee dipendono da k_1 e k_2 e visto che questi ultimi, in generale, non sono costanti variando con la profondità, ne segue che la distanza fra uguali linee di fase varia da punto a punto man mano che l'onda si propaga.

Lo studio della propagazione del moto ondoso attraverso un modello per la rifrazione presuppone che il fondo sia lentamente variabile, cioè a dire tale che la tipica lunghezza d'onda sia molto più piccola della scala di variazione della profondità. Quest'ultima condizione può essere interpretata tramite l'introduzione del seguente parametro adimensionale:

$$\mu = O\left(\frac{\Delta h}{kh}\right) \ll 1 \quad (6.17)$$

sulla base del quale è possibile definire le seguenti variabili “lente”:

$$\begin{cases} \tilde{x} = \mu \cdot x \\ \tilde{y} = \mu \cdot y \\ \tilde{t} = \mu \cdot t \end{cases} \quad (6.18)$$

Introducendo dette variabili nel sistema di equazioni lineari già ricavato per onde infinitesime (vedere cap.5), il problema della determinazione del campo di moto può ricondursi al seguente sistema in cui la funzione $\phi = \phi(\tilde{x}, \tilde{y}, z, \tilde{t})$ rappresenta la funzione potenziale delle velocità e g l'accelerazione di gravità:

$$\mu^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tilde{y}^2} \right) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad -h(\tilde{x}, \tilde{y}) < z < 0 \quad (6.19)$$

$$\mu^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tilde{t}^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad z = 0 \quad (6.20)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = -\mu \left(\frac{\partial \phi}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial h}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial h}{\partial \tilde{y}} \right) \quad z = -h(\tilde{x}, \tilde{y}) \quad (6.21)$$

Si noti come, in corrispondenza della superficie libera (descritta dal piano $z=0$ per la linearizzazione), le condizioni cinematica e dinamica si siano combinate tra loro nell'unica relazione (6.20) sopra riportata.

Adottando un approccio simile alle espansioni asintotiche di *Stokes*, ossia sviluppando la funzione incognita in serie di potenze in termini del parametro piccolo μ , e dando per scontato che il campo di moto che si vuole descrivere sia quello generato da un'onda progressiva, si ricava:

$$\phi = \phi(\tilde{x}, \tilde{y}, z, \tilde{t}) = [\phi_0 + (-i\mu)\phi_1 + (-i\mu)^2\phi_2^2 + \dots] e^{iS/\mu} \quad (6.22)$$

essendo “ i ” l'unità immaginaria. Pertanto, arrestandosi al primo ordine di approssimazione il problema si può riscrivere come segue:

$$O[(-i\mu)^0]$$

$$\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial z^2} - k^2 \phi_0 = 0 \quad -h < z < 0 \quad (6.23)$$

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g} \phi_0 = 0 \quad z = 0 \quad (6.24)$$

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial z} = 0 \quad z = -h \quad (6.25)$$

$O[(-i \cdot \mu)]$

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2} - k^2 \phi_1 = \underline{\mathbf{k}} \cdot \nabla \phi_0 + \nabla \cdot (\underline{\mathbf{k}} \phi_0) \quad -h < z < 0 \quad (6.26)$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g} \phi_1 = - \frac{[\omega \frac{\partial \phi_0}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial(\omega \phi_0)}{\partial \tilde{t}}]}{g} \quad z = 0 \quad (6.27)$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial z} = \phi_0 \underline{\mathbf{k}} \cdot \nabla h \quad z = -h \quad (6.28)$$

La risoluzione del problema all'ordine $O[(-i \cdot \mu)^0]$, essendo significativa della determinazione del campo di moto generato da un'onda che si propaga su di un fondo orizzontale, per quanto già visto nel capitolo 5, permette di ricavare:

$$\phi_0 = - \frac{iga}{\omega} \frac{\cosh[k(z+h)]}{\cosh(kh)} \quad (6.29)$$

con:

$$\omega^2 = g \cdot k \cdot \tanh(kh) \quad (6.30)$$

Quest'ultimo risultato, com'era logico attendersi, permette di evidenziare come $\omega(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t})$ e $k(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t})$ siano correlate tra loro e anche alla profondità locale $h(\tilde{x}, \tilde{y})$ dalla stessa relazione di dispersione ottenibile nel caso di onda monocromatica che si propaga su di un fondo a profondità costante (*Dean e Dalrymple*, 1992).

L'ampiezza $a(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) = H/2$ che compare nella (6.29) è ancora incognita, tuttavia essa può essere ricavata imponendo la condizione di risolubilità fornita dal teorema detto "Fredholm Alternative". Quest'ultimo afferma che un problema differenziale non omogeneo, il cui corrispondente problema omogeneo ammette una o più funzioni caratteristiche, è risolubile se e solo se i termini forzanti risultano ortogonali a tutte le funzioni caratteristiche del problema omogeneo.

Notando che il problema precedente all'ordine $O[(-i \cdot \mu)]$ ammette ϕ_0 come funzione caratteristica del problema omogeneo, ne segue che la condizione dettata dal citato teorema può essere formulata come segue:²

² Si noti che

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \int_{-h}^0 (\underline{\mathbf{k}} \phi_0^2) dz &= \int_{-h}^0 \nabla \cdot (\underline{\mathbf{k}} \phi_0^2) dz + (\underline{\mathbf{k}} \phi_0^2) \cdot \nabla h = \\ &= \int_{-h}^0 (2 \phi_0 \underline{\mathbf{k}} \cdot \nabla \phi_0 + \phi_0^2 \nabla \cdot \underline{\mathbf{k}}) dz + k \phi_0^2 \cdot \nabla h = \\ &= \int_{-h}^0 \phi_0 \cdot (2 \cdot \underline{\mathbf{k}} \cdot \nabla \phi_0 + \phi_0 \nabla \cdot \underline{\mathbf{k}}) dz + k \phi_0^2 \cdot \nabla h = \\ &= \int_{-h}^0 \phi_0 \cdot [\underline{\mathbf{k}} \cdot \nabla \phi_0 + \nabla \cdot (\underline{\mathbf{k}} \phi_0)] dz + k \phi_0^2 \cdot \nabla h \end{aligned}$$

cioè:

$$\int_{-h}^0 \phi_0 \cdot [\underline{\mathbf{k}} \cdot \nabla \phi_0 + \nabla \cdot (\underline{\mathbf{k}} \phi_0)] dz = \nabla \cdot \int_{-h}^0 (\underline{\mathbf{k}} \phi_0^2) dz - k \phi_0^2 \cdot \nabla h$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-h}^0 \phi_0 [\nabla \cdot \mathbf{k} \phi_0 + \mathbf{k} \cdot \nabla \phi_0] dz = \\
& = \int_{-h}^0 \left[\phi_0 \cdot \left(\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2} - k^2 \cdot \phi_1 \right) - \phi_1 \cdot \left(\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial z^2} - k^2 \cdot \phi_0 \right) \right] dz = \\
& = \left[\phi_0 \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial z} - \phi_1 \cdot \frac{\partial \phi_0}{\partial z} \right]_{-h}^0 =
\end{aligned} \tag{6.31}$$

dove il secondo addendo della sottrazione è pari a zero in quanto deve essere soddisfatto il problema all'ordine $[(-i \cdot \mu)^0]$, e il passaggio dal terzo al quarto rigo è stato effettuato applicando il teorema di *Green*. Da questa condizione, applicando la regola di derivazione di *Leibniz*, si ottiene:

$$\nabla \cdot \int_{-h}^0 \mathbf{k} \phi_0^2 dz = -\frac{1}{g} \left[\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} (\omega \cdot \phi_0^2) \right]_{z=0}$$

Ricordando inoltre la definizione di energia di un'onda e quella di celerità di gruppo, rispettivamente pari a (*Dean e Dalrymple, 1992*):

$$E = \frac{1}{2} \rho \cdot g \cdot a^2 \tag{6.32}$$

$$|C_g| = \frac{\omega}{2k} \left[1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)} \right] \tag{6.33}$$

e ricordando che (vedere la 6.29) che:

$$\phi_0|_{z=0} = -\frac{iga}{\omega}$$

si ottiene:

$$\nabla \cdot \left(\frac{E}{\omega} \mathbf{C}_g \right) + \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \left(\frac{E}{\omega} \right) = 0 \tag{6.34}$$

In analogia alla meccanica classica dei sistemi oscillanti, il rapporto E/ω è detto azione d'onda e la (6.34), che sancisce la conservazione complessiva di detta quantità, rappresenta l'equazione che permette di determinare l'ampiezza d'onda incognita, note tutte le altre grandezze, e in particolare, la funzione di fase che può essere ricavata dalla relazione di dispersione in cui:

e quindi:

$$\begin{aligned}
& \nabla \cdot \int_{-h}^0 (\mathbf{k} \phi_0^2) dz = k \phi_0^2 \cdot \nabla h + \left[\phi_0 \frac{\partial \phi_1}{\partial z} - \phi_1 \frac{\partial \phi_0}{\partial z} \right]_{-h}^0 = \\
& = k \phi_0^2 \cdot \nabla h + \left\{ \left(\frac{g}{\omega^2} \cdot \frac{\partial \phi_0}{\partial z} \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right)_{z=0} - \left(\frac{g}{\omega^2} \cdot \frac{\partial \phi_0}{\partial z} \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right)_{z=0} + \right. \\
& \quad \left. - \left[\left(\frac{1}{\omega} \cdot \frac{\partial \phi_0}{\partial \tilde{t}} + \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial (\omega \cdot \phi_0)}{\partial \tilde{t}} \right) \cdot \frac{\partial \phi_0}{\partial z} \right]_{z=0} - \left(\phi_0 \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right)_{z=-h} \right\} \\
& = -\frac{1}{g} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} (\omega \cdot \phi_0^2) \right]_{z=0}
\end{aligned}$$

$$\underline{k} = \nabla S \quad (6.35)$$

$$\omega = -\frac{\partial S}{\partial t} \quad (6.36)$$

Ritorniamo adesso al problema del tracciamento dei raggi d'onda.

Si noti come queste relazioni tra numero d'onda, frequenza angolare e funzione di fase implicano:

$$\nabla \wedge \underline{k} = 0 \quad (6.37)$$

$$\frac{\partial \underline{k}}{\partial t} + \nabla \omega = 0 \quad (6.38)$$

In particolare, la (6.38) sancisce che ogni variazione nel tempo del numero d'onda \underline{k} deve essere compensata da una variazione spaziale della frequenza angolare. Per cui, se si considera un campo d'onde stazionario ($\partial/\partial t = 0$), allora anche la frequenza angolare risulta costante anche se dovesse variare, come nel caso in esame, la profondità. In questo caso quindi l'equazione che permette di determinare l'ampiezza d'onda, i.e. l'equazione di conservazione dell'azione d'onda, si semplifica nella seguente relazione:

$$\nabla \cdot (EC_g) = 0 \quad (6.39)$$

Quest'ultima indica come, nel caso di campo d'onde stazionario, non vi siano né pozzi né sorgenti per il flusso di energia. Tale risultato può anche essere espresso in maniera diversa e precisamente sfruttando la definizione di raggio d'onda. Infatti, con riferimento alla Figura 6.8, si considerino due raggi d'onda limitrofi, inizialmente distanti rispettivamente b e successivamente $b+db$. Detti raggi formano un canale per l'energia e pertanto il flusso attraverso b e quello attraverso $b+db$ deve essere lo stesso, in formule:

$$\frac{H}{H_0} = \left[\frac{C_{g_o}}{C_g} \frac{b_0}{b} \right]^{1/2} \quad (6.40)$$

avendo indicato con il pedice "o" la distanza iniziale (per esempio su profondità infinita) ed essendo $\beta = b_0/b$ il *fattore di separazione dei raggi d'onda*.

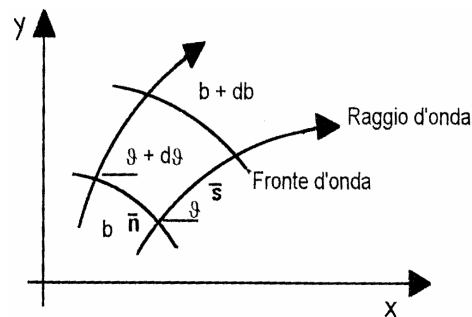


Figura 6.8. Definizione del sistema di riferimento intrinseco ai raggi d'onda.

Dalla relazione (6.40) si evince come, introducendo il concetto di raggio d'onda, il problema della determinazione dell'evoluzione di un'onda e, in particolare, della determinazione della sua altezza, possa essere più semplicemente ricondotto all'individuazione del fattore di

separazione dei raggi d'onda.

Sia quindi $\tilde{y}(\tilde{x})$ la funzione che descrive un determinato raggio d'onda la cui pendenza è data da:

$$y' = \frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}} = \frac{\frac{\partial S}{\partial \tilde{y}}}{\frac{\partial S}{\partial \tilde{x}}} \quad (6.41)$$

ricordando inoltre che:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \tilde{x}}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial \tilde{y}}\right)^2 = k^2 \quad (6.42)$$

si ottiene:

$$\frac{ky'}{(1 + y'^2)^{1/2}} = \frac{\partial S}{\partial \tilde{y}} \quad (6.43)$$

Derivando quest'ultima rispetto a \tilde{x} si ricava:

$$\frac{d}{d\tilde{x}} \left(\frac{ky'}{(1 + y'^2)^{1/2}} \right) = (1 + y'^2)^{1/2} \frac{\partial k}{\partial \tilde{y}} \quad (6.44)$$

Quest'ultima rappresenta un'equazione differenziale ordinaria non lineare per il raggio d'onda e può essere risolta numericamente una volta che siano note le caratteristiche dell'onda in un punto e precisamente l'angolo di attacco, il periodo e l'altezza.

Per quanto attiene alla distanza di separazione b , essa può essere ricavata analiticamente (*Munk e Arthur*, 1952). Infatti, con riferimento alla Figura 6.8, si ricavano, per onde che viaggiano alla celerità C lungo la direzione individuata dalla coordinata curvilinea s , le seguenti componenti della velocità:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= C \\ \frac{dx}{dt} &= C \cos \vartheta \\ \frac{dy}{dt} &= C \sin \vartheta \end{aligned}$$

Inoltre, tenendo conto della definizione di fattore di separazione dei raggi d'onda ($\beta = \frac{b}{b_o}$ essendo b_o una distanza iniziale tra i due raggi d'onda di riferimento):

$$\frac{1}{b} \frac{\partial b}{\partial s} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \beta}{\partial s} = \frac{\partial \vartheta}{\partial n} \quad (6.45)$$

Quest'ultima equazione correla le variazioni spaziali lungo il raggio d'onda alle variazioni dell'angolo ϑ nella direzione normale. Analogamente è possibile ricavare:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial n} = \frac{1}{k} \frac{\partial k}{\partial n} = -\frac{1}{C} \frac{\partial C}{\partial n} \quad (6.46)$$

E' possibile pervenire ad un'equazione differenziale valutando le derivate miste, cioè:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial \theta}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial \theta}{\partial n} &= \left(-\sin \theta \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \cos \theta \cdot \frac{\partial}{\partial y} \right) \cdot \left(\cos \theta \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} + \sin \theta \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + \\ &- \left(\cos \theta \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \cdot \frac{\partial}{\partial y} \right) \cdot \left(-\sin \theta \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} + \cos \theta \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = \\ &= \sin^2 \theta \cdot \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + \cos^2 \theta \cdot \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 + \cos^2 \theta \cdot \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + \sin^2 \theta \cdot \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 = \\ &= \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 = \left(\frac{\partial \theta}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial n} \right)^2 = \frac{1}{C^2} \left(\frac{\partial C}{\partial n} \right)^2 + \frac{1}{\beta^2} \left(\frac{\partial \beta}{\partial s} \right)^2 \end{aligned} \quad (6.47a)$$

Se adesso differenziamo a “croce” la (6.45) e la (6.46) si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial \theta}{\partial s} = \frac{1}{C^2} \left(\frac{\partial C}{\partial n} \right)^2 - \frac{1}{C} \frac{\partial^2 C}{\partial n^2} + \frac{1}{\beta^2} \left(\frac{\partial \beta}{\partial s} \right)^2 - \frac{1}{\beta} \frac{\partial^2 \beta}{\partial s^2} \quad (6.47b)$$

Per l'uguaglianza delle derivate miste, ossia uguagliando la (6.47a) e la (6.47b), si ottiene:

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial s^2} + \frac{\beta}{C} \frac{\partial^2 C}{\partial n^2} = 0 \quad (6.48)$$

Considerando il secondo addendo si può scrivere:

$$\begin{aligned} \frac{1}{C} \frac{\partial^2 C}{\partial n^2} \beta &= \frac{1}{C} \beta \cdot \left(-\sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial y} \right) \cdot \left(-\sin \theta \frac{\partial C}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial C}{\partial y} \right) = \\ &= \frac{1}{C} \beta \cdot \left(\sin \theta \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial C}{\partial x} + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \sin^2 \theta \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial C}{\partial y} - \cos^2 \theta \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial C}{\partial x} + \right. \\ &- 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} - \sin \theta \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial C}{\partial y} + \cos^2 \theta \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \Big) = \\ &= \frac{1}{C} \beta \cdot \left[\left(\sin^2 \theta \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} + \cos^2 \theta \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) + \left(\sin \theta \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial C}{\partial x} + \right. \right. \\ &- \sin \theta \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial C}{\partial y} + \sin^2 \theta \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial C}{\partial y} - \cos^2 \theta \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial C}{\partial x} \Big) \Big] = \\ &= \frac{1}{C} \beta \cdot \left[\left(\sin^2 \theta \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} + \cos^2 \theta \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) + \left(\sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial x} - \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \cdot \right. \\ &\cdot \left(\cos \theta \frac{\partial C}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial C}{\partial y} \right) \Big] = \\ &= \frac{1}{C} \beta \cdot \left[\sin^2 \theta \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} + \cos^2 \theta \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - \frac{\partial \theta}{\partial n} \left(\cos \theta \frac{\partial C}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial C}{\partial y} \right) \right] = \end{aligned}$$

ma valendo la (6.45) si ha che:

$$= \left(-\frac{1}{C} \cos \theta \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{1}{C} \sin \theta \frac{\partial C}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial \beta}{\partial s} + \left(\frac{1}{C} \sin^2 \theta \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \frac{2}{C} \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} + \cos^2 \theta \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) \cdot \beta \quad (6.49)$$

in definitiva, quindi, la (6.48) può porsi come segue:

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial s^2} + p \frac{\partial \beta}{\partial s} + q \beta = 0 \quad (6.50)$$

dove:

$$p(s) = -\frac{\cos \vartheta}{C} \frac{\partial C}{\partial \tilde{x}} - \frac{\sin \vartheta}{C} \frac{\partial C}{\partial \tilde{y}}$$

$$q(s) = \frac{\sin^2 \vartheta}{C} \frac{\partial^2 C}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{2 \sin \vartheta \cos \vartheta}{C} \frac{\partial^2 C}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} + \cos^2 \vartheta \frac{\partial^2 C}{\partial \tilde{y}^2}$$

Dall'integrazione della (6.50) si perviene alla conoscenza del fattore di separazione e, di conseguenza, alla determinazione dell'altezza d'onda. Infatti, attraverso la tecnica sopra esposta è possibile ricavare lungo la direzione di propagazione, e cioè lungo il raggio d'onda, l'altezza d'onda tramite la (6.40). Risulta quindi possibile stabilire anche il punto di frangimento cioè a dire il luogo in cui l'onda diventa così ripida da diventare instabile rispetto alla profondità locale e ripiegare su se stessa. Tale punto viene in genere individuato sulla base di relazioni empiriche. Nel prosieguo si adotta il metodo proposto da *Rebaudengo-Landò e Scarsi* (1984), che si basa sulla relazione di seguito riportata, idonea ad individuare il frangimento dalla profondità infinita fino alla profondità relativa h/L tendente a zero:

$$\frac{H_b}{L_b} = 0.142 \tanh \left(\xi \cdot \frac{2\pi h}{L_b} \right) \quad (6.51)$$

in cui la funzione ξ è data da:

$$\xi = 1; \quad \text{per } \frac{h}{gT^2} \geq 0.02;$$

$$\xi = [0.52 + (16.30s)^2] + [3.40 - (43.50s)^2] \sqrt{\frac{h}{gT^2}}; \quad \text{per } 0.005 \leq \frac{h}{gT^2} \leq 0.02 \quad (6.52)$$

$$\xi = [0.83 + (13.86s)^2] + [1.00 - (29.00s)^2] \sqrt{\frac{h}{gT^2}}; \quad \frac{h}{gT^2} \leq 0.005$$

essendo s la pendenza del fondo.

7.4.2. Strategia numerica di risoluzione

Sulla base delle considerazioni sopra esposte, di seguito si descrive il modello numerico che, attraverso una semplice implementazione, permette di prevedere le caratteristiche delle onde in prossimità della linea di costa utili per la valutazione delle correnti litoranee (ampiezza e angolo di attacco), sulla base della conoscenza delle caratteristiche dell'onda al largo (periodo, ampiezza, angolo di attacco) e della batimetria del fondo su cui l'onda si

propaga.

Il tracciamento dei raggi d'onda è governato dalle equazioni differenziali (6.44) e (6.50), oltre che dalle opportune condizioni iniziali. Lo schema numerico adottato per integrare tali equazioni è del tipo *predictor-corrector*, che stima, con una formula di tipo esplicito, il valore della funzione e corregge poi il valore stimato in fase di predizione, tramite una formula di tipo implicito.

L'integrazione dell'equazione differenziale (6.44), ordinata opportunamente, può scriversi nella seguente maniera:

$$ky'' - \frac{\partial k}{\partial y} y'^4 + \frac{\partial k}{\partial y} y'^3 - 2 \frac{\partial k}{\partial y} y'^2 + \frac{\partial k}{\partial y} y' - \frac{\partial k}{\partial y} = 0 \quad (6.53)$$

in cui le derivate di k sono più opportunamente calcolate sulla base delle seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial \tilde{x}} \Big|_{\tilde{x}_0, \tilde{y}_0} &= \frac{\partial k}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial \tilde{x}} \Big|_{\tilde{x}_0, \tilde{y}_0} = \frac{\partial k}{\partial h} \left[\frac{h(\tilde{x}_0 + \Delta \tilde{x}, \tilde{y}_0) - h(\tilde{x}_0 + \tilde{y}_0)}{\Delta \tilde{x}} \right] \\ \frac{\partial k}{\partial \tilde{y}} \Big|_{\tilde{x}_0, \tilde{y}_0} &= \frac{\partial k}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial \tilde{y}} \Big|_{\tilde{x}_0, \tilde{y}_0} = \frac{\partial k}{\partial h} \left[\frac{h(\tilde{x}_0 + \Delta \tilde{x}, \tilde{y}_0) - h(\tilde{x}_0 + \tilde{y}_0)}{\Delta \tilde{y}} \right] \end{aligned} \quad (6.54)$$

e quindi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial \tilde{x}} \Big|_{\tilde{x}_0, \tilde{y}_0} &= \frac{-k^2}{\sinh(kh) \cdot \cosh(kh) + kh} \left[\frac{h(\tilde{x}_0 + \Delta \tilde{x}, \tilde{y}_0) - h(\tilde{x}_0 + \tilde{y}_0)}{\Delta \tilde{x}} \right] \\ \frac{\partial k}{\partial \tilde{y}} \Big|_{\tilde{x}_0, \tilde{y}_0} &= \frac{-k^2}{\sinh(kh) \cdot \cosh(kh) + kh} \left[\frac{h(\tilde{x}_0 + \Delta \tilde{x}, \tilde{y}_0) - h(\tilde{x}_0 + \tilde{y}_0)}{\Delta \tilde{y}} \right] \end{aligned} \quad (6.55)$$

Detta equazione (6.53), ponendo la condizione $y' = z(\tilde{x})$, si può ricondurre alla risoluzione del seguente sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} y' = z(\tilde{x}) \\ z' = \frac{1}{k} \left[\frac{\partial k}{\partial \tilde{y}} z^4 - \frac{\partial k}{\partial \tilde{y}} z^3 + 2 \frac{\partial k}{\partial \tilde{y}} z^2 - \frac{\partial k}{\partial \tilde{y}} z + \frac{\partial k}{\partial \tilde{y}} \right] \end{cases} \\ &\quad \Downarrow \\ &\begin{cases} \Delta \tilde{y} = z \Delta \tilde{x} \\ \Delta z = \frac{1}{k} \left[\frac{\partial k}{\partial \tilde{y}} z^4 - \frac{\partial k}{\partial \tilde{y}} z^3 + 2 \frac{\partial k}{\partial \tilde{y}} z^2 - \frac{\partial k}{\partial \tilde{y}} z + \frac{\partial k}{\partial \tilde{y}} \right] \Delta \tilde{x} \end{cases} \end{aligned} \quad (6.56)$$

In definitiva, il problema viene risolto come segue: fissato un $\Delta \tilde{x}$ iniziale (nota la batimetria e il periodo), si ricava il numero d'onda come zero della relazione di dispersione (6.30), quindi si determina Δz dalla (6.56) e successivamente $\Delta \tilde{y}$ dalla condizione $y' = z(\tilde{x})$. Noto $\Delta \tilde{y}$, si possono valutare le grandezze incognite che permettono il tracciamento del raggio d'onda, e precisamente:

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta \tilde{x})^2 + (\Delta \tilde{y})^2} \quad (6.57)$$

$$\vartheta = \arctan\left(\frac{\Delta \tilde{y}}{\Delta \tilde{x}}\right) \quad (6.58)$$

Avanzando lungo il raggio d'onda, si integra ad ogni passo Δs l'equazione differenziale (6.50) che permette di determinare il fattore di separazione dei raggi d'onda β e, come conseguenza, l'altezza d'onda corrispondente tramite la (6.40). Infine, imponendo la condizione al frangimento, si ottiene la localizzazione della linea di frangimento.

6.4.3. Esempio di applicazione del modello numerico

Il programma numerico è stato validato sulla base delle batimetrie fornite da *Noda* (1974) che derivano dalla seguente espressione:

$$h = 0.0025 \left[1 + 20 \exp \left(-3 \left(\frac{x}{20} \right)^{\frac{1}{3}} \right) \operatorname{sen}^{10} \left(\frac{\pi y}{80} \right) \right] \quad (6.59)$$

Le condizioni iniziali e al contorno del moto ondoso, nonché le caratteristiche della griglia di calcolo sono le seguenti:

- periodo dell'onda adottata $T=4$ s.;
- angolo al largo $\vartheta_0 = -0.47 \text{ rad}$;
- altezza d'onda iniziale $H_0=1$ m.;
- ampiezza delle maglie $\Delta \tilde{x} = \Delta \tilde{y} = 5 \text{ m}$.

In Figura 6.9 è rappresentato l'andamento dei raggi d'onda come descritto da *Noda* (1974), mentre nella Figura 6.10 sono riportati i risultati ottenuti con il modello adottato. Il codice di calcolo è stato ulteriormente validato su di un'altra batimetria, riportata sempre da *Noda* (1974), avente la seguente espressione:

$$h = 0.0025 \left[1 + 20 \exp \left(-3 \left(\frac{x}{20} \right)^{\frac{1}{3}} \right) \operatorname{sen}^{10} \left(\frac{\pi(\tilde{y} - \tilde{x} \tan \alpha)}{80} \right) \right] \quad (6.60)$$

rappresentata in Figura 6.11 per $\alpha = 0.52 \text{ rad}$. Utilizzando le medesime condizioni iniziali del caso precedente si sono ottenuti i risultati rappresentati in Figura 6.12 che mostrano un sensibile accordo con quanto ottenuto da *Noda* (1974).

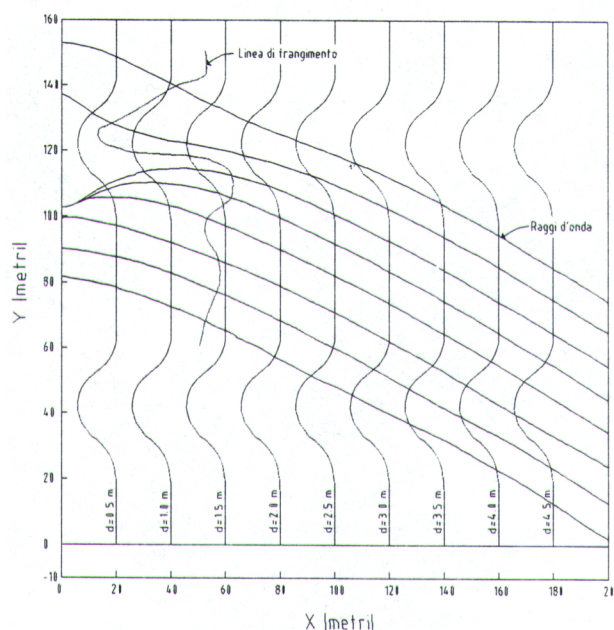


Figura 6.9. Tracciamento dei raggi d'onda secondo *Noda* (1974) sulla batimetria espressa dalla relazione (6.59).

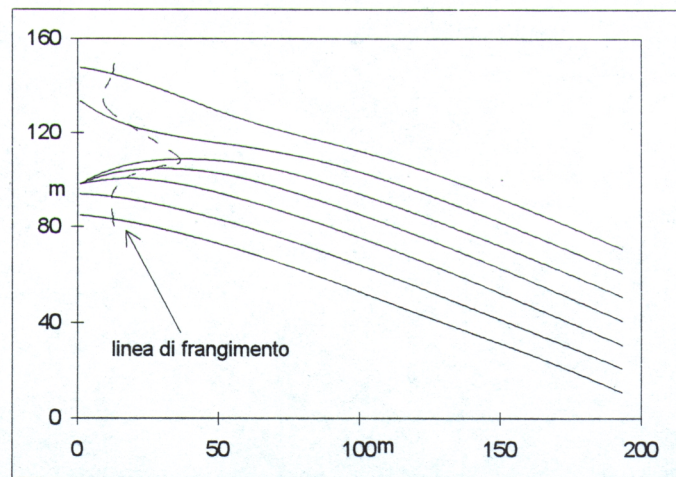


Figura 6.10. Tracciamento dei raggi d'onda con il modello proposto sulla batimetria espressa dalla relazione (6.59).

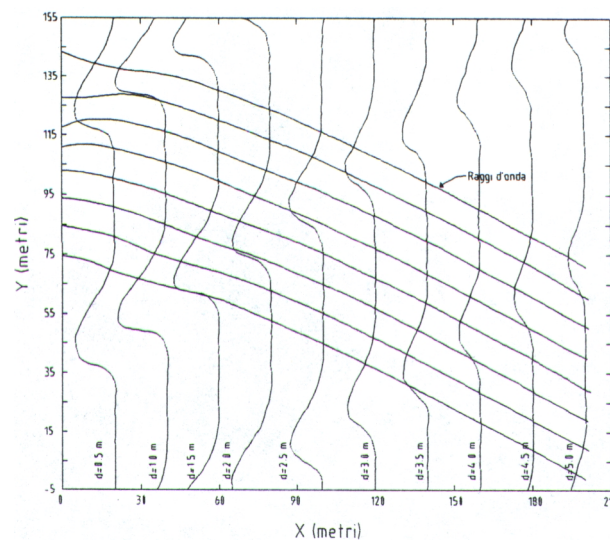


Figura 6.11. Tracciamento dei raggi d'onda secondo Noda (1974) sulla batimetria espressa dalla relazione (6.60).

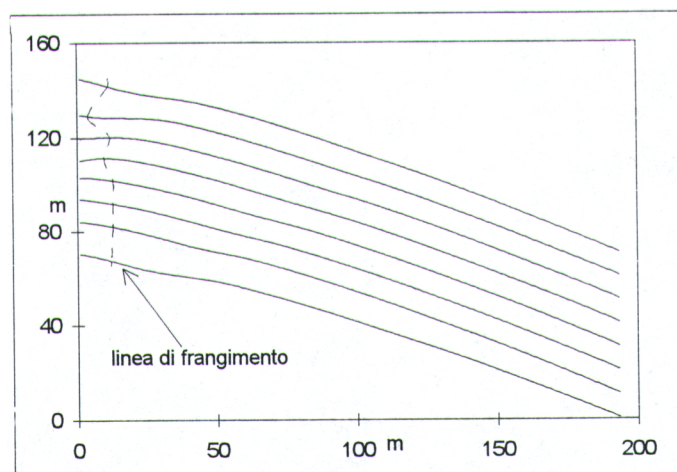


Figura 6.12. Tracciamento dei raggi d'onda con il modello proposto sulla batimetria espressa dalla relazione (6.60).

7.5. La diffrazione

Si definisce diffrazione il processo che conduce all'esistenza di un moto ondoso nella zona d'ombra a valle di un ostacolo di dimensioni finite, il quale intercetta un treno d'onde incidenti.

La diffrazione avviene con trasferimento di energia in direzione parallela alle creste delle onde. Infatti, senza tale trasferimento di energia a valle dell'ostacolo nella zona sottoflutto si avrebbe perfetta calma, mentre ai lati di essa le onde procederebbero senza cambiare né forma né altezza. Il calcolo degli effetti della diffrazione è importante, per esempio, per la determinazione delle altezze d'onda in un porto o in un bacino protetto ed è quindi essenziale nella progettazione dei bacini portuali (vedere Figura 6.13).

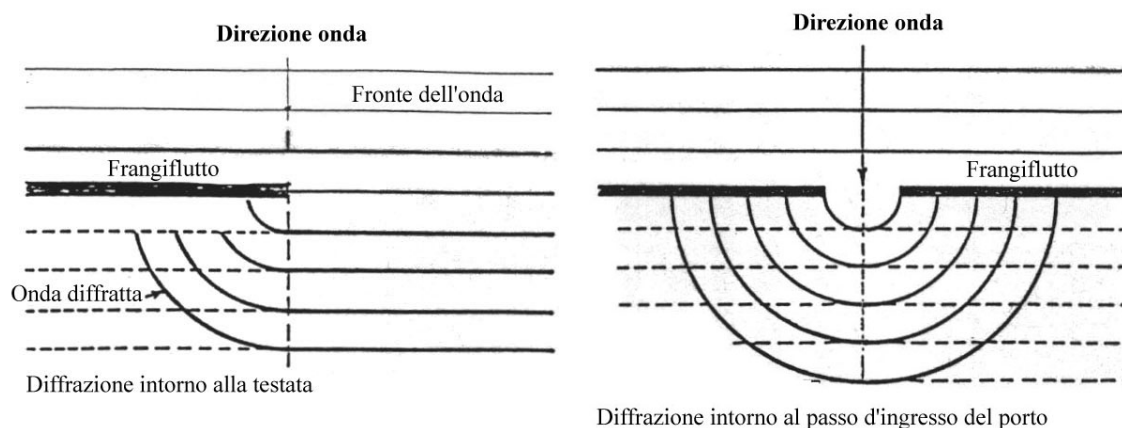


Figura 6.13. Diffrazioni delle onde per effetto dei frangiflutti.

6.5.1. Modelli generali di propagazione

La funzione potenziale di velocità $\phi = \phi(x, y, z, t)$ di un moto ondoso tridimensionale (fluido incomprimibile a comportamento ideale in moto irrotazionale) può essere espressa, in un modello lineare, nella forma:

$$\phi = -\frac{ga_i}{i\omega} f(x, y) Z(z) \exp(-i\omega t) \quad (6.61)$$

in cui “ i ” è l’unità immaginaria, $Z(z)$ descrive le variazioni di ϕ lungo la verticale, $f(x,y)$ detta “funzione d’onda” descrive le variazioni di ϕ nel piano orizzontale coincidente con il livello di quiete, a_i è l’ampiezza d’onda di riferimento, ω è la velocità angolare dell’onda.

A tale equazione vanno associate le seguenti condizioni al contorno (vedere Figura 6.14):

$$\begin{aligned}\eta_{,t} - \phi_{,z} &= 0 \quad \text{per} \quad z=0; \\ g\eta + \phi_{,t} &= 0 \quad \text{per} \quad z=0; \\ \phi_{,x}h_{,x} + \phi_{,y}h_{,y} + \phi_{,z}h_{,z} &= 0 \quad \text{per} \quad z=-h; \\ \phi_{,n} + Ak\phi &= 0 \quad \text{su} \quad S\end{aligned}\tag{6.62}$$

Essendo: S la superficie laterale di un eventuale oggetto che interferisce con il moto ondoso; \underline{n} la normale a S orientata verso l’esterno dell’oggetto; A un coefficiente complesso di assorbimento del flusso di energia.

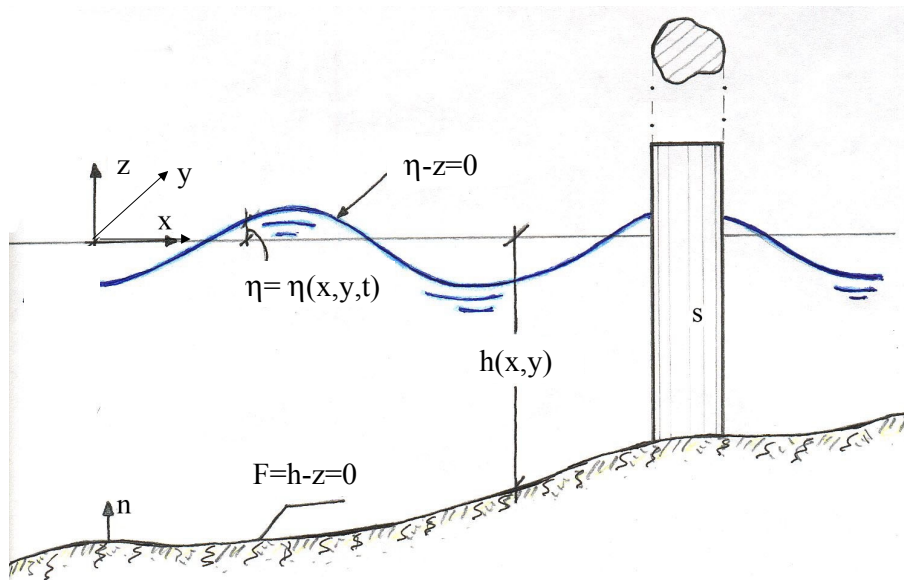


Figura 6.14. Schema generale per lo studio analitico della diffrazione.

Le equazioni precedenti rappresentano le equazioni di base per lo studio della propagazione di un moto ondoso sottoposto ai processi conservativi di “shoaling”, di “rifrazione”, di “riflessione” e di “diffrazione”.

Su fondali a dolce acclività, Berkoff (1972) ha mostrato che:

1) la funzione $Z(z)$ può essere espressa nella forma:

$$Z(z) = -\frac{\cosh(k(z+h))}{\cosh(kh)}\tag{6.63}$$

relativa alle onde bidimensionali;

2) la funzione d’onda $f(x,y)$ verifica l’equazione:

$$\nabla \cdot (CC_g \nabla f) + \omega^2 \left(\frac{C_g}{C} \right) f = 0\tag{6.64}$$

con la seguente condizione di Neumann al contorno:

$$f_{,n} + Akf = 0 \quad \text{su} \quad S \quad (6.65)$$

essendo s la linea intersezione del livello di quiete con la superficie S

L'equazione sopra rappresentata, nota come mild slope equation è un'equazione di tipo ellittico, che, a tutt'oggi, deve essere risolta con procedimenti numerici.

Nel caso di profondità infinita, ovvero di profondità finita ma costante (fondo orizzontale), la mild slope equation si riduce alla più semplice equazione di *Helmoltz* a coefficienti costanti.

$$\nabla^2 f_2 + k^2 f_2 = 0 \quad (6.66)$$

Radder (1979) ha introdotto un modello basato sull'approssimazione dell'equazione ellittica con un'equazione parabolica che ha la forma dell'equazione di *Schrodinger* della meccanica quantistica e che può essere facilmente risolta per via numerica con semplici procedimenti alle differenze finite. Essa è tuttavia applicabile in assenza di riflessione e di propagazione del moto ondoso secondo una direzione preferenziale.

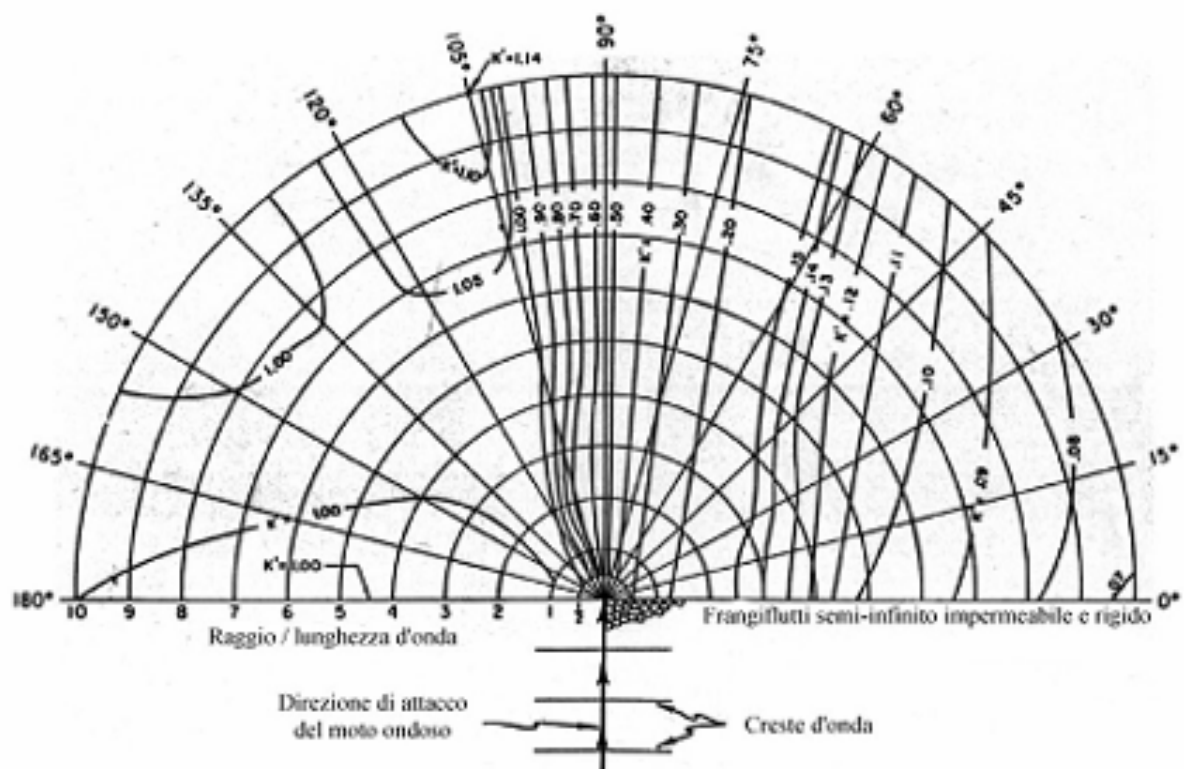
6.5.2. Diagrammi di *Wiegel* (1962)

Tali diagrammi mostrano, a ridosso di una struttura, per profondità uniforme e diversi angoli di incidenza del moto ondoso, le linee ove la riduzione dell'altezza d'onda è costante (vedere, ad esempio, le Figure 6.15 e 6.16).

Tale riduzione è espressa in funzione di un coefficiente di diffrazione k_D , definito come rapporto tra l'altezza d'onda H_D nell'area dove è presente il fenomeno di diffrazione e l'altezza d'onda incidente H_i .

I diagrammi sono riportati in coordinate polari centrate in corrispondenza della punta della struttura.

Nelle applicazioni pratiche un diagramma di tale tipo deve essere trasformato di scala in modo che la lunghezza d'onda effettiva corrisponda alla scala del diagramma.



$$\phi = -\frac{ga}{i\omega} f(x, y) Z(z) \exp(-i\omega t) \quad (6.67)$$

associata alla:

$$Z(z) = -\frac{\cosh(k(z+h))}{\cosh(kh)} \quad (6.68)$$

il problema è ricondotto alla precisazione delle funzioni d'onda f_1 e f_2 , rispettivamente nelle regioni 1 e 2. Tra l'altro, la funzione f_2 individua con il suo modulo l'ampiezza del *coefficiente di agitazione*, essendo quest'ultimo definito dal rapporto tra l'altezza d'onda H nella regione interna e l'altezza d'onda H_i progressiva (altezza d'onda incidente) nella regione esterna in corrispondenza all'imboccatura.

Lo studio viene condotto nelle condizioni di profondità finita costante h e di contorno solido totalmente riflettente. In tali condizioni si può applicare l'equazione di *Helmoltz* e precisare le condizioni al contorno con il coefficiente complesso di assorbimento del flusso di energia $A=0$. Risulta quindi:

regione esterna 1:

lungo l'asse x , con esclusione dell'imboccatura:

lungo l'asse x in corrispondenza dell'imboccatura AB:

$$\begin{aligned} \nabla^2 f_1 + k^2 f_1 &= 0; \\ f_{1,n} &= 0; \\ f_{1,n} &= C_1(x); \end{aligned} \quad (6.69)$$

regione interna 2:

lungo il contorno solido:

lungo l'imboccatura AB:

$$\begin{aligned} \nabla^2 f_2 + k^2 f_2 &= 0; \\ f_{2,n} &= 0; \\ f_{2,n} &= C_2(x); \end{aligned} \quad (6.70)$$

imboccatura AB:

$$\begin{aligned} f_1 &= f_2; \\ f_{1,n} &= -f_{2,n} \end{aligned} \quad (6.71)$$

queste ultime rappresentano delle condizioni di continuità tra le due regioni; in particolare l'ultima relazione implica che:

$$\begin{aligned} C_1(x) &= -C(x); \\ C_2(x) &= C(x); \end{aligned} \quad (6.72)$$

6.4.5. Determinazione delle funzioni d'onda

Applicando la seconda formula di *Green* e adottando come soluzione fondamentale dell'equazione di *Helmoltz* :

$$\nabla^2 f_2 + k^2 f_2 = 0; \quad (6.73)$$

la funzione di *Henkel* $H_0(1)$ del primo tipo e di ordine zero (vedere *Abramovitz e Stegun*, 1964), la funzione d'onda $f_2(\mathbf{x})$ alla posizione generica $\mathbf{x} = \mathbf{x}(x, z)$ nella regione interna può essere posta nella forma integrale di *Weber*:

$$f_2(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4}i \int_s \left\{ f_2(\mathbf{x}_o) c[H_o^1(k|\mathbf{x} - \mathbf{x}_o|)] - H_o^1(k|\mathbf{x} - \mathbf{x}_o|) \cdot \frac{\partial}{\partial n} f_2(\mathbf{x}_o) \right\} ds(\mathbf{x}_o); \quad (6.74)$$

Dove $\mathbf{x}_o = \mathbf{x}(x_o, y_o)$ indica la posizione del punto sorgente sul contorno s di tale regione.

L'equazione sopra rappresentata mostra chiaramente come la determinazione della funzione $f_2(\mathbf{x})$ richieda la conoscenza della funzione $f_2(\mathbf{x}_o)$, a priori incognita. Questa può essere individuata a partire dalla stessa equazione scritta per \mathbf{x} tendente a \mathbf{x}_i , essendo $\mathbf{x}_i (x_i, y_i)$ la posizione di un punto situato sul contorno s , supposto privo di contorni singolari. Dopo qualche elaborazione, risulta:

$$f_2(\mathbf{x}_i) = -\frac{1}{4}i \int_s \left\{ f_2(\mathbf{x}_o) c[H_o^1(k|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_o|)] - H_o^1(k|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_o|) \cdot \frac{\partial}{\partial n} f_2(\mathbf{x}_o) \right\} ds(\mathbf{x}_o) + \frac{1}{2} f_2(\mathbf{x}_i); \quad (6.75)$$

E quindi:

$$f_2(\mathbf{x}_i) = -\frac{1}{2}i \int_s \left\{ f_2(\mathbf{x}_o) c[H_o^1(k|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_o|)] - H_o^1(k|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_o|) \cdot \frac{\partial}{\partial n} f_2(\mathbf{x}_o) \right\} ds(\mathbf{x}_o); \quad (6.76)$$

La precisazione della funzione $f_2(x_i)$ e quindi della $f_2(x_o)$ può essere fatta con un metodo approssimato (Lee, 1971), basato:

- a) sulla suddivisione del contorno s in N elementi Δs di cui p appartenenti all'imboccatura AB
- b) sulla assunzione che i valori di f_2 e di $f_{2,n}$ su ciascun elemento siano costanti ed eguali a quelli corrispondenti al punto centrale dell'elemento stesso.

Tenuto conto che sul contorno solido si ha $f_{2,n} = 0$ si ricava:

$$f_2(x_i) = \sum_{j=1}^p M_{ij} C_j \quad (i = 1, 2, 3, \dots, N) \quad (6.77)$$

In cui M_{ij} rappresentano gli elementi di una matrice di N_{xp} elementi che si può determinare direttamente mentre C_j sono i valori incogniti delle $f_{2,n}$ all'imboccatura AB. Queste ultime possono essere determinate adottando un procedimento di matching delle equazioni:

$$\begin{aligned} f_1 &= f_2; \\ f_{1,n} &= -f_{2,n} \end{aligned} \quad (6.78)$$

esplicitando le $f_1(x_i)$, calcolata nella posizione $(x_i, 0)$ appartenente al contorno della regione 1, in funzione delle stesse derivate.

Per giungere a tale formalizzazione, si considera la $f_1(x)$ come data dalla somma di una funzione d'onda incidente $f_{1I}(x)$, una funzione d'onda riflessa $f_{1R}(x)$, e una funzione d'onda irradiata $f_{1D}(x)$.

Indicando con α_0 l'angolo formato dal moto ondoso incidente con l'asse x le $f_{1I}(x)$ e $f_{1R}(x)$ possono essere poste nella forma:

$$\begin{aligned} f_{1I}(x) &= \exp[ik(\sin \alpha_0 + z \cos \alpha_0)] \\ f_{1R}(x) &= \exp[ik(\sin \alpha_0 - z \cos \alpha_0)] \end{aligned} \quad (6.79)$$

mentre la $f_{1D}(x)$ deve rispettare la condizione di *Sommerfeld* che impone l'annullamento all'infinito della funzione stessa:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} (f_{1D,n} - ikf_{1D}) = 0 \quad (6.80)$$

Data la linearità dell'equazione di *Helmoltz* risulta:

$$\nabla^2 f_{1D} + k^2 f_{1D} = 0 \quad (6.81)$$

Con le condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} f_{1D,n} &= 0 & su & \quad AC, BD \text{ (parte solida di contorno)} \\ f_{1D,n} &= -f_{2,n} & su & \quad AB \text{ (imboccatura)} \end{aligned} \quad (6.82)$$

Utilizzando la forma integrale di *Weber* si ha:

$$f_{1D}(x) = -\frac{1}{4}i \int_s \left\{ f_{1D}(x_0) \frac{\partial}{\partial n} [H_0^{(1)}(kr)] - H_0^{(1)}(kr) \frac{\partial}{\partial n} [f_{1D}(x_0)] \right\} ds(x_0) \quad (6.82)$$

dove x_0 indica la posizione del punto sorgente, r rappresenta la distanza $x-x_0$, e $H_0^{(1)}$ è la funzione di Henkel del primo tipo di ordine zero. Adottando il metodo approssimato introdotto per descrivere la $f_2(x_i)$, per x_i appartenente ad AB, si perviene a:

$$f_1(x_i) = 2 \exp[ik |x_i| \cos \alpha_0] - \frac{1}{2}i \sum_{j=1}^p W_{ij} C_j \quad (j=1,2,...,p) \quad (6.83)$$

e cioè:

$$f_1(x_i) = \mathbf{e} - \frac{1}{2}i W_p \mathbf{C} \quad (6.84)$$

In cui W_{ij} rappresentano gli elementi di una matrice $W_p(p \times p)$; C_j , componenti del vettore \mathbf{C} , sono i valori incogniti delle $f_{1,n}$ all'imboccatura AB ed \mathbf{e} il vettore di componenti

Ricordando la relazione:

$$f_2(x_i) = \sum_{j=1}^p M_{ij} C_j = M_p \mathbf{C} \quad (6.85)$$

è possibile determinare \mathbf{C} :

$$\mathbf{C} = (M_p + \frac{1}{2}i W)^{-1} \mathbf{e} \quad (6.86)$$

Ricavate le C_j risulta precisata la $f_2(x_i)$ a mezzo della forma discreta dell'equazione

$$f_2(x_i) = \sum_{j=1}^p M_{ij} C_j \quad (6.87)$$

ovvero:

$$f_2(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4}i \left\{ \sum_{j=1}^N f_2(x_j) \left[-kH_1^{(1)}(kr) \frac{\partial r}{\partial n} \right] \Delta s_j - \sum_{j=1}^P H_0^{(1)}(kr) C_j \Delta s_j \right\} \quad (6.88)$$

con $H_1^{(1)}$ funzione di *Henkel* del primo tipo di ordine uno, x_j posizione centrale del j -esimo elemento di linea ed r pari a $|x-x_j|$.

Il modello esposto può essere idoneo ad interpretare anche contorni fissi parzialmente riflettenti. In tal caso le condizioni al contorno assumono la forma:

$$\begin{aligned} A' &= 2k_R \sin \vartheta / (1 + k_R^2 + 2k_R \cos \vartheta) \\ A'' &= (1 - k_R^2) / (1 + k_R^2 + 2k_R \cos \vartheta) \end{aligned} \quad (6.89)$$

Ivi il coefficiente di assorbimento A assume come parte reale e come coefficiente della parte immaginaria le funzioni (*Berkhoff*, 1971):

$$\begin{aligned} f_{1,n} + Akf_1 &= 0 && \text{lungo } x \text{ esclusa l'imboccatura} \\ f_{2,n} + Akf_2 &= 0 && \text{lungo il contorno solido della regione 2} \end{aligned} \quad (6.90)$$

con k_R coefficiente di riflessione e ϑ fase della funzione d'onda.

Il modello descritto può essere adattato per tener conto della variabilità del fondo quando questo non è orizzontale, ad esempio discretizzando la regione in questione in zone a profondità costante, separate da gradini verticali.

In definitiva il modello esposto, opportunamente modificato per tener conto dell'effettivo comportamento dei contorni solidi nei confronti del possibile assorbimento del flusso di energia e la eventuale variabilità del fondo nella regione interna ed esterna, è in grado di definire completamente il coefficiente di agitazione in presenza di processi conservativi di shoaling, rifrazione, riflessione totale o parziale e diffrazione.