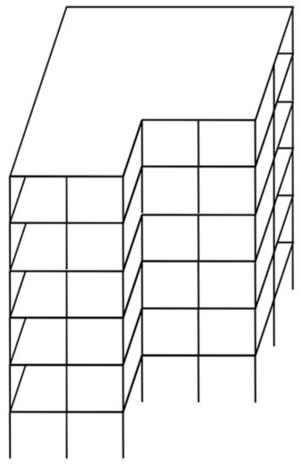
Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

Progetto di costruzioni in zona sismica
A.A. 2023/2024

04 – RISPOSTA ELASTICA SISTEMI SDOF (01)

Edoardo M. Marino, Università degli Studi di Catania

Le strutture: di libertà statici



Le strutture, pur essendo in realtà continue, sono in genere viste come discretizzate, ovvero come:

- Insieme di nodi (liberi o vincolati)
- Collegati da elementi mono dimensionali (aste) o anche bi o tri-dimensionali

Gradi di libertà (statici):

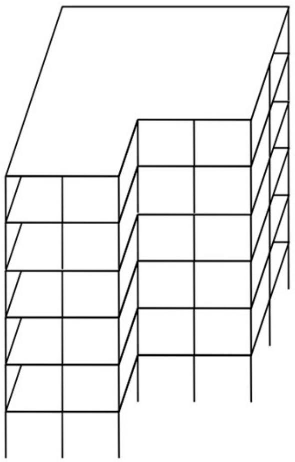
- Le componenti di movimento consentite ai nodi

Nello spazio, un nodo non vincolato ha 6 gradi di libertà (gli impalcati indeformabili riducono i gradi di libertà)

Le strutture: di libertà dinamici

Con il movimento nascono forze d'inerzia, prodotto di massa per accelerazione:

- Le masse sono in realtà continue
- Vengono però considerate concentrate (nei nodi, negli impalcati)



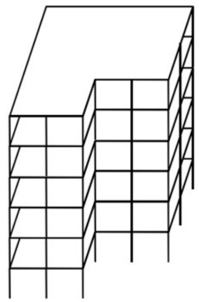
Gradi di libertà dinamici:

- Le componenti di movimento consentite alle masse

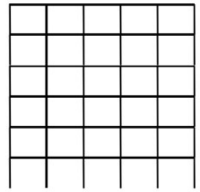
Usualmente si ipotizzano impalcati indeformabili e masse solo a livello dell'impalcato.
Vi sono in tal caso 3n gradi di libertà (se gli impalcati sono n ed il movimento è orizzontale)

Gradi di libertà statici e dinamici: esempi

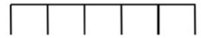
- Edifici (tridimensionali) con n impalcati
  - Gradi di libertà statici: centinaia o migliaia
  - Gradi di libertà dinamici: 3n



- Telai piani con n traversi
  - Gradi di libertà statici: centinaia
  - Gradi di libertà dinamici: n

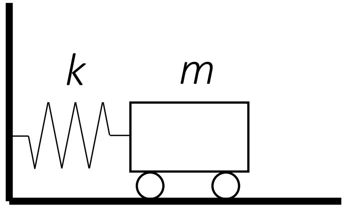


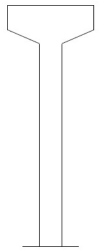
- Telai monopiano
  - Gradi di libertà statici: decine
  - Gradi di libertà dinamici: 1



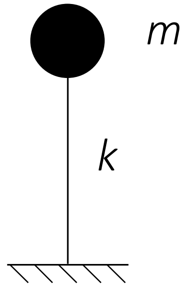
Risposta elastica di sistemi ad un grado di liberta (SDOF)

Strutture ad un grado di libertà

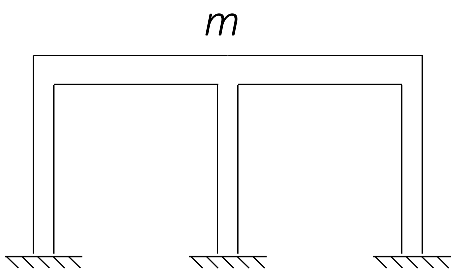




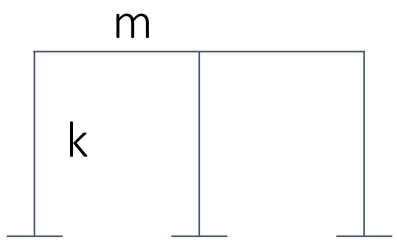
Disegno schematico



Modello numerico



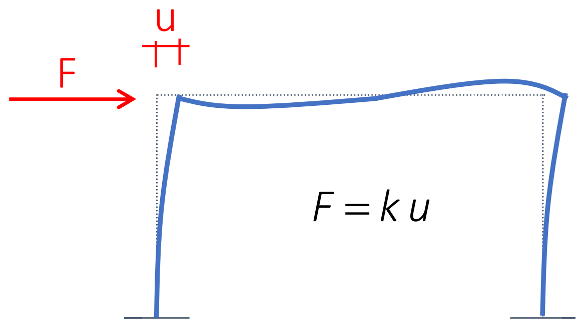
Disegno schematico



Modello numerico

Rigidezza laterale

Rigidezza (laterale) k = forza necessaria per ottenere uno spostamento unitario del grado di libertà

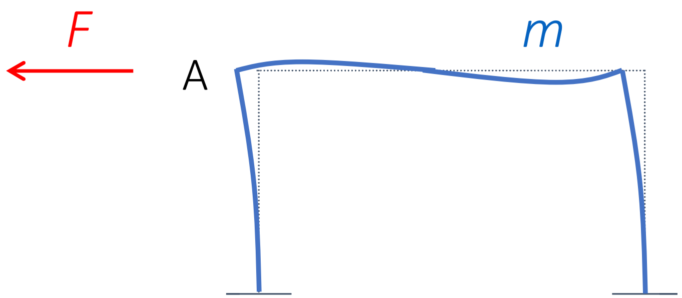


mensola $k = 3\frac{EI}{h^3}$

Rotazioni impedite $k = 12\frac{EI}{h^3}$

Negli edifici il grosso della massa è concentrata a livello degli impalcati.

Oscillazioni libere

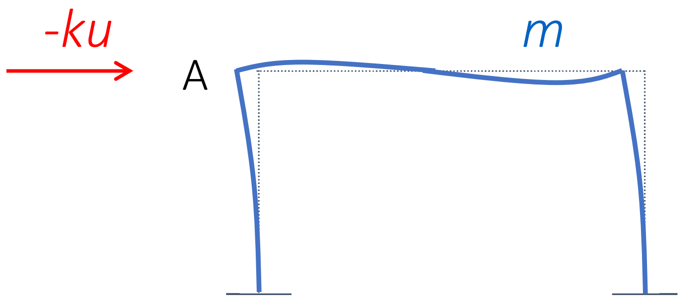


Equilibrio statico

$$F = k\,u$$

A) Per deformare il telaio in questa posizione occorre applicare una forza *F*, uguale ed opposta alla forza elastica che tende a riportare il telaio alla posizione indeformata (forza di richiamo elastico).

Oscillazioni libere



Equilibrio dinamico

$$-k\,u = m\,a$$
$$m\ddot{u} + k\,u = 0$$

Quando si lascia libero il telaio, agisce solo la forza di richiamo elastico, che provoca un'accelerazione.

L'equazione differenziale può essere risolta analiticamente. La soluzione è una funzione trigonometrica (seno, coseno)

$$u(0) = c \cos(0) = c = u_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{c = u_0}$$

$$u(t) = u_0 \cos \omega t$$

$$\dot{u} = -\omega u_0 \operatorname{sen} \omega t$$

$$\ddot{u} = -\omega^2 u_0 \cos \omega t$$

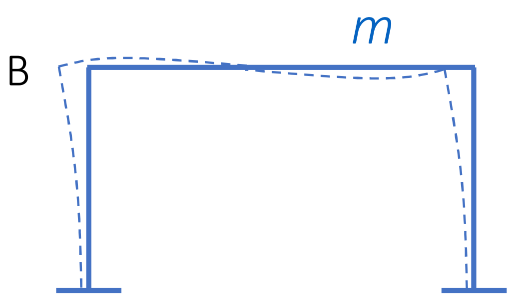
$$-m\omega^2 u_0 \cos \omega t + K u_0 \cos \omega t = 0$$

$$(K - m\omega^2) u_0 \cos \omega t = 0 \qquad \forall t$$

$$K - m\omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$$

Oscillazioni libere



Equazione del moto

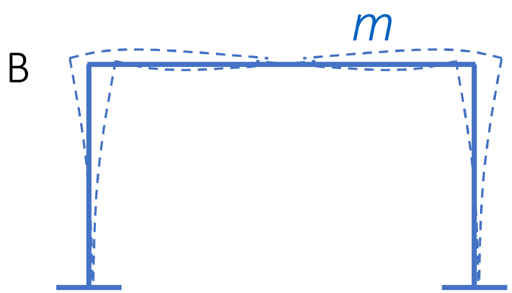
$$m\ddot{u} + k\,u = 0$$

L'equazione differenziale può essere risolta analiticamente. La soluzione è una funzione trigonometrica (seno, coseno)

Se lo spostamento iniziale è u_0 e la velocità iniziale è nulla: $u = u_0 \cos \omega t$

Frequenza angolare $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

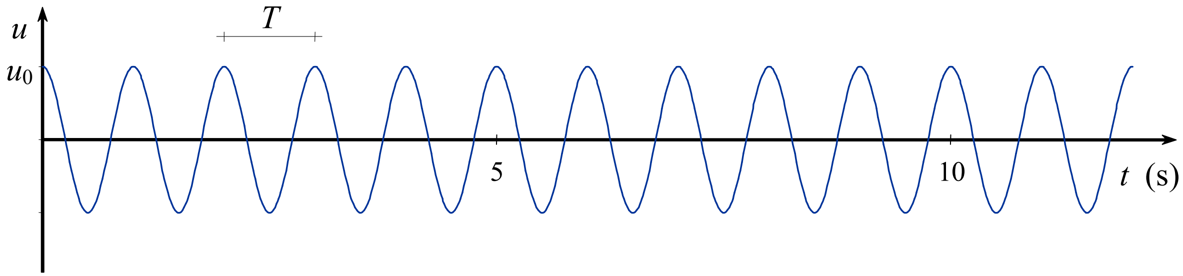
Oscillazioni libere



Equazione del moto

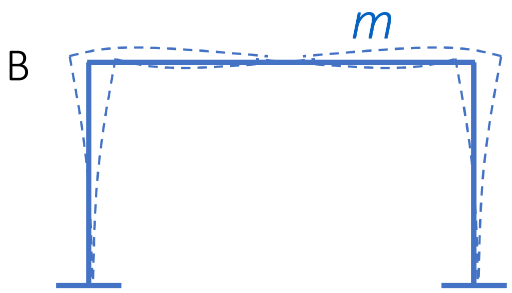
$$m\ddot{u} + k\,u = 0$$

Il telaio oscilla con un periodo ben preciso, legato alla massa ed alla rigidezza del telaio



$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\,\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Oscillazioni smorzate



Equazione del moto

$$m\ddot{u} + c\,\dot{u} + k\,u = 0$$

$$\ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2 u = 0$$

con $\quad \xi = \dfrac{c}{2\sqrt{k\,m}}$

In realtà il moto non continua così, a causa della dissipazione di energia (smorzamento)

L'ampiezza del moto si riduce tanto più rapidamente quanto maggiore è lo smorzamento

$$m \ddot{u} + c \dot{u} + k u = 0$$

$$c_{cr} = 2 \sqrt{k m}$$

$$\ddot{u} + \frac{c}{m} \dot{u} + \overset{\omega^2}{\frac{k}{m}} u = 0$$

$$\ddot{u} + \frac{c}{\sqrt{m}\sqrt{m}} \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k}} \dot{u} + \omega^2 u = 0 \qquad \omega$$

$$\ddot{u} + \frac{2c}{c_{cr}} \omega \dot{u} + \omega^2 u = 0 \qquad \xi = \frac{c}{c_{cr}}$$

$$\ddot{u} + 2 \xi \omega \dot{u} + \omega^2 u = 0$$

$$\ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2 u = 0$$

$$u(t) = \left(c_1 \cos\omega_d t + c_2 \operatorname{sen}\omega_d t \right) e^{-\xi\omega t}$$

$$u(0) = \left[c_1 + c_2\, 0 \right] e^0 = c_1 = u_0 \implies \boxed{c_1 = u_0}$$

$$\dot{u} = \left(-c_1\omega_d \operatorname{sen}\omega_d t + \omega_d c_2 \cos\omega_d t \right) e^{-\xi\omega t} +$$

$$-\xi\omega\left(c_1 \cos\omega_d t + c_2 \operatorname{sen}\omega_d t \right) e^{-\xi\omega t}$$

$$\dot{u}(0) = \omega_d c_2 - \xi\omega c_1 = 0$$

$$= \omega_d c_2 - \xi\omega u_0 = 0 \implies \boxed{c_2 = \xi \frac{\omega}{\omega_d} u_0}$$

$$u(t) = \left(u_0 \cos \omega_d t + \xi \frac{\omega}{\omega_d} u_0 \operatorname{sen} \omega_d t \right) e^{-\xi \omega t}$$

$$\dot{u} = \left(- C_1 \omega_d \operatorname{sen} \omega_d t + \omega_d C_2 \cos \omega_d t \right) e^{-\xi \omega t} +$$

$$- \xi \omega \left(C_1 \cos \omega_d t + C_2 \operatorname{sen} \omega_d t \right) e^{-\xi \omega t}$$

$$\dot{u}(t) = \left(- u_0 \omega_d \operatorname{sen} \omega_d t + \cancel{\omega_d} \xi \frac{\omega}{\cancel{\omega_d}} u_0 \cancel{\cos \omega_d t} \right) e^{-\xi \omega t} +$$

$$- \xi \omega \left(u_0 \cancel{\cos \omega_d t} + \xi \frac{\omega}{\omega_d} u_0 \operatorname{sen} \omega_d t \right) e^{-\xi \omega t}$$

$$\dot{u}(t) = - \left(\omega_d + \xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_d} \right) u_0 \operatorname{sen} \omega_d t \, e^{-\xi \omega t}$$

$$\ddot{u}(t) = - \left(\omega_d + \xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_d} \right) u_0 \left(\omega_d \cos \omega_d t \, e^{-\xi \omega t} - \xi \omega \operatorname{sen} \omega_d t \, e^{-\xi \omega t} \right)$$

$$-\left(\omega_d + \xi^2\frac{\omega^2}{\omega_d}\right) u_0 \left(\omega_d \underline{\cos\omega_d t}\, e^{-\xi\omega t} - \xi\omega\, \underline{\underline{\mathrm{sen}\,\omega_d t}}\, e^{-\xi\omega t}\right) +$$

$$-e\xi\omega \left(\omega_d + \xi^2\frac{\omega^2}{\omega_d}\right) u_0\, \underline{\underline{\mathrm{sen}\,\omega_d}}\, t\; e^{-\xi\omega t} +$$

$$+\omega^2\left(u_0 \underline{\cos\omega_d} t + \xi\frac{\omega}{\omega_d} u_0\, \underline{\underline{\mathrm{sen}\,\omega_d}} t\right) e^{-\xi\omega t}$$

$$\left\{\left[-\left(\omega_d^2 + \xi^2\omega^2\right) + \omega^2\right]\cos\omega_d t + \left(\xi\cancel{\omega}\omega_d + \xi^3\cancel{\frac{\omega^3}{\omega_d}} - \cancel{e}\,\xi\omega\omega_d - \cancel{e}\,\xi^3\frac{\omega^3}{\omega_d} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \xi\frac{\omega^3}{\omega_d}\right)\mathrm{sen}\,\omega_d t\right\} u_0\, e^{-\xi\omega t} = 0$$

$$\left[\underbrace{\left(\omega^2 - \omega_d^2 - \xi^2\omega^2\right)}_{A}\cos\omega_d t + \underbrace{\left(\xi\frac{\omega^3}{\omega_d} - \xi\omega\omega_d - \xi^3\frac{\omega^3}{\omega_d}\right)}_{B}\mathrm{sen}\,\omega_d t\right] u_0\, e^{-\xi\omega t} = 0$$

$$\forall\, t$$

I coefficienti di $\cos \omega_d t$ e $\operatorname{sen} \omega_d t$ devono essere nulli ...

Pongo $A = 0 \Rightarrow \omega^2 - \omega_d^2 - \xi^2 \omega^2 = 0$

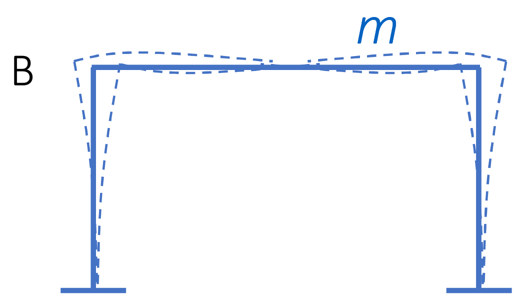
$$\omega_d^2 = \omega^2 (1 - \xi^2) \Rightarrow \boxed{\omega_d = \omega \sqrt{1 - \xi^2}}$$

Pongo $B = 0 \Rightarrow \cancel{\xi} \frac{\omega^{\cancel{3}2}}{\omega_d} - \cancel{\xi} \cancel{\omega} \omega_d - \xi^{\cancel{3}2} \frac{\omega^{\cancel{3}2}}{\omega_d} = 0$

moltiplico per ω_d ...

$$\omega^2 - \omega_d^2 - \xi^2 \omega^2 = 0 \Rightarrow \boxed{\omega_d = \omega \sqrt{1 - \xi^2}}$$

Oscillazioni smorzate



Equazione del moto

$$m\ddot{u} + c\,\dot{u} + k\,u = 0$$

$$\ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2 u = 0$$

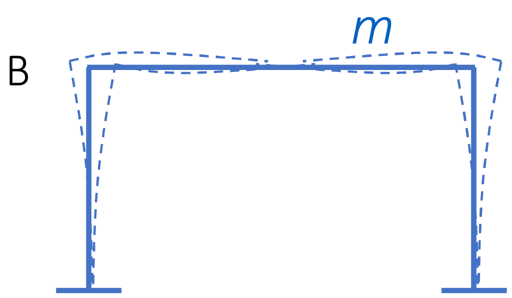
$$\text{con} \quad \xi = \frac{c}{2\sqrt{k\,m}}$$

In realtà il moto non continua così, a causa della dissipazione di energia (smorzamento)

L'ampiezza del moto si riduce tanto più rapidamente quanto maggiore è lo smorzamento

$$u = u_0\left(\cos\omega_d t + \frac{\xi\omega}{\omega_d}\sin\omega_d t\right)e^{-\xi\,\omega t} \qquad \omega_d = \omega\sqrt{1-\xi^2}$$

Oscillazioni smorzate



Equazione del moto

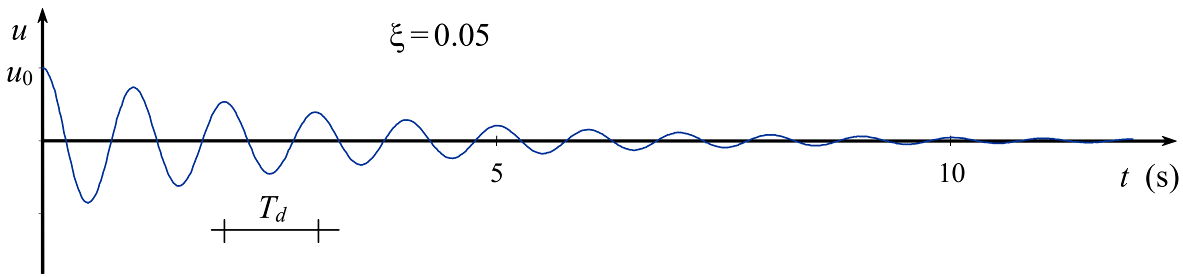
$$m\ddot{u}+c\,\dot{u}+k\,u=0$$

$$\ddot{u}+2\xi\omega\dot{u}+\omega^2 u=0$$

con $\quad \xi=\dfrac{c}{2\sqrt{k\,m}}$

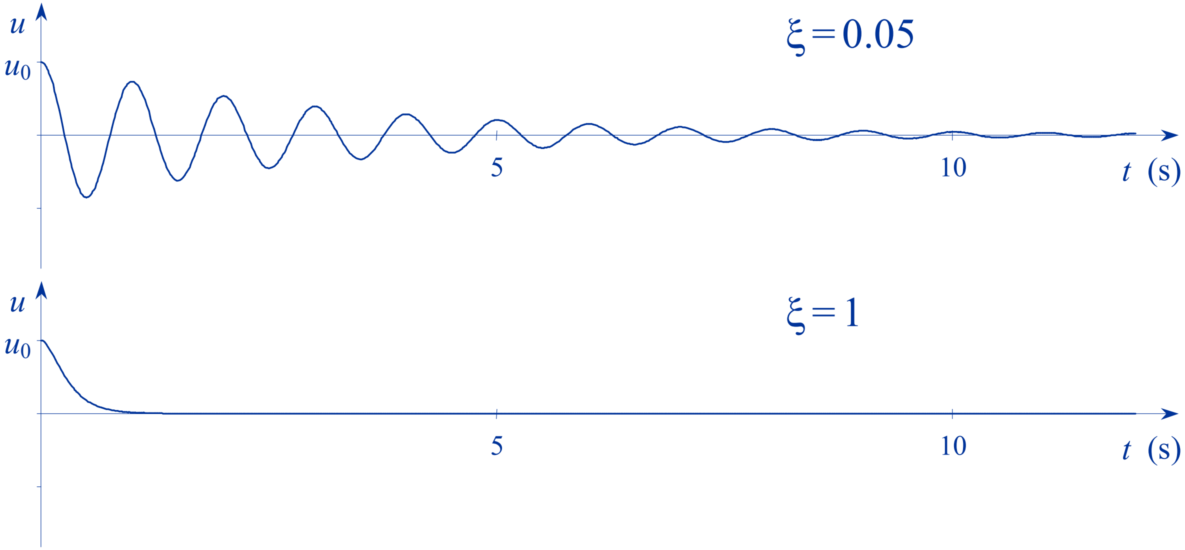
In realtà il moto non continua così, a causa della dissipazione di energia (smorzamento)

L'ampiezza del moto si riduce tanto più rapidamente quanto maggiore è lo smorzamento



$$T_d=\frac{2\pi}{\omega_d}=\frac{T}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

Oscillazioni smorzate



Si indica col termine "smorzamento critico" c_c quel valore per il quale il sistema raggiunge lo stato di quiete senza oscillare

$$c_c = 2\sqrt{k\,m}$$

Lo smorzamento viene di solito indicato come percentuale ξ dello smorzamento critico

$$\xi = \frac{c}{2\sqrt{k\,m}}$$

Smorzamento negli edifici

Dipende da:

- Elementi non strutturali (tramezzi, tamponature) molto
- Non linearità del materiale di meno

Edifici in cemento armato, con tramezzi in laterizio:

- Si può assumere un valore di smorzamento percentuale $\xi = 0.05$

Edifici in acciaio, con tramezzatura leggera:

- È consigliabile usare un valore minore di $\xi = 0.05$ Solitamente 0.02