Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

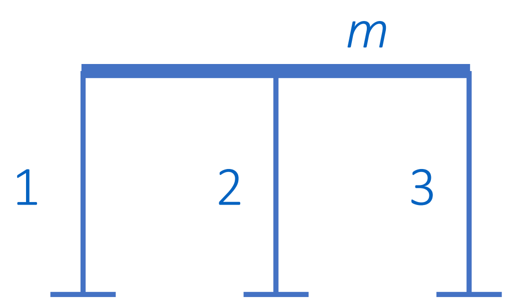
Progetto di costruzioni in zona sismica
A.A. 2023/2024

04 – RISPOSTA ELASTICA SISTEMI SDOF (02)

Edoardo M. Marino, Università degli Studi di Catania

Applicazione numerica (svolta dal docente)

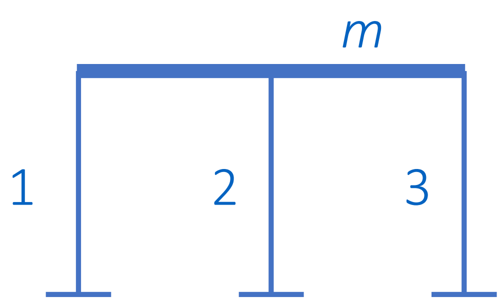
1. La massa m è 1000 t
2. L'altezza d'interpiano è 3.65 m
3. La trave è infinitamente rigida flessionalmente
4. I pilastri sono in c.a. (E_c = 31500 MPa) con sezione:
   - 30x40, pilastri 1 e 3
   - 30x50, pilastro 2



Quesiti
1. Calcolare la frequenza ω ed il periodo T
2. Assumendo un rapporto di smorzamento ξ = 0.05 calcolare frequenza e periodi smorzati ω_d e T_d
3. Si immagini di aver applicato uno spostamento orizzontale al traverso di 35 mm e di averlo lasciato libero di oscillare.
   - Calcolare lo spostamento orizzontale del traverso dopo un tempo $3T_d$ dal rilascio del traverso
   - Calcolare la velocità nello stesso istante
   - Calcolare la forza elastica di richiamo nello stesso istante
   - Rappresentare graficamente con EXCEL la storia temporale della forza elastica di richiamo

Applicazione numerica (svolta dagli studenti)

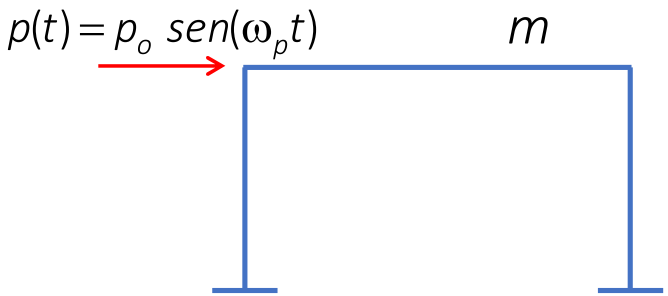
1. La massa m è 800 t
2. L'altezza d'interpiano è 3.20 m
3. La trave è infinitamente rigida flessionalmente
4. I pilastri sono in c.a. (E_c = 31500 MPa) con sezione 30x30



Quesiti

1. Calcolare la frequenza ω ed il periodo T
2. Assumendo un rapporto di smorzamento ξ = 0.05 calcolare frequenza e periodi smorzati ω_d e T_d
3. Si immagini di aver applicato uno spostamento orizzontale al traverso di 30 mm e di averlo lasciato libero di oscillare.
   - Calcolare lo spostamento orizzontale del traverso dopo un tempo $4T_d$ dal rilascio del traverso
   - Calcolare la velocità nello stesso istante
   - Calcolare la forza elastica di richiamo nello stesso istante
   - Rappresentare graficamente con EXCEL la storia temporale di spostamento e velocità

Oscillazioni forzate con smorzamento: forzante sinusoidale



Equazione del moto

$$m\,\ddot{u} + c\,\dot{u} + k\,u = p_o \, sin\,(\omega_p t)$$

Anche in questo caso è possibile risolvere analiticamente l'equazione differenziale e se il sistema parte con spostamento e velocità nulli la soluzione è

$$u(t) = \underbrace{\left(A\cos\omega_d t + B\sin\omega_d t\right)e^{-\xi\omega t}}_{\text{Parte transitoria}} + \underbrace{\frac{p_o}{k}\frac{\left[1-\left(\omega_p/\omega\right)^2\right]\sin\omega_p t - 2\xi\left(\omega_p/\omega\right)\cos\omega_p t}{\left[1-\left(\omega_p/\omega\right)^2\right]^2 - \left[2\xi\left(\omega_p/\omega\right)\right]^2}}_{\text{Parte stazionaria}}$$

Oscillazioni forzate con smorzamento: risposta stazionaria

Esaurita la fase transitoria il sistema vibra con la stessa frequenza della forzante

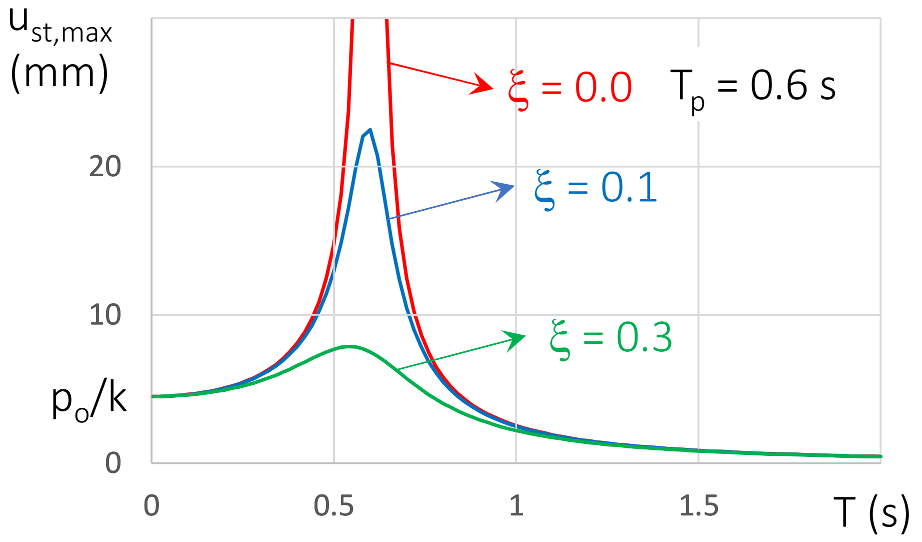
$$u(t) = \frac{p_o}{k} \frac{\left[1-\left(\omega_p / \omega\right)^2\right]\sin\omega_p t - 2\xi\left(\omega_p / \omega\right)\cos\omega_p t}{\left[1-\left(\omega_p / \omega\right)^2\right]^2 + \left[2\xi\left(\omega_p / \omega\right)\right]^2}$$

L'ampiezza massima delle oscillazioni vale:

$$u_{st,\max} = \frac{p_o}{k} \frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\omega_p / \omega\right)^2\right]^2 + \left[2\xi\left(\omega_p / \omega\right)\right]^2}}$$

$$u_{st,\max} = \frac{p_o}{k} \frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(T / T_p\right)^2\right]^2 + \left[2\xi\left(T / T_p\right)\right]^2}}$$

Amplificazione dinamica degli effetti e risonanza



Gli effetti dinamici amplificano la risposta rispetto a quella della forza applicata staticamente

La massima amplificazione si ottiene per sistemi con periodi prossimi a quello della forzante T_p (risonanza)

L' amplificazione è maggiore per sistemi con basso smorzamento.

In assenza di smorzamento la risposta massima diverge per $T = T_p$

Oscillazioni forzate con smorzamento: accelerazione

Derivando due volte rispetto al tempo la legge dello spostamento si ottiene l'accelerazione

$$\ddot{u}(t) = \frac{p_o}{m}\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\frac{\left[1-\left(\omega_p/\omega\right)^2\right]\sin\omega_p t - 2\xi\left(\omega_p/\omega\right)\cos\omega_p t}{\left[1-\left(\omega_p/\omega\right)^2\right]^2+\left[2\xi\left(\omega_p/\omega\right)\right]^2}$$

… e la massima accelerazione vale:

$$\ddot{u}_{st,\max} = \frac{p_o}{m}\frac{\left(\omega_p/\omega\right)^2}{\sqrt{\left[1-\left(\omega_p/\omega\right)^2\right]^2+\left[2\xi\left(\omega_p/\omega\right)\right]^2}}$$

$$\ddot{u}_{st,\max} = \frac{p_o}{m}\frac{\left(T/T_p\right)^2}{\sqrt{\left[1-\left(T/T_p\right)^2\right]^2+\left[2\xi\left(T/T_p\right)\right]^2}}$$