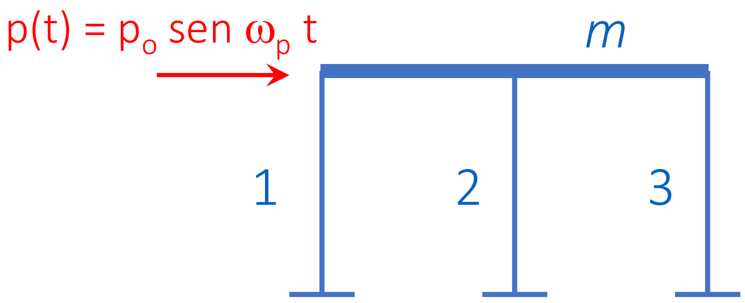
Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

Progetto di costruzioni in zona sismica
A.A. 2023/2024

04 – RISPOSTA ELASTICA SISTEMI SDOF (03)

Edoardo M. Marino, Università degli Studi di Catania

Applicazione numerica (svolta dal docente)



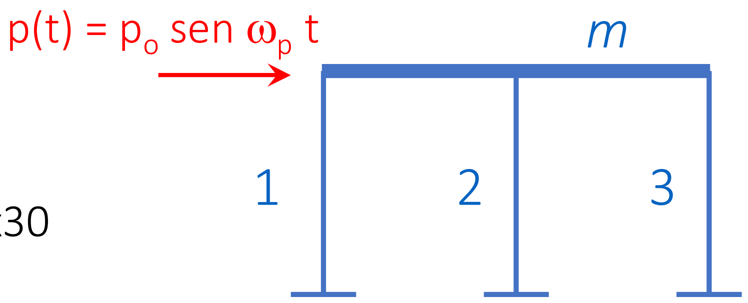
1. La massa m è 1000 t
2. L'altezza d'interpiano è 3.65 m
3. La trave è infinitamente rigida flessionalmente
4. I pilastri sono in c.a. (E_c = 31500 MPa) con sezione:
   - 30x40, pilastri 1 e 3
   - 30x50, pilastro 2
5. Forzante sinusoidale con p_o = 500 kN

Quesiti

1. Considerati tre periodi della forzante T_p = 0.60, 0.85 e 1.10 s, per quale valore del periodo è attesa la massima risposta stazionaria?
2. Calcolare per i tre periodi T_p la massima risposta stazionaria e rappresentare con EXCEL la sua storia nel tempo in termini di:
   - spostamento
   - accelerazione

Applicazione numerica (svolta dagli studenti)

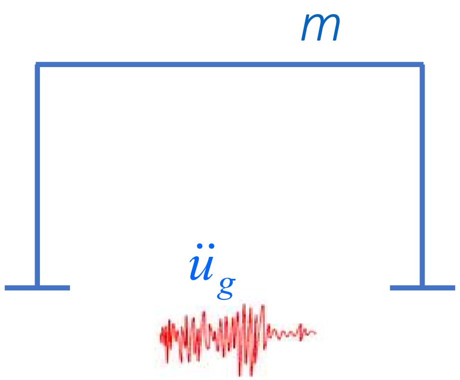
1. La massa m è 800 t
2. L'altezza d'interpiano è 3.20 m
3. La trave è infinitamente rigida flessionalmente
4. I pilastri sono in c.a. (E_c = 31500 MPa) con sezione 30x30
5. Forzante sinusoidale con p_o = 500 kN



Quesiti

1. Considerati tre periodi della forzante T_p = 0.60, 0.85 e 1.10 s, per quale valore del periodo è attesa la massima risposta stazionaria?
2. Calcolare per i tre periodi T_p la massima risposta stazionaria e rappresentare con EXCEL la sua storia nel tempo in termini di:
   - spostamento
   - accelerazione

Oscillazioni forzate: accelerogramma



Equazione del moto

$$m\,\ddot{u} + c\,\dot{u} + k\,u = -m\ddot{u}_g$$

In questo caso la forzante dinamica è la forza che si ottiene dal prodotto della massa m per l'accelerazione del suolo (variabile nel tempo).

Poiché la legge dell'accelerogramma non è nota in forma chiusa non è possibile risolvere analiticamente l'equazione del moto.

È comunque possibile determinare la risposta ad un accelerogramma mediante i metodi di integrazione numerica.

Metodi di analisi numerica e risposta nel tempo

Intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$

- Si usa il pedice 1 per indicare l'istante iniziale, 2 per quello finale
- Sono noti $u_1, \dot{u}_1, \ddot{u}_1$ e le accelerazioni del suolo $\ddot{u}_{g,1}$ e $\ddot{u}_{g,2}$
- Si ipotizza che l'accelerazione sia costante nel passo
  $\ddot{u} = \left(\ddot{u}_1 + \ddot{u}_2\right) / 2$ (o variabile linearmente)
- Considerato, a titolo di esempio il caso dell'accelerazione costante nel passo, si possono scrivere le seguenti relazioni che legano tra loro le variazioni di spostamento, velocità e accelerazione nel passo:

$$\Delta u = \Delta t\, \dot{u}_1 + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{u}_1 + \frac{\Delta t^2}{4} \Delta \ddot{u}$$

$$\Delta \dot{u} = \Delta t\, \ddot{u}_1 + \frac{\Delta t}{2} \Delta \ddot{u}$$

Metodi di analisi numerica e risposta nel tempo

- Invertendo le relazioni si può esprimere tutto in funzione della variazione di spostamento

$$\Delta\ddot{u} = \frac{4}{\Delta t^2}\Delta u - \frac{4}{\Delta t}\dot{u}_1 - 2\ddot{u}_1$$

$$\Delta\dot{u} = \frac{2}{\Delta t}\Delta u - 2\,\dot{u}_1$$

- Si sostituisce nell'equazione di equilibrio dinamico scritta in termini variazionali

$$m\,\Delta\ddot{u} + c\,\Delta\dot{u} + k\,\Delta u = -m\,\Delta\ddot{u}_g$$

per calcolare $$\Delta u = \frac{-m\,\Delta\ddot{u}_g + 2\,m\,\ddot{u}_1 + \left(2\,c + 4\,m\,/\,\Delta t\right)\dot{u}_1}{k + 2\,c\,/\Delta t + 4\,m\,/\Delta t^2}$$

Metodi di analisi numerica e risposta nel tempo
Metodo di Newmark

Facendo ipotesi diverse sull'accelerazione di ottengono metodi diversi

- Ipotesi di accelerazione costante nell'intervallo Δt

$$\Delta u = \Delta t\,\dot{u}_1 + \frac{\Delta t^2}{2}\ddot{u}_1 + \frac{\Delta t^2}{4}\Delta\ddot{u} \qquad \Delta\dot{u} = \Delta t\,\ddot{u}_1 + \frac{\Delta t}{2}\Delta\ddot{u} \qquad \beta = 1/4 \text{ e } \gamma = 1/2$$

- Ipotesi di accelerazione lineare nell'intervallo Δt

$$\Delta u = \Delta t\,\dot{u}_1 + \frac{\Delta t^2}{2}\ddot{u}_1 + \frac{\Delta t^2}{6}\Delta\ddot{u} \qquad \Delta\dot{u} = \Delta t\,\ddot{u}_1 + \frac{\Delta t}{2}\Delta\ddot{u} \qquad \beta = 1/6 \text{ e } \gamma = 1/2$$

- In generale

$$\Delta u = \Delta t\,\dot{u}_1 + \frac{\Delta t^2}{2}\ddot{u}_1 + \Delta t^2\,\beta\,\Delta\ddot{u} \qquad \Delta\dot{u} = \Delta t\,\ddot{u}_1 + \Delta t\,\gamma\,\Delta\ddot{u}$$

Metodi di analisi numerica e risposta nel tempo
Metodo di Newmark

- Invertendo le relazioni generali si trova

$$\Delta\ddot{u} = \frac{1}{\beta\,\Delta t^2}\,\Delta u - \frac{1}{\beta\,\Delta t}\dot{u}_1 - \frac{1}{2\,\beta}\,\ddot{u}_1$$

$$\Delta\dot{u} = \frac{\gamma}{\beta\,\Delta t}\,\Delta u - \frac{\gamma}{\beta}\dot{u}_1 + \left(1 - \frac{\gamma}{2\,\beta}\right)\ddot{u}_1\,\Delta t$$

- Quindi si sostituiscono nell'equazione di equilibrio dinamico

$$m\,\Delta\ddot{u} + c\,\Delta\dot{u} + k\,\Delta u = -m\,\Delta\ddot{u}_g$$

per calcolare

$$\Delta u = \frac{-m\,\Delta\ddot{u}_g + a\,\ddot{u}_1 + b\,\dot{u}_1}{k + a\,\Delta t}$$

$$a = \frac{m}{\beta\,\Delta t} + c\frac{\gamma}{\beta}$$

$$b = \frac{m}{2\,\beta} + c\,\Delta t\left(\frac{\gamma}{2\,\beta} - 1\right)$$

Metodi di analisi numerica e risposta nel tempo
Metodo di Newmark

Il metodo è incondizionatamente stabile se:

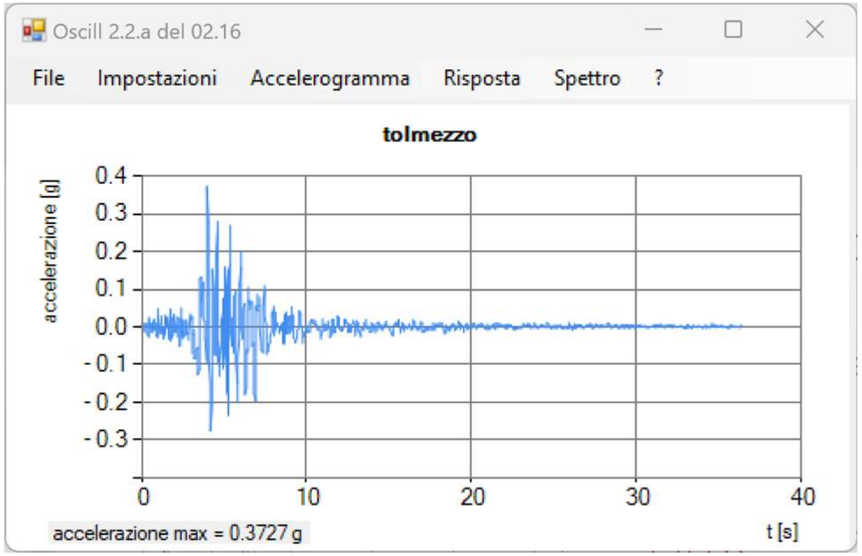
$$2\,\beta \geq \gamma \geq \frac{1}{2}$$

… altrimenti è condizionatamente stabile ed il passo d'integrazione deve essere:

$$\Delta t \leq \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{\gamma - 2\,\beta}}\,T$$

Il programma Oscill

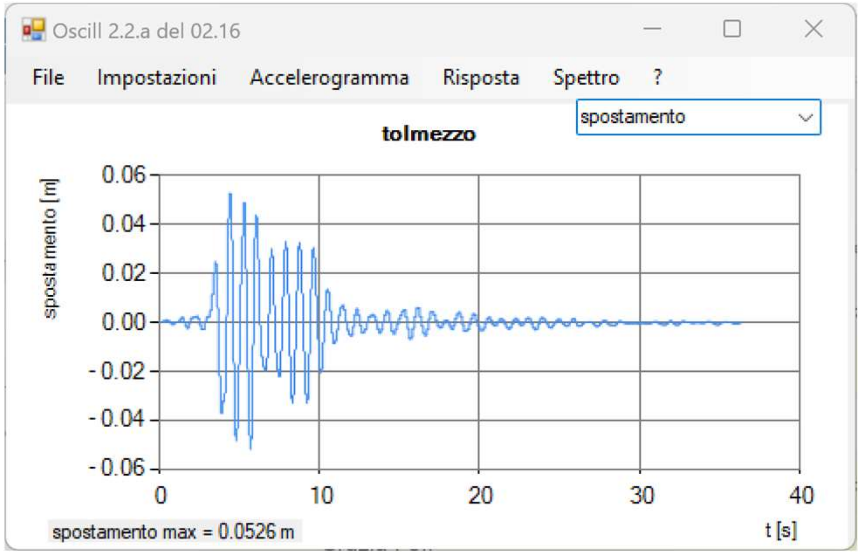
È in grado di determinare per via numerica la storia temporale della risposta ad un accelerogramma e la sua storia temporale.



$\xi = 0.05$

$T = 0.896$ s

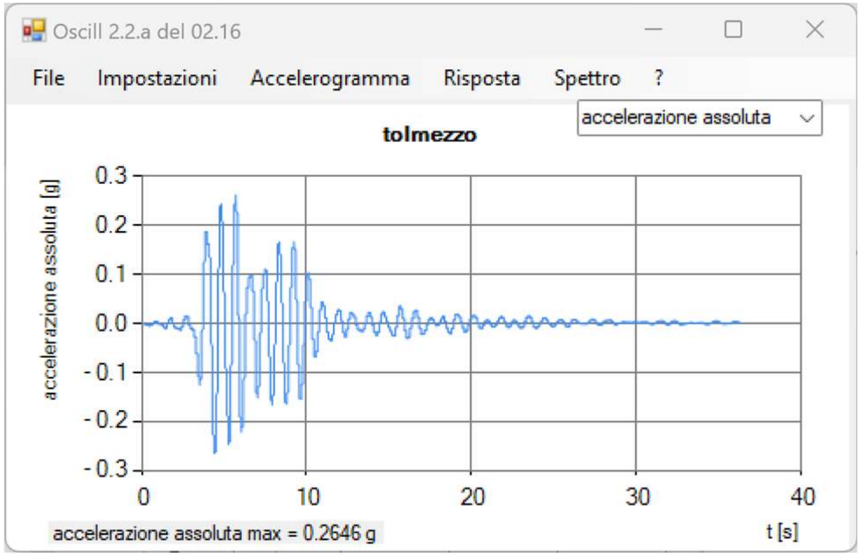
$u_{max} = 5.26$ cm



È possibile determinare anche altri parametri di risposta ...

… accelerazione, forza elastica di richiamo, ecc.

È in grado di determinare per via numerica la storia temporale della risposta ad un accelerogramma e la sua storia temporale.



$\xi = 0.05$

$T = 0.896$ s