Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

Progetto di costruzioni in zona sismica
A.A. 2023/2024

08 – RISPOSTA ELASTICA SISTEMI MDOF: VIBRAZIONI LIBERE

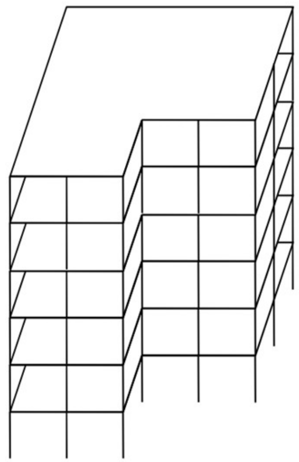
Edoardo M. Marino, Università degli Studi di Catania

Le strutture: gradi libertà statici

Le strutture, pur essendo in realtà continue, sono in genere viste come discretizzate, ovvero come:

– Insieme di nodi (liberi o vincolati)

– Collegati da elementi mono dimensionali (aste) o anche bi o tri-dimensionali



Gradi di libertà (statici):

– Le componenti di movimento consentite ai nodi

Nello spazio, un nodo non vincolato ha 6 gradi di libertà Impalcati indeformabili riducono i gradi di libertà

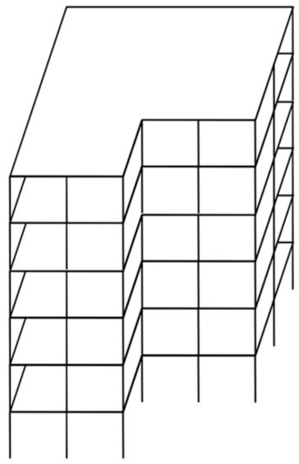
Le strutture: di libertà dinamici

Con il movimento nascono forze d'inerzia, prodotto di massa per accelerazione:

- Le masse sono in realtà continue
- Vengono però considerate concentrate (nei nodi, negli impalcati)

Gradi di libertà dinamici:

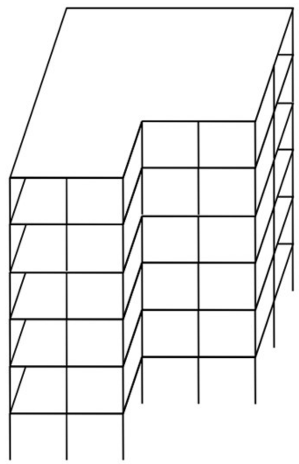
- Le componenti di movimento consentite alle masse



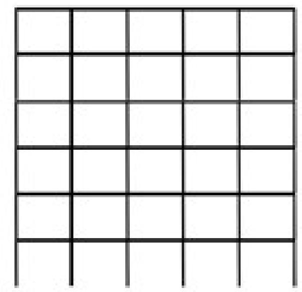
Usualmente si ipotizzano impalcati indeformabili e masse solo a livello dell'impalcato.
Vi sono in tal caso 3n gradi di libertà (se gli impalcati sono n ed il movimento è orizzontale)

Le strutture: di libertà dinamici

Edificio tridimensionale:
Usualmente si ipotizzano impalcati indeformabili e masse solo a livello dell’impalcato.
Vi sono in tal caso 3n gradi di libertà (se gli impalcati sono n ed il movimento è orizzontale)

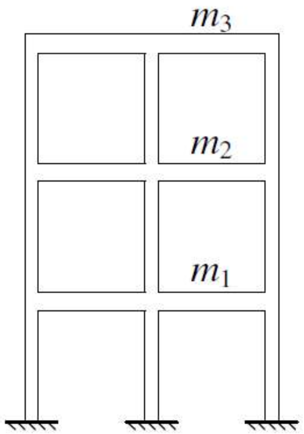


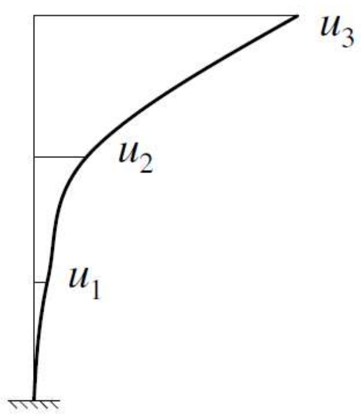
Telaio piano:
Usualmente si ipotizzano traversi inestensibili e masse solo a livello dei piani
Vi sono in tal caso n gradi di libertà (se i traversi sono n ed il movimento è orizzontale)



Gradi libertà dinamici del telaio piano

Per un telaio piano si possono assumere come parametri gli spostamenti dei traversi





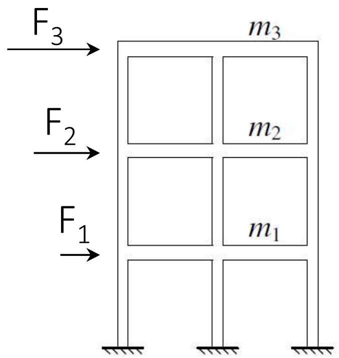
Abbiamo in realtà più possibilità:
- Spostamenti assoluti dei traversi
- Spostamenti relativi tra i traversi (e la base)
- Altre possibilità

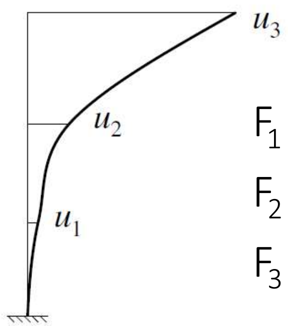
Matrice di rigidezza

Se il sistema è elastico forze e spostamenti sono proporzionali …

… ma attraverso quale legame?

- Per un sistema SDOF, forza e spostamento sono legati dalla rigidezza k (quantità scalare)
- Per un sistema MDOF, le forze F_i sono legate agli spostamenti attraverso la «matrice rigidezza» K



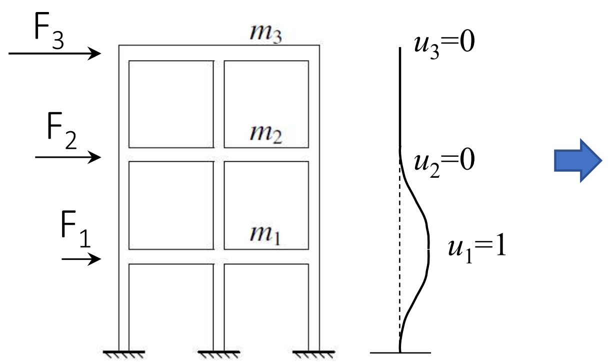


$$\begin{aligned} F_1 &= k_{11}u_1 + k_{12}u_2 + k_{13}u_3 \\ F_2 &= k_{21}u_1 + k_{22}u_2 + k_{23}u_3 \\ F_3 &= k_{31}u_1 + k_{32}u_2 + k_{33}u_3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad F = k\,u$$

Costruzione della matrice di rigidezza

Applico un sistema di forze che impone uno spostamento unitario al primo piano (primo grado di libertà) e nullo agli altri piani …

… le forze applicate forniscono gli elementi della prima colonna della matrice di rigidezza.



$K_{11} = F_1$

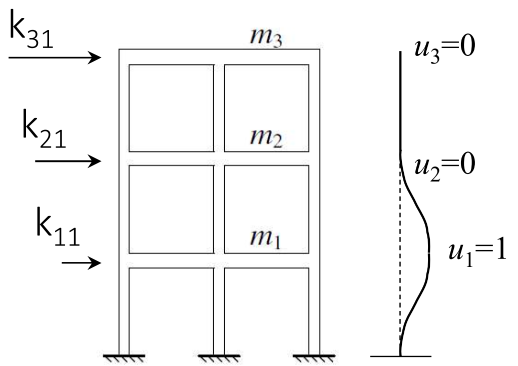
$K_{12} = F_2$

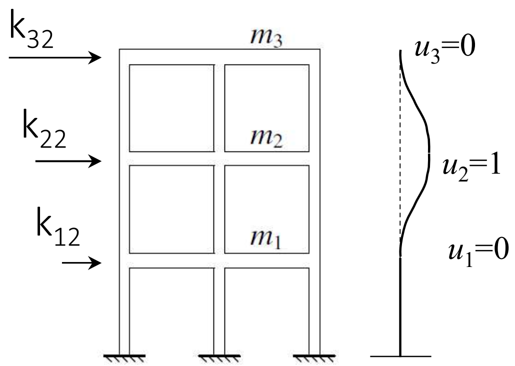
$K_{13} = F_3$

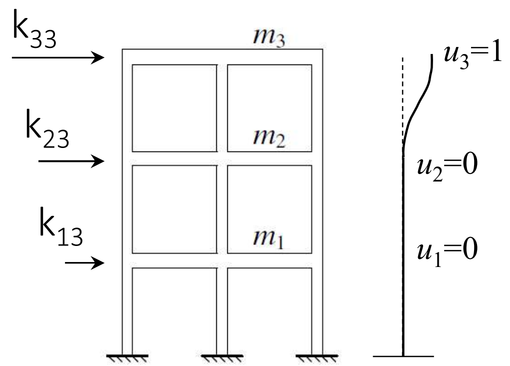
Costruzione della matrice di rigidezza

Per costruire l'intera matrice di rigidezza devo «imporre» le seguenti deformate e «misurare» le forze necessarie:

- per un telaio a 3 piani, impongo 3 deformate e ricavo le 3 colonne della matrice 3 x 3
- per un telaio a n piani devo imporre n deformate (matrice n x n)
- pe un telaio 3D devo attivare sia spostamenti che rotazioni

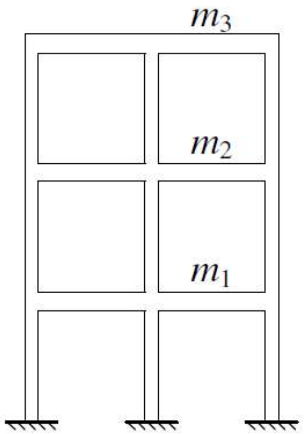


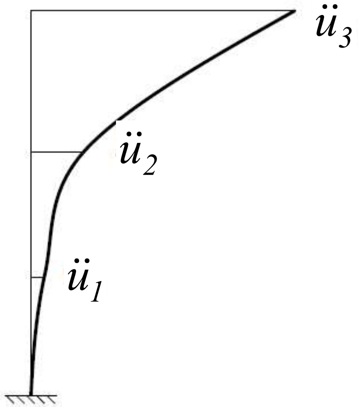




Forze d'inerzia e matrice di massa

Durante il moto le masse subiranno delle accelerazioni e nasceranno delle forze d'inerzia opposte alle accelerazioni





$$F_1 = m_1 \ddot{u}_1 \qquad F_2 = m_2 \ddot{u}_2 \qquad F_3 = m_3 \ddot{u}_3$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{vmatrix} \Rightarrow F = m\,\ddot{u}$$

Oscillazioni libere

In assenza di forzante (oscillazione libera) e smorzamento, forze d'inerzia e forze elastiche di richiamo devono essere uguali ad ogni istante.

Questa condizione fornisce l'equazione del moto che in termini matriciali è:

$$\begin{vmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} m_1\ddot{u}_1 + k_{11}u_1 + k_{12}u_2 + k_{13}u_3 &= 0 \\ m_2\ddot{u}_2 + k_{21}u_1 + k_{22}u_2 + k_{23}u_3 &= 0 \\ m_3\ddot{u}_3 + k_{31}u_1 + k_{32}u_2 + k_{33}u_3 &= 0 \end{aligned}$$

Ovvero …

$$m\ddot{u} + ku = 0$$

Risoluzione dell'equazione del moto

Cerco la soluzione tra quelle del tipo …

$$\mathrm{u_i}\left(\mathrm{t}\right)=\phi_{\mathrm{i,j}}\cos\left(\omega_{\mathrm{j}}\mathrm{t}\right)$$

Sostituendo nell'equazione del moto …

$$-m_1\omega_j^2\phi_{1,j}\cos\left(\omega_j t\right)+k_{11}\phi_{1,j}\cos\left(\omega_j t\right)+k_{12}\phi_{2,j}\cos\left(\omega_j t\right)+k_{13}\phi_{3,j}\cos\left(\omega_j t\right)=0$$
$$-m_2\omega_j^2\phi_{2,j}\cos\left(\omega_j t\right)+k_{21}\phi_{1,j}\cos\left(\omega_j t\right)+k_{22}\phi_{2,j}\cos\left(\omega_j t\right)+k_{23}\phi_{3,j}\cos\left(\omega_j t\right)=0$$
$$-m_3\omega_j^2\phi_{3,j}\cos\left(\omega_j t\right)+k_{31}\phi_{1,j}\cos\left(\omega_j t\right)+k_{32}\phi_{1,j}\cos\left(\omega_j t\right)+k_{33}\phi_{1,j}\cos\left(\omega_j t\right)=0$$

Il sistema di equazioni deve essere soddisfatto per qualunque valore del tempo t …

Risoluzione dell'equazione del moto

$$
\begin{aligned}
-m_1\omega_j^2\phi_{1,j} + k_{11}\phi_{1,j} + k_{12}\phi_{2,j} + k_{13}\phi_{3,j} &= 0\\
-m_2\omega_j^2\phi_{2,j} + k_{21}\phi_{1,j} + k_{22}\phi_{2,j} + k_{23}\phi_{3,j} &= 0\\
-m_3\omega_j^2\phi_{3,j} + k_{31}\phi_{1,j} + k_{32}\phi_{1,j} + k_{33}\phi_{1,j} &= 0
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow$$

$$
\begin{aligned}
\left(k_{11} - m_1\omega_j^2\right)\phi_{1,j} + k_{12}\phi_{2,j} + k_{13}\phi_{3,j} &= 0\\
k_{21}\phi_{1,j} + \left(k_{22} - m_2\omega_j^2\right)\phi_{2,j} + k_{23}\phi_{3,j} &= 0\\
k_{31}\phi_{1,j} + k_{32}\phi_{2,j} + \left(k_{33} - m_3\omega_j^2\right)\phi_{3,j} &= 0
\end{aligned}
$$

Che in termini matriciali diventa …

$$\left(\mathrm{k} - \omega_j^2\mathrm{m}\right)\phi_{\mathrm{j}} = 0$$

… formalmente analoga a quella dell'oscillatore semplice.

Determinazione delle frequenze …

In realtà è un sistema di equazioni algebriche omogeneo

$$\left(k - \omega_j^2 m\right)\phi_j = 0$$

… che ammette soluzioni diverse da quella banale se …

$$\det\left(k - \omega_j^2 m\right) = 0$$

Occorre quindi trovare i valori ω_j che annullano il determinante sopra indicato. In questa forma, è un problema matematico ben noto. I valori cercati sono denominati autovalori:

- se il sistema è costituito da n equazioni il determinante diventa un'equazione di grado n nell'incognita ω_j^2
- l'equazione fornisce n soluzioni, cioè n valori di ω_j

, dei periodi …

Si ricavano le frequenze dalla condizione che segue …

$$\det\left(k - \omega_j^2 m\right) = 0$$

… e da queste si ricavano i periodi …

$$T_j = \frac{2\,\pi}{\omega_j}$$

Ordino i periodi dal più grande al più piccolo. Il primo periodo è il periodo fondamentale della struttura.

… e dei modi di vibrazione

Torniamo al sistema di equazioni algebriche omogeneo

$$\left(\mathrm{k} - \omega_j^2 \mathrm{m}\right)\phi_\mathrm{j} = 0$$

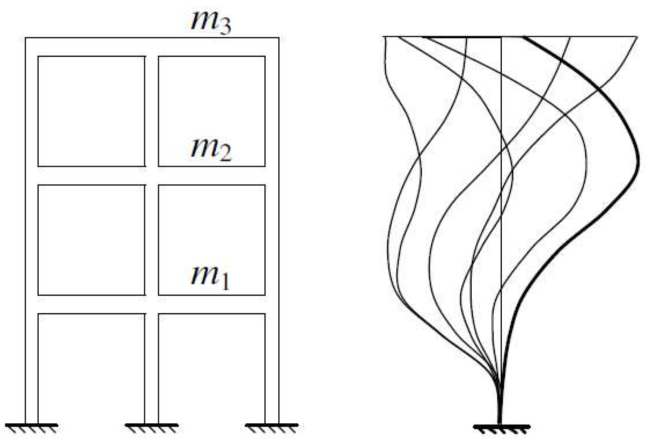
Assegnato un autovalore si può risolvere il sistema e determinare le soluzioni $\phi_{i,j}$ cioè la deformata corrispondente descritta mediante un vettore ϕ_j

- in matematica li chiamiamo autovettori
- in ambito strutturale, sono i modi di vibrazione della struttura

Modi di vibrazione

Qual è il significato fisico di un modo di vibrazione (o di oscillazione libera)?

- Se si assegna una deformata iniziale qualsiasi e si lascia la struttura libera di oscillare …

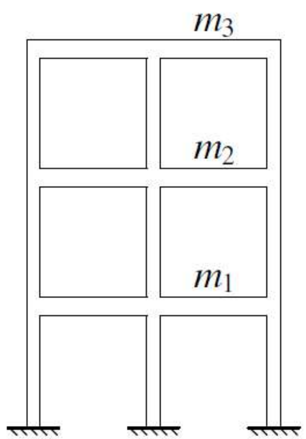


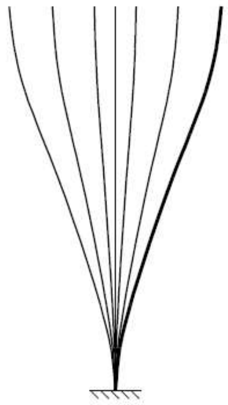
… la struttura si muove in maniera caotica, apparentemente senza nessuna regola

Modi di vibrazione

Qual è il significato fisico di un modo di vibrazione (o di oscillazione libera)?

- Se si assegna una deformata iniziale qualsiasi e si lascia la struttura libera di oscillare, la struttura si muove in maniera caotica, apparentemente senza nessuna regola
- Se si assegna una deformata iniziale uguale o proporzionale ad un modo di vibrazione ...





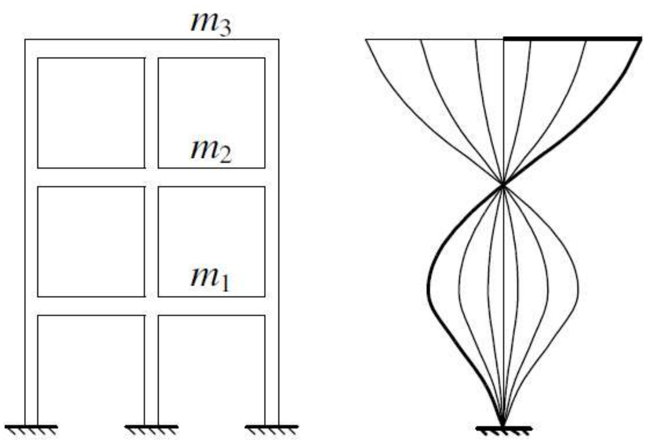
... la struttura si muove mantenendo la forma della deformata ed oscilla con un periodo ben preciso ...

... il periodo T del modo di vibrazione

Modi di vibrazione

Qual è il significato fisico di un modo di vibrazione (o di oscillazione libera)?

- Se si assegna una deformata iniziale qualsiasi e si lascia la struttura libera di oscillare, la struttura si muove in maniera caotica, apparentemente senza nessuna regola
- Se si assegna una deformata iniziale uguale o proporzionale ad un modo di vibrazione …



Altro esempio

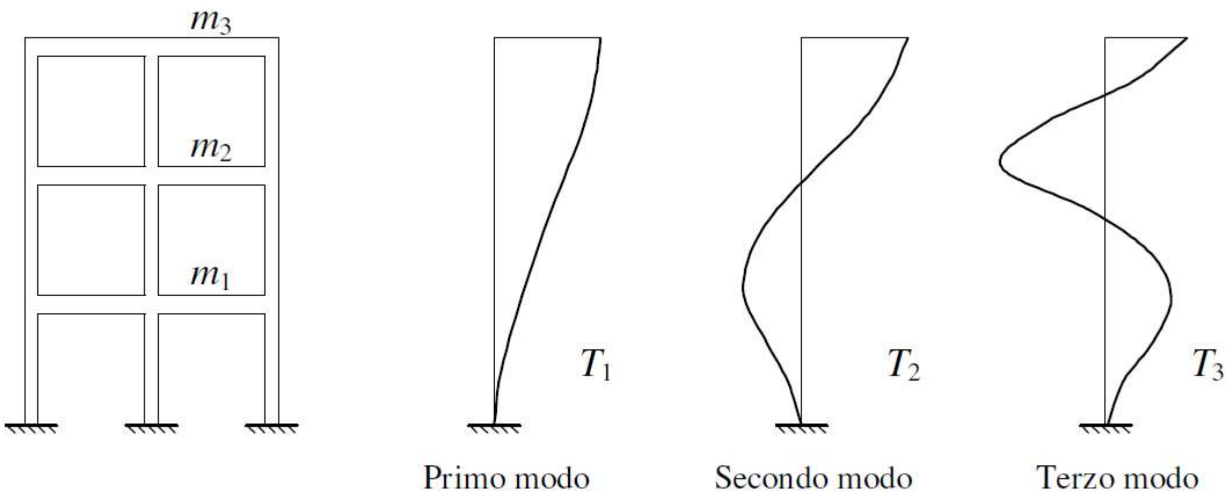
… la struttura si muove mantenendo la forma della deformata ed oscilla con un periodo ben preciso …

… il periodo T del modo di vibrazione

Modi di vibrazione

Telaio piano con traversi inestensibili

- Il numero di modi di vibrazione ϕ_j è uguale al numero «n» di piani
- Avremo anche n frequenze ω_j ed n periodi T_j



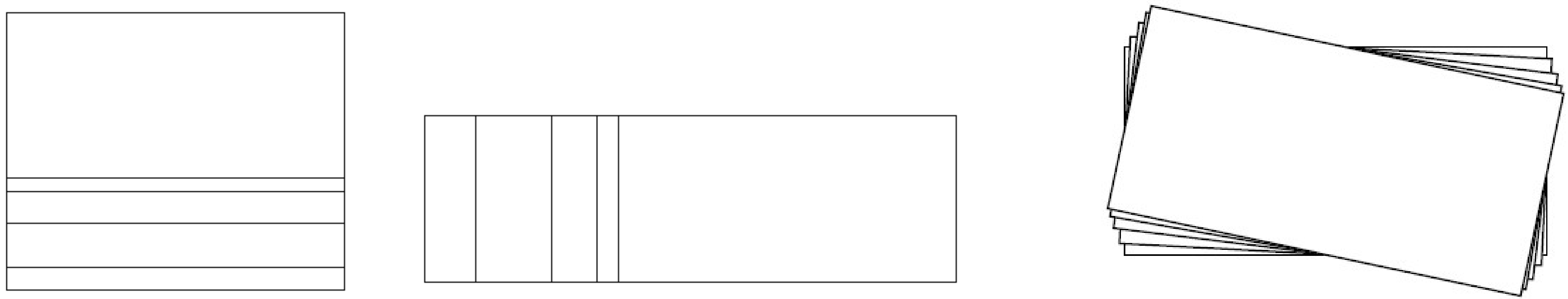
Modi di vibrazione

Telaio spaziale con impalcati indeformabili nel proprio piano

- Il numero di modi di vibrazione ϕ_j è uguale 3 x il numero «n» di piani
- Avremo anche 3n frequenze ω_j e 3n periodi T_j

Se la pianta ha due assi di simmetria, i modi di vibrazione sono disaccoppiati:

- n modi di traslazione in una direzione
- n modi di traslazione nell’altra direzione
- n modi di rotazione



Modi di vibrazione

Telaio spaziale con impalcati indeformabili nel proprio piano

- Il numero di modi di vibrazione ϕ_j è uguale 3 x il numero «n» di piani
- Avremo anche 3n frequenze ω_j e 3n periodi T_j

Se la pianta non ha assi di simmetria, i modi di vibrazione sono accoppiati: