

Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

Progetto di costruzioni in zona sismica
A.A. 2023/2024

09 – RISPOSTA ELASTICA SISTEMI MDOF:
STRUTTURA SOTTOPOSTA AD ECCITAZIONE SISMICA

Edoardo M. Marino, Università degli Studi di Catania

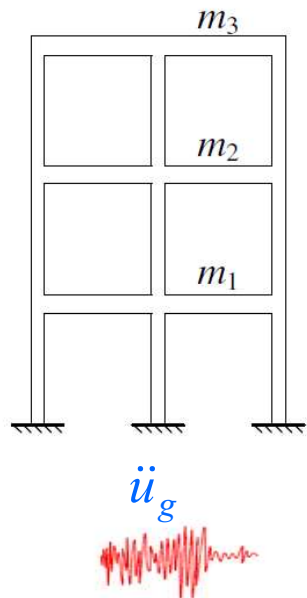
Risposta ad un accelerogramma

Se la struttura MDOF è sottoposta ad un accelerogramma, la risposta è governata dalla seguente equazione del moto:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -mI\ddot{u}_g$$

$c \rightarrow$ è la matrice di smorzamento

$I \rightarrow$ è il vettore pseudo-statico



$$I = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Telaio piano:} \\ \text{Tutte le componenti} \\ \text{valgono «1»} \end{array}$$

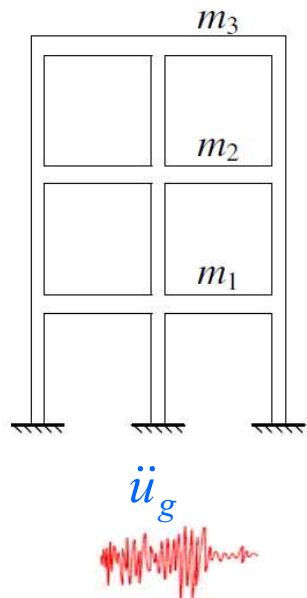
$$I = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Edificio 3D:} \\ \bullet \text{ «1» per i gradi di libertà «paralleli»} \\ \text{alla direzione del sisma} \\ \bullet \text{ «0» per tutti gli altri} \end{array}$$

Risposta ad un accelerogramma

Se la struttura MDOF è sottoposta ad un accelerogramma, la risposta è governata dalla seguente equazione del moto:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -mI\ddot{u}_g$$

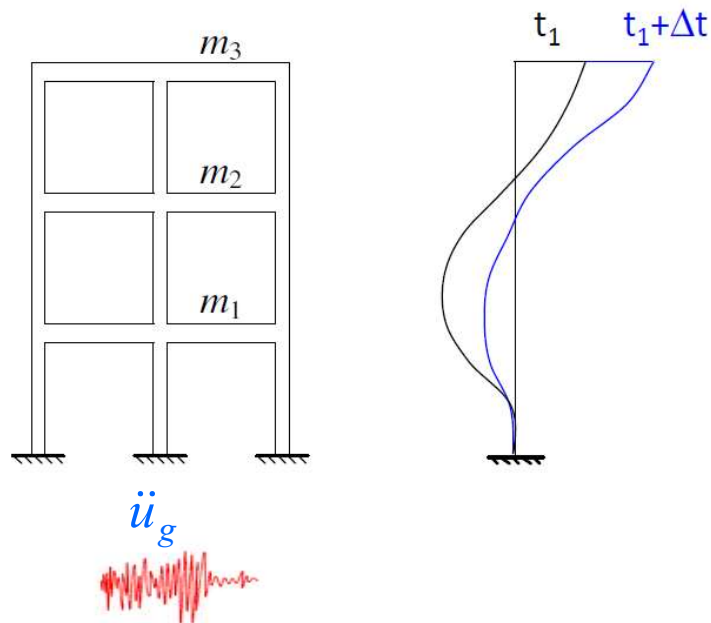
L'equazione non può essere risolta in forma chiusa ma bisogna utilizzare i metodi di integrazione numerica.



Analisi dinamica

Se la struttura MDOF è sottoposta ad un accelerogramma, la risposta è governata dalla seguente equazione del moto:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -mI\ddot{u}_g$$



Noti i valori di \ddot{u} , \dot{u} ed u in un certo istante t_1 ed il valore di \ddot{u}_g tra t_1 e $t_1 + \Delta t$ si possono ricavare i valori di \ddot{u} , \dot{u} ed u nell'istante $t_1 + \Delta t$.

Procedendo per passi si ottiene la risposta nel tempo, istante dopo istante (Analisi dinamica lineare)

Pro e contro dell'analisi dinamica

L'analisi dinamica è lo strumento più preciso per la determinazione della risposta sismica, però:

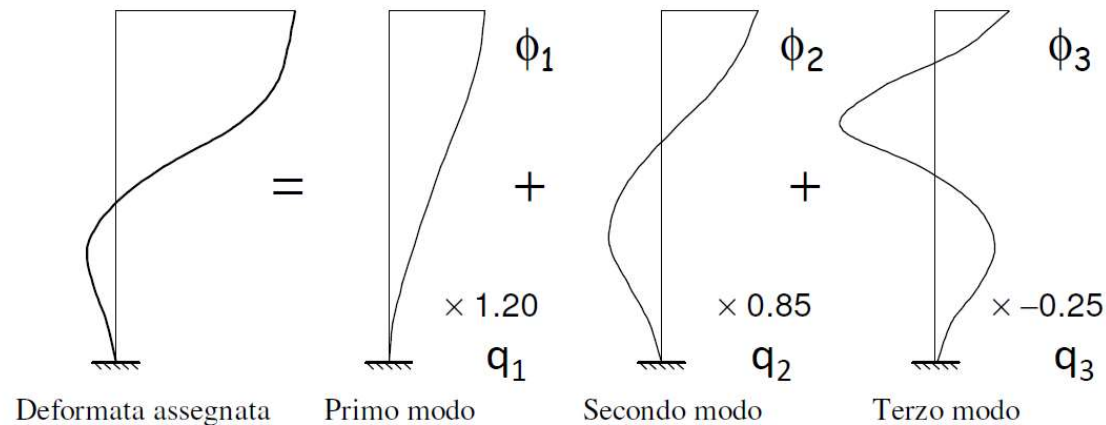
- È estremamente oneroso da un punto di vista computazionale
- Può servire per valutare la risposta ad un accelerogramma specifico ma io non conosco l'accelerogramma del terremoto che verrà
- Se volessi usarlo come strumento progettuale dovrei individuare un insieme di accelerogrammi che rappresentano quello che potrà avvenire nel sito

Ma ci serve veramente conoscere quello che accade istante per istante?

In generale no, basta conoscere la massima risposta.

Coordinate generalizzate

La risposta nel generico istante può essere espressa come combinazione lineare delle deformate modali:



$$u = \Phi q$$

Φ è la matrice dei modi di vibrazione

ϕ_i : sono i modi di vibrazione e sono quantità (vettori) costanti

q_i : sono le «coordinate generalizzate» e sono quantità (scalari) variabili nel tempo

Disaccoppiamento delle equazioni del moto

Con questa posizione, l'equazione del moto diventa:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m l \ddot{u}_g \quad \Rightarrow \quad M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = -\Phi^T m l \ddot{u}_g$$

$$M = \Phi^T m \Phi$$

$$C = \Phi^T c \Phi$$

$$K = \Phi^T k \Phi$$

Φ è la matrice dei modi di vibrazione

Le matrici M e K sono sempre diagonali

In molti casi anche la matrice C è diagonale e le equazioni sono disaccoppiate (sistemi classicamente smorzati)

Disaccoppiamento delle equazioni del moto

Con questa posizione, l'equazione del moto diventa:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{k} \mathbf{q} = -\mathbf{\Phi}^T \mathbf{m} \ddot{u}_g$$

Che si può scrivere come un sistema di n equazioni differenziali disaccoppiate

$$\ddot{q}_j + 2\xi_j \omega_j \dot{q}_j + \omega_j^2 q_j = -\Gamma_j \ddot{u}_g$$

$$\Gamma_j = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \phi_{i,j}}{\sum_{i=1}^n m_i \phi_{i,j}^2}$$

Coefficiente di partecipazione modale
(indica se il contributo del modo è più o meno rilevante)

È come aver trasformato un sistema MDOF in «n» sistemi SDOF sottoposti all'accelerogramma

Risposta come contributi dei modi i vibrazione

Contributo di un singolo modo:

- La struttura che oscilla secondo uno dei suoi “modi” si comporta come un oscillatore semplice
- Se determino la storia temporale delle coordinate generalizzate posso ottenere la risposta nel tempo del sistema MDOF

$$u(t) = \sum_{j=1}^n q_j(t) \phi_j$$

- Imponendo questa deformata si ottengono le sollecitazioni.

Risposta come contributi dei modi i vibrazione

Contributo massimo di un singolo modo:

- Possiamo anche determinare per ogni modo $q_{j,\max}$ dallo spettro di spostamento S_{de} scalato moltiplicandolo per Γ_j e quindi gli spostamenti massimi

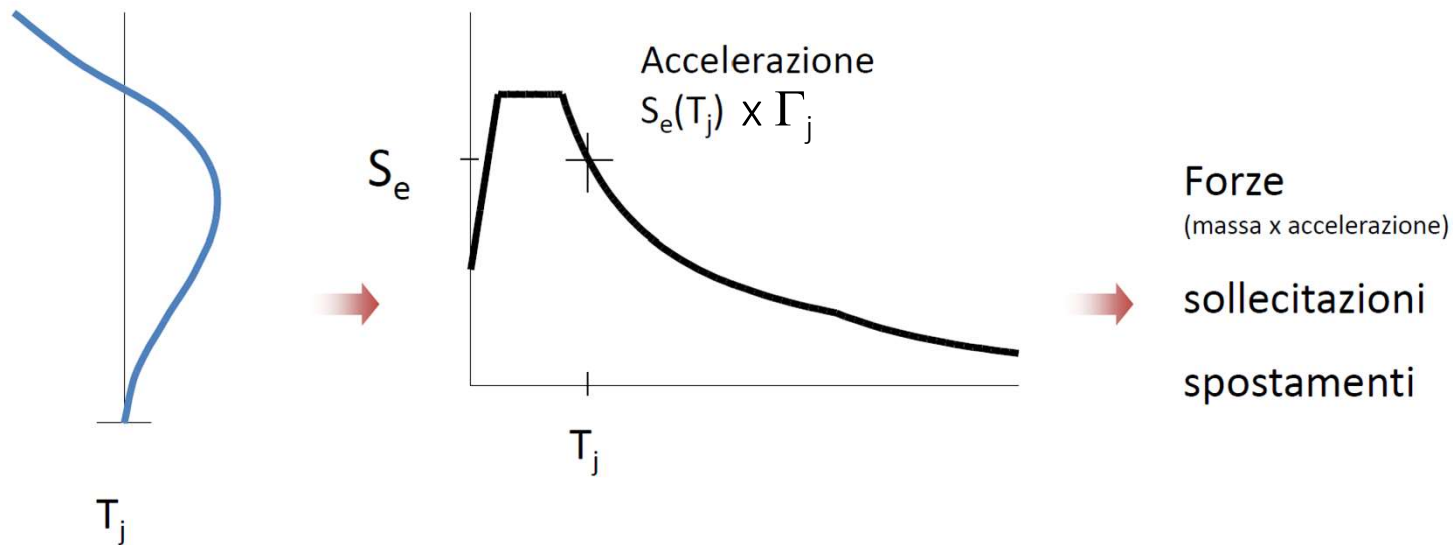
$$u_{j,\max} = \Gamma_j S_{De}(T_j) \phi_j$$

- Imponendo questa deformata si ottengono le sollecitazioni massime.

Ma preferiamo applicare forze alla struttura per ottenere la risposta massima.

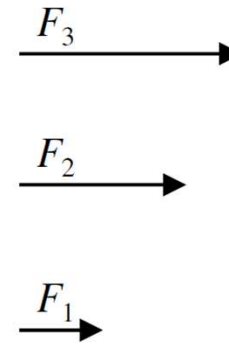
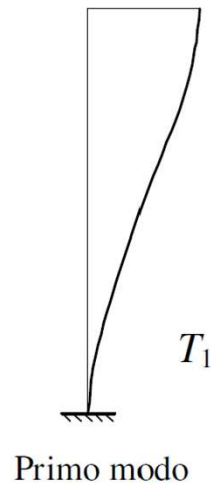
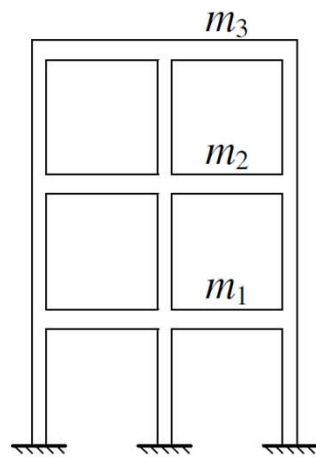
Massimi modali

Si ritorna in sostanza all'idea di applicare alla struttura un insieme di forze (statiche) orizzontali



Massimi modali

Si ritorna in sostanza all'idea di applicare alla struttura un insieme di forze (statiche) orizzontali

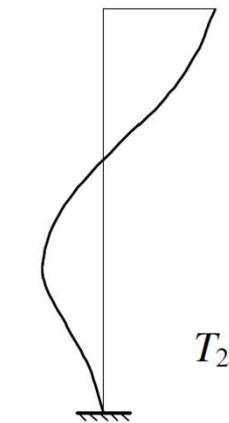
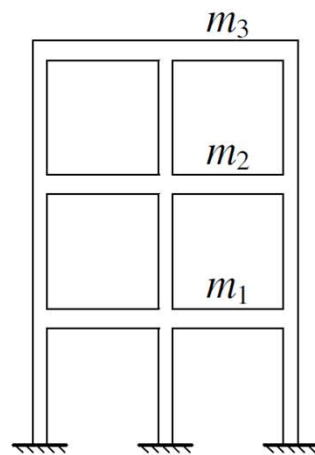


$$F_i = \Gamma_1 m_i \phi_{i,1} S_e(T_1)$$

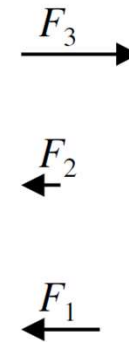
Forze
corrispondenti al
primo modo

Massimi modali

Si ritorna in sostanza all'idea di applicare alla struttura un insieme di forze (statiche) orizzontali



Secondo modo



Forze
corrispondenti al
secondo modo

$$F_i = \Gamma_2 m_i \phi_{i,2} S_e(T_2)$$

Massa partecipante

Bisogna applicare alla struttura una distribuzione di forze agenti nei centri di massa, il cui risultante è $V_{b,j}$ (taglio alla base della struttura) e si ottiene:

$$V_{b,j} = M_j^* S_e(T_j)$$

Chi è la massa M_j^* ?

... è la massa partecipante:

$$M_j^* = \sum_{i=1}^n m_i \phi_{i,j} \Gamma_j = \frac{\left(\sum_{i=1}^n m_i \phi_{i,j} \right)^2}{\sum_{i=1}^n m_i \phi_{i,j}^2}$$

È la massa che moltiplicata per la pseudo-accelerazione restituisce il massimo taglio alla base «modale»

La somma delle masse partecipanti è pari alla massa totale

Analisi modale con spettro di risposta

Consiste nel valutare separatamente la risposta della struttura vincolata a deformarsi secondo ciascuno dei suoi modi di oscillazione . . .

. . . e poi combinare le massime sollecitazioni (o spostamenti) trovati per i singoli modi con criteri statistici

- Sommare i massimi non va bene
- SRSS = radice quadrata della somma dei quadrati
- CQC = combinazione quadratica completa

Regole di combinazione dei massimi modali

- Radice quadrata della somma dei quadrati (SRSS), suggerita da EC8

$$E = \sqrt{\sum_{j=1}^n E_j^2}$$

- Combinazione quadratica completa (CQC), suggerita da EC8 e dalle NTC18

$$E = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \rho_{ij} E_i E_j}$$

ρ_{ij} coefficiente di correlazione tra i modi i e j

Regole di combinazione dei massimi modali

- Combinazione quadratica completa (CQC), suggerita dalle NTC18

$$E = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \rho_{ij} E_i E_j}$$

con:

E_j valore dell'effetto relativo al modo j ;

ρ_{ij} coefficiente di correlazione tra il modo i e il modo j , calcolato con formule di comprovata validità quale:

$$\rho_{ij} = \frac{8\sqrt{\xi_i \cdot \xi_j} (\beta_{ij} \cdot \xi_i + \xi_j) \cdot \beta_{ij}^{3/2}}{(1 - \beta_{ij}^2)^2 + 4 \cdot \xi_i \cdot \xi_j \cdot \beta_{ij} (1 + \beta_{ij}^2) + 4 \cdot (\xi_i^2 + \xi_j^2) \cdot \beta_{ij}^2} \quad [7.3.5a]$$

che, nel caso di uguale smorzamento dei modi i e j , si esprime come:

$$\rho_{ij} = \frac{8\xi^2 \beta_{ij}^{3/2}}{(1 + \beta_{ij}) \cdot [(1 - \beta_{ij})^2 + 4\xi^2 \beta_{ij}]} \quad [7.3.5b]$$

$\xi_{i,j}$ smorzamento viscoso dei modi i e j ;

β_{ij} è il rapporto tra l'inverso dei periodi di ciascuna coppia i - j di modi ($\beta_{ij} = T_j/T_i$).

Indicazioni per l'uso dell'analisi modale con spettro di risposta

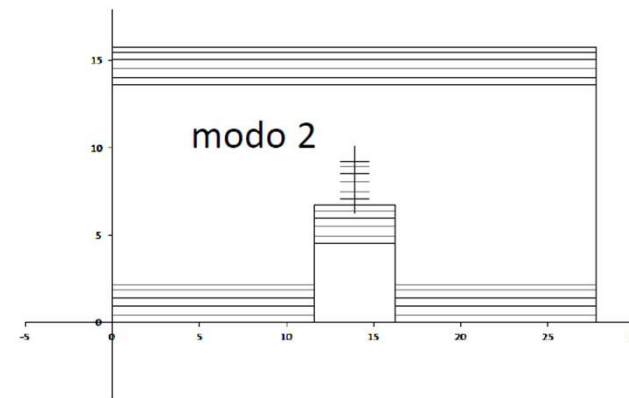
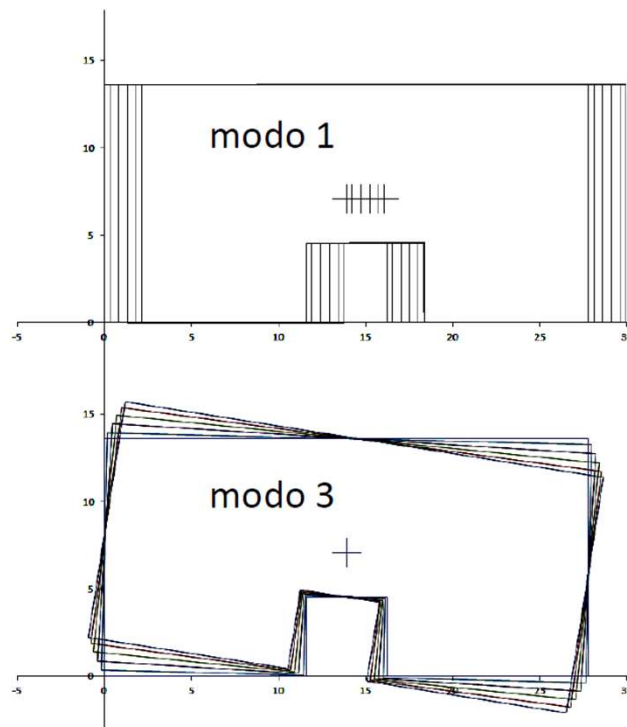
- Il primo modo è nettamente predominante per entità di massa partecipante. Le forze sono tutte dello stesso verso
- Gli altri modi hanno masse partecipanti via via minori. Essi danno forze discordi, che producono un effetto minore rispetto alla base

Bisogna (NTC18) considerare tanti modi da:

- raggiungere una massa partecipante dell'85%
 - non trascurare modi con massa partecipante superiore al 5%
-
- L'esame delle forme modali, dei periodi e delle masse partecipanti forniscono informazioni importanti sul comportamento della struttura

Periodi, masse partecipanti e modi: esempio n. 1

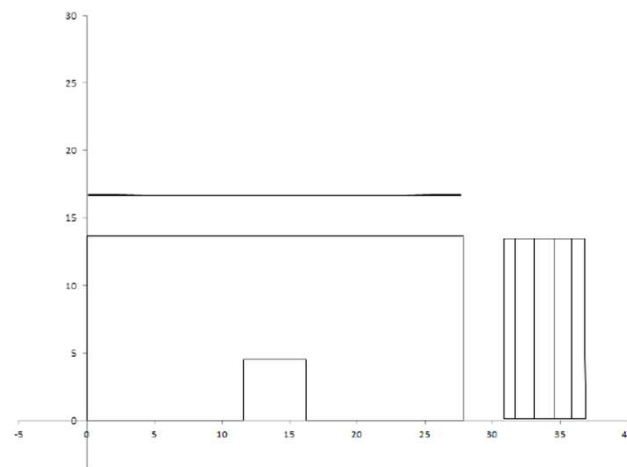
- Modi completamente disaccoppiati
- Nessun contributo del moto rotazionale
- Periodo per sisma x leggermente maggiore



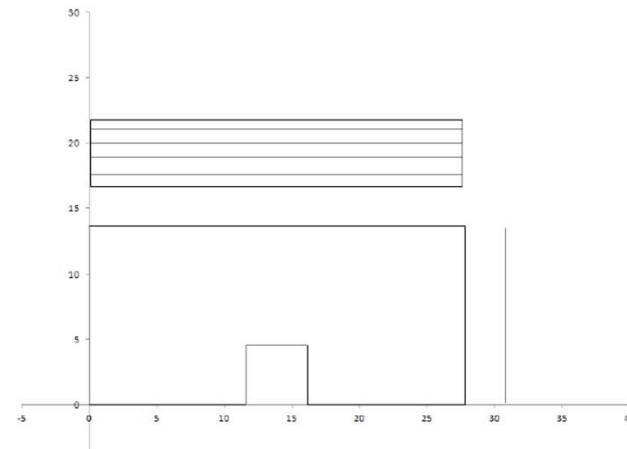
Modo	T	Mas X	Mas Y
1	0.522	78.66%	0.00%
2	0.483	0.00%	82.13%
3	0.377	0.01%	0.00%

Inviluppo dei modi: esempio n. 1

- L'inviluppo degli spostamenti conferma che i modi sono completamente disaccoppiati
- Diagrammi degli spostamenti costanti → a parità di rigidezza, i telai sono ugualmente sollecitati



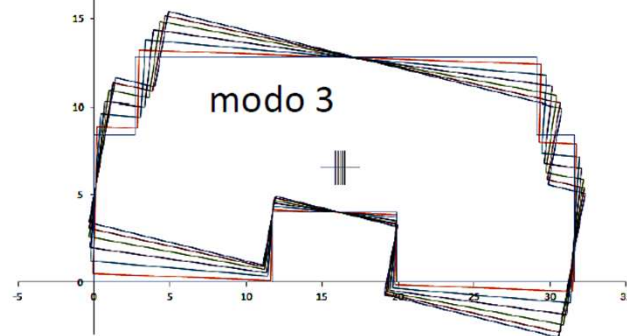
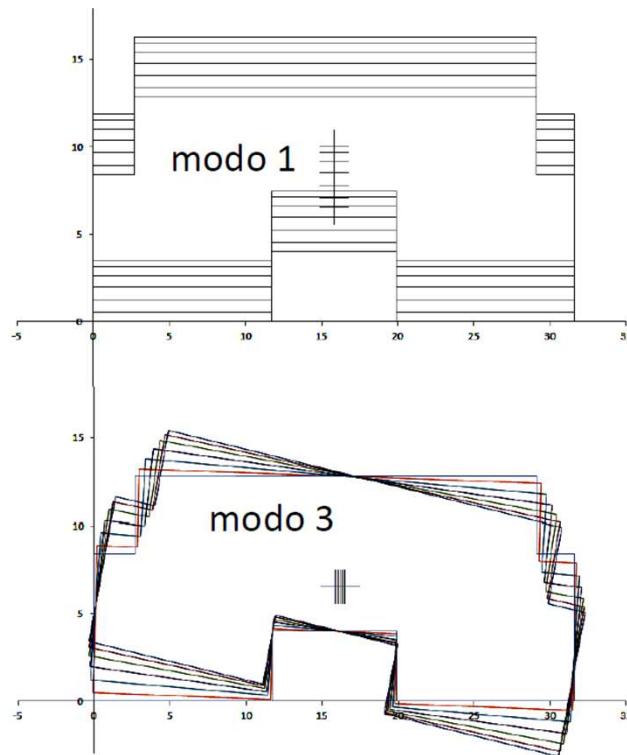
Sisma x



Sisma y

Periodi, masse partecipanti e modi: esempio n. 2

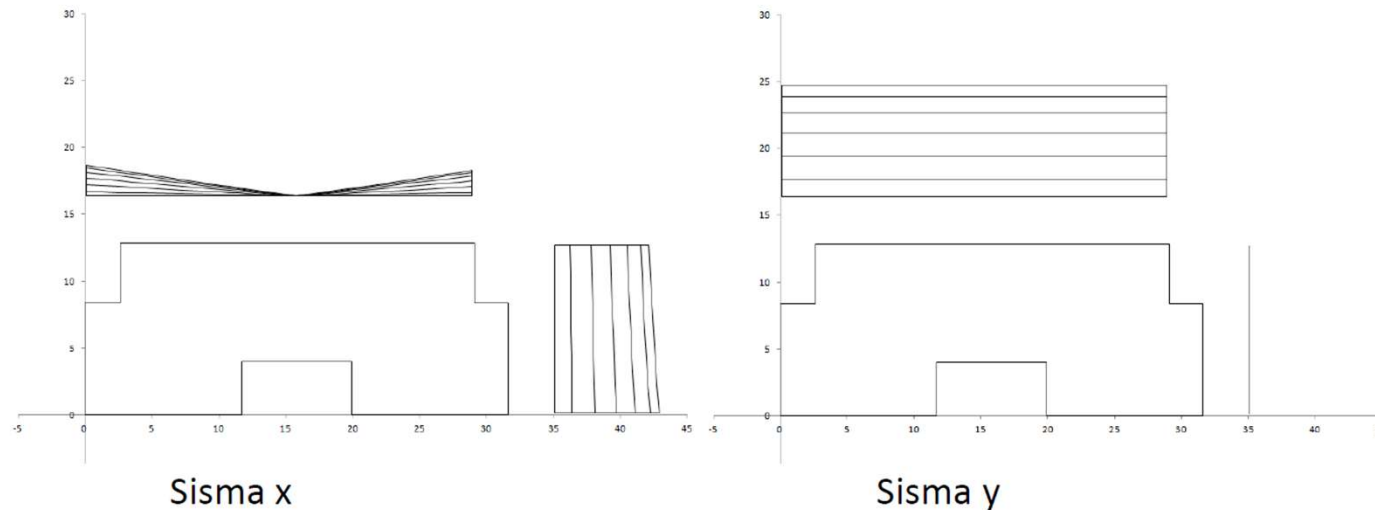
- Modo 2 e 3 abbastanza accoppiati
- Contributo del moto rotazionale (anche se modesto)
- Periodo per sisma y più alto del 10%



Modo	T	Mas X	Mas Y
1	0.912	0.00%	81.12%
2	0.831	76.67%	0.00%
3	0.775	5.37%	0.00%

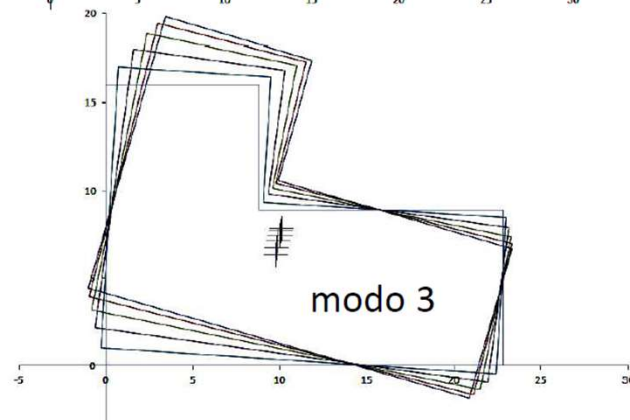
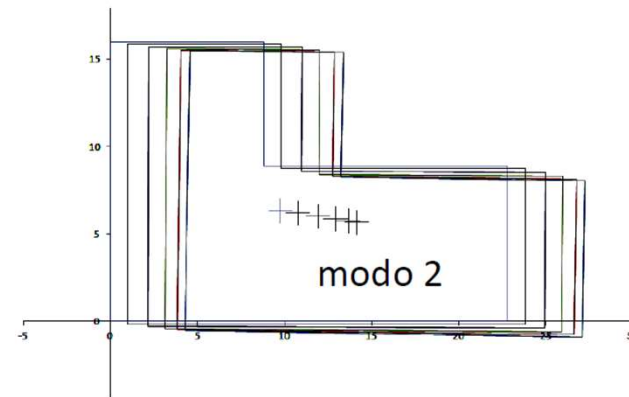
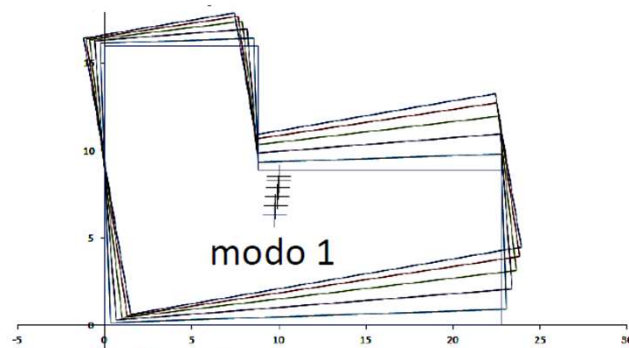
Inviluppo dei modi: esempio n. 2

- Differenza spostamenti x non particolarmente rilevante
- Rotazione importante per sisma x per la non alta rigidezza rotazionale
- Comportamento simmetrico per sisma y



Periodi, masse partecipanti e modi: esempio n. 3

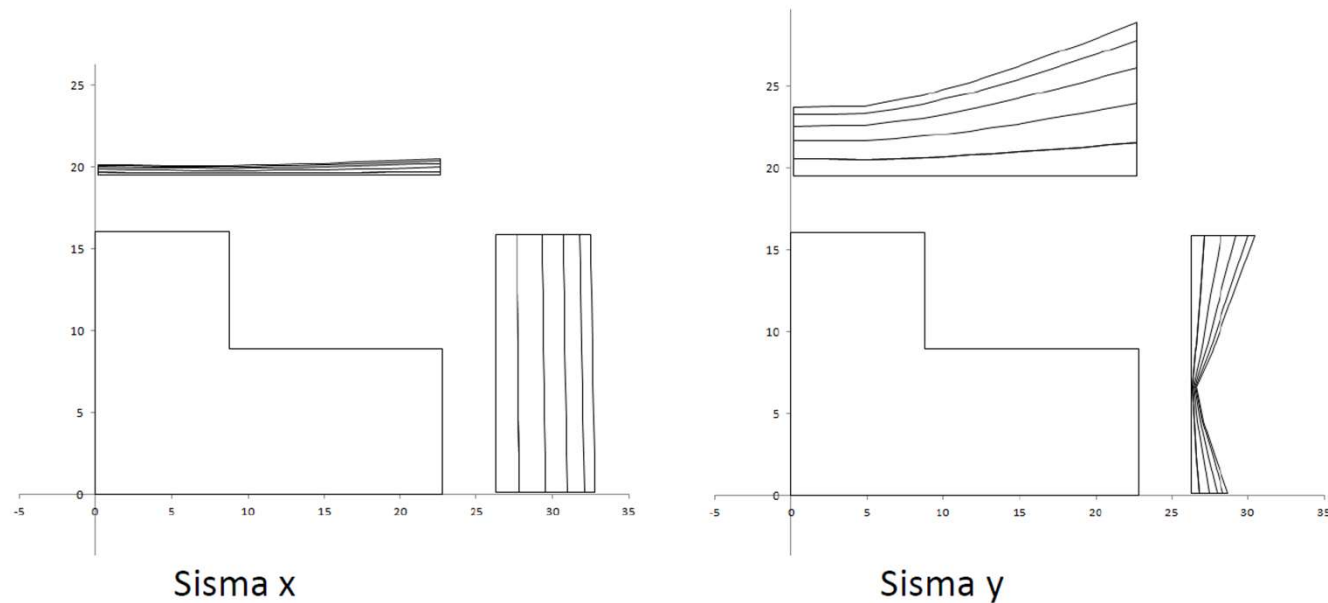
- Modo 1 e 3 molto accoppiati
- Contributo del moto rotazionale rilevante
- Periodo per sisma y leggermente maggiore



Modo	T	Mas X	Mas Y
1	0.582	1.75%	60.88%
2	0.553	84.00%	1.96%
3	0.463	0.28%	23.03%

Inviluppo dei modi: esempio n. 3

- Pessimo comportamento per sisma y
- La rotazione amplifica gli spostamenti di un lato ...
- ... e di conseguenza le sollecitazioni



Metodi per la valutazione della risposta sismica

- Analisi dinamica, con valutazione della storia della risposta (istante per istante)
 - Questo procedimento può servire per valutare la risposta ad un accelerogramma specifico
 - Se volessi usarlo come strumento progettuale dovrei individuare un insieme di accelerogrammi che rappresentano quello che potrà avvenire nel sito
- Analisi modale con spettro di risposta, per valutare la massima risposta
 - Questo procedimento è utile come strumento progettuale proprio perché ci fornisce direttamente i valori massimi

Ma esistono anche altri metodi