

Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

Progetto di costruzioni in zona sismica  
A.A. 2024/2025

04 – RISPOSTA ELASTICA SISTEMI SDOF (01)

Edoardo M. Marino, Università degli Studi di Catania

# Le strutture: di libertà statici

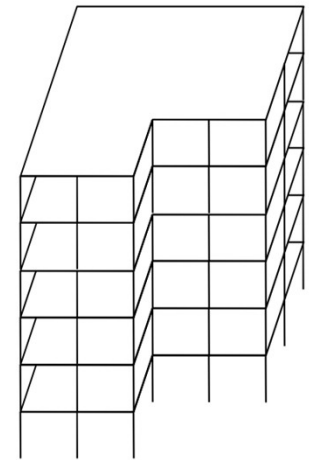
Le strutture, pur essendo in realtà continue, sono in genere viste come discretizzate, ovvero come:

- Insieme di nodi (liberi o vincolati)
- Collegati da elementi mono dimensionali (aste) o anche bi o tri-dimensionali

Gradi di libertà (statici):

- Le componenti di movimento consentite ai nodi

Nello spazio, un nodo non vincolato ha 6 gradi di libertà



# Le strutture: di libertà dinamica

Con il movimento nascono forze d'inerzia, prodotto di massa per accelerazione:

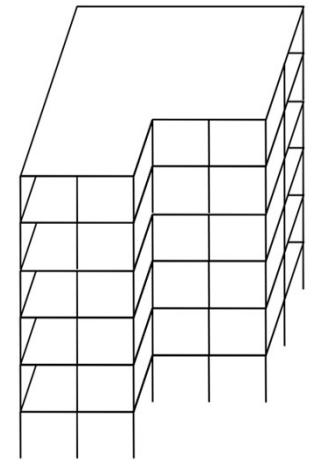
- Le masse sono in realtà continue
- Vengono però considerate concentrate (nei nodi, negli impalcati)

Gradi di libertà dinamici:

- Le componenti di movimento consentite alle masse

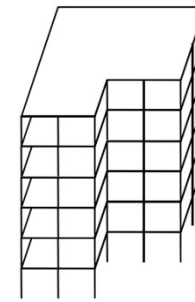
Usualmente si ipotizzano impalcati indeformabili e masse solo a livello dell'impalcato.

Vi sono in tal caso  $3n$  gradi di libertà (se gli impalcati sono  $n$  ed il movimento è orizzontale)

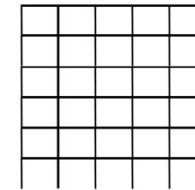


# Gradi di libertà statici e dinamici: esempi

- Edifici (tridimensionali) con  $n$  impalcati
  - Gradi di libertà statici: centinaia o migliaia
  - Gradi di libertà dinamici:  $3n$



- Telai piani con  $n$  traversi
  - Gradi di libertà statici: centinaia
  - Gradi di libertà dinamici:  $n$

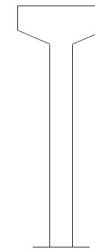
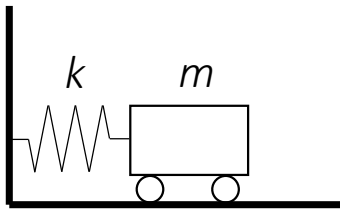


- Telai monopiano
  - Gradi di libertà statici: decine
  - Gradi di libertà dinamici: 1

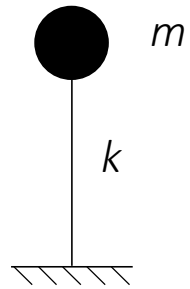


Risposta elastica di sistemi ad un grado di libertà (SDOF)

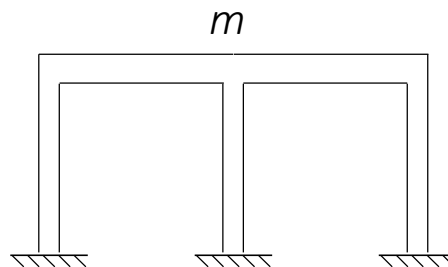
# Strutture ad un grado di libertà



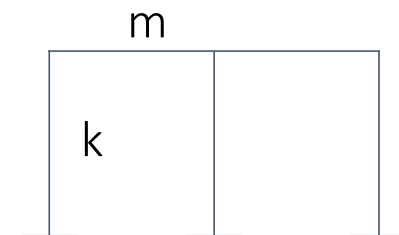
Disegno  
schematico



Modello  
numerico



Disegno schematico



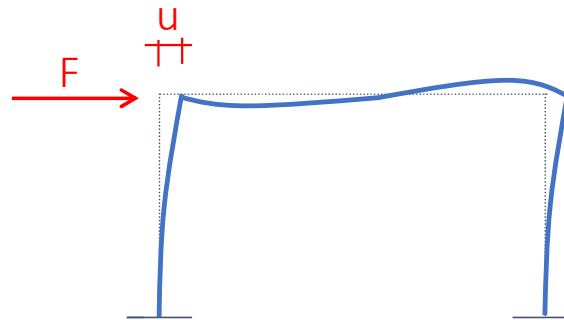
Modello numerico

# Rigidezza laterale

Rigidezza (laterale)  $k$  = forza necessaria per ottenere uno spostamento unitario del grado di libertà

mensola  $k = 3 \frac{EI}{h^3}$

Rotazioni impedita  $k = 12 \frac{EI}{h^3}$

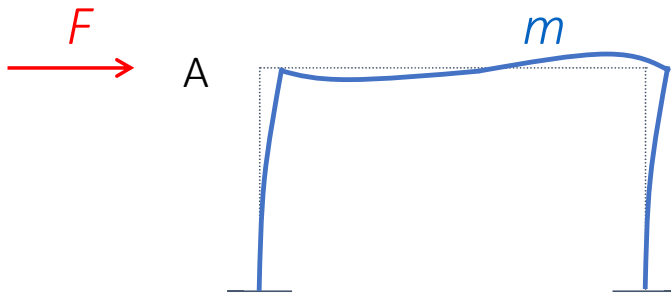


Equilibrio statico  
 $F = k u$

A) Per deformare il telaio in questa posizione occorre applicare una forza  $F$ , uguale ed opposta alla forza di richiamo elastico che tende a riportare il telaio alla posizione indeformata.

$f_s = -k u$  Forza di richiamo elastico

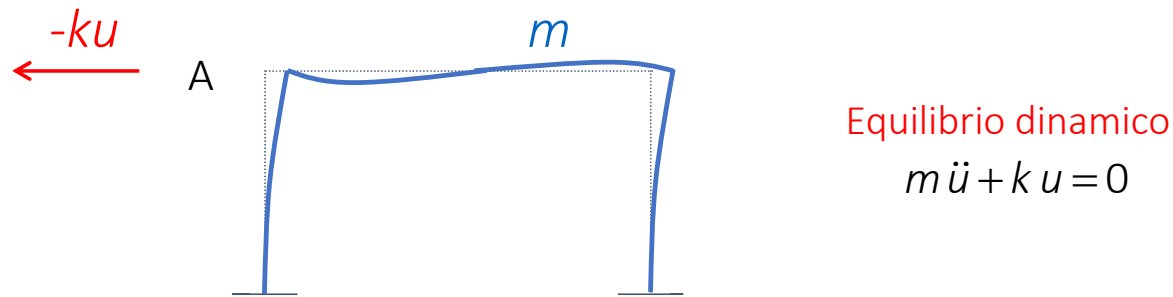
# Oscillazioni libere



Negli edifici il grosso della massa è concentrata a livello degli impalcati.



# Oscillazioni libere



Quando si lascia libero il telaio, agisce solo la forza di richiamo elastico, che provoca un'accelerazione e dunque una forza d'inerzia.

$$f_i = m \ddot{u}$$

L'equazione differenziale può essere risolta analiticamente. La soluzione è una funzione trigonometrica (seno, coseno)

$$u(0) = e \cos(0) = e = u_0 \Rightarrow \boxed{e = u_0}$$

$$u(t) = u_0 \cos \omega t$$

$$i = -\omega u_0 \sin \omega t$$

$$ii = -\omega^2 u_0 \cos \omega t$$

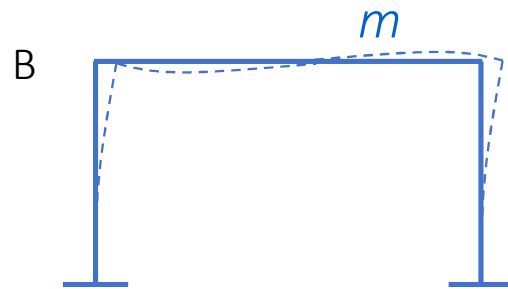
$$-m \omega^2 u_0 \cos \omega t + k u_0 \cos \omega t = 0$$

$$(k - m \omega^2) u_0 \cos \omega t = 0 \quad \cancel{+ 0}$$

$$k - m \omega^2 = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

# Oscillazioni libere



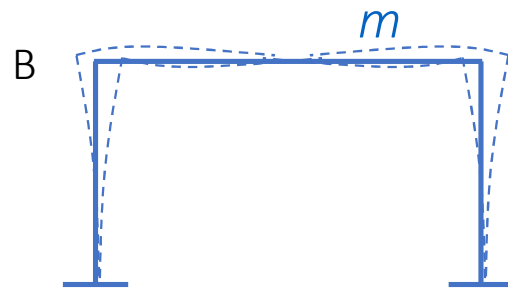
Equazione del moto  
 $m\ddot{u} + k u = 0$

L'equazione differenziale può essere risolta analiticamente. La soluzione è una funzione trigonometrica (seno, coseno)

Se lo spostamento iniziale è  $u_0$  e la velocità iniziale è nulla:  $u = u_0 \cos \omega t$

Frequenza angolare  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

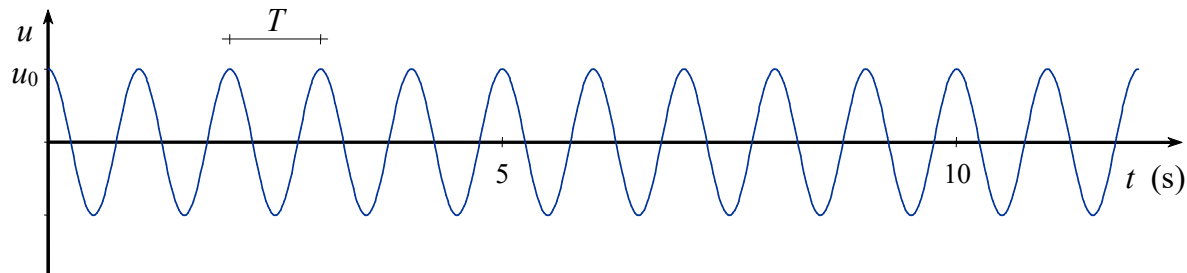
# Oscillazioni libere



Equazione del moto

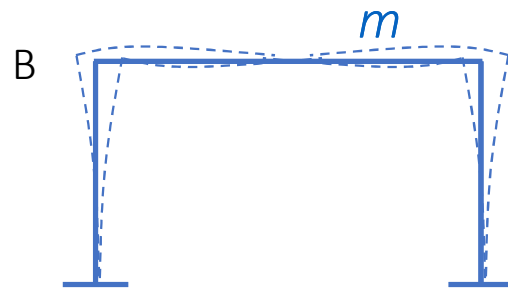
$$m\ddot{u} + k u = 0$$

Il telaio oscilla con un periodo ben preciso, legato alla massa ed alla rigidezza del telaio



$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

# Oscillazioni smorzate



Forza d'attrito viscoso

$$f_D = -c \dot{u}$$

$c$  = costante di smorzamento

In realtà il moto non continua così, a causa della dissipazione di energia (smorzamento)