

Distribuzione normale o Gaussiana

È una distribuzione probabilistica definita da

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (1)$$

In questa distribuzione μ è il valore medio (che coincide con mediana e moda) e σ la deviazione standard. Si definisce inoltre il coefficiente di variazione (COV), indicato con δ

$$\delta = \frac{\sigma}{\mu} \quad (2)$$

I valori che distano dal valore medio una deviazione standard in meno o in più rappresentano il frattile 16% e 84% della distribuzione.

Si indica con *distribuzione normale standard* una distribuzione Gaussiana con $\mu=0$ e $\sigma=1$.

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad (3)$$

La distribuzione normale standard cumulata è indicata con Φ

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\xi^2} d\xi \quad (4)$$

Φ rappresenta quindi la probabilità di avere un valore minore o uguale a x . Nel passato si utilizzavano nel calcolo valori labellati di Φ e questo potrebbe essere utile anche ora con programmi di calcolo per evitare di calcolare tante volte l'integrale. Infatti, con riferimento ad una generica *distribuzione normale*, la probabilità di avere un valore X compreso tra a e b

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \quad (5)$$

può essere calcolata utilizzando la funzione Φ perché

$$P(a < X \leq b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \quad (6)$$

Distribuzione lognormale

È una distribuzione probabilistica nella quale i logaritmi \ln dei valori di X hanno una distribuzione normale. Essa è definita da

$$f_X(x) = \frac{1}{\zeta x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \lambda}{\zeta}\right)^2} \quad (7)$$

In questa distribuzione λ è il valore medio del logaritmo $\ln X$ e ζ la deviazione standard del logaritmo $\ln X$.

Si dimostra che esistono le seguenti relazioni tra i valori μ e σ ed i valori λ e ζ della distribuzione lognormale

$$\lambda = \ln \mu - \frac{1}{2}\zeta^2 \quad (8)$$

$$\zeta = \sqrt{\ln\left(1 + \frac{\sigma^2}{\mu^2}\right)} \quad (9)$$

Si noti che se $\delta=\sigma/\mu$ è piccolo (diciamo minore di 0.3) ζ è quasi uguale a δ .

Il valore mediano x_m della distribuzione lognormale è messo in relazione a λ dalla espressione

$$x_m = e^\lambda \quad (10)$$

Da questa relazione unita alla (8) si ha

$$\mu = x_m e^{\frac{1}{2}\zeta^2} \quad (11)$$

I valori corrispondenti al frattile 16% e 84% si ottengono da

$$x_{16\%} = e^{\lambda - \zeta} \quad x_{84\%} = e^{\lambda + \zeta} \quad (12)$$

Per una generica *distribuzione lognormale*, la probabilità di avere un valore X compreso tra a e b

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\zeta x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln x - \lambda}{\zeta} \right)^2} dx \quad (13)$$

può essere calcolata utilizzando la funzione Φ perché

$$P(a < X \leq b) = \Phi\left(\frac{\ln b - \lambda}{\zeta}\right) - \Phi\left(\frac{\ln a - \lambda}{\zeta}\right) \quad (14)$$

Bibliografia:

Alfredo H-S. Ang, Wilson H. Tang, Probability concepts in Engineering Planning and Design, John Wiley & Sons.