

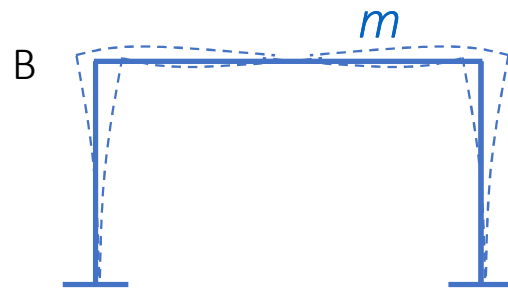
Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

Progetto di costruzioni in zona sismica  
A.A. 2024/2025

04 – RISPOSTA ELASTICA SISTEMI SDOF (02)

Edoardo M. Marino, Università degli Studi di Catania

# Oscillazioni smorzate



Equazione del moto

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0$$

$$\ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2 u = 0$$

$$\text{con } \xi = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$

In realtà il moto non continua così, a causa della dissipazione di energia (smorzamento)

L'ampiezza del moto si riduce tanto più rapidamente quanto maggiore è lo smorzamento

$$m \ddot{u} + c \dot{u} + k u = 0$$

$$\ddot{u} + \frac{c}{m} \dot{u} + \underbrace{\left( \frac{k}{m} \right)}_{\omega^2} u = 0$$

$$c_c = 2 \sqrt{k m}$$

$$\ddot{u} + \frac{c}{\sqrt{m} \underbrace{\sqrt{m}}_{\omega}} \underbrace{\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k}}}_{\omega} \dot{u} + \omega^2 u = 0$$

$$\ddot{u} + \frac{c}{\sqrt{k m}} \omega \dot{u} + \omega^2 u = 0$$

$$\ddot{u} + 2 \frac{c}{c_c} \omega \dot{u} + \omega^2 u = 0$$

$$\xi = \frac{c}{c_c}$$

$$\ddot{u} + 2 \xi \omega \dot{u} + \omega^2 u = 0$$

$$\ddot{u} + 2\xi\omega \dot{u} + \omega^2 u = 0$$

$$u(t) = (A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t) e^{-\xi\omega t}$$

$$\dot{u}(t) = (-A \omega_d \sin \omega_d t + B \omega_d \cos \omega_d t) e^{-\xi\omega t} +$$

$$- \xi\omega (A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t) e^{-\xi\omega t} =$$

$$\left[ -(A \omega_d + B \xi\omega) \sin \omega_d t + (B \omega_d - A \xi\omega) \cos \omega_d t \right] e^{-\xi\omega t}$$

$$u(0) = u_0 \Rightarrow \boxed{A = u_0}$$

$$\dot{u}(0) = 0 \Rightarrow B \omega_d - \xi\omega u_0 = 0 \Rightarrow \boxed{B = \xi \frac{\omega}{\omega_d} u_0}$$

$$u(t) = \left( \cos \omega_d t + \xi \frac{\omega}{\omega_d} \sin \omega_d t \right) u_0 e^{-\xi\omega t}$$

$$\dot{u}(t) = \left[ - \left( u_0 \omega_d + \xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_d} u_0 \right) \sin \omega_d t + \left( \xi \frac{\omega}{\omega_d} u_0 \cancel{\omega_d} - u_0 \xi\omega \right) \cos \omega_d t \right] e^{-\xi\omega t}$$



$$u(t) = \left( \cos \omega_d t + \xi \frac{\omega}{\omega_d} \sin \omega_d t \right) u_0 e^{-\xi \omega t}$$

$$\dot{u}(t) = - \left( \omega_d + \xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_d} \right) u_0 \sin \omega_d t e^{-\xi \omega t}$$

$$\ddot{u}(t) = - \left( \omega_d + \xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_d} \right) \left( \omega_d \cos \omega_d t - \xi \omega \sin \omega_d t \right) u_0 e^{-\xi \omega t}$$

$$- \left( \omega_d + \xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_d} \right) \left( \omega_d \cos \omega_d t - \xi \omega \sin \omega_d t \right) u_0 e^{-\xi \omega t} +$$

$$- 2 \xi \omega \left( \omega_d + \xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_d} \right) u_0 \sin \omega_d t e^{-\xi \omega t} +$$

$$+ \omega^2 \left( \cos \omega_d t + \xi \frac{\omega}{\omega_d} \sin \omega_d t \right) u_0 e^{-\xi \omega t} = 0$$

$$\left\{ \left[ - \left( \omega_d^2 + \xi^2 \omega^2 \right) + \omega^2 \right] \cos \omega_d t + \left( \cancel{\xi \omega \omega_d} + \cancel{\xi^3 \frac{\omega^3}{\omega_d}} - \cancel{2 \xi \omega \omega_d} - \cancel{\xi^3 \frac{\omega^3}{\omega_d}} + \xi \frac{\omega^3}{\omega_d} \right) \sin \omega_d t \right\} u_0 e^{-\xi \omega t} = 0$$

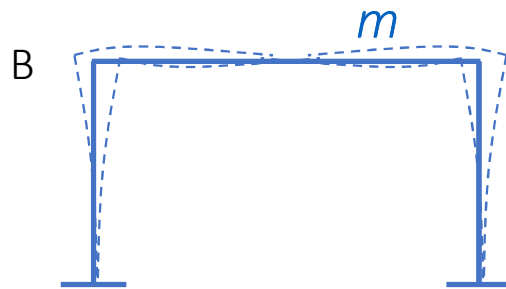
$$\left\{ \left[ -(\omega_d^2 + \xi^2 \omega^2) + \omega^2 \right] \cos \omega_d t + \left( \cancel{\xi \omega \omega_d} + \cancel{\xi^3 \frac{\omega^3}{\omega_d}} - \cancel{\xi \omega \omega_d} - \cancel{\xi^3 \frac{\omega^3}{\omega_d}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \xi \frac{\omega^3}{\omega_d} \right) \sin \omega_d t \right\} u_0 e^{-\xi \omega t} = 0$$

$$\left[ \underbrace{(\omega^2 - \omega_d^2 - \xi^2 \omega^2)}_{=0} \cos \omega_d t + \underbrace{\left( \xi \frac{\omega^3}{\omega_d} - \xi \omega \omega_d - \xi^3 \frac{\omega^3}{\omega_d} \right)}_{=0} \sin \omega_d t \right] u_0 e^{-\xi \omega t} = 0 \quad \forall t$$

$$\omega^2 - \omega_d^2 - \xi^2 \omega^2 = 0 \Rightarrow (1 - \xi^2) \omega^2 - \omega_d^2 = 0 \Rightarrow \boxed{\omega_d = \omega \sqrt{1 - \xi^2}}$$

$$\cancel{\xi \frac{\omega^3}{\omega_d}} - \cancel{\xi \omega \omega_d} - \xi^3 \frac{\omega^3}{\omega_d} = 0 \Rightarrow \omega^2 - \omega_d^2 - \xi^2 \omega^2 = 0 \Rightarrow \boxed{\omega_d = \omega \sqrt{1 - \xi^2}}$$

# Oscillazioni smorzate



Equazione del moto

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0$$

$$\ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2 u = 0$$

$$\text{con } \xi = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$

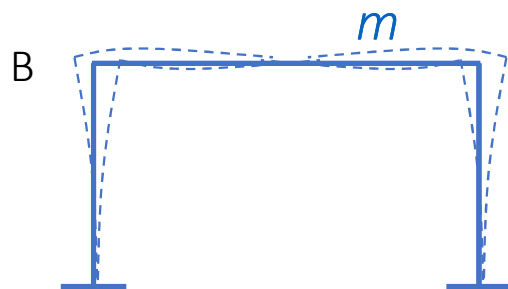
In realtà il moto non continua così, a causa della dissipazione di energia (smorzamento)

L'ampiezza del moto si riduce tanto più rapidamente quanto maggiore è lo smorzamento

$$u = u_0 \left( \cos \omega_d t + \frac{\xi \omega}{\omega_d} \sin \omega_d t \right) e^{-\xi \omega t}$$

$$\omega_d = \omega \sqrt{1 - \xi^2}$$

# Oscillazioni smorzate



Equazione del moto

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0$$

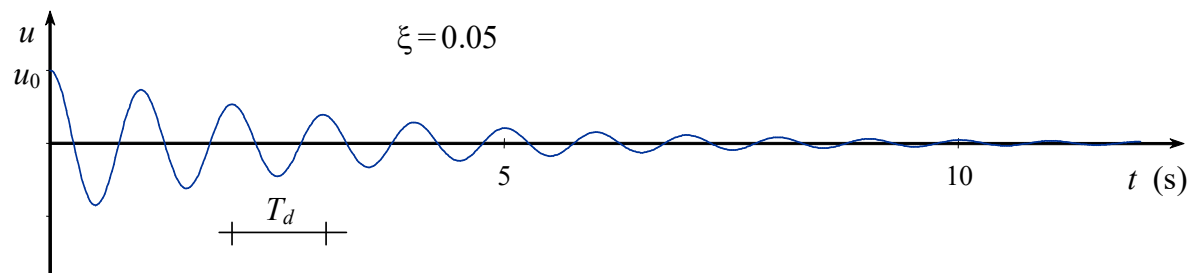
$$\ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2u = 0$$

$$\text{con } \xi = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$

In realtà il moto non continua così, a causa della dissipazione di energia (smorzamento)

L'ampiezza del moto si riduce a causa dello smorzamento

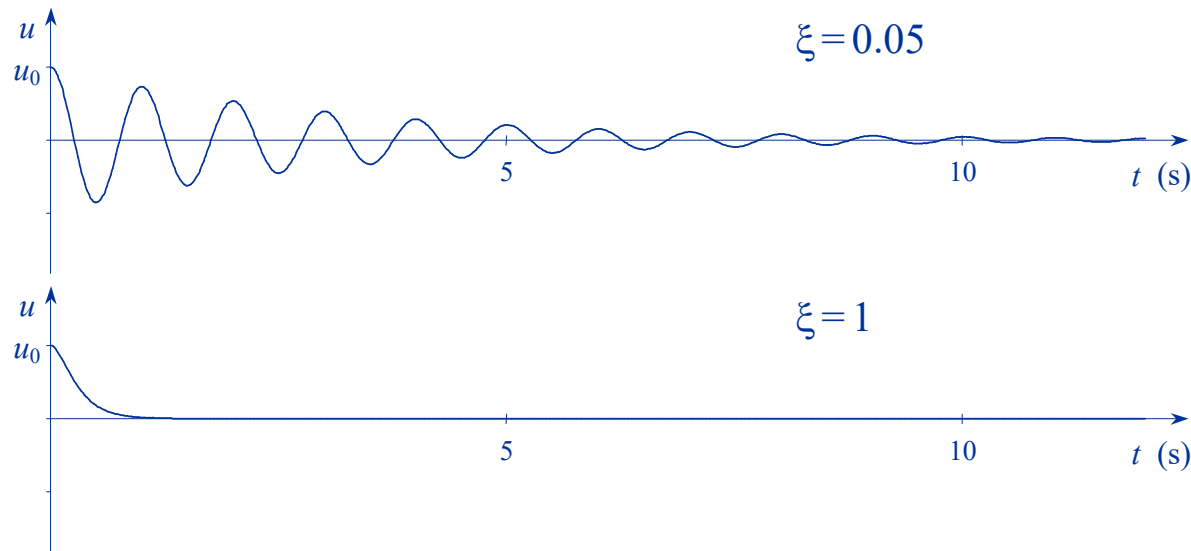
Le oscillazioni sono tanto più lente quanto maggiore è lo smorzamento.



$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{T}{\sqrt{1-\xi^2}}$$



# Oscillazioni smorzate



Si indica col termine “**smorzamento critico**”  $c_c$  quel valore per il quale il sistema raggiunge lo stato di quiete senza oscillare

$$c_c = 2\sqrt{k m}$$

Lo smorzamento viene di solito indicato come percentuale  $\xi$  dello smorzamento critico

$$\xi = \frac{c}{2\sqrt{k m}}$$

# Smorzamento negli edifici

Dipende da:

- Elementi non strutturali come tramezzi, tamponature, ecc. (dipendenza forte)
- Non linearità del materiale (dipendenza debole)

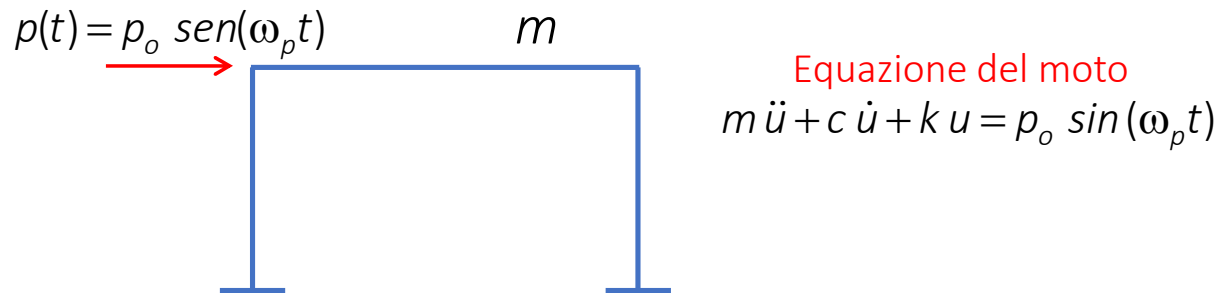
Edifici in cemento armato, con tramezzi in laterizio:

- Si può assumere un valore di smorzamento percentuale  $\xi = 0.05$

Edifici in acciaio, con tramezzatura leggera:

- È consigliabile usare un valore minore di  $\xi = 0.05$   $\xi = 0.02 - \xi = 0.03$

# Oscillazioni forzate con smorzamento: forzante sinusoidale



Anche in questo caso è possibile risolvere analiticamente l'equazione differenziale e se il sistema parte con spostamento e velocità nulli la soluzione è

$$u(t) = \underbrace{(A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t) e^{-\xi \omega t}}_{\text{Parte transitoria}} + \frac{p_o}{k} \underbrace{\frac{\left[1 - (\omega_p / \omega)^2\right] \sin \omega_p t - 2\xi (\omega_p / \omega) \cos \omega_p t}{\left[1 - (\omega_p / \omega)^2\right]^2 - \left[2\xi (\omega_p / \omega)\right]^2}}_{\text{Parte stazionaria}}$$

# Oscillazioni forzate con smorzamento: risposta stazionaria

Esaurita la fase transitoria il sistema vibra con la stessa frequenza della forzante

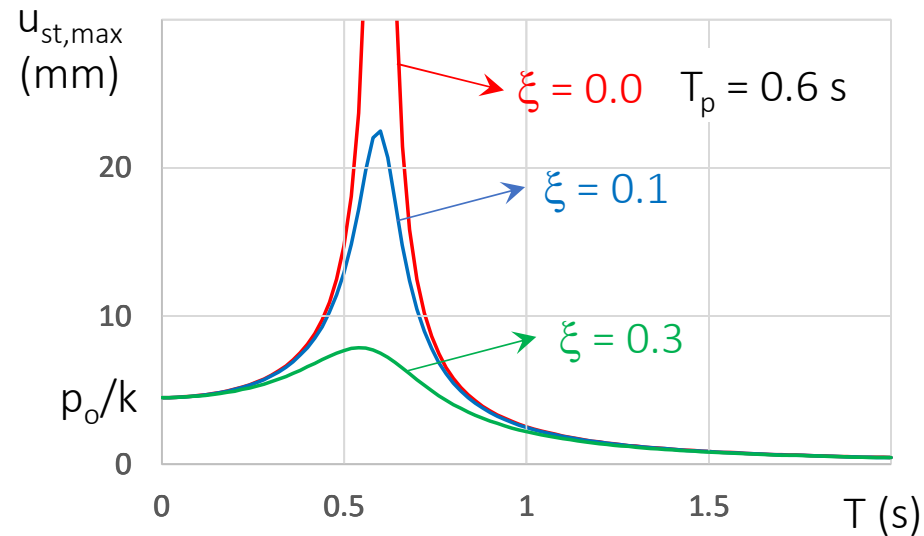
$$u(t) = \frac{p_o}{k} \frac{\left[1 - \left(\omega_p / \omega\right)^2\right] \sin \omega_p t - 2\xi \left(\omega_p / \omega\right) \cos \omega_p t}{\left[1 - \left(\omega_p / \omega\right)^2\right]^2 + \left[2\xi \left(\omega_p / \omega\right)\right]^2}$$

L'ampiezza massima delle oscillazioni vale:

$$u_{st,max} = \frac{p_o}{k} \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\omega_p / \omega\right)^2\right]^2 + \left[2\xi \left(\omega_p / \omega\right)\right]^2}}$$

$$u_{st,max} = \frac{p_o}{k} \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(T / T_p\right)^2\right]^2 + \left[2\xi \left(T / T_p\right)\right]^2}}$$

# Amplificazione dinamica degli effetti e risonanza



Gli effetti dinamici amplificano la risposta rispetto a quella della forza applicata staticamente

La massima amplificazione si ottiene per sistemi con periodi prossimi a quello della forzante  $T_p$  (risonanza)

L' amplificazione è minore per sistemi con alto smorzamento.

In assenza di smorzamento la risposta massima diverge per  $T = T_p$



# Oscillazioni forzate con smorzamento: accelerazione

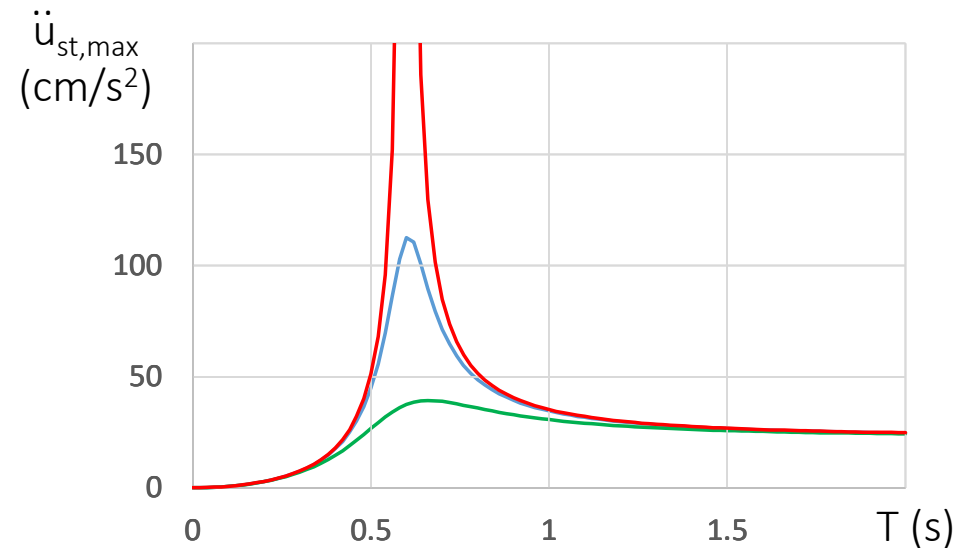
Derivando due volte rispetto al tempo la legge dello spostamento si ottiene l'accelerazione

$$\ddot{u}(t) = \frac{p_o}{m} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{\left[1 - \left(\omega_p / \omega\right)^2\right] \sin \omega_p t - 2\xi \left(\omega_p / \omega\right) \cos \omega_p t}{\left[1 - \left(\omega_p / \omega\right)^2\right]^2 + \left[2\xi \left(\omega_p / \omega\right)\right]^2}$$

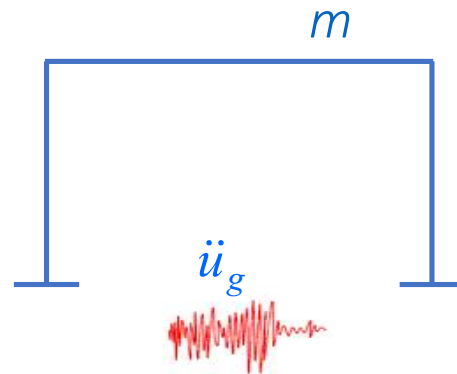
... e la massima accelerazione vale:

$$\ddot{u}_{st,max} = \frac{p_o}{m} \frac{\left(\omega_p / \omega\right)^2}{\sqrt{\left[1 - \left(\omega_p / \omega\right)^2\right]^2 + \left[2\xi \left(\omega_p / \omega\right)\right]^2}}$$

$$\ddot{u}_{st,max} = \frac{p_o}{m} \frac{\left(T / T_p\right)^2}{\sqrt{\left[1 - \left(T / T_p\right)^2\right]^2 + \left[2\xi \left(T / T_p\right)\right]^2}}$$



# Oscillazioni forzate: accelerogramma

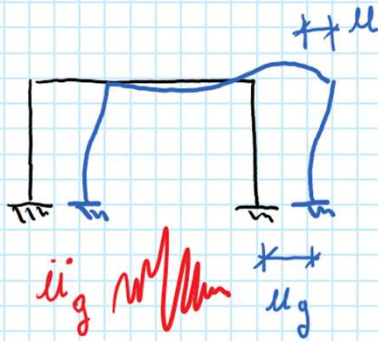


Equazione del moto  
$$m \ddot{u} + c \dot{u} + k u = -m \ddot{u}_g$$

In questo caso la forzante dinamica è la forza che si ottiene dal prodotto della massa  $m$  per l'accelerazione del suolo (variabile nel tempo).

Poiché la legge dell'accelerogramma non è nota in forma chiusa non è possibile risolvere analiticamente l'equazione del moto.

È comunque possibile determinare la risposta ad un accelerogramma mediante i metodi di integrazione numerica.



$$u^T = u_g + u$$

$$\dot{u}^T = \dot{u}_g + \dot{u}$$

$$\ddot{u}^T = \ddot{u}_g + \ddot{u}$$

$$f_K = -k u$$

$$f_D = -c \dot{u}$$

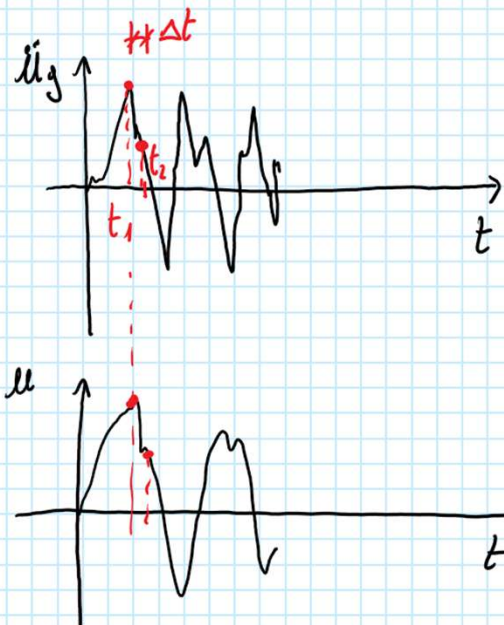
$$f_I = m \ddot{u}^T = m (\ddot{u}_g + \ddot{u})$$

$$-k u - c \dot{u} = m (\dot{u}_g + \ddot{u})$$

$$-k u - c \dot{u} - m \ddot{u} = m \ddot{u}_g$$

$$m \ddot{u} + c \dot{u} + k u = -m \ddot{u}_g(t)$$

$$m \Delta \ddot{u} + c \Delta \dot{u} + k \Delta u = -m \Delta \ddot{u}_g$$



$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$u_2 = u_1 + \dot{u}_1 \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\ddot{u}_1 + \ddot{u}_2}{2} \Delta t^2$$

$$u_2 - u_1 = \dot{u}_1 \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\ddot{u}_1 + \ddot{u}_2 + \ddot{u}_1 - \ddot{u}_1}{2} \Delta t^2$$

$$\Delta u = \dot{u}_1 \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{u}_1 \Delta t^2 + \frac{1}{4} \Delta \ddot{u} \Delta t^2$$

$$\frac{1}{4} \Delta \ddot{u} \Delta t^2 = \Delta u - \dot{u}_1 \Delta t - \frac{1}{2} \ddot{u}_1 \Delta t^2$$

$$\Delta \ddot{u} = \frac{4}{\Delta t^2} \Delta u - \frac{4}{\Delta t} \dot{u}_1 \cancel{\Delta t} - \frac{2}{\cancel{\Delta t^2}} \frac{1}{2} \ddot{u}_1 \cancel{\Delta t^2}$$

$$\Delta \ddot{u} = \frac{4}{\Delta t^2} \Delta u - \frac{4}{\Delta t} \dot{u}_1 - 2 \ddot{u}_1$$



$$v = v_0 + at$$

$$\dot{u}_2 = \dot{u}_1 + \frac{\ddot{u}_1 + \ddot{u}_2}{2} \Delta t$$

$$\dot{u}_2 - \dot{u}_1 = \frac{\ddot{u}_1 + \ddot{u}_2 + \ddot{u}_1 - \ddot{u}_1}{2} \Delta t$$

$$\Delta \dot{u} = \ddot{u}_1 \Delta t + \frac{\Delta \ddot{u}}{2} \Delta t$$

$$\Delta \dot{u} = \ddot{u}_1 \Delta t + \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{h}{\Delta t^2} \Delta u - \frac{h}{\Delta t} \dot{u}_1 - 2 \ddot{u}_1 \right)$$

$$\Delta \dot{u} = \cancel{\ddot{u}_1 \Delta t} + \frac{2}{\Delta t} \Delta u - 2 \dot{u}_1 - \cancel{\ddot{u}_1 \Delta t}$$

$$\Delta \dot{u} = \frac{2}{\Delta t} \Delta u - 2 \dot{u}_1$$



# Metodi di analisi numerica e risposta nel tempo

Intervallo di tempo  $\Delta t = t_2 - t_1$

- Si usa il pedice 1 per indicare l'istante iniziale, 2 per quello finale
- Sono noti  $u_1, \dot{u}_1, \ddot{u}_1$  e le accelerazioni del suolo  $\ddot{u}_{g,1}$  e  $\ddot{u}_{g,2}$
- Si ipotizza che l'accelerazione sia costante nel passo  
 $\ddot{u} = (\ddot{u}_1 + \ddot{u}_2) / 2$  (o variabile linearmente)
- Considerato, a titolo di esempio il caso dell'accelerazione costante nel passo, si possono scrivere le seguenti relazioni che legano tra loro le variazioni di spostamento, velocità e accelerazione nel passo:

$$\Delta u = \Delta t \dot{u}_1 + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{u}_1 + \frac{\Delta t^2}{4} \Delta \ddot{u}$$

$$\Delta \dot{u} = \Delta t \ddot{u}_1 + \frac{\Delta t}{2} \Delta \ddot{u}$$

# Metodi di analisi numerica e risposta nel tempo

- Invertendo le relazioni si può esprimere tutto in funzione della variazione di spostamento

$$\Delta \ddot{u} = \frac{4}{\Delta t^2} \Delta u - \frac{4}{\Delta t} \dot{u}_1 - 2\ddot{u}_1$$

$$\Delta \dot{u} = \frac{2}{\Delta t} \Delta u - 2\dot{u}_1$$

- Si sostituisce nell'equazione di equilibrio dinamico scritta in termini variazionali  
 $m \Delta \ddot{u} + c \Delta \dot{u} + k \Delta u = -m \Delta \ddot{u}_g$

per calcolare 
$$\Delta u = \frac{-m \Delta \ddot{u}_g + 2m \ddot{u}_1 + (2c + 4m / \Delta t) \dot{u}_1}{k + 2c / \Delta t + 4m / \Delta t^2}$$

# Metodi di analisi numerica e risposta nel tempo

Facendo ipotesi diverse sull'accelerazione si ottengono metodi diversi

- Ipotesi di accelerazione costante nell'intervallo  $\Delta t$

$$\Delta u = \Delta t \dot{u}_1 + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{u}_1 + \frac{\Delta t^2}{4} \Delta \ddot{u} \quad \Delta \dot{u} = \Delta t \ddot{u}_1 + \frac{\Delta t}{2} \Delta \ddot{u} \quad \beta = 1/4 \text{ e } \gamma = 1/2$$

- Ipotesi di accelerazione lineare nell'intervallo  $\Delta t$

$$\Delta u = \Delta t \dot{u}_1 + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{u}_1 + \frac{\Delta t^2}{6} \Delta \ddot{u} \quad \Delta \dot{u} = \Delta t \ddot{u}_1 + \frac{\Delta t}{2} \Delta \ddot{u} \quad \beta = 1/6 \text{ e } \gamma = 1/2$$

- Metodo di Newmark

$$\Delta u = \Delta t \dot{u}_1 + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{u}_1 + \Delta t^2 \beta \Delta \ddot{u} \quad \Delta \dot{u} = \Delta t \ddot{u}_1 + \Delta t \gamma \Delta \ddot{u}$$

# Metodi di analisi numerica e risposta nel tempo

## Metodo di Newmark

- Invertendo le relazioni generali si trova

$$\Delta \ddot{u} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \Delta u - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{u}_1 - \frac{1}{2\beta} \ddot{u}_1$$

$$\Delta \dot{u} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \Delta u - \frac{\gamma}{\beta} \dot{u}_1 + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right) \ddot{u}_1 \Delta t$$

- Quindi si sostituiscono nell'equazione di equilibrio dinamico

$$m \Delta \ddot{u} + c \Delta \dot{u} + k \Delta u = -m \Delta \ddot{u}_g$$

per calcolare

$$\Delta u = \frac{-m \Delta \ddot{u}_g + a \ddot{u}_1 + b \dot{u}_1}{k + a \Delta t}$$

$$a = \frac{m}{\beta \Delta t} + c \frac{\gamma}{\beta}$$

$$b = \frac{m}{2\beta} + c \Delta t \left( \frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right)$$

# Metodi di analisi numerica e risposta nel tempo

## Metodo di Newmark

Il metodo è incondizionatamente stabile se:

$$2\beta \geq \gamma \geq \frac{1}{2}$$

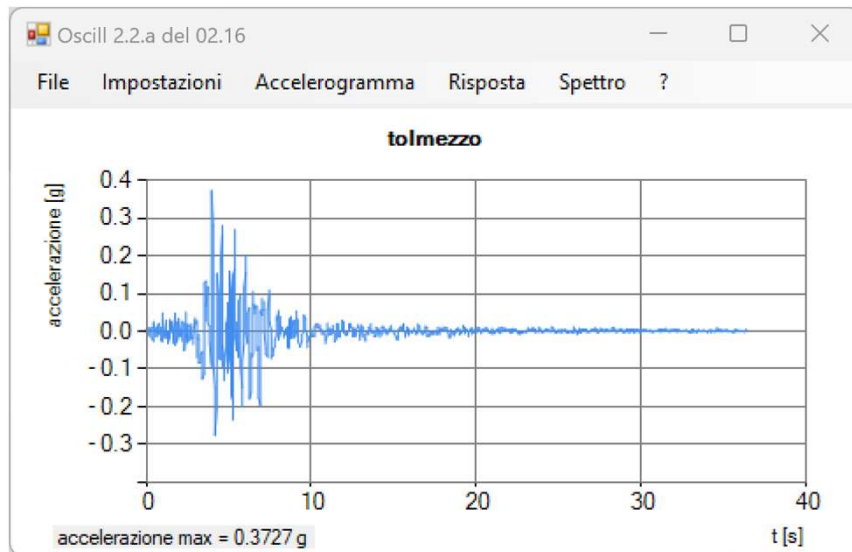
... altrimenti è condizionatamente stabile ed il passo d'integrazione deve essere:

$$\Delta t \leq \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\gamma - 2\beta}} T$$



# Il programma Oscill

È in grado di determinare per via numerica la storia temporale della risposta ad un accelerogramma e la sua storia temporale.

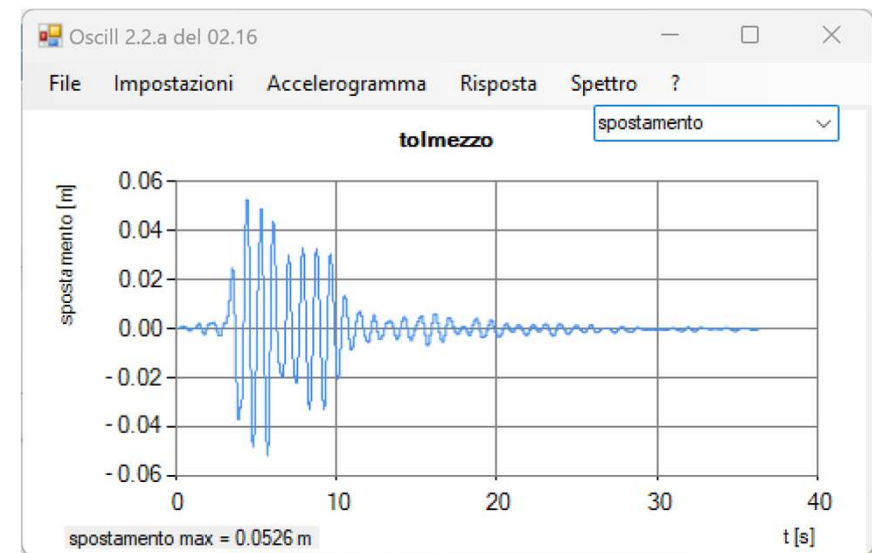


È possibile determinare anche altri parametri di risposta ...

$$\xi = 0.05$$

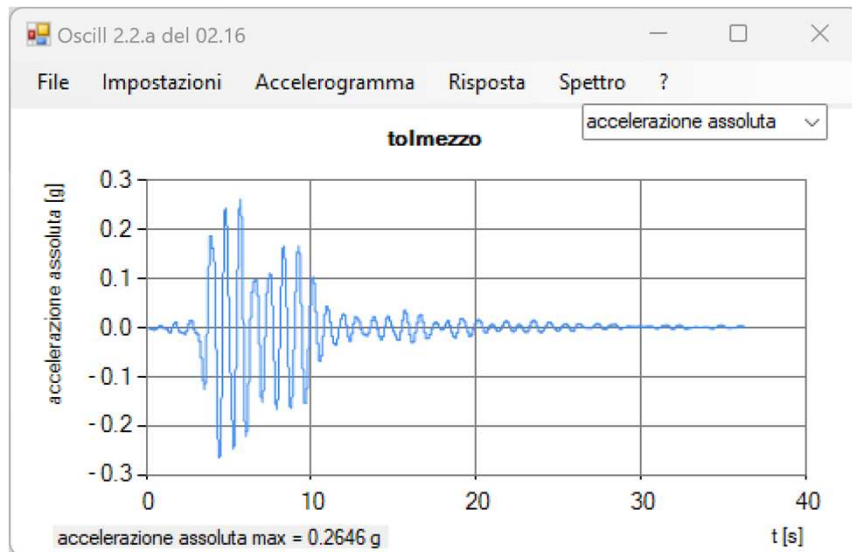
$$T = 0.896 \text{ s}$$

$$u_{\max} = 5.26 \text{ cm}$$



... accelerazione, forza elastica di richiamo, ecc.

È in grado di determinare per via numerica la storia temporale della risposta ad un accelerogramma e la sua storia temporale.



$$\xi = 0.05$$

$$T = 0.896 \text{ s}$$

