

Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

Progetto di costruzioni in zona sismica

A.A. 2024/2025

## 17 – RIGIDEZZA LATERALE E PERIODO PROPRIO DELLA STRUTTURA

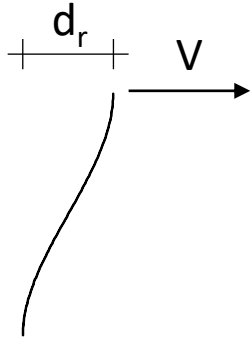
Francesca Barbagallo, Università degli Studi di Catania

# Approssimazioni o omissioni nel dimensionamento fatto

1. Masse stimate in maniera approssimata
2. Periodo proprio della struttura stimato con formule semplificate
3. Regolarità in altezza, assunta senza controllo
4. Regolarità in pianta (bilanciamento delle rigidezze), stimato a occhio
5. Forze statiche ripartite tra i pilastri “che contano” o in base a rapporti di rigidezza valutati a occhio
6. Controllo spostamenti SLD non effettuato

# Rigidezza laterale del pilastro

La rigidezza laterale di un pilastro si può calcolare come rapporto tra forza tagliante  $V$  e spostamento orizzontale relativo (tra testa e piede del pilastro)  $d_r$



# Rigidezza laterale del pilastro

La rigidezza laterale di un pilastro si può calcolare come rapporto tra forza tagliante  $V$  e spostamento orizzontale relativo (tra testa e piede del pilastro)  $d_r$

- La rigidezza laterale di un pilastro dipende
  - Dalla sua lunghezza (che è l'altezza di interpiano)
  - Dalla sua sezione e orientamento (in sostanza, dal momento d'inerzia della sezione rispetto alla direzione che si considera)
  - Dalle travi poste in testa e al piede del pilastro
- La rigidezza laterale di un pilastro può essere valutata a posteriori
  - Applicando forze orizzontali al telaio si calcola per ciascun pilastro taglio e spostamento relativo e quindi il loro rapporto

# Rigidezza laterale del pilastro

La rigidezza laterale di un pilastro si può calcolare come rapporto tra forza tagliante  $V$  e spostamento orizzontale relativo (tra testa e piede del pilastro)  $d_r$

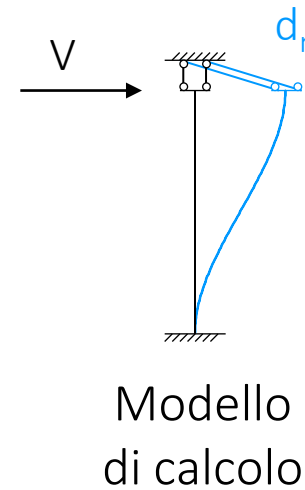
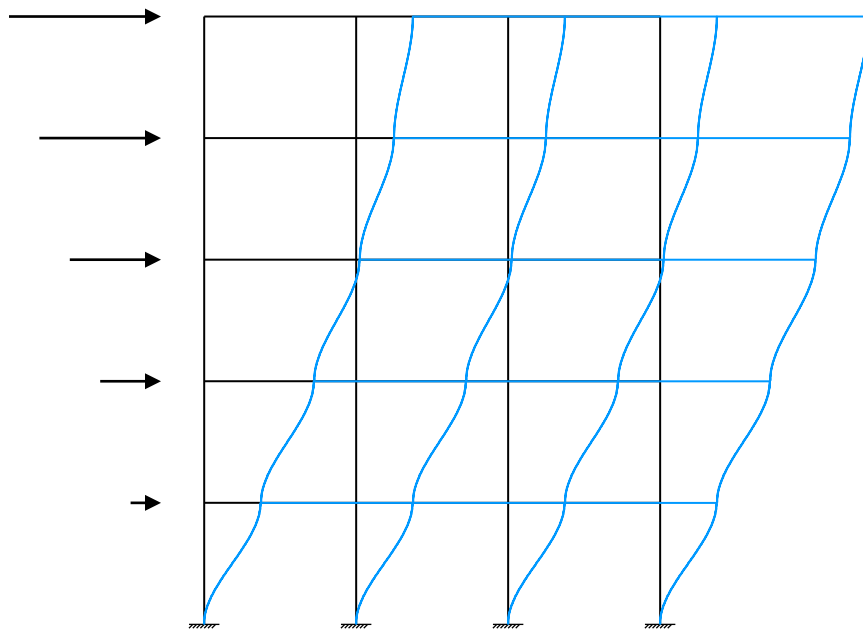
- La rigidezza laterale di un pilastro dipende
  - Dalla sua lunghezza (che è l'altezza  $h$ )
  - Dalla sua sezione e orientamento (in relazione rispetto alla direzione che si considera)
  - Dalle travi poste in testa e al piede del pilastro
- La rigidezza laterale di un pilastro può essere valutata
  - Applicando forze orizzontali al telaio e misurando lo spostamento relativo e quindi il loro rapporto

Si noti che per un telaio multipiano si dovrebbe parlare, a rigore, di matrice di rigidezza laterale

- Lo spostamento relativo dipende non solo dal taglio ma anche dalla distribuzione delle forze che lo compongono
- È però comodo valutare la rigidezza del singolo pilastro come valore approssimato, anche perché la distribuzione delle forze è sostanzialmente nota

# Come stimare la rigidezza laterale del pilastro

- Rigidezza laterale di un pilastro = rapporto tra taglio  $V$  e spostamento relativo  $d_r$
- Se le travi sono infinitamente rigide



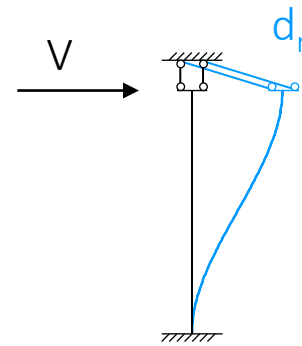
# Come stimare la rigidezza laterale del pilastro

- Rigidezza laterale di un pilastro = rapporto tra taglio  $V$  e spostamento relativo  $d_r$
- Se le travi sono infinitamente rigide

$$d_r = \frac{V L_p^3}{12 E I_p}$$

$$\text{rigidezza} = \frac{12 E I_p}{L_p^3}$$

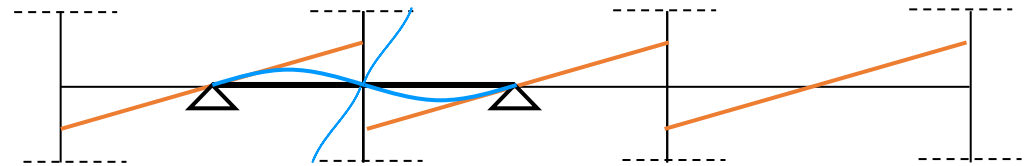
La rigidezza è proporzionale al  
momento d'inerzia della sezione



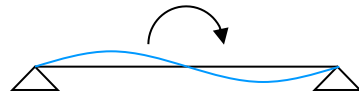
Modello  
di calcolo

# Come stimare la rigidezza laterale del pilastro

- Rigidezza laterale di un pilastro = rapporto tra taglio  $V$  e spostamento relativo  $d_r$
- In realtà le travi sono deformabili



$$k_1 = \frac{12 E I_{t,sup}}{L_t}$$

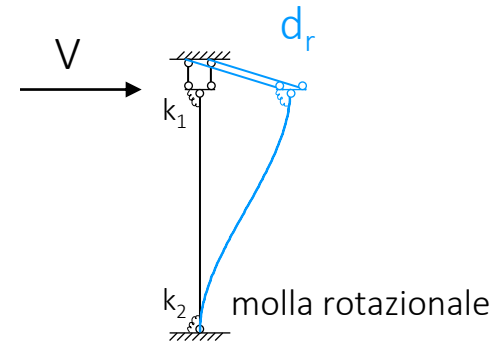


ma poiché la trave serve da vincolo anche al pilastro di sopra, prendo la metà (nel caso di piani intermedi)

$$k_1 = \frac{6 E I_{t,sup}}{L_t} \quad k_2 = \frac{6 E I_{t,inf}}{L_t}$$

pongo

$$r_1 = \frac{E I_p / L_p}{E I_{t,sup} / L_t} \quad r_2 = \frac{E I_p / L_p}{E I_{t,inf} / L_t}$$



Modello  
di calcolo

I coefficienti  $r$  sono nulli se le travi sono infinitamente rigide

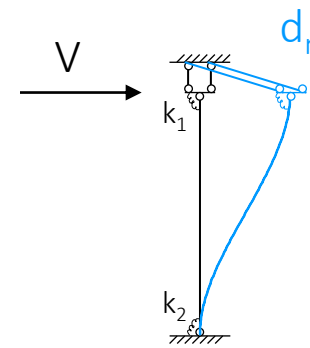


# Come stimare la rigidezza laterale del pilastro

- Rigidezza laterale di un pilastro = rapporto tra taglio  $V$  e spostamento relativo  $d_r$
- In realtà le travi sono deformabili

$$\begin{aligned}d_r &= \frac{VL_p^3}{12EI_p} \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{r_1 + r_2 + 2r_1 r_2 / 3}{1 + (r_1 + r_2) / 6} \right] \\&= \frac{VL_p^3}{12EI_p} \left[ 1 + \frac{1}{2} (r_1 + r_2) - \frac{1}{2} \frac{(r_1 - r_2)^2 / 6}{1 + (r_1 + r_2) / 6} \right] \\&\cong \frac{VL_p^3}{12EI_p} \left[ 1 + \frac{1}{2} (r_1 + r_2) \right] \quad \text{se } r_1 \cong r_2\end{aligned}$$

Lo spostamento dipende anche da  $r_1$   $r_2$  e quindi dalla rigidezza delle travi



Modello  
di calcolo

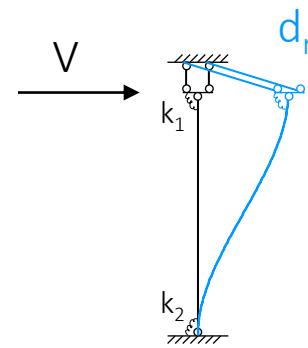
# Come stimare la rigidezza laterale del pilastro

- Rigidezza laterale di un pilastro = rapporto tra taglio  $V$  e spostamento relativo  $d_r$
- In realtà le travi sono deformabili

In maniera semplificata, spostamento e rigidezze si possono esprimere direttamente con

$$d_r \cong \frac{V L_p^3}{12 E I_p} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{E I_p / L_p}{E I_{t,sup} / L_t} + \frac{E I_p / L_p}{E I_{t,inf} / L_t} \right) \right]$$

$$\text{rigidezza} = \frac{12 E I_p}{L_p^3} \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \left( \frac{E I_p / L_p}{E I_{t,sup} / L_t} + \frac{E I_p / L_p}{E I_{t,inf} / L_t} \right)}$$



Modello  
di calcolo

# Rigidezza laterale del pilastro e globale di piano

L'espressione

$$\text{rigidezza} = \frac{12 E I_p}{L_p^3} \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \left( \frac{E I_p / L_p}{E I_{t,\text{sup}} / L_t} + \frac{E I_p / L_p}{E I_{t,\text{inf}} / L_t} \right)}$$

è riferita a un singolo pilastro

- Può essere applicata a tutti i pilastri e sommando i valori dei singoli pilastri si otterrà la rigidezza dell'interpiano
- Può essere usata direttamente in maniera approssimata come

$$\text{rigidezza di piano} = \frac{12 E \sum I_p}{L_p^3} \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \left( \frac{E \sum I_p / L_p}{E \sum I_{t,\text{sup}} / L_t} + \frac{E \sum I_p / L_p}{E \sum I_{t,\text{inf}} / L_t} \right)}$$

considerando solo i pilastri e le travi “che contano”

[Approccio globale semplificato](#) per il calcolo delle rigidezze

# Periodi «fondamentali»

Un edificio con  $n$  impalcati (rigidi nel loro piano) e masse poste solo a livello degli impalcati ha  $3n$  gradi di libertà ed esistono  $3n$  modi di oscillazione libera (quindi  $3n$  periodi e  $3n$  deformate modali)

- Se l'edificio è bilanciato i modi sono disaccoppiati
- Tra i  $3n$  modi ne esiste uno con spostamenti prevalentemente nella direzione  $x$  (e tutti dello stesso segno) ed un altro con spostamenti nella direzione ortogonale  $y$   
Nota: con  $x$  e  $y$  si intendono due direzioni di riferimento in pianta, in genere quelle parallele ai lati dell'edificio
- Questi due modi possono essere considerati come i modi «fondamentali» per la direzione  $x$  e quella  $y$

È possibile stimare con formule semplici il loro periodo proprio

# Formula di Rayleigh

È una formula per la valutazione approssimata del periodo

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N m_i u_i^2}{\sum_{i=1}^N F_i u_i}}$$

$m_i$  massa di piano

$F_i$  Forza di piano

$u_i$  spostamento del baricentro di piano  
(provocato dalla forze  $F_i$ )

- La formula vale rigorosamente se le forze e gli spostamenti sono proprio quelle relative ad uno dei modi di oscillazione libera
- Fornisce però un'ottima stima del primo periodo anche se la distribuzione di forze è diversa da quella modale

# Ma come valutare gli spostamenti $u_i$ ?

Il calcolo degli spostamenti orizzontali  $u_i$  sarà fatto in base alle rigidezze di piano  $k_i$

- Dalla distribuzione di forze  $F_i$  si calcolano i tagli di piano  $V_i$

$$V_i = \sum_{j=i}^n F_j$$

- Dai tagli di piano  $V_i$  si calcolano gli spostamenti relativi di piano  $d_{r,i}$

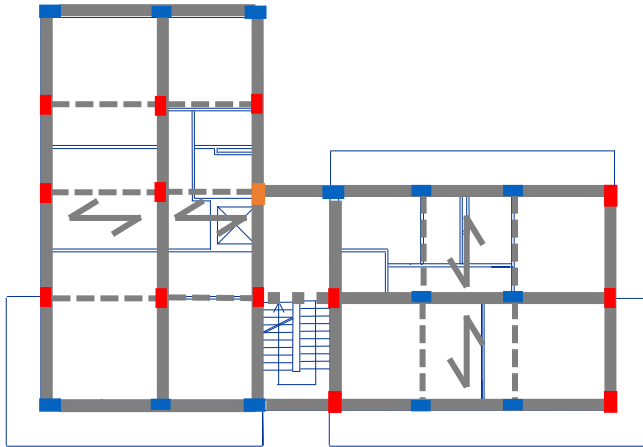
$$d_{r,i} = \frac{V_i}{k_i}$$

- Dagli spostamenti relativi di piano  $d_{r,i}$  si calcolano gli spostamenti assoluti  $u_i$

$$u_i = \sum_{j=1}^i d_{r,j}$$

# Rigidezza laterale dell'edificio

## direzione x, secondo piano



I pilastri (tutti uguali) sono:

13 allungati in direzione x

14 allungati in direzione y

Le travi emergenti sono:

15 in direzione x

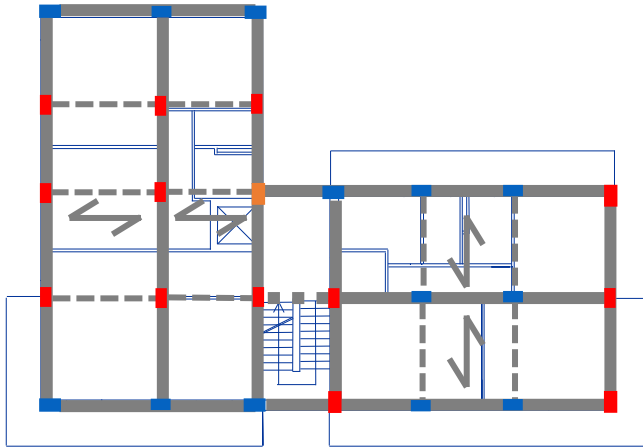
16 in direzione y

Considero 13 pilastri e  
15 travi (direzione x)

# Rigidezza laterale dell'edificio

## direzione x, secondo piano

Al secondo piano, direzione x



Pilastri 30x70 (13)

$$L_p = 3.20 \text{ m}$$

$$I_p = 857500 \text{ cm}^4$$

$$\begin{aligned} \sum I_p &= 13 \times 857500 = \\ &= 11147500 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

Travi 30x60 (15)

$$L_t = 4.00 \text{ m in media}$$

$$I_t = 540000 \text{ cm}^4$$

$$\begin{aligned} \sum I_t &= 15 \times 540000 = \\ &= 7637500 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

$$\text{rigidezza di piano} = \frac{12 E \sum I_p}{L_p^3} \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \left( \frac{E \sum I_p / L_p}{E \sum I_{t,\text{sup}} / L_t} + \frac{E \sum I_p / L_p}{E \sum I_{t,\text{inf}} / L_t} \right)}$$

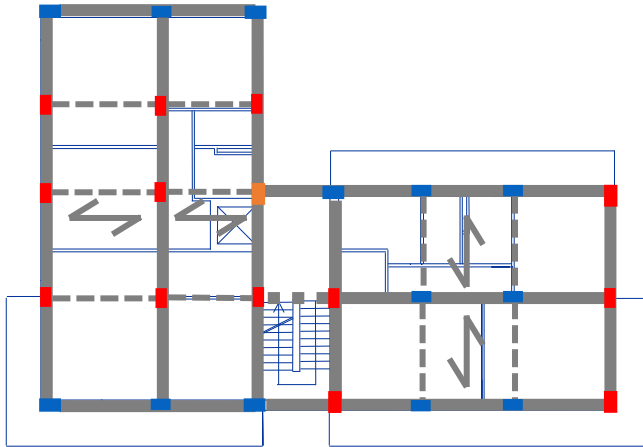
Ottengo

$$k = 472.7 \text{ kN/mm}$$



# Rigidezza laterale dell'edificio

direzione x ed y, tutti i piani



| Piano | $K_x$ [kN/mm] | $K_y$ [kN/mm] |
|-------|---------------|---------------|
| 5     | 323.4         | 345.8         |
| 4     | 323.4         | 345.8         |
| 3     | 384.0         | 410.7         |
| 2     | 472.4         | 505.6         |
| 1     | 553.8         | 593.8         |

# Valutazione dei periodi fondamentali dell'edificio

Posso calcolarli con la formula di Rayleigh

- Conosco le masse  $m_i$  (sono uguali per le due direzioni)
- Conosco le forze  $F_i$  («al momento» sono uguali per le due direzioni)
- Adesso che conosco le rigidezze, posso calcolare gli spostamenti  $u_i$  (devo farlo per le due direzioni)

|       |   |
|-------|---|
| $m_i$ | massa di piano  |
| $F_i$ | Forza di piano  |
| $u_i$ | spostamento del baricentro di piano<br>(provocato dalla forze $F_i$ ) |

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N m_i u_i^2}{\sum_{i=1}^N F_i u_i}}$$

# Periodo valutato con Rayleigh

Calcolo degli spostamenti per la direzione x

| Piano     | F<br>(kN) | V<br>(kN) | k<br>(kN/mm) | $d_r$<br>(mm) | u<br>(mm) |
|-----------|-----------|-----------|--------------|---------------|-----------|
| Torrino+V | 647.3     | 647.3     | 323.4        | 2.00          | 17.25     |
| IV        | 528.9     | 1176.2    | 323.4        | 3.64          | 15.25     |
| III       | 399.6     | 1575.9    | 384.0        | 4.10          | 11.62     |
| II        | 278.3     | 1854.1    | 472.4        | 3.93          | 7.51      |
| I         | 131.6     | 1985.8    | 553.8        | 3.59          | 3.59      |

N.B. Le forze sono state ricalcolate con le nuove masse

# Periodo valutato con Rayleigh

Applicazione della formula per la direzione x

| Piano     | m<br>(kN s <sup>2</sup> /m) | F<br>(kN) | u<br>(mm) | m u <sup>2</sup><br>(kN m s <sup>2</sup> ) | F u<br>(kN mm) |
|-----------|-----------------------------|-----------|-----------|--|----------------|
| Torrino+V | 310.1                       | 647.3     | 17.25     | 0.09231                                    | 11.17          |
| IV        | 315.3                       | 528.9     | 15.25     | 0.07335                                    | 8.07           |
| III       | 315.3                       | 399.6     | 11.62     | 0.04254                                    | 4.64           |
| II        | 324.6                       | 278.3     | 7.51      | 0.01831                                    | 2.09           |
| I         | 294.3                       | 131.6     | 3.59      | 0.00378                                    | 0.47           |
| somma     |                             |           |           | 0.23029                                    | 26.44          |

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N m_i u_i^2}{\sum_{i=1}^N F_i u_i}} \quad \rightarrow \quad T = 0.586 \text{ s}$$

# Periodo valutato con Rayleigh

Calcolo degli spostamenti per la direzione y

| Piano     | F<br>(kN) | V<br>(kN) | k<br>(kN/mm) | d <sub>r</sub><br>(mm) | u<br>(mm) |
|-----------|-----------|-----------|--------------|------------------------|-----------|
| Torrino+V | 647.3     | 647.3     | 345.8        | 1.87                   | 16.12     |
| IV        | 528.9     | 1176.2    | 345.8        | 3.40                   | 14.25     |
| III       | 399.6     | 1575.9    | 410.7        | 3.84                   | 10.85     |
| II        | 278.3     | 1854.1    | 505.6        | 3.67                   | 7.01      |
| I         | 131.6     | 1985.8    | 593.8        | 3.34                   | 3.34      |

# Periodo valutato con Rayleigh

Applicazione della formula per la direzione y

| Piano     | m<br>(kN s <sup>2</sup> /m) | F<br>(kN) | u<br>(mm) | m u <sup>2</sup><br>(kN m s <sup>2</sup> ) | F u<br>(kN mm) |
|-----------|-----------------------------|-----------|-----------|--|----------------|
| Torrino+V | 310.1                       | 647.35    | 16.12     | 0.08059                                    | 10.44          |
| IV        | 315.3                       | 528.90    | 14.25     | 0.06401                                    | 7.54           |
| III       | 315.3                       | 399.61    | 10.85     | 0.03710                                    | 4.33           |
| II        | 324.6                       | 278.28    | 7.01      | 0.01596                                    | 1.95           |
| I         | 294.3                       | 131.62    | 3.34      | 0.00329                                    | 0.44           |
| somma     |                             |           |           | 0.20095                                    | 24.70          |

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N m_i u_i^2}{\sum_{i=1}^N F_i u_i}} \quad \rightarrow \quad T = 0.567 \text{ s}$$

# Controllo del periodo proprio e considerazioni

I valori dei periodi ottenuti:

- Sono analoghi nelle due direzioni, così come la rigidezza  
Era uno degli obiettivi
- Sono minori di meno del 10% di quanto ottenuto con la formula di normativa (era 0.608 s)
  - La struttura è un po' più rigida della media
  - Le forze sismiche e le caratteristiche di sollecitazione cresceranno della stessa misura
  - Una variazione del 10% non modifica il dimensionamento della struttura
- In ogni caso saranno alla fine confrontati con quelli forniti dal calcolo