



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E AMBIENTALE

Giuseppe Pezzinga

ELEMENTI DI IDRAULICA NUMERICA

Catania 2007

INDICE

Prefazione

1. Introduzione

1.1	OSSERVAZIONE DIRETTA E MODELLAZIONE	1
1.2	MODELLI FISICI, MODELLI ANALOGICI E MODELLI MATEMATICI	1
1.3	ANALISI SPERIMENTALE E ANALISI TEORICA	2
1.4	INTERPRETAZIONE NUMERICA	2
1.5	EQUAZIONI IMPLICITE IN IDRAULICA	2
1.6	METODI ITERATIVI	2
1.7	VALORI DI PRIMO TENTATIVO	3

2. Elementi di calcolo numerico e di programmazione

2.1	EQUAZIONI NON LINEARI	4
2.1.1	Metodi chiusi	4
2.1.1.1	<i>Metodo di bisezione (o dicotomico)</i>	4
2.1.2	Metodi aperti	4
2.1.2.1	<i>Problema del punto fisso</i>	4
2.1.2.2	<i>Metodo di Newton-Raphson</i>	5
2.1.2.3	<i>Metodo della secante</i>	7
2.1.2.4	<i>Metodo di Newton per i sistemi</i>	8
2.1.2.5	<i>Metodo di Newton generalizzato</i>	9
2.2	SOLUZIONE DI SISTEMI LINEARI	10
2.2.1	Metodo di Gauss	10
2.2.2	Metodo di fattorizzazione triangolare	11
2.2.3	Metodi iterativi	12
2.2.3.1	<i>Metodo di Jacobi</i>	12
2.2.3.2	<i>Metodo di Seidel</i>	12
2.2.3.3	<i>Metodi di rilassamento</i>	13
2.3	INTEGRAZIONE NUMERICA DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI	13
2.3.1	Schemi numerici	14
2.3.1.1	<i>Metodo di Eulero</i>	15
2.3.1.2	<i>Metodo di Heun</i>	15
2.3.1.3	<i>Metodo di Runge-Kutta</i>	16
2.3.1.4	<i>Metodo predictor-corrector</i>	16
2.3.1.5	<i>Schema di Runge-Kutta per sistemi di equazioni differenziali</i>	17
2.4	EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI DEL SECONDO ORDINE	18
2.4.1	Equazioni iperboliche (problemi di propagazione)	18
2.4.2	Equazioni paraboliche (problemi di dispersione)	19
2.4.3	Equazioni ellittiche (problemi di equilibrio)	20
2.4.4	Schemi alle differenze finite per equazioni alle derivate parziali di secondo ordine	21
2.4.4.1	<i>Equazioni iperboliche</i>	21
2.4.4.2	<i>Equazioni paraboliche</i>	21

2.4.4.3	<i>Equazioni ellittiche</i>	22
2.5	ELEMENTI DI PROGRAMMAZIONE E DI LINGUAGGIO FORTRAN (ESERCITAZIONE)	23
2.5.1	La programmazione	23
2.5.2	Il linguaggio Fortran	23
2.5.2.1	<i>Comandi di 'editing'</i>	24
2.5.2.2	<i>Istruzioni di inizio programma</i>	24
2.5.2.3	<i>Istruzioni di dichiarazione di variabili</i>	24
2.5.2.4	<i>Istruzioni di assegnazione di memoria alle variabili</i>	24
2.5.2.5	<i>Istruzioni di apertura e chiusura di file di dati</i>	24
2.5.2.6	<i>Istruzioni di input e output dei dati</i>	25
2.5.2.7	<i>Istruzioni di formato</i>	25
2.5.2.8	<i>Istruzioni di elaborazione</i>	25
2.5.2.9	<i>Istruzioni di decisione</i>	25
2.5.2.10	<i>Istruzioni di salto</i>	25
2.5.2.11	<i>Istruzioni di ciclo</i>	26
2.5.2.12	<i>Sottoprogrammi</i>	26
2.5.2.13	<i>Istruzioni di fine programma</i>	26
2.5.2.14	<i>Comandi di compilazione</i>	26
3.	Moto permanente in reti di condotte in pressione	
3.1	GENERALITÀ	28
3.2	METODI TRADIZIONALI	28
3.3	METODO NODALE	28
3.3.1	Analisi dell'elemento	29
3.3.2	Equazione della matrice elementare	29
3.3.3	Tubazioni	29
3.3.4	Pompe	31
3.3.5	Valvole	31
3.3.6	Assemblaggio della matrice globale	32
3.3.7	Imposizione delle condizioni al contorno	33
3.3.8	Soluzione del sistema di equazioni	33
3.3.8.1	<i>Analisi lineare</i>	33
3.3.8.2	<i>Metodo di Newton</i>	34
3.3.9	Coefficienti di rilassamento	34
3.4	VERIFICA DI UNA RETE DI CONDOTTE IN PRESSIONE (ESERCITAZIONE)	35
4.	Progetto di reti di condotte in pressione	
4.1	GENERALITÀ	39
4.2	DIMENSIONAMENTO DI RETI APERTE O AD ALBERO	40
4.2.1	Sistema lineare nei dislivelli.	40
4.2.2	Programmazione lineare.	41
4.2.2.1	<i>Il metodo del simplesso e il metodo delle penalità</i>	42
4.2.2.2	<i>La programmazione lineare e il problema di progetto della rete</i>	43

4.2.2.3	<i>Esempio applicativo</i>	43
4.3	DIMENSIONAMENTO DI RETI CHIUSE O A MAGLIE	46
4.3.1	Progetto mediante programmazione non lineare	46
4.3.2	Metodo semplificato	47
4.4	PROGETTO DI UNA RETE DI CONDOTTE IN PRESSIONE (ESERCITAZIONE)	47
5.	Moto permanente di correnti a pelo libero	
5.1	GENERALITÀ	51
5.2	EQUAZIONE DEL MOTO	51
5.3	SCHEMI ALLE DIFFERENZE FINITE ESPlicitI E IMPLICITI	53
5.4	CONSISTENZA, STABILITÀ, CONVERGENZA, ACCURATEZZA	54
5.4.1	Stabilità	54
5.4.1.1	<i>Schema esplicito</i>	54
5.4.1.2	<i>Schema implicito</i>	56
5.4.2	Consistenza	58
5.4.2.1	<i>Schema esplicito</i>	58
5.4.2.2	<i>Schema implicito</i>	58
5.4.3	Convergenza	59
5.4.4	Accuratezza	59
5.5	INTEGRAZIONE DELLE EQUAZIONI	60
5.5.1	Alvei prismatici	60
5.5.2	Alvei naturali	60
5.5.3	Alvei a sezione composta	61
5.6	I PROGRAMMI DELL'HYDROLOGIC ENGINEERING CENTER	62
5.7	CALCOLO DI UN PROFILO DI CORRENTE IN MOTO PERMANENTE (ESERCITAZIONE)	64
6.	Moto vario di correnti in pressione	
6.1	GENERALITÀ	69
6.2	OSCILLAZIONI DI MASSA	69
6.3	ESEMPI APPLICATIVI	70
6.3.1	Moto vario nelle gallerie degli impianti idroelettrici	70
6.3.2	Moto vario negli impianti di sollevamento muniti di cassa d'aria	71
6.4	VERIFICA DI UN IMPIANTO DI SOLLEVAMENTO CON CASSA D'ARIA. OSCILLAZIONI DI MASSA (ESERCITAZIONE)	72
6.5	MOTO VARIO ELASTICO	73
6.5.1	Equazioni del moto	73
6.5.2	Metodo delle caratteristiche	73
6.5.3	Possibili schemi alle differenze finite	75
6.6	CONDIZIONI AL CONTORNO	79
6.6.1	Condizioni iniziali	79
6.6.2	Classificazione dei dispositivi d'estremità	79
6.6.3	Esempi di condizioni ai limiti	80
6.6.3.1	<i>Volano</i>	80
6.6.3.2	<i>Cassa d'aria</i>	81
6.6.3.3	<i>Cassa d'aria con strozzatura dissimmetrica</i>	81

6.6.3.4	<i>Pozzo piezometrico</i>	86
6.6.3.5	<i>Cassa d'acqua</i>	86
6.6.3.6	<i>Tronco elastico a parametri concentrati</i>	86
6.6.3.7	<i>Serbatoio</i>	86
6.7	VERIFICA DI UN IMPIANTO DI SOLLEVAMENTO CON CASSA D'ARIA. MOTO VARIO ELASTICO (ESERCITAZIONE)	86
6.8	CAVITAZIONE	87
6.8.1	Cavitazione vaporosa	88
6.8.2	Cavitazione gassosa	88
6.9	EQUAZIONI INDEFINITE PER TUBAZIONE VISCOELASTICA	89
6.10	LE EQUAZIONI DEL MOTO BIDIMENSIONALI IN COORDINATE CILINDRICHE E I MODELLI QUASI BIDIMENSIONALI	93
6.11	I MODELLI UNIDIMENSIONALI NON STAZIONARI	98
7.	Moto vario di correnti a pelo libero	
7.1	GENERALITÀ	99
7.2	EQUAZIONI DEL MOTO	99
7.3	METODO DELLE CARATTERISTICHE	100
7.4	INTEGRAZIONE NUMERICA	101
7.5	SCHEMI ALLE DIFFERENZE FINITE	101
7.5.1	Schemi espliciti	101
7.5.1.1	<i>Schema di Lax</i>	102
7.5.1.2	<i>Criterio di stabilità di Courant</i>	103
7.5.2	Schemi impliciti	103
7.5.2.1	<i>Schema di Preissman</i>	103
7.5.3	Schemi espliciti di secondo ordine	105
7.5.3.1	<i>Schema di Mac Cormack</i>	105
7.6	CROLLO DI DIGA	106
7.7	CALCOLO NUMERICO DELL'ONDA CONSEGUENTE AD UN CROLLO DI DIGA (ESERCITAZIONE)	108
7.8	MODELLI BIDIMENSIONALI	108
7.9	SEMPLIFICAZIONI POSSIBILI PER LE ONDE DI PIENA	110
7.9.1	Modello cinematico	111
7.9.2	Modello parabolico	112
7.9.3	Schemi numerici	112
7.9.3.1	<i>Modello cinematico</i>	112
7.9.3.2	<i>Modello parabolico</i>	113
7.10	EQUAZIONE DEI SERBATOI	114
7.11	VERIFICA DI UN SERBATOIO DI LAMINAZIONE (ESERCITAZIONE)	116
8.	Fenomeni di filtrazione e dispersione negli acquiferi	
8.1	GENERALITÀ	117
8.2	I FENOMENI DI FILTRAZIONE	117
8.3	EQUAZIONI DELLA FILTRAZIONE	118
8.4	IL METODO DELLE DIFFERENZE FINITE PER I PROBLEMI DI FILTRAZIONE	120
8.4.1	Soluzione per il caso di acquifero isotropo e confinato	120
8.4.2	Moto permanente	120

8.4.3	Calcolo della filtrazione in un acquifero artesiano omogeneo e isotropo (esercitazione)	122
8.4.4	Moto vario	122
8.4.4.1	<i>Schema esplicito</i>	123
8.4.4.2	<i>Schema implicito</i>	124
8.4.5	Estensione agli altri tipi di acquifero	125
8.4.5.1	<i>Acquifero non isotropo</i>	125
8.4.5.2	<i>Acquifero freatico</i>	126
8.5	TRASPORTO DI SOSTANZE IN FALDE ACQUIFERE	126
8.6	EQUAZIONI DELLA DISPERSIONE	127
8.7	IL METODO DELLE DIFFERENZE FINITE PER I PROBLEMI DI DISPERSIONE	132
9.	Le equazioni di Navier-Stokes	
9.1	LE EQUAZIONI DI NAVIER-STOKES E LE EQUAZIONI DI REYNOLDS	135
9.2	MODELLI DI TURBOLENZA	136
9.2.1	Modelli diffusivi	136
9.2.2	Modelli a zero equazioni	136
9.2.3	Modelli ad una equazione. L'equazione dell'energia cinetica turbolenta	137
9.2.4	Modelli a due equazioni. L'equazione della dissipazione di energia cinetica	139
9.2.5	Modelli non diffusivi	139
9.3	CONDIZIONI AL CONTORNO	140
9.3.1	Condizione alla parete	140
9.3.2	Condizione di simmetria	141
9.4	RISOLUZIONE NUMERICA DELLE EQUAZIONI	141
9.4.1	Metodo dei volumi finiti	142
9.4.2	Numero di Peclet	143
9.4.3	Schema centrato	144
9.4.4	Schema upwind	145
9.4.5	Schema ibrido	146
9.4.6	Risoluzione del sistema di equazioni	147
9.4.7	Risoluzione dell'equazione della pressione	149
	Bibliografia	150

PREFAZIONE

Sono qui raccolti gli appunti delle lezioni dell'insegnamento di "Idraulica numerica" tenuto dall'anno accademico 1992-93 fino al 2004-05 nell'ambito del Corso di Laurea in Ingegneria Civile e dal 2005-06 nell'ambito del Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Idraulica, presso la Facoltà di Ingegneria dell'Università degli Studi di Catania.

Gli argomenti trattati rispecchiano una visione parziale e soggettiva della disciplina, come è naturale per temi così nuovi e in continua evoluzione. Dopo un capitolo introduttivo, si illustrano alcuni elementi di base dell'analisi numerica, che trovano poi applicazione durante il corso, e si forniscono nozioni elementari di programmazione e di linguaggio Fortran. Successivamente si entra nel vivo delle applicazioni idrauliche, trattando i problemi di verifica e di progetto di reti idrauliche in pressione, quindi affrontando il moto permanente di correnti a superficie libera, il moto vario di correnti in pressione e a superficie libera, i fenomeni di filtrazione e dispersione negli acquiferi sotterranei e concludendo con le equazioni di Navier-Stokes. Gli argomenti più avanzati hanno tradizionalmente trovato spazio nell'insegnamento di "Idraulica numerica" svolto nell'ambito della laurea di vecchio ordinamento quinquennale, mentre non sono trattati nel corso svolto nell'ambito della laurea specialistica biennale. Tuttavia si è mantenuta la struttura originaria della dispensa fornita agli studenti sin dal 1992-93, con qualche necessaria modifica, soprattutto per aggiornare i riferimenti al software di calcolo. Questo sembra utile per fornire spunti per eventuali approfondimenti successivi agli studenti particolarmente interessati alla materia.

Giuseppe Pezzinga

1. INTRODUZIONE

1.1 Osservazione diretta e modellazione

L'ingegnere deve interpretare correttamente i fenomeni fisici a fini di progetto di nuove opere, o per verificare impianti esistenti in seguito a variazioni dei parametri di progetto o per risolvere problemi di cattivo funzionamento degli impianti stessi.

Il metodo più corretto di conoscenza dei problemi è l'osservazione diretta dei fenomeni e la misura delle grandezze fisiche che li descrivono. Purtroppo solo raramente si può ricorrere all'osservazione diretta. Infatti, anche nel caso della verifica del funzionamento di opere esistenti, spesso non si può osservare direttamente l'evento da sottoporre ad indagine, o perché è un evento naturale sul quale non si può influire, oppure perché i suoi prevedibili effetti sull'opera sarebbero distruttivi. Da qui discende l'importanza della modellazione dei fenomeni.

1.2 Modelli fisici, modelli analogici e modelli matematici

I modelli sono solitamente classificati in tre categorie: si distinguono infatti modelli fisici, modelli analogici e modelli matematici.

I modelli fisici sono modelli che riproducono l'opera o l'impianto da studiare con una riduzione della scala geometrica. Il fenomeno osservato nel modello viene ricondotto al funzionamento reale sulla base delle leggi dell'analisi dimensionale e della similitudine. Il modello fisico ha il pregio di riprodurre con buona accuratezza fenomeni complessi. La complessità può essere dovuta alla geometria o alla complessità del campo di moto o del fluido, come nei moti bifase. Il difetto principale dei modelli fisici è quello di adattarsi solo ad una particolare geometria e di essere quindi costosi.

I modelli analogici (che potrebbero essere considerati una particolare categoria di modelli fisici, in quanto richiedono misure di grandezze fisiche di laboratorio) si basano su un'analogia formale tra le leggi che descrivono il fenomeno d'interesse e le leggi del fenomeno che viene riprodotto nel modello (es.: modelli elettrici di reti idrauliche). Presentano gli stessi difetti dei modelli fisici e vengono realizzati solo per motivi di interesse scientifico.

I modelli matematici si basano invece sulla risoluzione matematica delle equazioni che descrivono i fenomeni. Le equazioni possono essere teoriche, empiriche o di entrambi i tipi. Possono essere espresse in termini differenziali o finiti. In senso stretto si intende per modello matematico o numerico una serie di operazioni fatte al calcolatore per risolvere le equazioni che descrivono il fenomeno secondo certe regole, che costituiscono l'algoritmo di calcolo. Il pregio dei modelli matematici è che possono seguire geometrie diverse semplicemente cambiando i dati di ingresso; il difetto è che risultano insufficienti o comunque meno accurati dei modelli fisici nella riproduzione di alcuni fenomeni.

1.3 Analisi sperimentale e analisi teorica

La definizione delle leggi che definiscono un certo fenomeno fisico è sempre effettuata sulla base dell'analisi sperimentale, accompagnata dall'analisi teorica per interpretare il fenomeno e generalizzare i risultati.

Una volta definite le equazioni che descrivono il fenomeno, se esiste una soluzione analitica si ricorre a questa, altrimenti si è costretti a ricorrere all'analisi numerica.

1.4 Interpretazione numerica

L'interpretazione numerica è necessaria perché nei problemi tecnici dell'idraulica i fenomeni che hanno una soluzione analitica sono molto pochi. In particolare solitamente la presenza delle resistenze rende non integrabili analiticamente le equazioni. In molti casi allora per ottenere la soluzione analitica si è costretti a ricorrere a semplificazioni che comportano l'introduzione di una certa approssimazione nei calcoli. Per effettuare calcoli più accurati si ricorre allora alla soluzione numerica delle equazioni.

Normalmente le equazioni che descrivono i fenomeni fisici sono equazioni differenziali e sono risolte attraverso una discretizzazione. Il modello matematico o numerico comprende sia le equazioni che lo schema numerico adottato per risolverle. Anche in equazioni espresse in termini finiti tuttavia a volte si è costretti a ricorrere alla risoluzione numerica a causa del fatto che la variabile compare nelle equazioni stesse in forma implicita.

1.5 Equazioni implicite in idraulica

Le equazioni implicite in idraulica sono molto diffuse. Tra queste possiamo ricordare l'equazione di Colebrook-White, che esprime il legame esistente in moto turbolento tra l'indice di resistenza, il numero di Reynolds e la scabrezza relativa.

Un'altra equazione implicita è quella che esprime il legame tra energia e altezza in una corrente a pelo libero. Tale equazione è riconducibile solo se la sezione è rettangolare ad una cubica, che ammette soluzione analitica, ma anche in questo caso, se si cerca l'altezza corrispondente ad una data energia, è più semplice ricorrere ad una soluzione numerica.

Ancora un'equazione implicita si ha ad esempio per definire il legame esistente in moto uniforme tra l'altezza e la portata in una corrente a pelo libero.

1.6 Metodi iterativi

Quando non esiste la soluzione diretta dell'equazione o quando risulta laboriosa si ricorre ad un metodo iterativo. In questi metodi da un valore di primo tentativo si trova la soluzione finale seguendo certe regole dipendenti dal metodo scelto. Normalmente, più il valore di primo tentativo è vicino alla soluzione finale, più rapidamente questa viene raggiunta. Mentre per l'applicazione dei metodi iterativi

bisogna conoscere l'analisi numerica, per scegliere nella maniera migliore i valori di primo tentativo bisogna conoscere l'idraulica.

1.7 Valori di primo tentativo

Vediamo come la conoscenza dell'idraulica ci aiuta per determinare i valori di primo tentativo nelle equazioni appena viste.

Nella formula di Colebrook un buon valore di primo tentativo è dato dal valore dell'indice di resistenza valevole per il moto puramente turbolento. In molti altri fenomeni in cui interviene la turbolenza e c'è una dipendenza dal numero di Reynolds occorre una risoluzione iterativa del problema (anche per via grafica), come per esempio nel calcolo dei coefficienti di efflusso di uno strumento misuratore di portata.

Nell'equazione dell'energia in una corrente a pelo libero per avere un'indicazione sul valore di primo tentativo bisogna esaminare la situazione particolare. Per esempio nell'efflusso sotto una paratoia, se cerchiamo il tirante a monte, siccome sappiamo che la corrente è lenta possiamo trascurare in prima approssimazione il termine cinetico.

Nell'equazione del moto uniforme, per esempio possiamo partire dal valore dell'altezza che si ha in una sezione rettangolare molto larga.

2. ELEMENTI DI CALCOLO NUMERICO E DI PROGRAMMAZIONE

2.1 Equazioni non lineari

Consideriamo un'equazione $f(x)=0$, dove $f(x)$ è una funzione algebrica o trascendente. La funzione algebrica è espressa tramite polinomi. La funzione trascendente attraverso combinazioni di funzioni esponenziali, logaritmiche, trigonometriche, ecc. La funzione inoltre in generale può essere di variabile reale o complessa. La radice di $f(x)$ sarà ξ se $f(\xi)=0$. In termini numerici però ci accontenteremo che sia $|f(x)|<\varepsilon$, oppure $|x-\xi|<\varepsilon$. In questo caso diremo che ξ è uno zero della funzione.

Esistono metodi per valutare tutte le radici reali e complesse di una funzione polinomiale e metodi per valutare la singola radice sulla base della conoscenza approssimata del valore stesso.

In ingegneria ed in particolare in idraulica si usano i metodi del secondo tipo, perché di solito esiste una sola radice significativa e si conosce di solito un criterio per farne una valutazione approssimata, come abbiamo già visto.

I metodi che si usano sono metodi iterativi. Partono dalla valutazione del valore iniziale. Indicano l'insieme di regole da seguire per calcolare i successivi valori della serie dei valori approssimati fin quando non viene superato un test di convergenza. E' opportuno di solito fissare anche un numero massimo di iterazioni. I metodi possono essere distinti in due categorie: metodi chiusi e metodi aperti.

2.1.1 METODI CHIUSI

2.1.1.1 Metodo di bisezione (o dicotomico)

E' il tipico metodo chiuso. Si basa sulla conoscenza di due valori di x in cui la funzione assume un valore positivo e un valore negativo. Per questo il metodo è detto chiuso. Il valore stimato è quello che divide in due l'intervallo. Si procede poi sull'intervallo metà agli estremi del quale la funzione assume segni opposti, fin quando viene superato il test di convergenza.

2.1.2 METODI APERTI

2.1.2.1 Problema del punto fisso

Consideriamo l'equazione $x=g(x)$. Se è soddisfatta per $x=\xi$, si dice che ξ è un punto fisso di $g(x)$. Per trovare il punto fisso ci si basa sulla successione: $x_1=g(x_0)$, $x_2=g(x_1)$, ..., $x_n=g(x_{n-1})$.

Si possono determinare le condizioni di convergenza esaminando come l'errore nella soluzione ad un certo passo dello schema iterativo dipenda dall'errore al passo precedente. Nel caso dello schema appena illustrato per la convergenza occorre che sia $|g'(x)|<1$.

Ci sono quattro possibili tipi di comportamento: convergenza monotona, convergenza oscillante, divergenza monotona, divergenza oscillante.

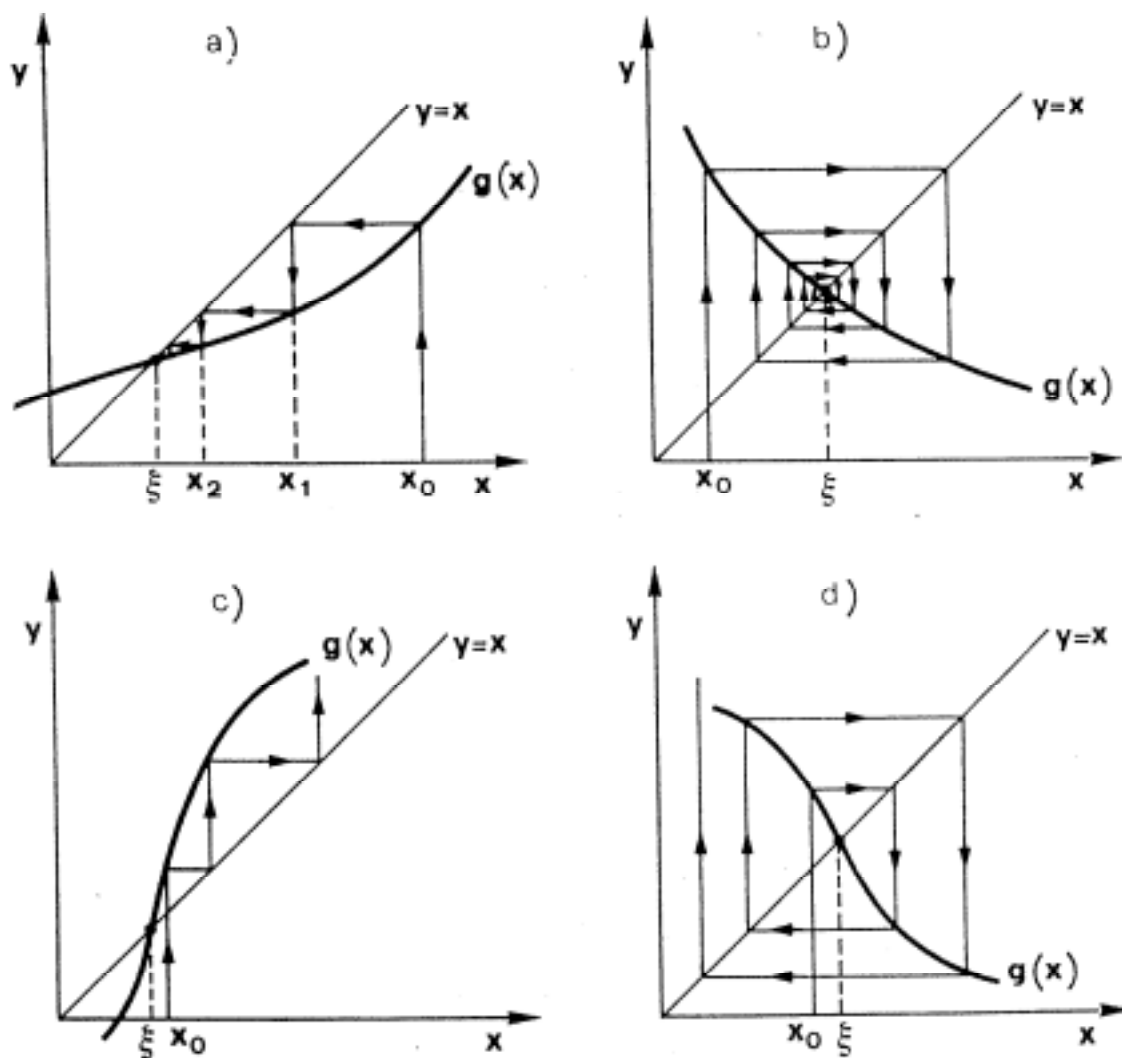


Fig. 2.1 – Metodo del punto fisso (Gambolati, 1988)

2.1.2.2 Metodo di Newton-Raphson

Supponiamo di avere un valore approssimato x_n e di volerlo migliorare in modo tale che sia $f(x_n+h)=0$. Sviluppando la funzione in serie di Taylor arrestata al primo termine si ha:

$$f(x_n+h) \cong f(x_n) + h f'(x_n) = 0 ,$$

da cui si ottiene:

$$h = - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Lo schema è quindi il seguente:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}.$$

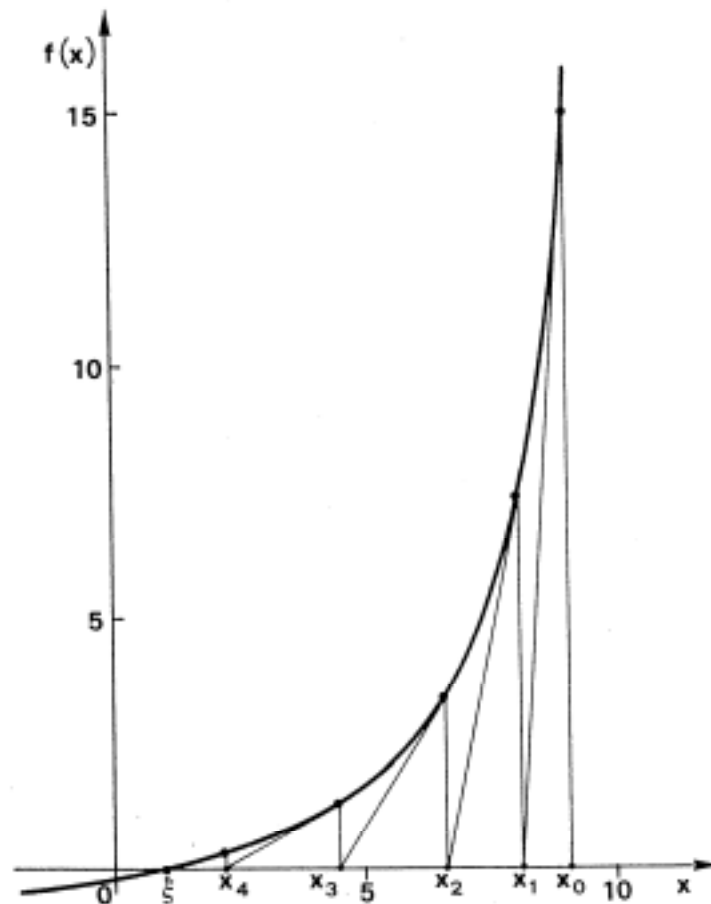


Fig. 2.2 – Metodo di Newton-Raphson (Gambolati, 1988)

Osservando che tale formula può essere interpretata come un caso particolare dello schema del punto fisso applicato alla funzione:

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

ne risulta facilmente che la condizione di convergenza è che risulti:

$$|g'(x)| = \frac{|f(x)f''(x)|}{[f'(x)]^2} < 1.$$

Tale condizione di solito è verificata per continuità nell'intorno della soluzione perché in corrispondenza alla soluzione è $f(x)=0$, tranne che $f'(x)$ sia uguale a zero. La convergenza dello schema di Newton è quadratica, cioè l'errore ad una certa iterazione è dell'ordine del quadrato dell'errore all'iterazione precedente.

Una modifica del metodo di Newton si ha attraverso l'introduzione di un moltiplicatore della correzione ω detto fattore di rilassamento. Serve ad accelerare la convergenza o ad ottenerla anche in condizioni difficili, come per esempio vicino ai flessi. Il fattore di rilassamento ω deve essere compreso tra 0 e 2.

2.1.2.3 Metodo della secante

Si può calcolare la derivata anche in base ai valori della funzione in due punti vicini, cioè come rapporto incrementale. Questo dà luogo al cosiddetto metodo della secante. Il principale vantaggio di tale metodo è che non c'è bisogno di calcolare la derivata in maniera analitica.

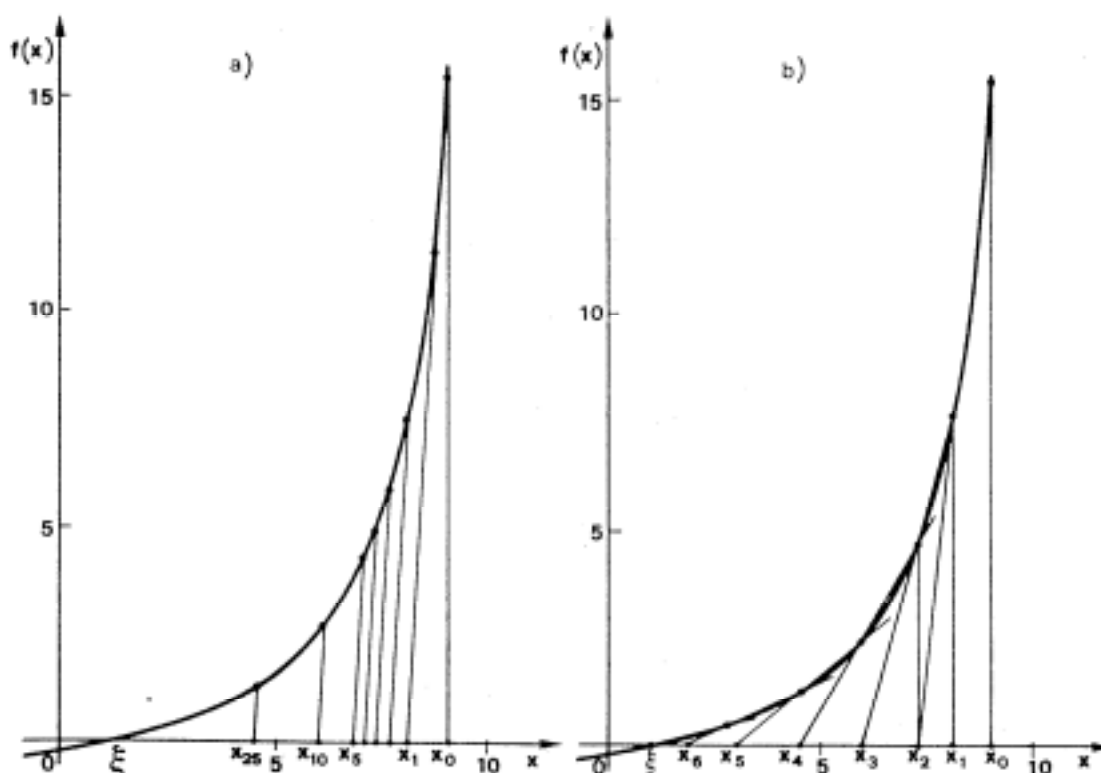


Fig. 2.3 – Metodo della tangente fissa e della secante (Gambolati, 1988)

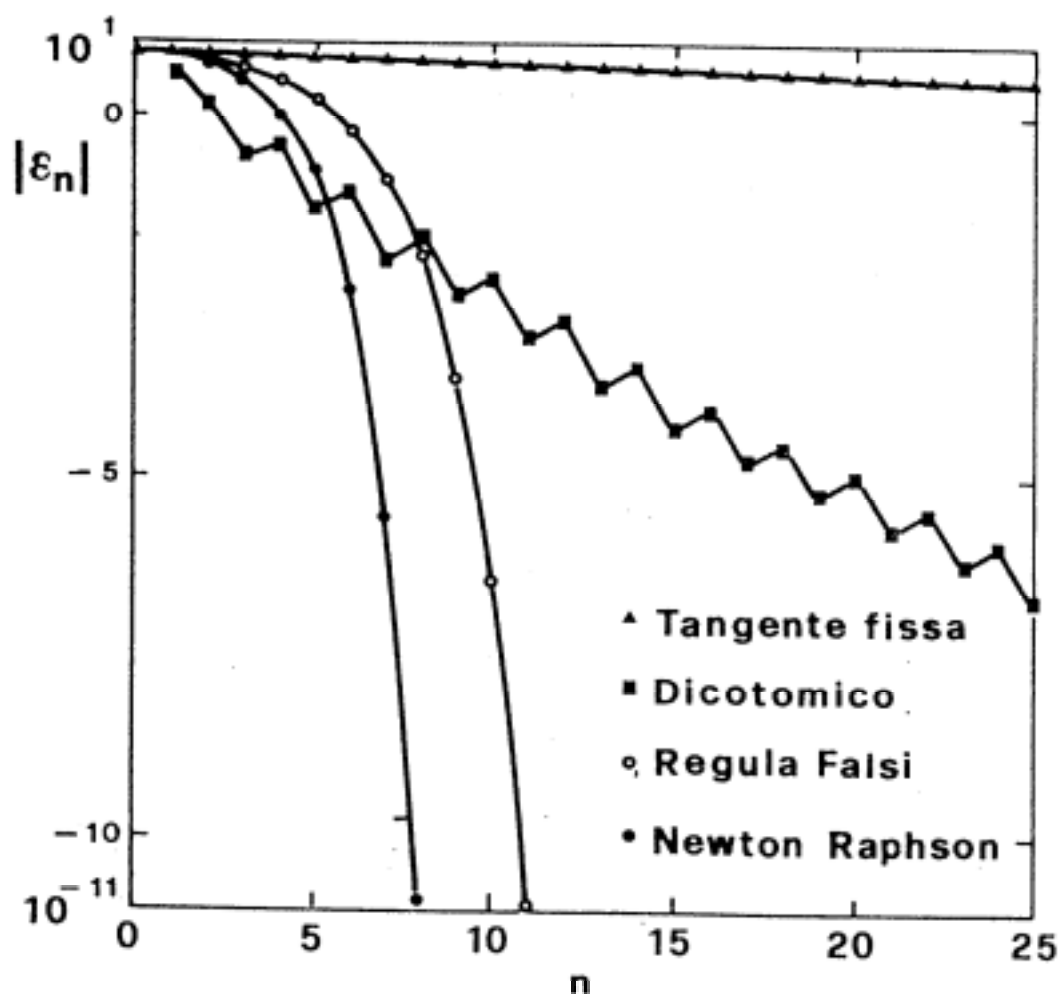


Fig. 2.4 – Convergenza di diversi metodi (Gambolati, 1988)

2.1.2.4 Metodo di Newton per i sistemi

In generale si può avere un sistema di equazioni non lineari da risolvere:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0. \end{aligned}$$

Volendo migliorare la predizione a partire da un insieme approssimato di valori x_1, x_2, \dots, x_n , si possono sviluppare in serie di Taylor le funzioni, arrestando lo sviluppo al primo termine:

$$\begin{aligned}
f_1(x_1+\Delta x_1, \dots, x_n+\Delta x_n) &\cong f_1(x_1, \dots, x_n) + \Delta x_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dots + \Delta x_n \frac{\partial f_1}{\partial x_n} = 0, \\
&\dots \\
f_n(x_1+\Delta x_1, \dots, x_n+\Delta x_n) &\cong f_n(x_1, \dots, x_n) + \Delta x_1 \frac{\partial f_n}{\partial x_1} + \dots + \Delta x_n \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = 0.
\end{aligned}$$

Si vede quindi che bisogna risolvere il sistema scritto in notazione matriciale:

$$\mathbf{F}_j \Delta \mathbf{x} = - \mathbf{F},$$

essendo \mathbf{F}_j lo jacobiano, cioè la matrice delle derivate. Il vettore $\Delta \mathbf{x}$ naturalmente va sommato al vettore dei valori approssimati \mathbf{x} . Si può utilizzare anche in questo caso un fattore di rilassamento.

2.1.2.5 Metodo di Newton generalizzato

Per l'applicazione del metodo esposto si richiede però la risoluzione del sistema lineare. Se non si vuole risolvere il sistema si può ricorrere alla sequenza:

$$\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= x_1^{(k)} - \omega \frac{f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\frac{\partial f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial x_1}}, \\
x_2^{(k+1)} &= x_2^{(k)} - \omega \frac{f_2(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\frac{\partial f_2(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial x_2}}, \\
&\dots \\
x_n^{(k+1)} &= x_n^{(k)} - \omega \frac{f_n(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_{n-1}^{(k+1)}, x_n^{(k)})}{\frac{\partial f_n(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_{n-1}^{(k+1)}, x_n^{(k)})}{\partial x_n}}.
\end{aligned}$$

in cui è anche considerata l'utilizzazione di un fattore di rilassamento ω . In questa sequenza l'indice k si riferisce all'iterazione. Si ricorre quindi ad un'iterazione di Newton locale, tenendo conto, nel calcolare una correzione, dei valori più aggiornati delle altre variabili.

2.2 Soluzione di sistemi lineari

Abbiamo visto che l'applicazione del metodo di Newton per i sistemi di equazioni non lineari porta alla scrittura di un sistema di equazioni lineari. Anche dalla scrittura in forma discretizzata di equazioni differenziali nasce la necessità di risolvere sistemi di equazioni lineari. Vedremo quindi alcuni metodi per la soluzione di sistemi lineari.

Supponiamo di avere un sistema di n equazioni in n incognite, rappresentato in notazione matriciale dalla scrittura $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$. Supponiamo inoltre che $\det(\mathbf{A})\neq 0$. Per risolvere il sistema si potrebbe applicare la regola di Cramer, che però quando n cresce diventa praticamente inapplicabile. Il numero delle operazioni necessarie è infatti dell'ordine di $(n-1)(n+1)!$.

Esistono per la soluzione metodi diretti e metodi iterativi. Tra i metodi diretti vedremo il metodo di Gauss e il metodo di fattorizzazione triangolare (che per matrici simmetriche si chiama metodo di Cholesky). Tra i metodi iterativi vedremo i metodi di Seidel, di Jacobi, di rilassamento.

2.2.1 METODO DI GAUSS

Per risolvere il sistema con il metodo di Gauss, si divide inizialmente la prima equazione per a_{11} , si moltiplica rispettivamente per a_{21} , a_{31} , ..., a_{n1} e si sottrae rispettivamente alla seconda, terza, ..., n -esima equazione. Fatta questa operazione, alle righe che non siano la prima mancherà il coefficiente a_{i1} , mentre nella prima sarà $a_{11}=1$.

Si ripete l'operazione partendo dalla seconda riga; questa si divide per a_{22} , e si moltiplica rispettivamente per a_{32} , ..., a_{n2} , sottraendola dalla terza, ..., n -esima equazione. Così dalla terza equazione in poi abbiamo eliminato i coefficienti a_{i2} . Si arriva in definitiva ad una forma del tipo $\mathbf{Ux}=\mathbf{c}$, dove \mathbf{U} è una matrice triangolare alta. Fatto questo, è facile trovare le incognite con un processo di sostituzione alla rovescia, a partire da x_n fino a x_1 .

L'elemento per cui si divide ogni singola riga si chiama elemento pivotale. Se uno di questi diventa nullo, la corrispondente equazione deve essere permutata con una di quelle che seguono. In pratica le cose vanno male anche se l'elemento pivotale risulta piccolo, fatto che può causare grandi errori numerici. Si può allora applicare il metodo di Gauss con la scelta del pivot massimo.

2.2.2 METODO DI FATTORIZZAZIONE TRIANGOLARE

Il metodo di fattorizzazione triangolare si basa su un teorema che afferma che se i minori della matrice \mathbf{A} che cominciano con a_{11} sono non nulli, la matrice può essere decomposta nel prodotto \mathbf{LU} , dove \mathbf{L} è triangolare bassa e \mathbf{U} è triangolare alta con coefficienti diagonali pari a 1. Facendo il prodotto righe per colonne \mathbf{LU} si verifica che i coefficienti di \mathbf{L} e \mathbf{U} sono dati dalle formule seguenti:

$$l_{ik} = a_{ik} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{im} u_{mk} \quad i=1,2,\dots,n; \quad k=1,2,\dots,i$$

$$u_{kj} = \frac{1}{l_{kk}} \left(a_{kj} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{km} u_{mj} \right) \quad k=1,2,\dots,n-1; \quad j=k+1,\dots,n$$

Bisogna calcolare nell'ordine: la prima riga di \mathbf{L} , la prima riga di \mathbf{U} , la seconda riga di \mathbf{L} , la seconda riga di \mathbf{U} , ecc. Posto $\mathbf{U}\mathbf{x}=\mathbf{y}$, si ottiene $\mathbf{L}\mathbf{y}=\mathbf{b}$. Si ottiene quindi prima \mathbf{y} e poi \mathbf{x} .

Anche in questo caso l'accuratezza della soluzione può migliorare con opportune permutazioni di righe e colonne.

Se \mathbf{A} è simmetrica si può scrivere $\mathbf{A}=\mathbf{L}\mathbf{L}^T$, essendo \mathbf{L}^T la matrice trasposta di \mathbf{L} . Le regole per trovare i coefficienti di \mathbf{L} sono le seguenti:

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}}; \quad l_{i1} = \frac{a_{i1}}{l_{11}} \quad i=2,\dots,n;$$

$$l_{jj} = \left(a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2 \right)^{1/2} \quad j=2,\dots,n;$$

$$l_{ij} = \frac{1}{l_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk} \right) \quad j=2,\dots,n; \quad i=j+1,\dots,n$$

Il metodo di fattorizzazione triangolare è detto di Crout-Banachiewicz se la matrice è non simmetrica e di Cholesky se la matrice è simmetrica.

2.2.3 METODI ITERATIVI

Le matrici possono essere distinte in due tipi: matrici dense e sparse. Mentre per le matrici dense sono più indicati i metodi diretti come quelli appena visti, per le matrici sparse sono più indicati i metodi iterativi.

I metodi iterativi partono da un valore di primo tentativo e convergono alla soluzione attraverso una serie di regole dipendenti dal metodo stesso.

Un'iterazione di grado m è un'equazione nella forma:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}_k(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k-1}, \dots, \mathbf{x}_{k-m+1})$$

L'iterazione è detta stazionaria se \mathbf{F} non dipende da k ed è lineare se \mathbf{F} è una funzione lineare. Tra queste vedremo le iterazioni di Jacobi, di Seidel, di rilassamento.

Possiamo scrivere $\mathbf{A}=\mathbf{L}+\mathbf{D}+\mathbf{U}$, essendo \mathbf{L} e \mathbf{U} rispettivamente la parte triangolare bassa e alta di \mathbf{A} senza la diagonale principale, e \mathbf{D} la matrice diagonale con i coefficienti diagonali di \mathbf{A} .

2.2.3.1 Metodo di Jacobi

Per definire l'iterazione di Jacobi scriviamo il sistema nella forma $\mathbf{D}\mathbf{x}+(\mathbf{L}+\mathbf{U})\mathbf{x}=\mathbf{b}$. L'iterazione è definita dallo schema $\mathbf{D}\mathbf{x}_{k+1}+(\mathbf{L}+\mathbf{U})\mathbf{x}_k=\mathbf{b}$, e scritta in forma canonica è la seguente:

$$\mathbf{x}_{k+1} = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U})\mathbf{x}_k + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}.$$

2.2.3.2 Metodo di Seidel

Per ricavare l'iterazione di Seidel scriviamo il sistema nella forma $(\mathbf{L}+\mathbf{D})\mathbf{x}+\mathbf{U}\mathbf{x}=\mathbf{b}$. L'iterazione è definita dallo schema $(\mathbf{L}+\mathbf{D})\mathbf{x}_{k+1}+\mathbf{U}\mathbf{x}_k=\mathbf{b}$, e scritta in forma canonica:

$$\mathbf{x}_{k+1} = -(\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{U}\mathbf{x}_k + (\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{b}.$$

Confrontando l'iterazione di Seidel scritta nella forma:

$$\mathbf{x}_{k+1} = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}\mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{U}\mathbf{x}_k) + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b},$$

con quella di Jacobi, si vede che nell'iterazione di Jacobi contribuiscono a fornire l'iterata $k+1$ solo valori all'iterata k , mentre nell'iterazione di Seidel contribuiscono a fornire l'iterata $k+1$ valori all'iterata $k+1$ stessa. Questa osservazione suggerisce che se i metodi convergono entrambi quello di Seidel converge più rapidamente. Esistono teoremi che forniscono le condizioni per la convergenza dei due metodi. Vedere se tali condizioni sono soddisfatte comporta però una serie di calcoli laboriosi. Una condizione sufficiente di convergenza fornisce un criterio pratico di semplice impiego. Si dimostra che se la matrice è diagonalmente dominante, allora le iterazioni di Jacobi e di Seidel convergono. Perché la matrice sia diagonalmente dominante occorre che si abbia:

$$\sum_{j=1}^{n(j \neq i)} |a_{ij}| \leq |a_{ii}|$$

con almeno una riga in cui valga strettamente il segno di minore.

2.2.3.3 Metodi di rilassamento

Seguendo la stessa impostazione usata in precedenza, scritto il sistema nella forma $\mathbf{D}\mathbf{x} = \mathbf{D}\mathbf{x} - \omega(\mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U})\mathbf{x} + \omega\mathbf{b}$, con ω parametro numerico arbitrario, ricaviamo l'iterazione di rilassamento $(\omega\mathbf{L} + \mathbf{D})\mathbf{x}_{k+1} = [(1-\omega)\mathbf{D} - \omega\mathbf{U}]\mathbf{x}_k + \omega\mathbf{b}$. Per confrontarla con le altre iterazioni è opportuno scriverla nella forma:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \omega [-\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}\mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{U}\mathbf{x}_k) + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{x}_k].$$

Questa vuol dire che la correzione apportata dal metodo di Seidel viene rilassata per il fattore ω . C'è un'analogia con il fattore di rilassamento del metodo di Newton generalizzato. Si dimostra che per $\omega \geq 2$ e per $\omega \leq 0$ il metodo di rilassamento non converge. L'esperienza mostra che se $0 < \omega < 2$ e \mathbf{A} è diagonalmente dominante di norma il metodo converge. Esistono criteri più precisi di convergenza per matrici con proprietà particolari. Il metodo si chiama di sovrarilassamento se $\omega > 1$, di sottorilassamento se $\omega < 1$. Per $\omega = 1$ si ha l'iterazione di Seidel. Il sovrarilassamento è un acceleratore della convergenza, il sottorilassamento un freno. Il sottorilassamento è però indicato quando il sistema da risolvere è non lineare e viene linearizzato.

2.3 Integrazione numerica di equazioni differenziali

L'interpretazione teorica di un fenomeno fisico conduce spesso alla scrittura di una o più equazioni differenziali. Esaminiamo prima il caso delle equazioni differenziali ordinarie, in cui c'è una variabile dipendente y e una variabile indipendente x , mentre se le variabili indipendenti sono più d'una si ha l'equazione differenziale alle derivate parziali.

Un'equazione differenziale ordinaria può essere messa in generale nella forma:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Le equazioni possono essere classificate in base al loro ordine e grado. L'ordine è il massimo ordine delle derivate della variabile y . Posta l'equazione sotto forma di polinomio della y e delle sue derivate, il grado è l'esponente della derivata di ordine massimo.

L'equazione si scrive di solito nella forma canonica:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

Risolvere l'equazione differenziale vuol dire trovare le funzioni di x che soddisfano l'equazione stessa. La funzione $\Phi(x)$ definita all'interno dell'intervallo di definizione della x , derivabile fino all'ordine n , è una soluzione se si ha:

$$\Phi^{(n)} = f(x, \Phi, \Phi', \Phi'', \dots, \Phi^{(n-1)})$$

La soluzione naturalmente contiene n costanti arbitrarie, da determinare con n condizioni supplementari.

Le condizioni supplementari si distinguono in condizioni iniziali e condizioni al contorno. In un problema ai valori iniziali le condizioni sono date tutte in corrispondenza a un unico punto. In un problema ai valori al contorno le condizioni sono date in più punti.

2.3.1 SCHEMI NUMERICI

Alcune equazioni differenziali sono integrabili analiticamente. Della maggior parte non si conosce invece un integrale generale e si ricorre quindi all'integrazione numerica. Nell'integrazione numerica di equazioni differenziali si sostituiscono alle derivate approssimazioni numeriche di queste, ottenute utilizzando i valori della funzione in un numero finito di punti dell'intervallo di definizione. La distanza tra due punti vicini si chiama passo o intervallo d'integrazione. Si chiama errore di troncamento l'errore dovuto al fatto che la derivata viene approssimata non con una serie infinita ma con una serie troncata. In base al modo in cui vengono calcolate le derivate si hanno vari schemi (o metodi) numerici.

Le proprietà che qualificano uno schema numerico sono: la stabilità, la consistenza, la convergenza, l'accuratezza.

La stabilità riguarda l'entità degli errori al procedere del calcolo. In particolare interessa come l'errore commesso ad un certo passo dipenda dall'errore al passo precedente. Perché lo schema sia stabile occorre che l'errore non si amplifichi.

Se al tendere del passo d'integrazione h a zero l'equazione algebrica discreta tende all'equazione differenziale lo schema si dice consistente. L'ordine della consistenza quantifica la differenza tra equazione algebrica discreta che approssima l'equazione differenziale e l'equazione differenziale originaria. È misurata dall'errore di troncamento causato dall'introduzione del rapporto incrementale al posto della derivata. La potenza secondo h del primo termine trascurato dà la consistenza.

Uno schema consistente e stabile si dice convergente, perché al tendere di h a zero la soluzione numerica tende a quella vera.

L'accuratezza di uno schema riguarda la differenza tra la soluzione approssimata e quella vera. Non può essere valutata a priori ma solo per confronto con la soluzione analitica valevole per casi semplici. Naturalmente uno schema con consistenza di ordine superiore è più accurato.

Esamineremo le proprietà di alcuni schemi numerici per alcuni problemi particolari, come l'integrazione dei profili di moto permanente di una corrente a pelo libero.

Gli schemi numerici per la soluzione di equazioni differenziali possono essere suddivisi in schemi espliciti e impliciti. Nei primi la formula risolutiva è del tipo:

$$y_{n+1} = y_n + h [a_0 f(x_n, y_n) + a_1 f(x_{n-1}, y_{n-1}) + \dots + a_i f(x_{n-i}, y_{n-i})]$$

mentre nei secondi è del tipo:

$$y_{n+1} = y_n + h [b_0 f(x_{n+1}, y_{n+1}) + b_1 f(x_n, y_n) + \dots + b_{i+1} f(x_{n-i}, y_{n-i})].$$

I metodi impliciti sono più laboriosi dei metodi espliciti ma in generale più accurati e più stabili.

Gli schemi numerici possono essere anche distinti in metodi a passo singolo (onestep) e a passo multiplo (multistep). Nei primi il valore di y_{n+1} è determinato solo in base al valore di y_n , nei secondi il valore di y_{n+1} viene determinato in base ai valori in più passi precedenti.

2.3.1.1 Metodo di Eulero

Lo schema suggerito da Eulero è scarsamente applicato perché poco accurato e viene illustrato solo per ragioni storiche. Supponiamo di avere un'equazione differenziale del primo ordine scritta in forma canonica:

$$y' = f(x, y)$$

con la condizione:

$$y=y_0 \text{ per } x=x_0.$$

Lo schema di Eulero consiste nell'approssimare la derivata con uno sviluppo arrestato al primo ordine e calcolandola nell'estremo sinistro del passo d'integrazione:

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n)$$

Lo schema di Eulero è esplicito e presenta il pericolo di instabilità, per cui occorre ricorrere a passi d'integrazione molto piccoli.

2.3.1.2 Metodo di Heun

Un miglioramento del metodo di Eulero si ha mediando la derivata tra il punto iniziale e il punto finale dell'intervallo. Lo schema che si ottiene è il seguente:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f\{x_n, y_n\} + f\{x_n+h, y_n+h f(x_n, y_n)\}]$$

Questo metodo è del secondo ordine, ed è quindi più accurato del metodo di Eulero. Viene anche detto metodo di Eulero migliorato.

Un altro metodo di secondo ordine, detto metodo di Eulero modificato, considera la pendenza nell'intervallo h pari alla pendenza nel suo punto medio. Lo schema è definito dall'espressione:

$$y_{n+1} = y_n + h f[x_n+h/2, y_n + h/2 f(x_n, y_n)]$$

2.3.1.3 Metodo di Runge-Kutta

Gli schemi del tipo di Runge-Kutta sono tra i metodi più usati perché sono relativamente stabili e precisi. Ne esistono di vari tipi, tutti riconducibili alla forma generale:

$$y_{n+1} = y_n + h (a_1 K_1 + a_2 K_2 + \dots + a_n K_n)$$

La funzione tra parentesi è detta funzione incremento e rappresenta la pendenza media della curva nell'intervallo. Si può vedere che il metodo di Eulero è riconducibile ad un metodo di Runge-Kutta del primo ordine e il metodo di Heun ad un metodo di Runge-Kutta del secondo ordine. Dal terzo ordine in su si chiamano schemi di Runge-Kutta, e si differenziano in base al numero di punti considerati all'interno dell'intervallo per stimare la pendenza ed al peso che viene assegnato ad ognuno di questi punti.

E' molto diffuso ad esempio il metodo di Runge-Kutta del quarto ordine che è definito dalle seguenti espressioni:

$$a_1 = a_4 = 1/6, \quad a_2 = a_3 = 1/3,$$

$$K_1 = f(x_n, y_n), \quad K_2 = f(x_n + h/2, y_n + K_1 h/2),$$

$$K_3 = f(x_n + h/2, y_n + K_2 h/2), \quad K_4 = f(x_n + h, y_n + K_3 h),$$

$$y_{n+1} = y_n + h/6 [K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4].$$

2.3.1.4 Metodo predictor-corrector

Gli schemi di questo tipo appartengono alla categoria degli schemi a passi multipli, in cui per calcolare il valore in $n+1$ si tiene conto del valore in più punti precedenti, il che consente di migliorare la stima della curvatura nell'intervallo. In particolare i metodi del tipo predictor-corrector si basano sull'idea di stimare in base ad una formula di tipo esplicito il valore al passo $n+1$ (fase di predizione) e di correggere il valore stimato in fase di predizione in base ad una formula di tipo implicito.

Un metodo predictor-corrector è ad esempio quello di Milne, che è del 4° ordine e che si basa sulle due seguenti formule:

$$y_{n+1}^p = y_{n-3} + \frac{4}{3} h [2 f(x_{n-2}, y_{n-2}) - f(x_{n-1}, y_{n-1}) + 2 f(x_n, y_n)],$$

$$y_{n+1}^c = y_{n-1} + \frac{h}{3} [f(x_{n-1}, y_{n-1}) + 4 f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^p)].$$

Il difetto dei metodi a passi multipli in generale è quello di non essere autoinnescenti, cioè in corrispondenza al punto iniziale, essendo noto solo il punto iniziale

stesso, occorre fare ricorso ad un metodo a passo singolo (ad esempio Runge-Kutta).

Più semplicemente un metodo predictor-corrector a passo singolo si può scrivere nella forma:

$$y_{n+1}^p = y_n + h f(x_n, y_n) ,$$

$$y_{n+1}^c = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^p)] .$$

2.3.1.5 Schema di Runge-Kutta per sistemi di equazioni differenziali

Gli schemi numerici che si utilizzano per risolvere i sistemi di equazioni differenziali del primo ordine sono una semplice estensione degli schemi già visti valevoli per una singola equazione.

Consideriamo le equazioni del sistema scritte sotto la forma canonica:

$$\frac{dx}{dt} = f[x(t), y(t), t]$$

$$\frac{dy}{dt} = g[x(t), y(t), t]$$

con le condizioni iniziali

$$x(t_0) = x_0 \qquad y(t_0) = y_0.$$

Prendendo ora per esempio in considerazione dello schema di Runge-Kutta del 4° ordine, la generalizzazione si ottiene considerando le seguenti formule ricorsive:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} (M_1 + 2M_2 + 2M_3 + M_4)$$

essendo

$$K_1 = f(x_n, y_n, t_n) ,$$

$$M_1 = g(x_n, y_n, t_n) ,$$

$$K_2 = f(x_n + K_1 h/2, y_n + M_1 h/2, t_n + h/2) ,$$

$$M_2 = g(x_n + K_1 h/2, y_n + M_1 h/2, t_n + h/2) ,$$

$$K_3 = f(x_n + K_2 h/2, y_n + M_2 h/2, t_n + h/2) ,$$

$$M_3 = g(x_n + K_2 h/2, y_n + M_2 h/2, t_n + h/2) ,$$

$$K_4 = f(x_n + K_3 h, y_n + M_3 h, t_n + h) ,$$

$$M_4 = g(x_n + K_3 h, y_n + M_3 h, t_n + h) .$$

h rappresenta il passo d'integrazione della variabile indipendente. I coefficienti vanno calcolati nell'ordine $K_1, M_1, K_2, M_2, K_3, M_3, K_4, M_4$. Il procedimento inizia calcolando i valori K_1 e M_1 in base alla condizione iniziale e procedendo fino a coprire l'intero campo d'integrazione.

2.4 Equazioni alle derivate parziali del secondo ordine

Numerosi fenomeni fisici sono descritti da equazioni alle derivate parziali, in vari campi della fisica e dell'ingegneria, come l'idrodinamica, la propagazione del calore, la meccanica delle strutture, l'elettromagnetismo, la meccanica quantistica, la dispersione degli inquinanti nell'ambiente, ecc. Nelle applicazioni di ingegneria, la schematizzazione dei sistemi fisici con eventuali semplificazioni porta di solito a equazioni alle derivate parziali del secondo ordine.

La forma generica delle equazioni è la seguente:

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e$$

dove i coefficienti a, b, c ed e sono in generale funzioni di $x, y, u, \partial u/\partial x, \partial u/\partial y$.

Esistono tre categorie di equazioni differenziali alle derivate parziali che sono caratterizzate matematicamente in base ai valori dei coefficienti a, b e c e sono rappresentative di diverse categorie di problemi fisici.

Per $b^2 - 4ac > 0$ le equazioni sono dette iperboliche, per $b^2 - 4ac = 0$ le equazioni sono dette paraboliche, per $b^2 - 4ac < 0$ le equazioni sono dette ellittiche.

Daremo una descrizione del carattere delle varie equazioni e delle modalità di definizione del dominio di integrazione e delle condizioni supplementari, collegandole alle varie categorie di fenomeni fisici che rappresentano. Successivamente vedremo qualche semplice schema numerico per i diversi tipi di equazioni.

2.4.1 EQUAZIONI IPERBOLICHE (PROBLEMI DI PROPAGAZIONE)

Per le equazioni iperboliche il dominio di integrazione è aperto nel verso positivo dell'asse $y, y \geq 0$, mentre sull'asse x è delimitato da due semirette verticali $x=0$ e $x=x_0$. Per $y=0$, e $0 \leq x \leq x_0$, sono assegnate le condizioni iniziali $u(x,0)$ e $\partial u/\partial y(x,0)$. Sulle semirette $x=0$ e $x=x_0$, e per $y \geq 0$, sono specificate condizioni al contorno nella forma generale $\alpha u + \beta \partial u/\partial x = \delta$. Se è $\beta=0$ si hanno condizioni al contorno del

tipo di Dirichlet (è assegnata la funzione), se è $\alpha=0$ si hanno condizioni al contorno del tipo di Neumann (è assegnata la derivata).

La struttura delle equazioni iperboliche è rappresentativa di problemi di propagazione di onde come ad esempio:

- onde lunghe in acqua;
- onde sonore;
- moto vario elastico nelle condotte;
- onde di stress e di deformazione in solidi, liquidi e gas;
- moto piano supercritico nei liquidi e moto supersonico nei gas;
- onde in linee di trasmissione elettriche;
- flussi di traffico.

Per esempio le equazioni del moto vario elastico in una condotta trascurando le resistenze si possono scrivere nella forma:

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{gA} \frac{\partial Q}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{c_0^2}{gA} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

Derivando la prima rispetto a x e la seconda rispetto a t e combinando le due si ottiene l'equazione lineare delle onde:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = 0$$

Questa è un'equazione iperbolica infatti $a=1$, $b=0$, $c=-c_0^2$. Quindi risulta $b^2 - 4ac = 4c_0^2 > 0$.

2.4.2 EQUAZIONI PARABOLICHE (PROBLEMI DI DISPERSIONE)

Per le equazioni paraboliche il dominio di integrazione è uguale al precedente. Sulla retta $y=0$ è però assegnato solo il valore della funzione, mentre per $x=0$ e $x=x_0$ sono assegnate condizioni al contorno del tipo di Dirichlet, cioè sono specificate $u(0,y)$ e $u(x_0,y)$.

La struttura delle equazioni paraboliche è rappresentativa dei problemi di dispersione ed in particolare i problemi di:

- diffusione molecolare;
- dispersione turbolenta di massa o di quantità di moto;
- dispersione di inquinanti nei corsi d'acqua o negli acquiferi;
- trasmissione del calore;
- consolidazione dei suoli;
- moto vario negli acquiferi.

L'equazione di Fourier della conduzione del calore attraverso una parete ad esempio assume la forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Questa è un'equazione parabolica, infatti $a=0$, $b=0$, $c=-a_0^2$. Quindi risulta $b^2 - 4ac=0$.

2.4.3 EQUAZIONI ELLITTICHE (PROBLEMI DI EQUILIBRIO)

Per le equazioni ellittiche il dominio di integrazione è racchiuso all'interno di una curva chiusa. Le condizioni al contorno sono assegnate sulla curva che racchiude il dominio e sono su una parte di essa del tipo di Dirichlet (è assegnata la funzione) e sulla restante parte del tipo di Neumann (è assegnata la derivata in direzione normale $\partial u / \partial n$). Più raramente la condizione è del tipo misto.

La struttura delle equazioni ellittiche è rappresentativa dei problemi di equilibrio come le distribuzioni in condizioni stazionarie di:

- deformazioni elastiche nei solidi;
- temperatura nei solidi;
- potenziale elettrico nei conduttori;
- pressione e velocità nei fluidi.

L'equazione di continuità per il moto permanente bidimensionale in un acquifero sotterraneo si può scrivere:

$$\frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vu)}{\partial y} = 0$$

Tenendo conto della legge di Darcy le componenti di velocità si possono legare alle componenti del gradiente del carico nelle rispettive direzioni:

$$u = -k \frac{\partial h}{\partial x}, v = -k \frac{\partial h}{\partial y},$$

essendo k il coefficiente di permeabilità.

Combinando le precedenti l'equazione del moto permanente si può quindi scrivere:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$$

Questa è un'equazione ellittica. Infatti risulta $a=1$, $b=0$ e $c=1$. Ne segue quindi $b^2 - 4ac=-4<0$. Questa è la classica equazione di Laplace $\Delta^2 h=0$.

2.4.4 SCHEMI ALLE DIFFERENZE FINITE PER EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI DEL SECONDO ORDINE

Gli schemi alle differenze finite per le equazioni alle derivate parziali del secondo ordine si basano sulla discretizzazione delle equazioni attraverso la scrittura delle derivate come rapporti incrementali. Vediamo tre semplici schemi per i tre tipi di equazioni visti prima.

2.4.4.1 Equazioni iperboliche

Per l'equazione lineare delle onde un possibile schema esplicito è il seguente:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = \frac{H_i^{n+1} - 2H_i^n + H_i^{n-1}}{\Delta t^2}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{H_{i+1}^n - 2H_i^n + H_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

che porta alla scrittura dell'equazione discretizzata:

$$\frac{H_i^{n+1} - 2H_i^n + H_i^{n-1}}{\Delta t^2} - c_0^2 \frac{H_{i+1}^n - 2H_i^n + H_{i-1}^n}{\Delta x^2} = 0$$

Si può quindi ricavare H_i^{n+1} come:

$$H_i^{n+1} = \frac{c_0^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} H_{i+1}^n + 2 \left(1 - \frac{c_0^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} \right) H_i^n + \frac{c_0^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} H_{i-1}^n + H_i^{n-1}$$

Tale schema è consistente con l'equazione originaria con l'errore di troncamento dell'ordine di Δt^2 e Δx^2 .

L'analisi sull'amplificazione dell'errore porta alla conclusione che questo schema è stabile a condizione che sia

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{c_0}.$$

2.4.4.2 Equazioni paraboliche

Per l'equazione di Fourier un possibile schema esplicito è il seguente:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

che porta alla scrittura dell'equazione discretizzata:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - a_0^2 \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} = 0 .$$

Si può quindi ricavare u_i^{n+1} come:

$$u_i^{n+1} = \frac{a_0^2 \Delta t}{\Delta x^2} u_{i+1}^n + \left(1 - 2 \frac{a_0^2 \Delta t}{\Delta x^2} \right) u_i^n + \frac{a_0^2 \Delta t}{\Delta x^2} u_{i-1}^n .$$

Lo schema è consistente con l'equazione originaria con errore di troncamento dell'ordine di Δt e di Δx^2 .

L'analisi di stabilità indica che lo schema è stabile sotto la condizione

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{a_0^2} .$$

2.4.4.3 Equazioni ellittiche

Per l'equazione di Laplace un possibile schema è il seguente:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{h_{i+1,j} - 2h_{i,j} + h_{i-1,j}}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{h_{i,j+1} - 2h_{i,j} + h_{i,j-1}}{\Delta y^2}$$

che porta alla scrittura dell'equazione discretizzata:

$$\frac{h_{i+1,j} - 2h_{i,j} + h_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{h_{i,j+1} - 2h_{i,j} + h_{i,j-1}}{\Delta y^2} = 0 .$$

A causa delle particolarità delle equazioni ellittiche bisognerebbe risolvere un sistema con numero di incognite pari al numero degli intervalli in cui è stato

suddiviso il dominio d'integrazione. Un semplice schema iterativo è tuttavia il seguente:

$$h_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{4} (h_{i-1,j}^n + h_{i+1,j}^n + h_{i,j-1}^n + h_{i,j+1}^n)$$

che risolve l'equazione in tutto il campo a partire da una serie di valori di primo tentativo, naturalmente fissando le condizioni al contorno. In questo caso l'apice n indica l'iterazione. In sostanza si risolve il problema di equilibrio impostando un problema di dispersione bidimensionale fittizio in cui si ha uno schema analogo allo schema esplicito visto prima per l'equazione parabolica con la condizione:

$$\frac{a_0^2 \Delta t}{\Delta x^2} = \frac{a_0^2 \Delta t}{\Delta y^2} = \frac{1}{4}.$$

Quindi lo schema iterativo appena descritto è stabile. Inoltre è consistente con l'equazione originaria con errore di troncamento dell'ordine di Δx^2 e Δy^2 .

2.5 Elementi di programmazione e di linguaggio Fortran (esercitazione)

2.5.1 LA PROGRAMMAZIONE

La programmazione serve a tradurre gli algoritmi di calcolo in istruzioni comprensibili dal calcolatore. Un programma ha vari tipi di istruzioni: istruzioni di inizio e termine, istruzioni di ingresso o uscita dei dati (input e output), istruzioni di elaborazione, istruzioni di decisione e controllo. Il diagramma a blocchi è uno strumento intermedio per passare dall'algoritmo di calcolo al programma e prescinde dallo specifico linguaggio di programmazione. Ogni tipo di istruzioni viene rappresentato con un certo simbolo nel diagramma a blocchi: le istruzioni di inizio e fine con cerchi, le istruzioni di elaborazione con rettangoli, le istruzioni di input e output con parallelogrammi, le istruzioni di decisione e controllo con rombi.

2.5.2 IL LINGUAGGIO FORTRAN

Noi descriveremo gli elementi di base del linguaggio Fortran, che è l'abbreviazione di "formula translation", rimandando a testi specialistici per chi volesse approfondire le conoscenze. Da questo linguaggio ha preso spunto il linguaggio BASIC, che è quindi molto simile ad esso.

Il linguaggio Fortran, anche se non è molto avanzato, è particolarmente adatto alla stesura di programmi di calcolo numerico, e per questo lo preferiremo ad altri linguaggi più moderni. Faremo riferimento a istruzioni standard. Cambiando il sistema operativo (VMS, MS-DOS, MAC-OS, UNIX) cambiano solo i comandi di 'editing', di compilazione e di esecuzione.

2.5.2.1 Comandi di 'editing'

EDIT. Le istruzioni di un programma in Fortran vanno scritte in uno o più file servendosi di un programma di editing (comando EDIT), occupando le colonne dalla settima alla settantaduesima. Le prime cinque colonne servono a specificare un'eventuale etichetta (o 'label') dell'istruzione. La sesta colonna occupata da un simbolo qualunque significa che la riga è una continuazione della riga precedente. Il nome del programma di norma ha l'estensione FOR (nome.for).

2.5.2.2 Istruzioni di inizio programma

PROGRAM nome. Serve a dare un nome al programma. Non è indispensabile.

2.5.2.3 Istruzioni di dichiarazione di variabili

INTEGER, REAL, COMPLEX, CHARACTER, LOGICAL, ... nome delle variabili. Le variabili in Fortran sono da distinguere in intere, reali, complesse, alfanumeriche, logiche. All'inizio del programma bisogna definire il tipo di ogni variabile. Se non si specifica niente, le variabili il cui nome comincia con le lettere dalla I alla N sono definite intere, le altre (A-H,O-Z) sono reali.

2.5.2.4 Istruzioni di assegnazione di memoria alle variabili

DIMENSION, DOUBLE PRECISION (l,m,n,...), COMMON. Le prime due servono ad assegnare uno spazio di memoria alle variabili, in particolare a vettori e matrici. La terza mette in comune variabili tra programma principale e subroutine.

2.5.2.5 Istruzioni di apertura e chiusura di file di dati

OPEN, CLOSE. Per leggere dati da un file o per scrivere dati su un file occorre prima che questi file siano aperti e alla fine delle operazioni siano chiusi. Nell'istruzione OPEN occorre specificare almeno il numero dell'unità assegnata al file che si sta aprendo, che sarà da richiamare nelle istruzioni di lettura e scrittura; il nome del file che si vuole aprire, specificato direttamente per mezzo del nome tra apici o per mezzo di una variabile alfanumerica che assume valore uguale al nome; lo stato del file ('new', 'old'). Altre specificazioni servono in casi particolari e determinano ad esempio la lunghezza del record (la 'riga' del file), il tipo di accesso al file, ecc.

Nell'istruzione CLOSE deve essere specificata semplicemente l'unità che si chiude.

2.5.2.6 Istruzioni di input e output dei dati

READ, WRITE. Nelle istruzioni READ e WRITE, che servono rispettivamente a leggere dai file e a scrivere sui file serie di dati e di variabili, occorre specificare l'unità su cui si effettua l'operazione di lettura o di scrittura e l'etichetta (o 'label') dell'istruzione FORMAT che specifica il formato con cui si vogliono leggere o scrivere i dati. Quindi bisogna specificare la lista dei dati e delle variabili da leggere o da scrivere.

2.5.2.7 Istruzioni di formato

FORMAT. Nelle istruzioni FORMAT (in cui la label è obbligatoria) viene specificato il formato di lettura o di scrittura delle istruzioni READ e WRITE. Bisogna specificare il tipo di variabile che si sta leggendo o scrivendo, il numero di posti che occupa (es.: I5), eventualmente il numero di cifre decimali (es.: F10.5). I sta per intero, F per floating point, E per esponenziale, A per alfanumerico, ecc. Il tipo di formato deve essere congruente con la definizione della variabile.

2.5.2.8 Istruzioni di elaborazione

Servono a porre il risultato delle variabili pari ai valori specificati dalle operazioni a destra del segno di uguaglianza. Le operazioni consentite sulle variabili, oltre a quelle aritmetiche e all'elevazione a potenza, sono definite da una serie di funzioni di libreria tra cui le funzioni scientifiche più usate: SQRT, SIN, COS, TAN, LOG, EXP, INT, ABS, ... Occorre fare attenzione a come specificare la funzione in base al tipo di variabile dell'argomento e al tipo di variabile del risultato. Oltre alle operazioni matematiche esistono anche operazioni relazionali (.GT., .GE., ...) e operazioni logiche (.NOT., .AND., .OR., ...).

2.5.2.9 Istruzioni di decisione

IF ..., IF ... THEN ... END IF, IF ... THEN ... ELSE ... END IF, IF ... THEN ... ELSE IF ... END IF. Servono ad effettuare o no determinate istruzioni in base ai risultati di un confronto tra variabili numeriche, o del valore ('vero' o 'falso', TRUE o FALSE) di una certa variabile logica.

2.5.2.10 Istruzioni di salto

GO TO. Questa istruzione invia ad un label che contraddistingue la riga contenente l'istruzione a cui si vuole saltare.

2.5.2.11 Istruzioni di ciclo

DO label var=val in., val. fin, passo; CONTINUE. Nelle righe comprese tra l'istruzione DO e l'istruzione CONTINUE vengono definite le istruzioni da effettuare ciclicamente facendo variare la variabile da un valore iniziale a un valore finale, con passo assegnato.

2.5.2.12 Sottoprogrammi

CALL, SUBROUTINE (var1, var2, ..., varn), FUNCTION. Una serie di istruzioni da ripetere più volte possono essere effettuate all'interno di sottoprogrammi (SUBROUTINE), che vengono chiamati con l'istruzione CALL. Sia nell'istruzione CALL che nella SUBROUTINE devono essere specificate le variabili da trasferire dal programma principale alla subroutine e viceversa. Anche nella SUBROUTINE sono da specificare le istruzioni di dimensionamento di matrici e vettori. FUNCTION è una subroutine in cui viene solo calcolata una funzione.

2.5.2.13 Istruzioni di fine programma

END, RETURN. L'istruzione END è da usare obbligatoriamente alla fine dei programmi e dei sottoprogrammi. RETURN deve essere usata nelle subroutine per ritornare nel programma principale.

2.5.2.14 Comandi di compilazione

Dopo aver scritto il file con le istruzioni del programma (file sorgente), questo deve essere compilato, cioè deve essere tradotto in linguaggio comprensibile dal calcolatore per realizzare la versione eseguibile del programma.

Un comando effettua la compilazione, generando un file oggetto nome.obj. Esamina se nel programma esistono errori di Fortran e li segnala. Può anche generare un file nome.lis in cui sono riprodotte tutte le istruzioni del programma con le righe numerate, con la segnalazione degli eventuali errori e con informazioni sulla mappa della memoria occupata dalle varie variabili. Prima di passare alla fase successiva occorre naturalmente eliminare tutti gli errori (almeno quelli 'fatali', che cioè impediscono l'esecuzione del programma).

Un successivo comando di LINK serve a legare fra di loro diversi file oggetto (ad esempio contenenti il programma principale e i sottoprogrammi) e a metterli assieme alle librerie Fortran in cui sono contenute le istruzioni e le funzioni matematiche "di libreria". Anche in questa operazione vengono segnalati gli eventuali errori (ad esempio mancata definizione di subroutine o di funzioni). I sottoprogrammi possono essere compresi nello stesso file del programma principale, in sequenza. Il comando di LINK deve comunque essere effettuato per legare al programma le librerie. Il risultato del comando di LINK è un file nome.exe. Questo è il vero e proprio programma eseguibile.

I comandi di compilazione e di LINK possono anche essere conglobati in un unico comando.

L'esercitazione consiste nel realizzare un programma in Fortran per il calcolo dell'indice di resistenza della formula di Darcy-Weisbach.

3. MOTO PERMANENTE IN RETI DI CONDOTTE IN PRESSIONE

3.1 Generalità

Una rete di distribuzione idrica può essere vista dal punto di vista topologico come un grafo, cioè un insieme di elementi, ciascuno aventi determinate proprietà, che si incontrano in nodi.

Le variabili dipendenti sono, come in ogni problema idraulico, la portata ed il carico, funzioni dello spazio e del tempo nel caso più generale di moto vario.

La dipendenza spaziale, in generale tridimensionale, è in realtà limitata dal fatto che si ha a che fare normalmente o con elementi unidimensionali, la cui lunghezza viene inoltre confusa, la maggior parte delle volte, con la sua proiezione sul piano orizzontale, oppure con elementi che possono essere considerati puntuali. In definitiva, per identificare un punto della rete si può fare riferimento ad un identificatore dell'elemento ed eventualmente a sistemi di ascisse locali.

Le equazioni che si hanno a disposizione sono equazioni di continuità ed equazioni di bilancio di energia. In generale risultano banali le equazioni di continuità per l'elemento, e, con le usuali ipotesi semplificative, risultano altrettanto banali le equazioni del bilancio energetico ai nodi. Si hanno così in definitiva a disposizione equazioni di continuità in numero pari al numero dei nodi ed equazioni del moto in numero pari al numero degli elementi.

3.2 Metodi tradizionali

Con i metodi tradizionali (alla Hardy Cross) si fornisce una soluzione iniziale in cui le portate siano congruenti con le equazioni di continuità ai nodi e si scrivono equazioni del moto lungo ogni maglia che consentono di trovare la portata correttiva per ogni maglia. Si risolve cioè un sistema di dimensione pari al numero delle maglie. Tuttavia, dal punto di vista della programmazione, c'è la difficoltà di determinare la soluzione iniziale, ed è necessaria una descrizione topologica della rete molto complessa. Inoltre essendo le maglie presenti solo nelle reti chiuse un metodo del genere va bene solo per questa categoria di reti.

3.3 Metodo nodale

Si può risolvere invece il problema considerando come incognite i carichi ai nodi, ottenendo un sistema di dimensione pari al numero dei nodi. Da queste grandezze è poi facile risalire alle portate e alle grandezze d'interesse in un qualunque punto della rete.

Il trascurare, come di consueto, le perdite di carico localizzate ai nodi consente di considerare un unico carico per ogni nodo.

Le equazioni del moto definiscono gli scambi di energia che avvengono all'interno dell'elemento e possono riguardare perdite di energia (dissipazioni di energia idraulica in calore) o guadagni di energia (trasformazioni di energia meccanica esterna in energia idraulica attraverso pompe).

3.3.1 ANALISI DELL'ELEMENTO

A causa dell'impostazione data nel seguito, per cui la definizione delle proprietà topologiche, su cui si basa la scrittura delle equazioni di continuità, viene affidata all'assemblaggio di una matrice globale a partire da matrici elementari, il problema si riconduce alla definizione delle matrici elementari, dipendenti dal tipo di elemento che si esamina, che legano fra di loro le portate alle estremità di un elemento con i relativi carichi.

3.3.2 EQUAZIONE DELLA MATRICE ELEMENTARE

Ci si basa su una relazione elementare del tipo:

$$\begin{bmatrix} Q_i \\ Q_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_i \\ H_j \end{bmatrix}$$

essendo i e j il nodo iniziale e finale del generico elemento, Q_i e Q_j le portate, H_i e H_j i carichi e k_{ii} , k_{ij} , k_{ji} , k_{jj} i coefficienti della matrice di conduttività.

Si esporranno ora le leggi del moto per vari elementi, in diverse condizioni di funzionamento, attraverso la definizione della matrice \mathbf{K} delle conduttività.

3.3.3 TUBAZIONI

Il più semplice elemento della rete, ed il più diffuso, è una tubazione di lunghezza L , di diametro D e di assegnate caratteristiche di scabrezza. Se la portata è costante lungo il percorso, la matrice \mathbf{K} è simmetrica e si può scrivere sotto la forma:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$$

con k coefficiente positivo, in modo da far corrispondere ad un dislivello positivo tra il nodo iniziale ed il nodo finale una portata positiva.

La definizione del coefficiente k dipenderà allora soltanto dalla formula prescelta per il calcolo della perdita di carico distribuita. E' da notare come, con le formule valide per il regime di moto turbolento, il coefficiente k dipenda dal dislivello $\Delta H = H_i - H_j$, così da dar luogo ad un problema non lineare. Vedremo in seguito quale sia la maniera migliore di affrontare la risoluzione di un tale tipo di sistema. Le diverse espressioni del coefficiente k per diverse formule, con i relativi limiti di validità, sono elencate in tabella 3.I.

Tabella 3.I - Espressione del coefficiente k per diverse formule di uso comune

Autore	Coefficiente k	Limiti di validità
Poiseuille	$k = \frac{\pi \rho g D^4}{128 \mu L}$	$Re < 2000$
Prandtl	$k = -\pi D^{2,5} \left(\frac{g}{2L\Delta H} \right)^{0,5} \log \left(\frac{2,51}{Re\sqrt{\lambda}} \right)$	$Re > 4000, Re^* < 5$ (t. lisci)
Prandtl	$k = -\pi D^{2,5} \left(\frac{g}{2L\Delta H} \right)^{0,5} \log \left(\frac{\varepsilon}{3,71D} \right)$	$Re > 4000, Re^* > 70$ (t. scabri)
Colebrook	$k = -\pi D^{2,5} \left(\frac{g}{2L\Delta H} \right)^{0,5} \log \left(\frac{2,51}{Re\sqrt{\lambda}} + \frac{\varepsilon}{3,71D} \right)$	$Re > 4000$
Manning	$k = 0,0992 \pi \frac{D^{2,67}}{n L^{0,5} \Delta H^{0,5}}$	$Re > 4000, Re^* > 70$
Strickler	$k = 0,0992 \pi \frac{c D^{2,67}}{L^{0,5} \Delta H^{0,5}}$	$Re > 4000, Re^* > 70$
Bazin	$k = \frac{10,875\pi}{D^{0,5} + 2\gamma} \frac{D^3}{L^{0,5} \Delta H^{0,5}}$	$Re > 4000, Re^* > 70$
Kutter	$k = \frac{12,5\pi}{D^{0,5} + 2m} \frac{D^3}{L^{0,5} \Delta H^{0,5}}$	$Re > 4000, Re^* > 70$

E' da notare come la formulazione del problema attraverso la conduttività renda di uso altrettanto agevole la formula di Colebrook-White, in quanto, come è noto, il prodotto $Re\sqrt{\lambda}$ non dipende dalla portata e quindi il coefficiente k è noto per un certo dislivello ΔH .

E' facile anche tener conto dell'eventuale presenza di un valvola di flusso unidirezionale presente lungo la tubazione. Infatti, in tal caso, se la valvola consente il moto nel verso da i verso j , sarà

$$k=0 \quad \text{per } H_i < H_j$$

e viceversa, nel caso sia consentito il flusso da j verso i si assumerà

$$k=0 \quad \text{per } H_i > H_j.$$

In maniera analoga si può tener conto di una saracinesca chiusa lungo una tubazione ponendo senz'altro

$$k=0$$

per qualunque valore di H_i e H_j .

3.3.4 POMPE

Si può esprimere la curva caratteristica prevalenza-portata della pompa sotto la forma:

$$|\Delta H| = a|Q|^2 + b|Q| + c.$$

Occorre osservare come in questo caso sia strettamente necessario assegnare un flusso unidirezionale alla pompa. Posto $i_v=1$ se il flusso è nel verso dal nodo i al nodo j e $i_v=-1$ se il verso è quello opposto, si può esprimere la matrice \mathbf{K} nella forma usuale (simmetrica) con il coefficiente k pari a:

$$k = i_v \left| \frac{-b - \left[b^2 - 4a(c + i_v \Delta H) \right]^{1/2}}{2a} \right| \frac{1}{\Delta H}$$

con $\Delta H = H_i - H_j$. Risulta inoltre:

$$k = 0 \quad \text{per } c + i_v \Delta H < 0.$$

In questo modo si tiene conto sia del funzionamento normale che del possibile funzionamento come resistenza.

3.3.5 VALVOLE

Esprimendo la perdita localizzata in funzione del carico cinetico si può scrivere:

$$\Delta H = m \frac{V^2}{2g}$$

e si ottiene una matrice \mathbf{K} ancora simmetrica, con il coefficiente k pari a:

$$k = \frac{\pi D^2}{4} \left(\frac{2g}{m \Delta H} \right)^{0.5}$$

Il coefficiente m è funzione del tipo di dispositivo che genera la dissipazione localizzata, del grado di apertura e del numero di Reynolds; va quindi specificato caso per caso.

3.3.6 ASSEMBLAGGIO DELLA MATRICE GLOBALE

Dopo aver considerato le matrici del singolo elemento, occorre assemblare queste in maniera opportuna, per esprimere le relazioni di continuità ai nodi. Si otterrà una matrice globale delle conduttività quadrata di ordine n , se n è il numero dei nodi. La riga i -esima esprime l'equazione di continuità al nodo i . Quindi la matrice globale moltiplicata per il vettore dei carichi nodali sarà uguale al vettore delle portate erogate ai nodi:

$$\mathbf{K} \mathbf{H} = \mathbf{C}$$

Per comprendere il modo di assemblaggio della matrice \mathbf{K} a partire dalle matrici elementari conviene ricorrere ad un esempio.

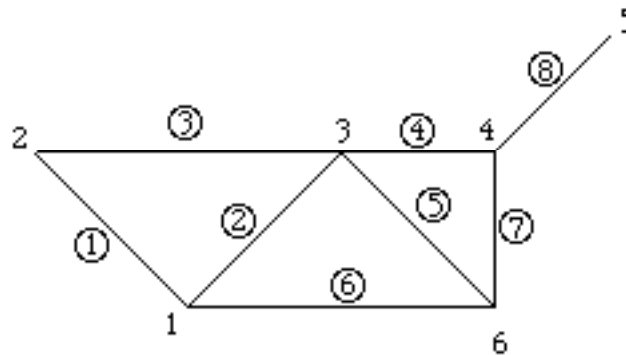


Fig. 3.1 - Schema della rete di esempio

Riferendosi ad esempio al nodo 6, in cui convergono gli elementi 5, 6 e 7, si può scrivere:

$$Q_{6,5} + Q_{6,6} + Q_{6,7} = C_6$$

Ricavando poi $Q_{6,5}$, $Q_{6,6}$ e $Q_{6,7}$ dalle relazioni in funzione dei carichi nodali si può scrivere:

$$k_5 (H_6 - H_3) + k_6 (H_6 - H_1) + k_7 (H_6 - H_4) = C_6$$

o anche:

$$-k_5 H_3 - k_6 H_1 - k_7 H_4 + (k_5 + k_6 + k_7) H_6 = C_6$$

Questa rappresenta la riga numero 6 del sistema. Il sistema globale in forma matriciale per lo schema della figura 3.1 è il seguente:

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 + k_6 & -k_1 & -k_2 & 0 & 0 & -k_6 \\ -k_1 & k_1 + k_3 & -k_3 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & -k_3 & k_2 + k_3 + k_4 + k_5 & -k_4 & 0 & -k_5 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 + k_7 + k_8 & -k_8 & -k_7 \\ 0 & 0 & 0 & -k_8 & k_8 & 0 \\ -k_6 & 0 & -k_5 & -k_7 & 0 & k_5 + k_6 + k_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \\ H_5 \\ H_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{bmatrix}$$

Come si nota, la conduttività di un elemento che collega i nodi i e j compare con il segno + al posto ii e jj della matrice globale e con il segno - al posto ij e ji .

3.3.7 IMPOSIZIONE DELLE CONDIZIONI AL CONTORNO

L'inserimento delle condizioni al contorno per i nodi con carico prefissato avviene sostituendo alla riga relativa al nodo l'equazione:

$$H_j = H_j^\circ$$

Ad esempio, riferendosi alla rete della figura 3.1 e volendo fissare il carico al nodo 5, si cambierà il sistema nella forma:

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 + k_6 & -k_1 & -k_2 & 0 & 0 & -k_6 \\ -k_1 & k_1 + k_3 & -k_3 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & -k_3 & k_2 + k_3 + k_4 + k_5 & -k_4 & 0 & -k_5 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 + k_7 + k_8 & 0 & -k_7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -k_6 & 0 & -k_5 & -k_7 & 0 & k_5 + k_6 + k_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \\ H_5 \\ H_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 + k_8 H_5 \\ H_5^\circ \\ C_6 \end{bmatrix}$$

La matrice è diagonalmente dominante e rispetta quindi la condizione sufficiente per la convergenza della soluzione iterativa del sistema.

3.3.8 SOLUZIONE DEL SISTEMA DI EQUAZIONI

3.3.8.1 Analisi lineare

Il sistema reso lineare deve essere risolto ripetutamente, con metodo diretto o in maniera iterativa, aggiornando ogni volta la matrice dei coefficienti, che dipendono dai carichi. In termini matriciali si ha infatti:

$$\mathbf{K(H)}\mathbf{H}=\mathbf{C}$$

3.3.8.2 Metodo di Newton

E' più conveniente tuttavia ricorrere al metodo di Newton. Si tratta di scrivere un vettore di funzioni

$$\mathbf{F}(\mathbf{H}) = \mathbf{K}(\mathbf{H})\mathbf{H} - \mathbf{C}$$

Dall'imposizione dell'annullarsi delle funzioni $\mathbf{F}(\mathbf{H})$, pari nella generica iterazione a $\mathbf{F}'(\mathbf{H})$:

$$\mathbf{F}(\mathbf{H}) = \mathbf{F}'(\mathbf{H}) + d\mathbf{F}(\mathbf{H}) = 0$$

si ricava il vettore delle correzioni $d\mathbf{H}$, dall'equazione matriciale:

$$d\mathbf{F}(\mathbf{H}) = \frac{d(\mathbf{K}(\mathbf{H})\mathbf{H} - \mathbf{C})}{d\mathbf{H}} d\mathbf{H} = -\mathbf{F}'(\mathbf{H})$$

che può essere scritta anche nella forma:

$$\mathbf{K}_d(\mathbf{H}) d\mathbf{H} = -\mathbf{F}'(\mathbf{H})$$

essendo $\mathbf{K}_d(\mathbf{H})$ lo jacobiano del sistema.

Dopo la prima soluzione, che si può effettuare con la matrice linearizzata, le successive possono essere effettuate con il metodo di Newton, che risulta in generale più veloce. La convergenza sarà considerata raggiunta quando l'ultima correzione del carico al nodo risulta minore di un valore prefissato.

3.3.9 COEFFICIENTI DI RILASSAMENTO

Un ulteriore aumento della velocità di convergenza può essere ottenuto attraverso l'introduzione di un coefficiente di rilassamento, cioè moltiplicando la correzione per un opportuno coefficiente correttivo, sia che si utilizzi il metodo di Newton, sia che si risolva la matrice linearizzata. In questo caso il rilassamento si applica secondo il seguente schema:

$$\Phi_{R(i)} = f \Phi_{(i)} + (1-f) \Phi_{(i-1)},$$

dove $\Phi_{(i-1)}$ è il valore della generica variabile all'iterazione $i-1$, $\Phi_{(i)}$ è il valore che si avrebbe apportando per intero la correzione, $\Phi_{R(i)}$ è il valore della variabile dopo il rilassamento ed f è il fattore di rilassamento.

Il fattore ottimo di rilassamento può essere determinato analiticamente, ma richiede un procedura di calcolo che richiede un tempo che annulla i benefici del minor numero di iterazioni richiesto. Indagini numeriche hanno mostrato che il miglior valore di f si aggira attorno a 0,7.

3.4 Verifica di una rete di condotte in pressione (esercitazione)

Esistono programmi di pubblico dominio per la verifica di reti idrauliche in pressione, ad esempio EPANET, sviluppato dall'Environmental Protection Agency degli USA. Tuttavia per l'esercitazione si può utilizzare un programma in Fortran fornito nel libro di Brebbia e Ferrante "Computational hydraulics", Butterworths.

Il programma adotta il metodo nodale descritto precedentemente, consente di risolvere reti con sole tubazioni e serbatoi, e utilizza per il calcolo delle perdite di carico la formula di Hazen-Williams.

Il codice di calcolo è composto da un programma principale e da varie subroutine. Diamo nel seguito una breve descrizione del funzionamento del programma principale e delle singole subroutine. I commenti all'interno del programma e delle subroutine dovrebbero essere di ulteriore aiuto per comprendere il significato delle singole parti.

Dopo l'inizializzazione dei parametri di base nel programma viene chiamata la subroutine INPUT, che legge i dati necessari da un file e controlla che i limiti massimi di lati, di nodi e di serbatoi non vengano superati. Le portate erogate ai nodi vengono lette nel vettore AL e poi trasferite nel programma principale anche nei vettori Q ed ELRE.

All'interno della subroutine INPUT viene anche chiamata la subroutine BAND, che serve a calcolare la larghezza della semibanda della matrice globale del sistema. Nelle subroutine successive, per risparmiare memoria, della matrice globale verrà conservata solo la semibanda. Infatti tale matrice è bandata e simmetrica.

La subroutine INCOE serve per determinare la soluzione iniziale, assumendo un dislivello pari a 1 per ogni lato.

La subroutine ASSEM serve ad assemblare la matrice globale del sistema. Chiama a sua volta al suo interno due subroutine: STIFF ed ELASS. Nella prima si calcolano i coefficienti della matrice elementare, nella seconda i coefficienti della matrice elementare vengono sommati nella matrice globale.

Successivamente nella subroutine BOUND vengono assegnate le condizioni al contorno, ovvero i carichi nei serbatoi.

La subroutine SLBSI serve a risolvere il sistema di equazioni utilizzando il metodo di eliminazione di Gauss.

Queste subroutine vengono utilizzate in un primo tempo per trovare la soluzione di primo tentativo. I carichi nodali vengono inseriti alla fine di questo processo nel vettore AL. Questo vettore viene sommato al vettore H, inizialmente nullo. Si calcolano successivamente i valori attuali delle portate erogate (utilizzando le subroutine ASSEM e BOUND), che differiranno in generale dai valori delle portate erogate imposte. La subroutine MULTI moltiplica la matrice del sistema per il vettore dei carichi nodali, ottenendo l'attuale valore delle portate erogate nel vettore AL. Si controlla la convergenza sullo scarto quadratico globale tra portate erogate attuali e portate erogate imposte diviso per la somma dei valori assoluti delle portate erogate, che deve risultare minore di una prefissata tolleranza TOL. Si controlla inoltre che non sia stato superato il massimo numero di iterazioni.

Se la convergenza non è raggiunta si calcola una correzione al vettore dei carichi nodali per mezzo del metodo di Newton, tenendo conto che i coefficienti dello jacobiano sono uguali a quelli della matrice linearizzata moltiplicati per 0,54 (a

causa dell'utilizzazione della formula di Hazen-Williams). Per diminuire il numero delle operazioni viene diviso per 0,54 il vettore dei termini noti.

Dopo questa operazione viene calcolata la correzione con la subroutine SLBSI e memorizzata nel vettore AL, che viene sommato al vettore H. Il ciclo continua finché non è stata raggiunta la convergenza. A questo punto vengono chiamate le subroutine RESUL, che calcola le portate negli elementi, e OUTPT, che scrive su un file i risultati del calcolo.

Il programma è stato modificato per calcolare le perdite di carico con la formula di Strickler. L'esercitazione consiste nella verifica della rete composta dai seguenti lati:

Lato	N. iniz.	N. fin.	Lungh.	Diam.
1	1	2	1540	0,4
2	2	3	1150	0,3
3	3	4	1330	0,2
4	4	5	1000	0,1
5	5	6	1330	0,2
6	6	7	1350	0,4
7	7	8	1340	0,4
8	3	6	1000	0,1
9	2	7	1020	0,2
10	1	8	1000	0,4
11	5	12	1000	0,1
12	6	11	1000	0,2
13	7	10	1020	0,1
14	8	9	1000	0,2
15	11	12	1330	0,15
16	10	11	1540	0,2
17	9	10	1150	0,2

Esiste inoltre un serbatoio nel nodo 1 a una quota di 85 m s. m. Il coefficiente di scabrezza di tutte le tubazioni è di $70 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$.

Le portate erogate ai nodi sono le seguenti:

Nodo	Portata (m^3/s)
2	0,013
3	0,024
4	0,012
5	0,024
6	0,048
7	0,026
8	0,002
9	0,001
10	0,013
11	0,024
12	0,012

Occorre verificare, eventualmente modificando il diametro delle condotte, che i carichi risultino superiori ai seguenti valori:

Nodo Carico (m s. m.)

2	75
3	70
4	65
5	65
6	70
7	75
8	80
9	80
10	75
11	70
12	65

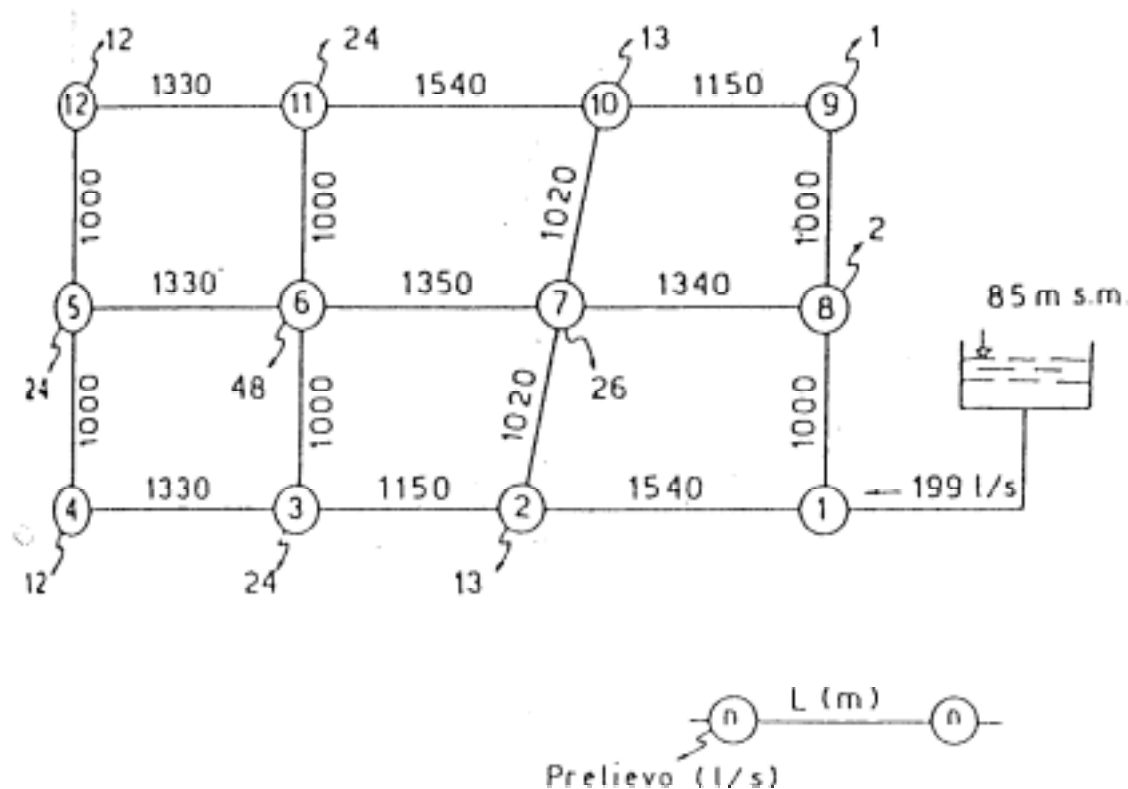


Fig. 3.2 – Rete per l'esercitazione sulla verifica

L'esempio è tratto dal capitolo di S. Artina e M. Sovrini sulla verifica delle reti di acquedotto del 4° vol. del Manuale di Ingegneria Civile - Ed. Cremonese. Gli autori forniscono un programma in Fortran simile a quello illustrato, che risolve la rete con metodo nodale attraverso la risoluzione iterativa del sistema linearizzato per mezzo del metodo di Cholesky, considerando l'indice di resistenza della

formula di Darcy-Weisbach esprimibile per mezzo della formula di Colebrook-White.

Eventuali miglioramenti al programma di Brebbia e Ferrante possono consistere: nella possibilità di utilizzare coefficienti di scabrezza differenti per ogni tratto; nella possibilità di introdurre la lunghezza del tratto anziché farla calcolare in base alle coordinate geometriche; nella sostituzione della subroutine che risolve la matrice utilizzando il metodo di Gauss con una che utilizza il metodo di Cholesky, che dovrebbe essere più efficiente. Inoltre un ulteriore aumento della velocità di convergenza può essere raggiunto mediante l'introduzione di un coefficiente di rilassamento, da moltiplicare per la correzione nella generica iterazione.

4. PROGETTO DI RETI DI CONDOTTE IN PRESSIONE

4.1 Generalità

Nel problema di verifica si ipotizza che siano note le caratteristiche della rete. Nel problema di progetto, nel caso di condotte a gravità, data la posizione dei nodi e l'erogazione, ci si propone in generale di scegliere il tracciato e i diametri delle condotte. Poiché il problema non è determinato dal punto di vista idraulico, occorre ricorrere a condizioni aggiuntive che sono solitamente condizioni di minimo costo.

Tali problemi nella pratica progettuale si risolvono solitamente per via empirica, essendo tali e tanti i vincoli da rispettare che le variabili che mantengono un grado di libertà risultano comunque da fissare in un campo molto limitato di possibili valori. In particolare per quanto riguarda il tracciato spesso questo è determinato da altri motivi che non sono quelli di minimizzare il costo del sistema, come per esempio, nelle reti urbane, la necessità di seguire il tracciato delle strade per facilitare i lavori di costruzione e manutenzione della rete. Inoltre, per quanto riguarda i diametri, il fatto di dover ricorrere a diametri commerciali che variano in maniera discreta e i limiti di velocità in condotta che è buona norma di progetto rispettare escludono in partenza molte delle soluzioni teoricamente possibili. Oltre a questi aspetti occorre ricordare come spesso bisogna tener conto di altri criteri, come per esempio la flessibilità della rete per soddisfare condizioni di funzionamento future, o la capacità della rete di funzionare in condizioni di emergenza (guasti, servizio antincendio). Se si tenesse conto solo dei criteri di minima economia, ad esempio, non esisterebbero le reti chiuse, in cui certi tronchi vengono aggiunti proprio per dare la possibilità di avere percorsi alternativi e far funzionare parte della rete anche in caso di guasti.

Nonostante ciò, sono stati sviluppati metodi che consentono un dimensionamento "ottimale" delle reti attraverso il rispetto delle equazioni idrauliche e con l'aggiunta delle condizioni di minimo costo. Il dimensionamento ottenuto con i metodi che esporremo deve essere considerato tuttavia di primo tentativo, da verificare secondo la sensibilità del progettista, che può tener conto in base alla sua esperienza di tutti gli altri criteri e norme di buona progettazione non presi in considerazione nei metodi suddetti.

Il progetto del tracciato non è risolvibile in maniera esatta. Infatti, ad esempio, non è a priori possibile affermare se la rete più conveniente è una rete in cui esistano solo tratti che colleghino i nodi in cui si deve erogare una certa portata, o una rete con nodi aggiuntivi.

Anche nella prima ipotesi, non esistono metodi generali per stabilire il tracciato migliore. In ricerca operativa esistono infatti metodi per minimizzare ad esempio il costo complessivo di una rete di trasporto. Nel caso della rete idrica tuttavia il costo del singolo tronco dipende dalla portata che vi scorre, che non è nota a priori. Si ricorre allora a metodi euristici, cioè a metodi che non sono esatti ma che forniscono regole da seguire che danno risultati soddisfacenti nella maggior parte dei casi pratici. Una semplicissima regola euristica ad esempio è quella di stabilire il tracciato della rete rendendo minimo lo sviluppo complessivo della rete stessa.

Nel seguito supporremo tuttavia che il tracciato della rete sia già stato stabilito in base a criteri di cui non ci interessiamo.

4.2 Dimensionamento di reti aperte o ad albero

4.2.1 SISTEMA LINEARE NEI DISLIVELLI

Nel seguito supporremo di avere una rete a gravità con un unico estremo di alimentazione. In questa ipotesi, nel caso di una rete aperta o ad albero in cui esistono l lati e n nodi vale la relazione $n=l+1$. Possiamo supporre che esistano m nodi eroganti in cui occorre che si abbia un certo carico minimo

$$H_i \geq H_{i_{min}}, \quad i=1, 2, \dots, m.$$

Assegnando le portate erogate e sfruttando le equazioni di continuità ai nodi, le portate nei singoli lati della rete sono univocamente determinate.

Restano da determinare gli l diametri e gli n carichi ai nodi. Imponendo tuttavia che la condizione di vincolo sui carichi ai nodi eroganti sia rispettata con il segno di uguaglianza, ed essendo anche fissato il carico nel nodo di alimentazione, restano da determinare solo $l-m$ carichi ai nodi non eroganti.

E' noto che per minimizzare il costo occorre scrivere per ogni nodo non erogante un'equazione del tipo:

$$\sum_j \pm \frac{dC_k}{dy_k} = 0 \quad j = 1, \dots, l-m$$

essendo C_k e y_k rispettivamente il costo e il dislivello piezometrico del generico lato e la sommatoria è estesa a tutti i lati che convergono al nodo j . Il segno + vale per i lati con portata entrante nel nodo e il segno - per i lati con portata uscente.

In un piccolo intervallo si può approssimare il legame tra costo e dislivello piezometrico del singolo lato con una funzione parabolica ponendo:

$$C_k = t_k + s_k y_k + r_k y_k^2.$$

I coefficienti possono essere ricavati attraverso un sistema di tre equazioni assegnando i costi delle tubazioni per tre diametri fissati, scegliendo i tre diametri in un intorno della presumibile soluzione finale.

Con questa ipotesi la derivata del costo rispetto al dislivello risulta:

$$\frac{dC_k}{dy_k} = s_k + 2 r_k y_k.$$

Inoltre per ogni percorso dal nodo di alimentazione al generico nodo erogante si può imporre l'uguaglianza tra il dislivello totale che è noto e i dislivelli dei singoli tratti incogniti scrivendo:

$$\sum_i y_h = \Delta_i \quad i = 1, \dots, m.$$

essendo la sommatoria estesa a tutti i lati del percorso i -esimo.

Occorre quindi risolvere il sistema lineare costituito da l equazioni, $l-m$ di minimo costo a ogni nodo e m di moto lungo ogni percorso, nelle l incognite dislivello piezometrico lungo ogni lato.

Naturalmente dai dislivelli piezometrici, essendo note le portate, possono essere ricavati i diametri di ogni singolo lato. Questi valori non coincideranno in generale con i valori dei diametri commerciali. Si possono allora per ogni lato utilizzare i diametri commerciali più vicini a quello teorico determinato e stabilire le lunghezze L_1 e L_2 di ogni tratto con diverso diametro attraverso le due equazioni:

$$L_1 + L_2 = L$$

$$J_1 L_1 + J_2 L_2 = y$$

essendo J_1 e J_2 le cadenti relative ad ogni diametro.

4.2.2 PROGRAMMAZIONE LINEARE

In maniera più rigorosa il problema del dimensionamento di una rete aperta può essere impostato come un classico problema di programmazione lineare.

In un problema di questo genere occorre trovare il minimo di una funzione lineare:

$$\min z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

detta "funzione obiettivo", soggetta ai vincoli lineari:

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n &= d_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n &= d_2 \\ &\dots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n &= d_m \end{aligned}$$

e con le condizioni di non negatività:

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0.$$

Se i vincoli lineari hanno la forma di disuguaglianze:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \leq d_1$$

$$\begin{aligned}
a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n &\leq d_2 \\
&\dots \\
a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n &\leq d_m
\end{aligned}$$

ci si può ricondurre al problema standard introducendo variabili ausiliarie x_{n+1} , x_{n+2} , ..., x_{n+m} tali che:

$$\begin{aligned}
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n + x_{n+1} &= d_1 \\
a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n + x_{n+2} &= d_2 \\
&\dots \\
a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n + x_{n+m} &= d_m
\end{aligned}$$

4.2.2.1 Il metodo del simplesso e il metodo delle penalità

Nella soluzione del problema di programmazione lineare, delle n incognite al più m valori saranno non nulli e almeno $n-m$ saranno nulli. Si può vedere infatti che se la soluzione esiste starà su uno dei vertici dell'iperpoliedro a n dimensioni (detto simplesso) definito dai vincoli e dalle condizioni di non negatività. Il vertice sarà intersezione di n iperpiani di cui m sono di vincolo e almeno altri $n-m$ sono piani coordinati. Su un vertice saranno quindi nulle almeno $n-m$ incognite.

Per trovare la soluzione si potrebbero esaminare allora tutti i vertici del simplesso. Tuttavia questo metodo è praticabile quando le variabili non sono molte, altrimenti richiede uno sforzo di calcolo eccessivo. In alternativa, si può partire da uno qualunque di tali vertici e procedere lungo i lati dell'iperpoliedro nella direzione in cui la pendenza della funzione è massima, fin quando si trovi il minimo, cioè fin quando non esistano più direzioni lungo cui il valore della funzione z diminuisca.

Si ricorre di solito al metodo del simplesso, con opportuni accorgimenti per individuare la soluzione iniziale, come il metodo delle penalità.

Il metodo delle penalità consiste nel creare un problema di programmazione lineare artificiale mediante l'introduzione di un numero di variabili ausiliarie in numero pari al numero delle equazioni di vincolo, in modo tale che si abbia:

$$\begin{aligned}
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n + x_{n+1} &= d_1 \\
a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n + x_{n+2} &= d_2 \\
&\dots \\
a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n + x_{n+m} &= d_m
\end{aligned}$$

La funzione di costo del problema modificato è la seguente:

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n + M \sum_{i=n+1}^{n+m} x_i,$$

essendo M un coefficiente molto grande. La soluzione viene raggiunta quindi partendo da una soluzione di base che comprenda solo le variabili ausiliarie e

ponendo le variabili originarie nulle. Si raggiunge poi la soluzione, se esiste, procedendo lungo i vertici dell'iperpoliedro, fino a trovare il minimo.

4.2.2.2 La programmazione lineare e il problema di progetto della rete

Per ottenere una formulazione del problema di progetto nella forma classica della programmazione lineare, occorre per ogni lato della rete scegliere un certo numero di diametri possibili, di cui bisogna stabilire la lunghezza. La generica incognita del problema diventa allora la lunghezza del tratto a diametro costante lungo ogni lato. La funzione da minimizzare sarà il costo totale della rete

$$z = \sum_i C_i,$$

essendo la sommatoria estesa a tutti i tratti della rete.

I vincoli esprimeranno per il lato generico i che la somma delle lunghezze dei tratti a diametro diverso sarà pari alla lunghezza totale del tratto:

$$L_{i1} + L_{i2} + \dots + L_{ir} = L_i$$

essendo r i possibili tratti a diametro diverso lungo ogni lato.

Altri vincoli saranno costituiti da equazioni analoghe a quelle viste prima valide per ogni percorso dal nodo di alimentazione al generico nodo erogante, che esprimeranno che la somma dei dislivelli lungo tutti i tratti presenti lungo il percorso sia inferiore al dislivello massimo, pari alla differenza tra il carico nel serbatoio di alimentazione e il carico minimo al nodo erogante

$$J_{j1} L_{j1} + J_{j2} L_{j2} + \dots + J_{js} L_{js} \leq \Delta_j.$$

essendo s i possibili tratti a diametro diverso lungo ogni percorso.

I diametri possibili per ogni lato possono essere stabiliti in base ad altri vincoli di carattere idraulico, come per esempio le velocità ammissibili in condotta.

4.2.2.3 Esempio applicativo

Un esempio di applicazione del metodo delle penalità nell'ambito del metodo del simplesso (tratto da Stephenson) è illustrato nel seguito per una semplice condotta unicursale, collegante cioè un serbatoio di alimentazione con vari nodi eroganti attraverso un unico percorso.

Sia la condotta lunga 900 m divisa in due tronchi rispettivamente di 500 m e 400 m in cui scorrono rispettivamente portate di 40 l/s e 14 l/s. Il carico nel serbatoio sia di 10 m e il carico minimo all'estremità di valle sia di 5 m.

Supponiamo di aver fissato i possibili valori dei diametri nei due tratti. Nel primo tratto, lungo 500 m e con portata di 40 l/s, i diametri possibili sono di 250 mm e di 200 mm. Nel secondo tratto, lungo 400 m e con portata di 14 l/s, i diametri possibili sono di 200 mm e di 150 mm. Le incognite saranno le quattro lunghezze

del tratto a diametro 250 mm nel primo lato, del tratto a diametro 200 mm nel primo lato, del tratto a diametro 200 mm nel secondo lato e del tratto a diametro 150 mm nel secondo lato. Le cadenti e i costi per unità di lunghezza per i quattro tratti sono i seguenti.

	1	2	3	4
$J(\%)$	0,25	0,71	0,1	0,42
$C(\$/\text{hm})$	5	4	4	3

Indicando con x_1, x_2, x_3 e x_4 le quattro lunghezze divise espresse in hm, la funzione di costo da minimizzare sarà in questo caso:

$$z = 5x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 3x_4$$

mentre i vincoli saranno espressi dalle tre equazioni:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 5, \\ x_3 + x_4 &= 4, \\ 0,25 x_1 + 0,71 x_2 + 0,1 x_3 + 0,42 x_4 &\leq 5. \end{aligned}$$

Nel metodo delle penalità, come già accennato, si aggiungono variabili ausiliarie in numero pari al numero delle equazioni di vincolo e il loro coefficiente di costo si pone pari a un valore molto alto. Il loro valore si pone pari al valore dei rispettivi termini noti, mentre le variabili normali si pongono pari a zero. Nel problema trasformato con le variabili ausiliarie la soluzione iniziale sarà una soluzione di base, cioè avrà m valori non nulli e $n-m$ valori nulli, ma in generale non sarà la soluzione definitiva. Per trovare la soluzione finale si può procedere come descritto in seguito, con l'ausilio della tabella 4.I.

Si fissa inizialmente la soluzione di base come formata dalle variabili ausiliarie introdotte (nell'esempio x_5, x_6 e x_7) a cui si attribuisce un coefficiente di costo molto grande M . Il valore iniziale delle variabili ausiliarie viene posto rispettivamente pari a 5, 4 e 5, affinché vengano rispettate le equazioni di vincolo.

Per stabilire quale variabile effettiva debba sostituire una variabile ausiliaria nella soluzione di base, nella tabella si calcola per ogni colonna un valore di opportunità. Questo valore si calcola sommando i coefficienti della colonna moltiplicati per i corrispondenti coefficienti di costo della soluzione di base e sottraendo il totale dal coefficiente di costo relativo alla variabile della colonna. Il massimo valore negativo dei valori di opportunità individua quale variabile introdotta nella soluzione di base consenta la massima riduzione di costo possibile. Viene scelta così la "colonna chiave".

Per stabilire il massimo valore che si possa introdurre della variabile individuata dalla colonna chiave senza violare i vincoli, si calcola per ogni riga un valore detto rapporto di sostituzione, dividendo il valore della variabile di base relativa ad ogni riga per il corrispondente coefficiente della colonna chiave. In corrispondenza al minimo valore positivo si ha la "riga chiave".

Tabella 4.I - Esempio di applicazione del metodo del simplesso. Metodo delle penalità

Passo 1

Base	Coeff. .	Val.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	Rapp. sost.	
			5	4	4	3	M	M	M		
x_5	M	5	1	1			1			5/1	*
x_6	M	4			1	1		1		inf.	
x_7	M	5	0,25	0,71	0,1	0,42			1	5/0,71	
Valore opport.			5- 1,25 M	4- 1,71 M	4- 1,1 M	3- 1,42 M	0	0	0		
				*							

Passo 2

Base	Coeff.	Val.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	Rapp. sost.	
			5	4	4	3	M	M	M		
x_2	4	5	1	1			1			inf.	
x_6	M	4			1	1		1		4	
x_7	M	1,4	-0,46		0,1	0,42	-0,71		1	3,45	*
Valore opport.			1+0,46 M	0	4- 1,1 M	3- 1,42 M	1,71 M - 4	0	0		
						*					

Passo 3

Base	Coeff. .	Val.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	Rapp. .	
			5	4	4	3	M	M	M		
x_2	4	5	1	1			1			5	
x_6	M	0,5	1,1		0,76		1,69		-2,38	0,5	*
x_4	3	3,4	-1,1		0,24	1	-1,69		2,38	-	
Valore opport.			4,3- 1,1 M	0	3,28- 0,76 M	0	1,1- 0,69 M	0	3,38 M - 7,14		
			*								

Passo 4

Base	Coeff.	Val.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	Rapp. sost.	
			5	4	4	3	M	M	M		
x_2	4	4,5		1	-0,69		-1,54		2,16	-	
x_1	5	0,5	1		0,69		1,54		-2,16	-	
x_4	3	4			1	1				-	
Valore opport.			0	0	0,31	0	M -	M -	M -		

Il coefficiente che sta sulla riga chiave e sulla colonna chiave viene detto "numero chiave". Si sostituisce allora alla variabile della soluzione di base in corrispondenza alla riga chiave la variabile in corrispondenza alla colonna chiave.

I valori della soluzione di base e i valori in tabella vanno modificati con queste regole:

- ogni numero della riga chiave va diviso per il numero chiave;
- a ogni numero in una riga non chiave bisogna sottrarre il corrispondente numero nella riga chiave moltiplicato per il rapporto tra il vecchio numero di riga nella colonna chiave e il numero chiave.

La procedura continua fino a quando non esistono più valori di opportunità negativi. In questo caso non sono più possibili miglioramenti (cioè diminuzioni di costo) alla soluzione.

4.3 Dimensionamento di reti chiuse o a maglie

4.3.1 PROGETTO MEDIANTE PROGRAMMAZIONE NON LINEARE

Mentre il problema del dimensionamento di una rete aperta con gli accorgimenti visti prima è riconducibile a un problema lineare, il dimensionamento di una rete chiusa è in generale un problema non lineare. Infatti le portate in ogni singolo ramo della rete non sono note a priori ma dipendono anche dai valori dei diametri che sono da determinare. D'altra parte, come già accennato, una rete di minimo costo deve essere una rete aperta, perché in una rete chiusa esistono dei lati ridondanti rispetto a quelli assolutamente necessari per raggiungere tutti i nodi eroganti.

Il problema si può rendere simile a quello risolto nel caso della rete aperta fissando in tutti i lati il valore della portata, tenendo conto che la rete chiusa è fatta per consentire il soddisfacimento di una data domanda con vari percorsi alternativi.

In generale comunque occorrerebbe risolvere un problema di programmazione non lineare. In un problema di tal genere occorre in generale trovare il minimo di una funzione non lineare:

$$\min z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

soggetta a un insieme di vincoli non lineari:

$$\begin{aligned} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ &\dots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

e con le condizioni di non negatività:

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0.$$

Per risolvere il problema esistono vari algoritmi, molto più complessi di quello che abbiamo visto, nessuno dei quali è in grado di trovare con sicurezza la soluzione ottimale. In particolare il minimo che si trova non è detto che sia il minimo

assoluto. Perché avvenga questo bisogna trovarsi già con la soluzione di primo tentativo in vicinanza della soluzione effettiva.

4.3.2 METODO SEMPLIFICATO

Un metodo euristico per il dimensionamento di reti a maglie si basa sulla creazione di una rete aperta di minimo costo. Infatti, come già accennato, la rete di minimo costo deve essere aperta. Una buona approssimazione alla rete aperta ottimale si ha impostando il seguente problema di programmazione lineare.

Minimizzare la funzione:

$$z = \sum L_i Q_i$$

essendo L_i e Q_i la lunghezza e la portata del generico lato, con la sommatoria estesa a tutti i lati della rete, considerando incognite le portate.

I vincoli sono costituiti dalle equazioni di continuità ai nodi:

$$\sum_j \pm Q_k = q_j$$

essendo la sommatoria estesa a tutti i lati convergenti al nodo j in cui la portata erogata è q_j . La soluzione sarà composta da una serie di valori positivi e da zeri. I lati per cui risulta nulla la portata sono i lati da escludere per ottenere la rete aperta. Questa può essere poi dimensionata con il metodo visto prima. I lati esclusi possono essere dimensionati successivamente, adottando il diametro minimo o scegliendo altri criteri di dimensionamento.

La funzione obiettivo costituisce il trasporto globale di massa. In realtà questa funzione non tiene conto dell'economia di scala. Infatti il legame portata-costi non è lineare, ma ogni costo è proporzionale a Q^m ($m < 1$), cosicché una funzione obiettivo più accurata sarebbe:

$$z = \sum L_i Q_i^m .$$

Tuttavia, considerata la notevole semplificazione del problema che si ha con la funzione lineare, è preferibile adottare questa, anche considerando tutte le limitazioni dei metodi impiegati, i cui risultati devono essere accettati solo in prima approssimazione e devono essere riconsiderati alla luce dell'esperienza del progettista.

4.4 Progetto di una rete di condotte in pressione (esercitazione)

Il programma di riferimento per l'esercitazione sul dimensionamento delle reti di condotte è tratto dal libro: D. Stephenson - Pipeflow analysis - Elsevier.

Precisamente utilizzeremo la versione in Fortran del programma originale in BASIC per l'applicazione del metodo del semplice.

Il programma è in grado di effettuare la scelta, in base ai metodi di programmazione lineare prima descritti, sia del tracciato della rete (nel caso di una rete chiusa) che dei diametri delle tubazioni. Il programma minimizza la funzione obiettivo e fornisce tutti i valori delle variabili, sia di quelle effettive che di quelle ausiliarie.

Per capire il modo di utilizzare il programma per il dimensionamento di una rete chiusa è meglio riferirsi ad un esempio, lo stesso riportato da Stephenson. La rete è composta dai seguenti lati:

Lato	N. iniz.	N. fin.	Lungh.
1	1	2	400
2	2	3	300
3	2	5	500
4	1	4	500
5	4	5	450
6	5	3	700

Nel nodo 1 esiste un serbatoio a livello invariabile. Le portate erogate ai nodi sono le seguenti:

Nodo	Portata (m ³ /s)
3	0,200
5	0,080

In base a quanto previsto nel metodo semplificato per determinare il tracciato della rete occorre minimizzare la funzione:

$$z = 400 Q_1 + 300 Q_2 + 500 Q_3 + 500 Q_4 + 450 Q_5 + 700 Q_6$$

con i vincoli:

$$\begin{aligned} Q_1 - Q_2 - Q_3 &= 0 \\ Q_2 + Q_6 &= 200 \\ Q_4 - Q_5 &= 0 \\ Q_3 + Q_5 - Q_6 &= 80 \end{aligned}$$

avendo assunto come direzioni delle portate quelle dal nodo iniziale al nodo finale. Il programma chiede prima il nome della prova, poi il numero delle variabili, quindi il numero dei vincoli in cui vale rispettivamente il segno \leq , il segno $=$ e il segno \geq . Successivamente il programma richiede l'inserimento dei coefficienti dei vincoli considerando nell'ordine i segni \leq , $=$, \geq ed i corrispondenti termini noti. Infine vengono richiesti i coefficienti della funzione obiettivo da minimizzare. Dopo le elaborazioni vengono forniti i risultati, cioè l'insieme di valori delle variabili che minimizzano la funzione obiettivo sotto i vincoli imposti ed il corrispondente coefficiente di costo. Nel caso in esame risulta:

Variabile	Valore	Coeff. costo
1	280	400
2	200	300
5	0	450
3	80	500

La rete aperta che minimizza la funzione obiettivo è dunque costituita dai lati 1, 2 e 3 (essendo 5 con valore nullo). I valori corrispondono alle portate che scorrono nei vari lati.

In seguito alla definizione del tracciato, si può riutilizzare il programma per stabilire i valori dei diametri delle tubazioni della rete resa aperta con il procedimento precedente, utilizzando il metodo che abbiamo descritto per il dimensionamento di una rete aperta mediante programmazione lineare.

Nel caso in esame, la rete è costituita ora solamente dai lati 1, 2 e 3. Si possono stabilire i diametri ottimali impostando ad esempio il problema di programmazione lineare. Considerando la possibilità di utilizzare sul lato 1 tre diametri, rispettivamente 400 mm, 350 mm e 300 mm, sul lato 2 due diametri, 350 mm e 300 mm, sul lato 3 due diametri, 250 mm e 200 mm, si tratta di minimizzare la seguente funzione obiettivo:

$$z = 100 x_1 + 80 x_2 + 70 x_3 + 80 x_4 + 70 x_5 + 60 x_6 + 50 x_7$$

essendo le variabili costituite dalle lunghezze dei vari tronchi a diametro differente e portata differente (i coefficienti rappresentano i costi per unità di lunghezza). I vincoli sono i seguenti:

$$\begin{aligned} 0,009 x_1 + 0,017 x_2 + 0,04 x_3 + 0,009 x_4 + 0,02 x_5 &\leq 50 \\ 0,009 x_1 + 0,017 x_2 + 0,04 x_3 + 0,009 x_6 + 0,03 x_7 &\leq 70 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 400 \\ x_4 + x_5 &= 300 \\ x_6 + x_7 &= 500 \end{aligned}$$

che impongono come al solito che il dislivello lungo ogni percorso sia inferiore a una quantità prefissata, dipendente dal carico nel serbatoio e dal carico minimo necessario al nodo erogante, e che la somma delle lunghezze dei tratti su ogni lato sia pari alla lunghezza totale.

In questo caso il programma fornisce questi risultati:

Variabile	Valore	Coeff. costo
8	28	0
9	39	0
3	400	70
5	300	70
7	500	50

Naturalmente le variabili 8 e 9 sono fittizie. I risultati vanno considerati limitatamente alle variabili originarie.

L'esercitazione prevede il dimensionamento della rete presa in considerazione nell'esercitazione precedente, considerando gli stessi carichi minimi, naturalmente supponendo inizialmente i diametri incogniti. Per il calcolo della cadente si può fare riferimento alla formula di Strickler con coefficiente di scabrezza $c=70$.

Per i coefficienti di costo si può fare riferimento alla seguente tabella:

Diametro (mm)	Costo (€/m)
60	34,2
80	41,3
100	44,8
125	59,5
150	63,7
200	88,3
250	121,8
300	147,7
350	191,2
400	223,7
450	274,6
500	303,7
600	379,6
700	608,9
800	753,3
900	924,7
1000	1076,0

5. MOTO PERMANENTE DI CORRENTI A PELO LIBERO

5.1 Generalità

Nel presente capitolo si studia il moto permanente nelle correnti a pelo libero gradualmente variate. Il moto permanente si verifica nei canali artificiali con portata costante, mentre non si verifica mai negli alvei naturali. Tuttavia, anche se in generale il moto è vario, negli alvei naturali le variazioni sono dovute ai fenomeni di piena, che sono abbastanza lenti. Quindi è possibile di norma studiare il moto permanente considerando costante nel tempo la portata al colmo, se la portata nella sezione di monte del tratto studiato varia di poco nel tempo impiegato dal colmo di piena a propagarsi fino alla sezione di valle. Più è grande il fiume, più è valida questa approssimazione. In ogni caso il calcolo effettuato in tal modo è in condizioni di sicurezza.

Si studia la corrente da un punto di vista unidimensionale, ipotizzando che le linee di corrente abbiano piccole curvature. Di conseguenza l'equazione di Eulero lungo la normale alla direzione del moto:

$$\frac{\partial}{\partial n}(p + \gamma h) = -\rho \frac{V^2}{R}$$

essendo il raggio di curvatura R molto grande, integrata fornisce:

$$h + \frac{p}{\gamma} = \text{cost}$$

e quindi la distribuzione delle pressioni è idrostatica.

Di conseguenza, per ogni sezione l'energia totale rispetto a un riferimento orizzontale è definita dall'espressione:

$$E = z + y + \frac{\alpha V^2}{2g}.$$

5.2 Equazione del moto

Nel caso generale di moto vario, l'equazione del moto unidimensionale delle correnti a superficie libera gradualmente variate si può scrivere nella forma:

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{dz}{dx} + \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{1}{2g} \frac{\partial(\alpha V^2)}{\partial x} = -\frac{\beta}{g} \frac{\partial V}{\partial t} - J$$

mentre, in assenza di apporti laterali, l'equazione di continuità assume la forma:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 .$$

In moto permanente si può scrivere:

$$\frac{dE}{dx} = \frac{dz}{dx} + \frac{dy}{dx} + \frac{1}{2g} \frac{d(\alpha V^2)}{dx} = -J$$

mentre l'equazione di continuità assume la forma:

$$\frac{dQ}{dx} = 0 .$$

Ipotizzando per semplicità α costante con y , e facendo comparire la portata, l'equazione del moto si scrive:

$$\frac{dE}{dx} = \frac{dz}{dx} + \frac{dy}{dx} - \frac{\alpha Q^2}{gA^3} \left(\frac{\partial A}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial A}{\partial x} \right) = -J$$

ed essendo $\partial A / \partial y = B$ larghezza in superficie, l'equazione del profilo della corrente si può scrivere:

$$\frac{dE}{dx} = \frac{dz}{dx} + \frac{dy}{dx} \left(1 - \frac{\alpha Q^2 B}{gA^3} \right) - \frac{\alpha Q^2}{gA^3} \frac{\partial A}{\partial x} = -J$$

oppure nella forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{i - J + \frac{\alpha Q^2}{gA^3} \frac{\partial A}{\partial x}}{1 - Fr^2} .$$

La cadente J sarebbe in generale funzione della scabrezza relativa e del numero di Reynolds, così come per le condotte in pressione. Tuttavia si ipotizza di solito che il moto sia puramente turbolento e si adotta la formula di Chezy:

$$J = \frac{Q^2}{A^2 C^2 r} ,$$

dove r è il raggio idraulico. Il coefficiente C di Chezy si può esprimere ad esempio con la formula di Manning:

$$C = \frac{1}{n} r^{1/6}.$$

I valori del coefficiente n per i canali artificiali sono tabulati sui manuali in funzione della natura del rivestimento delle pareti, mentre per i corsi d'acqua naturali si valutano in funzione della natura del terreno, della vegetazione delle sponde e delle irregolarità dell'alveo.

5.3 Schemi alle differenze finite espliciti e impliciti

L'equazione dei profili appena scritta è un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine, che abbiamo portato nella forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y).$$

Per risolvere questa equazione è necessaria una condizione al contorno, che si assegna a valle per corrente lenta e a monte per corrente veloce.

La soluzione analitica è possibile solo per casi molto particolari (integrale di Bresse). In generale l'equazione si deve risolvere numericamente. Si utilizzano metodi numerici alle differenze finite, con cui si sostituisce alla derivata il rapporto incrementale, ottenendo l'equazione:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f(x,y).$$

Si deve quindi stabilire un reticolo di calcolo, definendo le sezioni a distanze discrete.

Esistono due grandi categorie di schemi alle differenze finite: gli schemi espliciti e gli schemi impliciti. Uno schema esplicito si può mettere nella forma

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x} = f(x_{k+1}, y_{k+1}).$$

nel caso di corrente lenta e nella forma

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x} = f(x_k, y_k).$$

nel caso di corrente veloce.

Uno schema implicito si può scrivere genericamente

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x} = \theta f(x_k, y_k) + (1-\theta) f(x_{k+1}, y_{k+1}).$$

essendo θ un coefficiente di peso. Scegliendo $\theta=1/2$ si ha:

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x} = \frac{1}{2} [f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})].$$

5.4 Consistenza, stabilità, convergenza, accuratezza

Ogni schema possiede delle proprietà che lo qualificano: stabilità, consistenza, convergenza, accuratezza.

5.4.1 STABILITÀ

La stabilità riguarda l'entità degli errori al procedere del calcolo. In particolare occorre analizzare come l'errore commesso ad un certo passo dipenda dall'errore al passo precedente. Perché lo schema sia stabile occorre che l'errore non si amplifichi. Analizziamo la stabilità dello schema esplicito e dello schema implicito.

5.4.1.1 Schema esplicito

Se la corrente è lenta si può scrivere:

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x} = f(x_{k+1}, y_{k+1}).$$

Supponendo di avere un errore ϵ_{k+1} su y_{k+1} si ha:

$$\frac{y_{k+1} + \epsilon_{k+1} - y_k - \epsilon_k}{\Delta x} = f(x_{k+1}, y_{k+1} + \epsilon_{k+1}).$$

Vediamo quanto vale il nuovo errore ϵ_k dato il precedente ϵ_{k+1} . Lo sviluppo in serie di Taylor della funzione $f(x, y)$ è il seguente:

$$f(x_{k+1}, y_{k+1} + \epsilon_{k+1}) = f(x_{k+1}, y_{k+1}) + \epsilon_{k+1} \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{k+1}$$

Si ha quindi, combinando le precedenti:

$$\epsilon_{k+1} = \epsilon_k + \epsilon_{k+1} \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{k+1} \Delta x$$

e quindi:

$$\varepsilon_k = \varepsilon_{k+1} \left[1 - \frac{\partial f}{\partial y} \bigg|_{k+1} \Delta x \right]$$

Perché lo schema sia stabile si deve avere

$$\left| \frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_{k+1}} \right| = \left| 1 - \frac{\partial f}{\partial y} \bigg|_{k+1} \Delta x \right| < 1$$

e quindi

$$0 < \frac{\partial f}{\partial y} \bigg|_{k+1} \Delta x < 2 .$$

Si può scrivere:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dy} = \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

Esaminiamo i segni delle derivate prima e seconda per i vari profili.

Profilo	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{d^2 y}{dx^2}$	$\frac{\partial f}{\partial y}$
D1	+	+	+
D2	-	-	+
D3	+	+	+
F1	+	-	-
F2	-	+	-
F3	+	-	-

I profili di corrente lenta sono D1, D2 e F1. Per il profilo F1 la condizione vista prima non può essere soddisfatta. Si ha instabilità. Per i profili D1 e D2 basta scegliere:

$$\Delta x < \frac{2}{\frac{\partial f}{\partial y}} .$$

Si ha stabilità condizionata.

Se la corrente è veloce si può scrivere:

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x} = f(x_k, y_k).$$

$$\frac{y_{k+1} + \varepsilon_{k+1} - y_k - \varepsilon_k}{\Delta x} = f(x_k, y_k + \varepsilon_k) = f(x_k, y_k) + \varepsilon_k \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_k.$$

Si ottiene allora:

$$\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k \left[1 + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_k \Delta x \right].$$

Per la stabilità deve essere:

$$\left| \frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} \right| = \left| 1 + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_k \Delta x \right| < 1$$

e quindi

$$-2 < \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_k \Delta x < 0.$$

Quindi, esaminando la tabella precedente, si vede che il profilo D3 è instabile, mentre i profili F2 e F3 sono stabili sotto la condizione

$$\Delta x < \frac{2}{\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|}.$$

5.4.1.2 Schema implicito

Si può scrivere in generale:

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x} = \frac{1}{2} [f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})].$$

Analogamente a quanto fatto prima si può scrivere:

$$\frac{y_{k+1} + \varepsilon_{k+1} - y_k - \varepsilon_k}{\Delta x} = \frac{1}{2} [f(x_k, y_k + \varepsilon_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1} + \varepsilon_{k+1})] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[f(x_k, y_k) + \varepsilon_k \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_k + f(x_{k+1}, y_{k+1}) + \varepsilon_{k+1} \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{k+1} \right].$$

Si ottiene in definitiva:

$$\varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k = \frac{\Delta x}{2} \left[\varepsilon_k \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_k + \varepsilon_{k+1} \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{k+1} \right].$$

Supponendo che si abbia, in prima approssimazione:

$$\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_k = \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{k+1},$$

si ottiene:

$$\varepsilon_{k+1} \left(1 - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \varepsilon_k \left(1 + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

Per la stabilità deve essere, in corrente lenta:

$$\left| \frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_{k+1}} \right| = \left| \frac{1 - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial f}{\partial y}}{1 + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial f}{\partial y}} \right| < 1.$$

Questa condizione non è mai verificata per il profilo F1 (instabilità) ed è sempre verificata per i profili D1 e D2 (stabilità senza condizioni).

Per la corrente veloce:

$$\left| \frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} \right| = \left| \frac{1 + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial f}{\partial y}}{1 - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial f}{\partial y}} \right| < 1.$$

Questa condizione non è mai verificata per il profilo D3 (instabilità) ed è sempre verificata per i profili F2 e F3 (stabilità senza condizioni).

5.4.2 CONSISTENZA

Se al tendere di Δx a zero l'equazione algebrica discreta tende all'equazione differenziale lo schema si dice consistente. L'ordine della consistenza quantifica la differenza tra equazione algebrica discreta ed equazione differenziale. È misurata dall'errore di troncamento causato dall'introduzione del rapporto incrementale. La potenza di Δx del primo termine trascurato dà la consistenza.

5.4.2.1 Schema esplicito

Nel caso di corrente lenta si ha:

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x} = f(x_{k+1}, y_{k+1}).$$

Lo sviluppo in serie di Taylor attorno a y_{k+1} è il seguente:

$$y_k = y_{k+1} - \Delta x \left. \frac{dy}{dx} \right|_{k+1} + \frac{\Delta x^2}{2} \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{k+1} - \dots$$

Sostituendo si ottiene:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{k+1} - \frac{\Delta x^2}{2} \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{k+1} + \dots = f(x_{k+1}, y_{k+1}).$$

Questa è l'equazione risolta in realtà. La differenza con l'equazione di partenza è data principalmente dal termine

$$- \frac{\Delta x^2}{2} \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{k+1}$$

che dipende dalla prima potenza di Δx . Quindi lo schema esplicito è consistente perché al tendere di Δx a zero l'equazione algebrica tende all'equazione differenziale e la consistenza è del primo ordine. Analogamente si procede per corrente veloce.

5.4.2.2 Schema implicito

In questo caso l'equazione si scrive:

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x} = \frac{1}{2} [f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})].$$

Lo sviluppo in serie di Taylor nel punto medio tra x_k e x_{k+1} fornisce:

$$y_{k+1} = y_{k+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta x}{2} \frac{dy}{dx} \Big|_{k+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2!} \frac{\Delta x^2}{4} \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{k+\frac{1}{2}} + \frac{1}{3!} \frac{\Delta x^3}{8} \frac{d^3 y}{dx^3} \Big|_{k+\frac{1}{2}} + \dots$$

$$y_k = y_{k+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta x}{2} \frac{dy}{dx} \Big|_{k+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2!} \frac{\Delta x^2}{4} \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{k+\frac{1}{2}} - \frac{1}{3!} \frac{\Delta x^3}{8} \frac{d^3 y}{dx^3} \Big|_{k+\frac{1}{2}} + \dots$$

Sottraendo la seconda dalla prima si ottiene:

$$y_{k+1} - y_k = \Delta x \frac{dy}{dx} \Big|_{k+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta x^3}{24} \frac{d^3 y}{dx^3} \Big|_{k+\frac{1}{2}} + \dots$$

Sostituendo si vede che l'equazione risolta in realtà:

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{k+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta x^2}{24} \frac{d^3 y}{dx^3} \Big|_{k+\frac{1}{2}} + \dots = \frac{1}{2} [f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})]$$

differisce dall'equazione vera per un termine del secondo ordine in Δx e per termini di ordine superiore. La consistenza dello schema implicito è quindi del secondo ordine.

5.4.3 CONVERGENZA

Uno schema consistente e stabile si dice convergente, perché al tendere di Δx a zero la soluzione numerica tende a quella vera.

5.4.4 ACCURATEZZA

L'accuratezza di uno schema riguarda la differenza tra la soluzione approssimata e quella vera. Non può essere valutata a priori ma solo per confronto con la soluzione analitica valevole per casi semplici. Naturalmente uno schema con consistenza di ordine superiore è più accurato.

In pratica si vede che piccole variazioni della scabrezza (di qualche per cento) danno luogo a soluzioni che differiscono maggiormente tra loro di quanto non

differiscano le soluzioni date dai due schemi. Quindi, considerate le incertezze che si hanno sulle scabrezze reali, così come sulle portate, le approssimazioni numeriche risultano certamente accettabili.

5.5 Integrazione delle equazioni

5.5.1 ALVEI PRISMATICI

In questo caso l'equazione del profilo si scrive:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{i - J}{1 - Fr^2}.$$

Siccome non si hanno sezioni vincolate a certe ascisse, è molto adatto lo schema diretto:

$$x_{k+1} - x_k = (y_{k+1} - y_k) \frac{1 - Fr^2}{i - J}.$$

e l'incognita è x_{k+1} o x_k a seconda che la corrente sia veloce o lenta.

In alternativa si può utilizzare lo schema:

$$x_{k+1} - x_k = \frac{H_{k+1} - H_k}{i - J} = \frac{y_{k+1} + \frac{\alpha_{k+1} V_{k+1}^2}{2g} - y_k + \frac{\alpha_k V_k^2}{2g}}{i - J}.$$

5.5.2 ALVEI NATURALI

Per i corsi d'acqua naturali la sezione in generale non è costante e la pendenza di fondo non è facilmente definibile. Si preferisce allora integrare l'equazione:

$$\frac{dE}{dx} = -J$$

dove E è l'energia totale rispetto ad un piano orizzontale di riferimento:

$$E = z + y + \frac{\alpha V^2}{2g} = h + \frac{\alpha V^2}{2g}$$

essendo h la quota del pelo libero rispetto all'orizzontale.

Se la sezione è compatta si può porre $\alpha = 1$. L'equazione alle differenze finite si può scrivere ad esempio:

$$h_{k+1} + \frac{V_{k+1}^2}{2g} = h_k + \frac{V_k^2}{2g} - \frac{1}{2}(J_k + J_{k+1})\Delta x.$$

L'incognita è l'altezza h_k nel caso di corrente lenta o h_{k+1} nel caso di corrente veloce. Naturalmente l'equazione è implicita, perché dipendono dall'altezza d'acqua anche il termine cinetico e la cadente. Bisogna allora risolverla partendo da un valore di primo tentativo, con uno dei metodi iterativi già visti per le equazioni non lineari, per esempio il metodo del punto fisso.

5.5.3 ALVEI A SEZIONE COMPOSTA

Nel caso di sezioni composte da alveo di magra e da due o più golene, la sezione può essere suddivisa attraverso le verticali per i punti iniziali delle golene; il legame tra portata e cadente risulta quindi:

$$Q = \sum Q_j = \sqrt{J} \sum \frac{A_j r_j^{\frac{2}{3}}}{n_j},$$

avendo indicato con l'indice j le grandezze relative alla generica zona j -esima. Tale modo di procedere, per quanto approssimato, è certamente il più pratico e consente tra l'altro di assegnare diversi valori dell'indice di scabrezza alle varie zone della sezione.

Il coefficiente α di Coriolis consente di tener conto della disuniformità della distribuzione di velocità nella valutazione dell'energia totale. Tale coefficiente si può assumere pari a 1 nel caso di sezioni compatte. Nel caso di sezioni composte, assumendo pari ad 1 il coefficiente della singola zona (trascurando cioè la disuniformità di velocità nella singola zona rispetto a quella dell'intera sezione), il coefficiente α è esprimibile tramite la relazione:

$$\alpha = \frac{\sum V_j^3 A_j}{V^3 A},$$

essendo $V_j = Q_j/A_j$ la velocità media della zona j -esima.

L'equazione, che si può scrivere nella forma:

$$h_{k+1} + \frac{\alpha_{k+1} V_{k+1}^2}{2g} = h_k + \frac{\alpha_k V_k^2}{2g} - \frac{1}{2}(J_k + J_{k+1})\Delta x.$$

risulta ancora implicita e più complessa che per alveo a sezione compatta. Conviene fissare un valore di tentativo e valutare l'errore commesso:

$$E_r = E_{k+1} - E_k - \Delta E.$$

Se E_r risulta piccolo ci si ferma, altrimenti si continua, prendendo ad esempio come correzione successiva $1/2 E_r$.

Naturalmente il procedimento descritto, che si basa sulla suddivisione della sezione composta in parti, non è rigoroso nel caso di moto permanente. Oltre all'approssimazione già introdotta in moto uniforme, dovuta alla scelta della suddivisione verticale, lungo la quale non è nullo lo sforzo tangenziale, nel caso del moto permanente esistono tra le varie zone della sezione anche trasferimenti di portata a causa del fatto che in sezioni diverse si hanno altezze d'acqua diverse e quindi valori diversi delle frazioni della portata totale nelle sottosezioni. Tali trasferimenti determinano sforzi aggiuntivi, dovuti al trasferimento di quantità di moto, che sono trascurati pur potendo risultare molto cospicui soprattutto per alvei non prismatici.

5.6 I programmi dell'Hydrologic Engineering Center

I programmi sviluppati dall'Hydrologic Engineering Center dell'U.S. Army Corps of Engineers sono di pubblico dominio. L'attuale software HEC-RAS ha incorporato, migliorato e reso più facilmente fruibili i precedenti programmi HEC-2 (moto permanente) e UNET (moto vario). Nel modulo di moto permanente l'equazione del moto è scritta nella forma:

$$\frac{d}{dx} \left(h + \frac{\alpha V^2}{2g} \right) = -J ;$$

in forma discretizzata, per il generico tratto di lunghezza L compreso tra la sezione k e la sezione $k+1$ più a valle, si può scrivere:

$$h_k + \frac{\alpha_k V_k^2}{2g} = h_{k+1} + \frac{\alpha_{k+1} V_{k+1}^2}{2g} + \Delta E .$$

La perdita di carico ΔE viene espressa tramite la relazione:

$$\Delta E = LJ + m \left| \frac{\alpha_k V_k^2}{2g} - \frac{\alpha_{k+1} V_{k+1}^2}{2g} \right| ,$$

dove il secondo addendo rappresenta le eventuali perdite per espansione o contrazione nel tratto compreso tra le due sezioni, essendo m un coefficiente adimensionale.

Il programma consente di suddividere il generico tronco in tre zone (zona golenale di sinistra, alveo di magra, zona golenale di destra), ciascuna delle quali può avere diversa lunghezza, scabrezza e cadente. Naturalmente, all'interno di ciascuna di queste zone possono esservi ulteriori suddivisioni per tener conto di eventuali differenze di scabrezza o della presenza di diversi piani golenali.

Indicando con gli indici S , C e D rispettivamente le grandezze relative alla zona di sinistra, a quella di centro ed a quella di destra, la lunghezza L del tronco viene espressa dalla media pesata:

$$L = \frac{L_S Q_S + L_C Q_C + L_D Q_D}{Q},$$

essendo, ovviamente:

$$Q = Q_S + Q_C + Q_D.$$

La cadente nella generica sezione è data dall'espressione:

$$J = \frac{Q^2}{\left[\left(\frac{Ar^{2/3}}{n} \right)_S + \left(\frac{Ar^{2/3}}{n} \right)_C + \left(\frac{Ar^{2/3}}{n} \right)_D \right]^2},$$

e, per il generico tronco, dalla media:

$$J = \frac{(Q_{k+1} + Q_k)^2}{\left[\sum_{k+1} \frac{A_i r_i^{2/3}}{n_i} + \sum_k \frac{A_i r_i^{2/3}}{n_i} \right]^2}.$$

Esistono varie altre possibilità di valutare la cadente media.

Il profilo di corrente viene calcolato procedendo nel seguente modo:

- nell'ipotesi di corrente lenta:
 - a. note l'altezza idrica di valle h_{k+1} e la portata Q_{k+1} , si calcolano V_{k+1} e J_{k+1} ;
 - b. nota la portata a monte Q_k si fissa un valore di tentativo per l'altezza idrica h_k ;
 - c. si calcolano V_k e J_k ;
 - d. si calcola la perdita ΔE ;
 - e. dall'equazione del moto, si determina un nuovo valore dell'altezza idrica a monte h_k :

$$h_k = h_{k+1} + \frac{\alpha_{k+1} V_{k+1}^2}{2g} + \Delta E - \frac{\alpha_k V_k^2}{2g};$$

- f. se lo scarto fra i due successivi valori di h_k risulta maggiore di un prefissato valore, il calcolo riprende dal punto c. con l'ultimo valore di h_k ;
- g. determinato così h_k , si verifica che tale valore risulti superiore a quello dell'altezza critica h_c nella sezione k ;

- h. se tale condizione è verificata si passa al calcolo per il tronco immediatamente a monte, tornando al punto a.;
- i. se invece risulta $h_k < h_c$, si pone $h_k = h_c$;
- nell'ipotesi di corrente veloce il procedimento va applicato nell'identico modo ma procedendo, con gli ovvi adattamenti, da monte verso valle.

Se la corrente risulta ovunque lenta (o veloce) il procedimento si esaurisce; qualora invece in qualche sezione risulti un tirante uguale all'altezza critica, il procedimento va ripetuto con l'ipotesi di corrente veloce (o lenta). È presumibile che il nuovo calcolo dia luogo ad altezze di corrente veloce (lenta) tranne in alcune sezioni in cui l'altezza sarà pari alla critica. Dall'analisi dei risultati ottenuti dai calcoli nelle due ipotesi si è quindi in grado di ricostruire il profilo di corrente, scegliendo in ogni sezione l'altezza di corrente lenta o veloce risultante dal relativo calcolo ed escludendo l'altezza critica, a meno che questa non si ritrovi in entrambi i calcoli effettuati. Un'opzione presente nel programma HEC-RAS è il calcolo in regime di corrente mista, nel quale viene localizzato anche il risalto con un bilancio delle spinte totali.

Un particolare cenno va dedicato alle procedure previste dal modello per l'analisi dell'effetto dei ponti sulla corrente. La più semplice si limita a depurare l'area della sezione dall'ingombro del ponte (pile e impalcato). La seconda consente invece un esame più dettagliato delle condizioni di deflusso.

Con tale procedura, infatti, si considera che la portata può attraversare la sezione del ponte o nelle normali condizioni di corrente a pelo libero, oppure in pressione (il livello idrico supera l'intradosso dell'impalcato, ma non l'estradosso) od ancora parte in pressione e parte a stramazzo (il livello supera il piano superiore del ponte). Per ciascuna di tali situazioni il calcolo viene condotto con le specifiche equazioni.

Applicando l'equazione globale della dinamica al volume idrico compreso tra le sezioni immediatamente a valle del ponte (nell'ipotesi di corrente lenta) e la sezione del ponte (schematizzata di forma trapezia), si calcola il livello idrico in corrispondenza del ponte e su tale base si determina il tipo di deflusso.

Se il livello risulta inferiore a quello dell'intradosso dell'impalcato, il deflusso è a pelo libero. In tal caso, se l'altezza risulta superiore all'altezza critica, il modello calcola il dislivello tra monte e valle a mezzo dell'equazione di Yarnell. Se, invece, l'altezza risulta inferiore o uguale a quella critica, si impone che il deflusso avvenga in condizioni di stato critico e si determinano i livelli a monte ed a valle del ponte, sempre con l'applicazione dell'equazione globale della dinamica.

Se il deflusso avviene in pressione, si applica l'equazione dell'efflusso sotto luce a battente; infine, se il livello supera anche il piano superiore del ponte, l'aliquota di portata che defluisce sopra il ponte viene calcolata con l'equazione dell'efflusso da una luce a stramazzo.

5.7 Calcolo di un profilo di corrente in moto permanente (esercitazione)

Nel caso di un corso d'acqua naturale, individuato il tratto da studiare, per prima cosa occorre scegliere le sezioni di calcolo. Naturalmente occorre prendere in considerazione le sezioni in corrispondenza alle quali si hanno variazioni delle

caratteristiche geometriche e idrauliche dell'alveo. Le sezioni vanno inoltre tracciate in direzione ortogonale alla presumibile direzione della corrente. Quindi se si effettua il calcolo per le portate di piena, non bisogna considerare l'andamento dell'alveo di magra ma quello della zona presumibilmente interessata dalla corrente, che comprende anche le golene, ed eventualmente la vallata circostante. Nei tratti prismatici comunque è opportuno scegliere le sezioni non troppo distanti (di norma non più di 500 m) per effettuare calcoli accurati.

Si dà una descrizione sintetica delle modalità di introduzione dei dati necessari per l'esecuzione dell'esercitazione in un file leggibile dal programma HEC2.

I dati di input vengono introdotti secondo un ordine ben preciso in record ognuno dei quali è contrassegnato da una sigla che occupa le prime due colonne del record stesso. Il minimo insieme di dati, che sarà sufficiente per l'esecuzione dell'esercitazione, comprende i dati contenuti nei record descritti brevemente di seguito.

T1, T2, T3. Questi record contengono il titolo della prova, che sarà utilizzato nel file di output.

J1. Nel record J1, oltre a diverse variabili che definiscono opzioni che non utilizzeremo (nei primi tre campi, nel settimo e nel decimo si può indicare 0), al campo 4 bisogna indicare 0 se la corrente è lenta e 1 se la corrente è veloce. Al campo 5 occorre indicare il tipo di condizione al contorno (0 indica che si parte con un valore noto della superficie libera, da introdurre al campo 9). Al campo 6 bisogna specificare il sistema di unità di misura (1 indica il sistema metrico). Al campo 8 si deve indicare il valore della portata.

NC. In tale record si definiscono i coefficienti di scabrezza secondo Manning della sezione e i coefficienti delle perdite per espansione o contrazione. Se si usa questo record per definire i coefficienti di scabrezza, si accetta di suddividere la sezione in tre zone (alveo principale, golena sinistra e golena destra) con scabrezza disuniforme. E' possibile una descrizione più dettagliata dei coefficienti di scabrezza sia mediante suddivisioni verticali che orizzontali (record NH e NV), ma di solito una suddivisione in tre zone è più che sufficiente. Nei campi 1, 2 e 3 occorre indicare rispettivamente i coefficienti di Manning di golena sinistra, golena destra e canale principale. Si ricorda che la sinistra e destra idraulica si definiscono con riferimento al verso della corrente. Nei campi 4 e 5 si definiscono rispettivamente i coefficienti m della perdita per contrazione e per espansione. Ogni cambiamento dei coefficienti definiti nel record NC per un nuovo tratto richiede un nuovo record NC.

X1. In questo record si definiscono le caratteristiche della sezione. Al campo 1 c'è un numero di identificazione della sezione. Nel campo 2 bisogna mettere il numero di punti che definiscono la forma della sezione. Nei campi 3 e 4 bisogna definire rispettivamente l'ascissa della golena sinistra e della golena destra. Nei campi 5, 6 e 7 occorre specificare le distanze tra la sezione e la sezione a valle rispettivamente lungo la golena sinistra, la golena destra e il canale principale. Alla

prima sezione si metterà 0 se la corrente è lenta. Nei campi 8, 9 e 10 si può mettere 0.

GR. In questo record si specifica il profilo del terreno. Si devono indicare successivamente l'ordinata e l'ascissa dei punti che definiscono la sezione da sinistra verso destra. In ogni record GR si possono scrivere le coordinate di cinque punti. Si scriveranno tanti record GR quanti sono necessari per descrivere completamente la sezione, ed il numero dei punti deve corrispondere a quello indicato nel record X1 al campo 2.

EJ, tre righe bianche, ER. Alla fine del file bisogna mettere il record EJ (end of job) successivamente tre record vuoti e infine il record ER (end of run).

Utilizzeremo il programma HEC2 per calcolare il profilo di moto permanente sul Po, tra le sezioni di Stienta e Pontelagoscuro.

Siccome abbiamo rilievi delle scale delle portate nelle tre stazioni idrometriche di Stienta, Occhiobello e Pontelagoscuro, il programma HEC2 può essere utilizzato per effettuare la taratura del coefficiente di scabrezza (o dei coefficienti di scabrezza, uno per l'alveo di magra e uno per le golene) del tratto studiato. Esiste un'opzione ben precisa per far effettuare la taratura al programma stesso. Noi tuttavia non la utilizzeremo.

Nel tratto studiato sono state scelte otto sezioni. I dati che definiscono la geometria delle sezioni sono i seguenti:

Sezione 1 (progr. 0) - Pontelagoscuro

x(m)	0,0	40,5	189,0	202,3	219,5	253,5
y(m)	15,53	8,03	11,03	12,20	12,29	4,80
x(m)	442,3	617,9	685,4			
y(m)	0,00	5,79	14,36			

Sezione 2 (progr. 1750)

x(m)	0,0	97,0	291,5	320,0	460,0	600,5
y(m)	14,44	8,84	8,44	12,38	10,88	7,38
x(m)	1120,0	1250,0	1500,0	1535,0		
y(m)	1,52	8,76	5,76	12,18		

Sezione 3 (progr. 3100)

x(m)	0,0	94,5	162,0	332,0	383,0	904,0
y(m)	14,84	2,84	2,76	1,96	8,09	11,09
x(m)	907,0					
y(m)	14,90					

Sezione 4 (progr. 4150)

x(m)	0,0	67,5	257,8	298,0	352,0	456,0
y(m)	15,09	0,00	0,00	13,30	13,34	1,84
x(m)	621,5	703,0	932,0	1006,0	1137,0	1298,0
y(m)	0,84	11,02	11,00	7,50	7,50	15,21

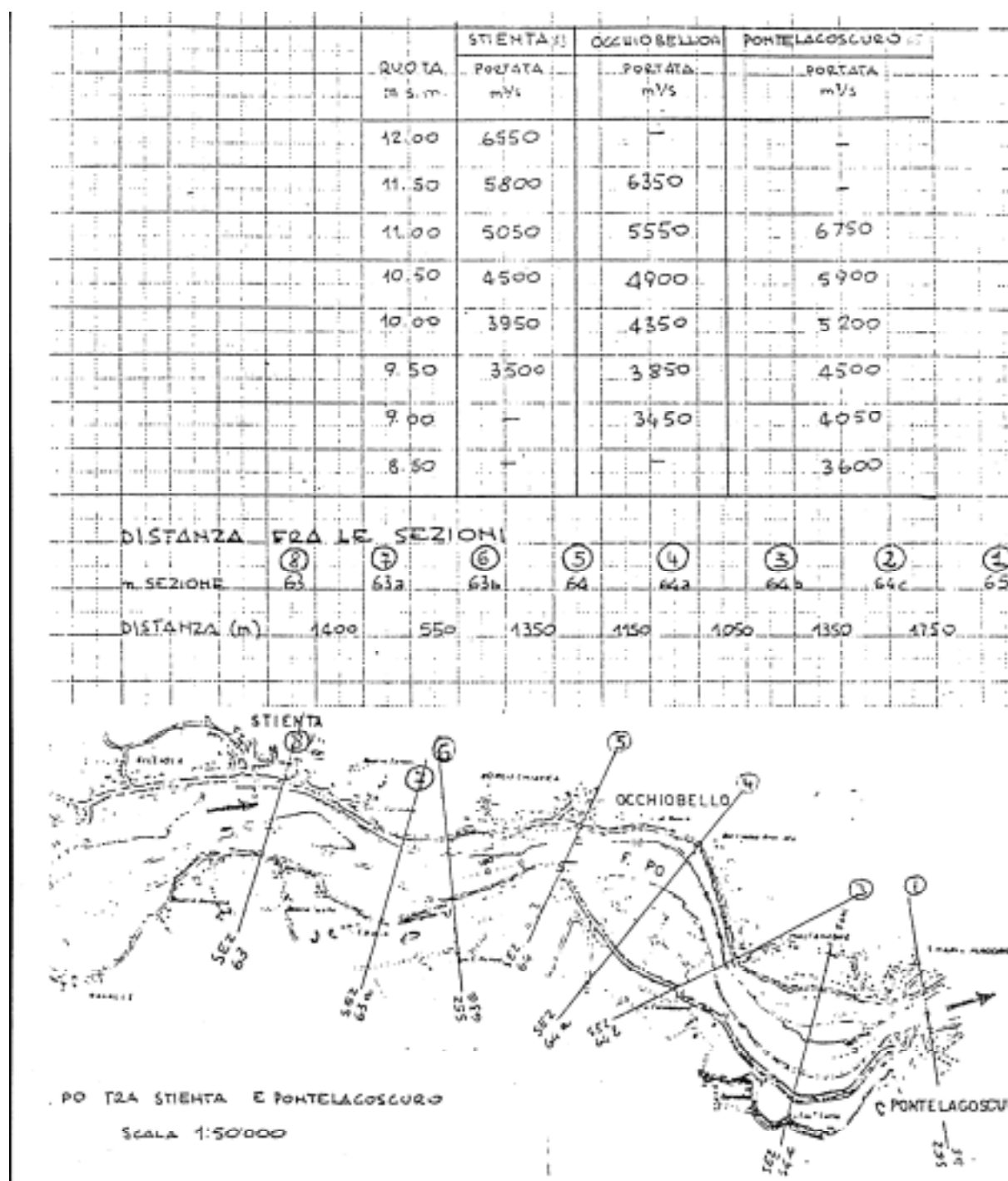


Fig. 5.1 – Dati per l'esercitazione sulle correnti in moto permanente

Sezione 5 (progr. 5300) - Occhiobello

x(m)	0,0	27,0	128,5	446,0	540,0
y(m)	15,49	7,40	3,80	2,88	15,18

Sezione 6 (progr. 6650)

x(m)	0,0	27,0	274,5	340,0	716,0	805,0
y(m)	16,46	13,46	4,96	-0,53	3,47	15,40

Sezione 7 (progr. 7200)

$x(m)$	0,0	40,5	94,5	128,8	170,0	305,0
$y(m)$	16,51	7,51	7,51	3,12	-1,64	3,69
$x(m)$	400,0	549,0	613,2			
$y(m)$	10,7	7,6	13,43			

Sezione 8 (progr. 8600) - Stienta

$x(m)$	0,0	67,5	175,3	310,5	440,0	501,0
$y(m)$	16,74	7,14	2,74	3,14	3,10	-1,76
$x(m)$	609,0	892,0	932,0			
$y(m)$	10,04	11,04	15,92			

Le scale delle portate rilevate nelle tre sezioni sono riportate di seguito.

Stienta

$h(m \text{ s.m.})$	9,5	10,0	10,5	11,0	11,5	12,0
$Q(m^3/s)$	3500	3950	4500	5050	5800	6550

Occhiobello

$h(m \text{ s.m.})$	9,0	9,5	10,0	10,5	11,0	11,5
$Q(m^3/s)$	3450	3850	4350	4900	5550	6350

Pontelagoscuro

$h(m \text{ s.m.})$	8,5	9,0	9,5	10,0	10,5	11,0
$Q(m^3/s)$	3600	4050	4500	5200	5900	6750

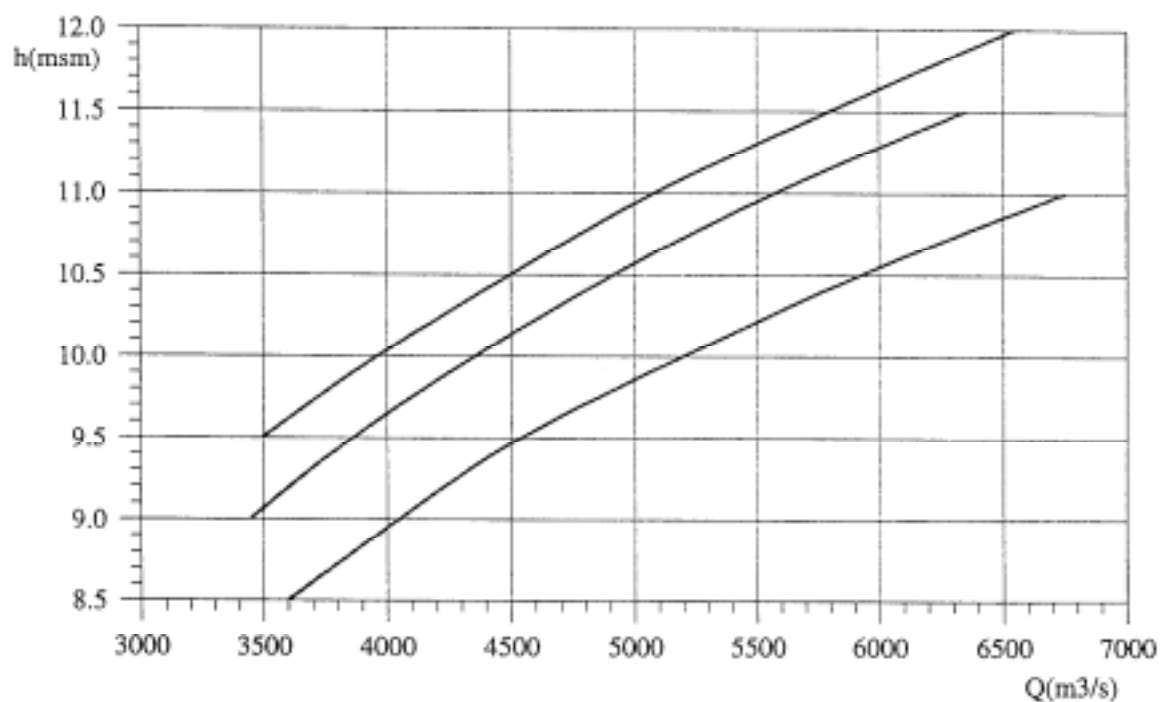


Fig. 5.2 – Scale delle portate in forma grafica

6. MOTO VARIO DI CORRENTI IN PRESSIONE

6.1 Generalità

Le variazioni della portata di regime in impianti in pressione generano processi di moto vario che possono essere dannosi per l'impianto in quanto provocano oscillazioni di pressione rispetto al valore di regime. Questi fenomeni devono quindi essere previsti e attentamente studiati in fase di progetto, al fine di diminuirne gli effetti mediante l'introduzione di opportuni dispositivi di protezione.

Le equazioni del moto vario in cui si tenga conto della comprimibilità dell'acqua e della deformabilità della condotta sono tipiche equazioni iperboliche, rappresentative di problemi di propagazione. Le onde di pressione e di portata si propagano cioè lungo la condotta con una celerità finita. In questo caso il problema matematico consiste nella risoluzione di equazioni differenziali alle derivate parziali iperboliche con le opportune condizioni iniziali e condizioni al contorno.

In certi casi è accettabile trascurare la comprimibilità dell'acqua e la deformabilità della condotta (ipotesi anelastica), il che equivale a dire che la celerità delle perturbazioni è infinita. In tale situazione il problema si può ridurre all'integrazione di un'equazione differenziale ordinaria, in quanto si perde la dipendenza della portata dall'ascissa lungo la condotta.

Esamineremo allora separatamente la risoluzione dei problemi di moto vario elastico e quella dei problemi di oscillazioni di massa.

6.2 Oscillazioni di massa

Le equazioni di continuità e del moto per una corrente unidimensionale si possono scrivere nella forma:

$$\frac{\partial(\rho Q)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho A)}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{dV}{dt} + J = 0,$$

essendo x l'ascissa lungo l'asse della condotta, t il tempo, H il carico piezometrico, Q la portata, ρ la densità del fluido, g l'accelerazione di gravità, A l'area della sezione trasversale, J la forza resistente per unità di peso.

Nell'ipotesi di poter trascurare la comprimibilità del liquido e la deformabilità della condotta l'equazione di continuità assume la forma

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 0,$$

per cui la portata risulta dipendente solo dal tempo ma non dall'ascissa. Di conseguenza, integrando lungo la un generico tronco di condotta di lunghezza L , l'equazione del moto può essere riscritta in generale nella forma:

$$H_L - H_0 + \frac{L}{gA} \frac{dQ}{dt} + LJ = 0,$$

Per definire completamente il problema occorre in generale legare i carichi nella sezione iniziale e finale della condotta alla portata, in base alla natura dei dispositivi di estremità presenti.

6.3 Esempi applicativi

6.3.1 MOTO VARIO NELLE GALLERIE DEGLI IMPIANTI IDROELETTRICI

Nel caso del moto vario in una galleria di un impianto idroelettrico ad esempio, tenendo conto della condizione di serbatoio a livello invariabile a monte si ha:

$$H_0 = H_s.$$

Nella sezione di valle, trascurando per semplicità la portata nella condotta forzata, ipotesi ammissibile per la notevole diversità dei tempi caratteristici dei fenomeni di moto vario nella condotta stessa e nella galleria, l'equazione di continuità si scrive nella forma:

$$\Sigma \frac{dH_P}{dt} = Q.$$

essendo H_P il carico piezometrico nel pozzo e Σ l'area della sezione del pozzo. Se è presente una strozzatura, facendo riferimento per semplicità ad una formula quadratica con coefficiente costante K_s , il legame tra i carichi nel pozzo e in condotta si può scrivere:

$$H_L - H_P = K_s Q |Q|.$$

Introducendo l'oscillazione Z del carico piezometrico nel pozzo rispetto al carico statico, si deve risolvere in definitiva nel caso più generale il sistema di due equazioni differenziali ordinarie del primo ordine costituito dall'equazione del moto:

$$Z + \frac{L}{gA} \frac{dQ}{dt} + K_s Q |Q| + \frac{L}{k^2 A^2 R^{4/3}} Q |Q| = 0,$$

in cui si è adottata la formula di Strickler per esprimere le perdite distribuite (R è il raggio idraulico) e dall'equazione di continuità:

$$\Sigma \frac{dZ}{dt} = Q.$$

Le condizioni iniziali si possono scrivere:

$$Z = -J_0 L \quad Q = Q_0.$$

In assenza di strozzatura e nell'ipotesi di perdite distribuite trascurabili il sistema di equazioni può essere facilmente integrato analiticamente. Derivando infatti la seconda delle equazioni e sostituendo nella prima si ottiene l'equazione differenziale di secondo ordine nella variabile Z :

$$Z + \frac{\Sigma L}{gA} \frac{d^2 Z}{dt^2} = 0.$$

Ponendo

$$\omega = \sqrt{\frac{gA}{\Sigma L}}$$

la soluzione dell'equazione, tenendo conto delle condizioni iniziali $Z=0$ e $dZ/dt=Q_0/\Sigma$ per $t=0$, è la seguente:

$$Z = V_0 \sqrt{\frac{LA}{g\Sigma}} \sin(\omega t).$$

La soluzione analitica può servire per confrontare la soluzione numerica, controllando l'accuratezza dello schema numerico adottato per risolvere il sistema.

6.3.2 MOTO VARIO NEGLI IMPIANTI DI SOLLEVAMENTO MUNITI DI CASSA D'ARIA

Nel caso del moto vario in un impianto di sollevamento munito di una cassa d'aria, prendendo in considerazione i carichi piezometrici assoluti, la condizione di serbatoio a livello invariabile all'estremo di valle della condotta consente di scrivere:

$$H_L = H_s.$$

Nella sezione iniziale si possono scrivere le seguenti equazioni:

- l'equazione della trasformazione politropica per l'aria contenuta nella cassa

$$H_c W^n = H_s W_s^n;$$

essendo H_c il carico assoluto dell'aria e W e W_s rispettivamente il generico volume d'aria e il volume d'aria in condizioni statiche;

- l'equazione della perdita di carico attraverso l'eventuale strozzatura tra cassa e condotta

$$H_c = H_0 + K_s Q |Q|;$$

- l'equazione di continuità tra la cassa e la condotta

$$Q - \frac{dW}{dt} = 0.$$

Introducendo anche in questo caso l'oscillazione Z del carico piezometrico nella cassa rispetto al carico statico, l'equazione del moto può essere scritta:

$$-Z + \frac{L}{gA} \frac{dQ}{dt} + K_s Q |Q| + \frac{L}{k^2 A^2 R^{4/3}} Q |Q| = 0.$$

Inoltre, differenziando l'espressione della politropica e sostituendo nell'equazione di continuità, questa si può scrivere nella forma:

$$- \frac{W_s H_s^{1/n}}{n(H_s + Z)^{1+1/n}} \frac{dZ}{dt} = Q.$$

Si ricade quindi nello stesso caso precedente di un sistema di due equazioni differenziali del primo ordine. Le condizioni iniziali sono in questo caso:

$$Z = J_0 L \quad Q = Q_0.$$

6.4 Verifica di un impianto di sollevamento con cassa d'aria. Oscillazioni di massa (esercitazione)

L'esercitazione consiste nel realizzare un programma in Fortran per il calcolo delle oscillazioni di moto vario in un impianto di sollevamento con cassa d'aria nell'ipotesi anelastica. Per risolvere il problema si può utilizzare lo schema di Runge-Kutta del 4° ordine, dopo aver messo in forma canonica il sistema di due equazioni differenziali del primo ordine nelle incognite Q e Z .

L'impianto da prendere in considerazione ha le seguenti caratteristiche:

$$\begin{aligned} D &= 0,5 \text{ m} \\ L &= 1000 \text{ m} \\ H_s &= 100 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_0 &= 0,2 \text{ m}^3/\text{s} \\ k &= 70 \text{ m}^{1/3}/\text{s} \\ W_s &= 2 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

Bisogna calcolare l'andamento nel tempo e la massima oscillazione del carico nella cassa in assenza di strozzatura ed in presenza di una strozzatura con coefficiente $K_s=500 \text{ s}^2/\text{m}^5$.

6.5 Moto vario elastico

6.5.1 EQUAZIONI DEL MOTO

Le equazioni del moto vario elastico possono essere espresse nella forma

$$\frac{\partial H}{\partial X} + \frac{1}{gA} \frac{\partial Q}{\partial T} + J = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial T} + \frac{c^2}{gA} \frac{\partial Q}{\partial X} = 0$$

essendo X l'ascissa lungo l'asse della condotta, T il tempo, H il carico, Q la portata, g l'accelerazione di gravità, A l'area della sezione trasversale, J la cadente e c la celerità delle onde elastiche.

La celerità, per una condotta a sezione circolare, è valutabile con l'espressione

$$c = \left(\frac{\frac{\varepsilon}{\rho}}{1 + \frac{\varepsilon D}{E s}} \right)^{1/2},$$

dove ε e ρ sono rispettivamente il modulo di elasticità a compressione cubica e la densità dell'acqua, D è il diametro, s è lo spessore della tubazione ed E il modulo di elasticità del materiale costituente la tubazione.

La cadente può essere valutata con le usuali formule per il moto uniforme. Se si adotta ad esempio la formula di Darcy-Weisbach, l'indice di resistenza può essere considerato costante e pari a quello di regime (modello stazionario), oppure può essere considerato funzione del numero di Reynolds e calcolato con la formula di Colebrook-White per valori del numero di Reynolds maggiori di 2000 e con la formula di Poiseuille per valori minori o uguali a 2000 (modello quasi-stazionario). Valutando le resistenze in moto vario in questo modo, queste tendono a essere sottostimate, specialmente se i transitori risultano rapidi.

6.5.2 METODO DELLE CARATTERISTICHE

Le equazioni del moto vario formano un sistema di equazioni alle derivate parziali iperbolico quasi lineare. Le variabili dipendenti sono il carico e la portata, le

variabili indipendenti l'ascissa e il tempo. Queste equazioni possono essere trasformate in equazioni differenziali ordinarie per mezzo del metodo delle caratteristiche.

Una combinazione lineare delle equazioni può essere scritta nella forma:

$$g \frac{\partial H}{\partial X} + \frac{1}{A} \frac{\partial Q}{\partial T} + g J + \lambda \left(\frac{\partial H}{\partial T} + \frac{c^2}{gA} \frac{\partial Q}{\partial X} \right) = 0,$$

e riordinando i termini nella forma:

$$g \frac{\partial H}{\partial X} + \lambda \frac{\partial H}{\partial T} + \frac{1}{A} \frac{\partial Q}{\partial T} + \lambda \frac{c^2}{gA} \frac{\partial Q}{\partial X} + g J = 0.$$

essendo λ un valore arbitrario.

Qualunque coppia di valori di λ fornisce ancora le equazioni originarie. Scegliendo opportunamente λ si arriva ad una semplificazione delle equazioni e ad una scrittura delle stesse in termini di derivate totali. Infatti si può scrivere:

$$\frac{dH}{dT} = \frac{\partial H}{\partial T} + \frac{\partial H}{\partial X} \frac{dX}{dT} \quad \frac{dQ}{dT} = \frac{\partial Q}{\partial T} + \frac{\partial Q}{\partial X} \frac{dX}{dT}$$

Quindi, se si sceglie λ in maniera tale che:

$$\frac{dX}{dT} = \frac{g}{\lambda} = \frac{\lambda c^2}{g}$$

l'equazione combinazione lineare si può scrivere:

$$\lambda \frac{dH}{dT} + \frac{1}{A} \frac{dQ}{dT} + g J = 0,$$

con λ che assume i due valori:

$$\lambda = \pm \frac{g}{c}$$

ed il corrispondente legame tra X e T risulta definito dall'espressione:

$$\frac{dX}{dT} = \pm c.$$

Sono state quindi individuate sul piano (X, T) due curve con pendenza rispettivamente $1/c$ e $-1/c$. Queste curve si chiamano linee caratteristiche (e nel caso in

esame sono rette perché c è costante). Le linee caratteristiche hanno la particolarità, dal punto di vista matematico, di essere linee di discontinuità della soluzione del problema differenziale. Dal punto di vista fisico rappresentano il percorso seguito dalle perturbazioni.

In termini di differenziali totali le equazioni possono essere riscritte nella forma:

$$dH \pm \frac{c}{gA} dQ \pm J c dT = 0 ,$$

valendo il segno + lungo una linea caratteristica positiva di equazione $dX/dT=c$ e il segno - lungo una linea caratteristica negativa di equazione $dX/dT=-c$.

6.5.3 POSSIBILI SCHEMI ALLE DIFFERENZE FINITE

Le equazioni ai differenziali totali scritte prima, insieme con le equazioni delle linee caratteristiche, si traducono immediatamente in schemi di calcolo alle differenze finite, che differiscono principalmente per il modo di calcolare il termine contenente le resistenze.

Nel seguito descriviamo uno schema del tipo predizione-correzione. Nella fase di predizione le equazioni si trasformano alle differenze finite adottando l'approssimazione rettangolare per la portata nel termine delle resistenze e l'approssimazione trapezia per tutti gli altri termini. Nella fase di correzione si adotta invece l'approssimazione trapezia per tutti i termini, tenendo conto del valore di predizione già calcolato.

Indicando rispettivamente con r e s gli indici dei punti della discretizzazione lungo gli assi X e T e con l'apice i valori di predizione, le equazioni in termini discreti si possono scrivere nel modo seguente.

Fase di predizione. Lungo la caratteristica positiva $dX/dT=c$:

$$(H'_{r,s+1} - H_{r-1,s}) + \frac{c}{gA} (Q'_{r,s+1} - Q_{r-1,s}) + c \Delta T [J(Q_{r-1,s})] = 0 ,$$

lungo la caratteristica negativa $dX/dT=-c$:

$$(H'_{r,s+1} - H_{r+1,s}) - \frac{c}{gA} (Q'_{r,s+1} - Q_{r+1,s}) - c \Delta T [J(Q_{r+1,s})] = 0 ;$$

Fase di correzione. Lungo la caratteristica positiva $dX/dT=c$:

$$(H_{r,s+1} - H_{r-1,s}) + \frac{c}{gA} (Q_{r,s+1} - Q_{r-1,s}) + c \Delta T \frac{1}{2} [J(Q'_{r,s+1}) + J(Q_{r-1,s})] = 0 ,$$

lungo la caratteristica negativa $dX/dT=-c$:

$$(H_{r,s+1} - H_{r+1,s}) - \frac{c}{gA}(Q_{r,s+1} - Q_{r+1,s}) - c \Delta T \frac{1}{2}[J(Q'_{r,s+1}) + J(Q'_{r+1,s})] = 0 .$$

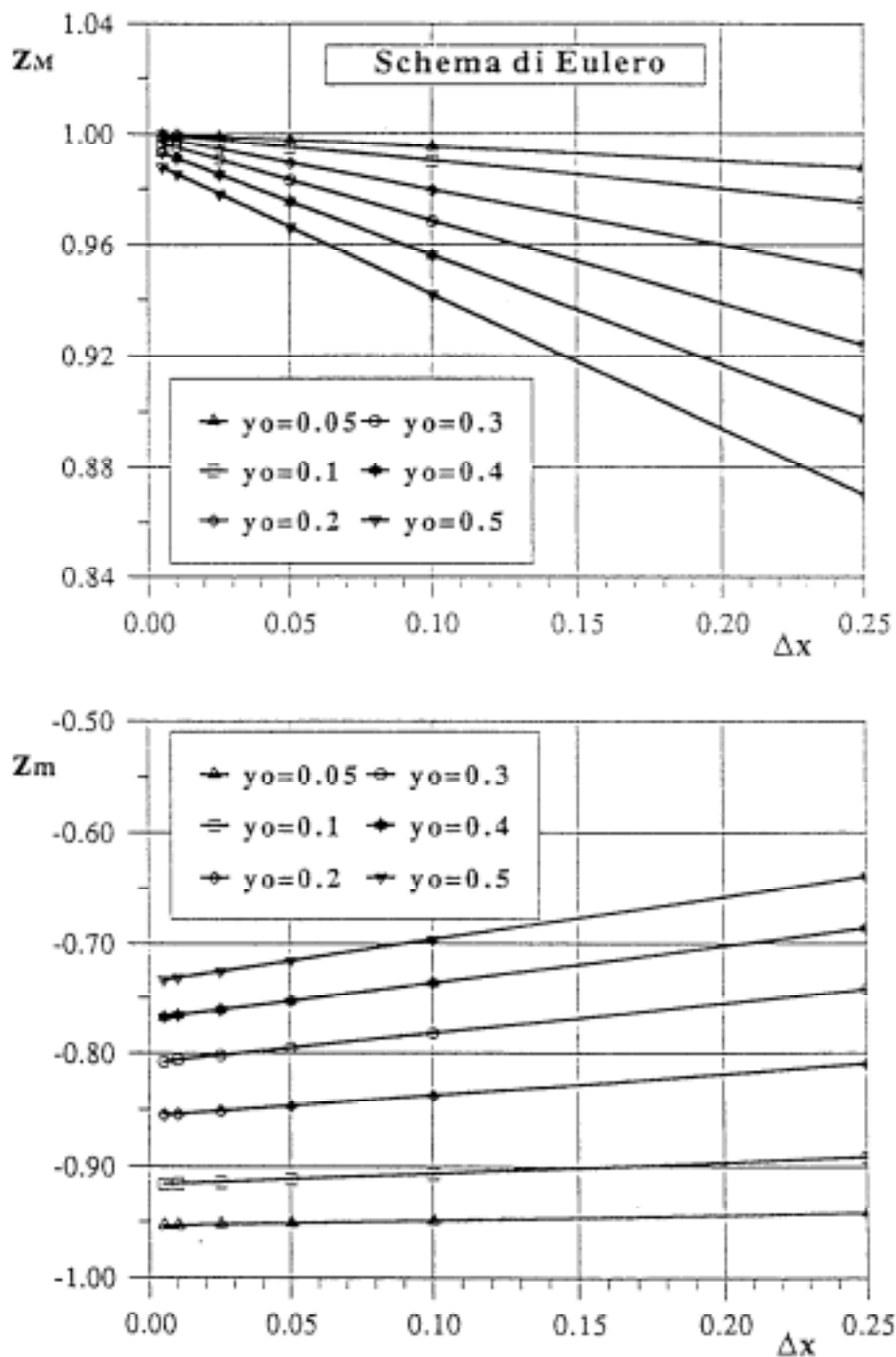


Fig. 6.1 – Integrazione con lo schema di Eulero (Testa, 1993)

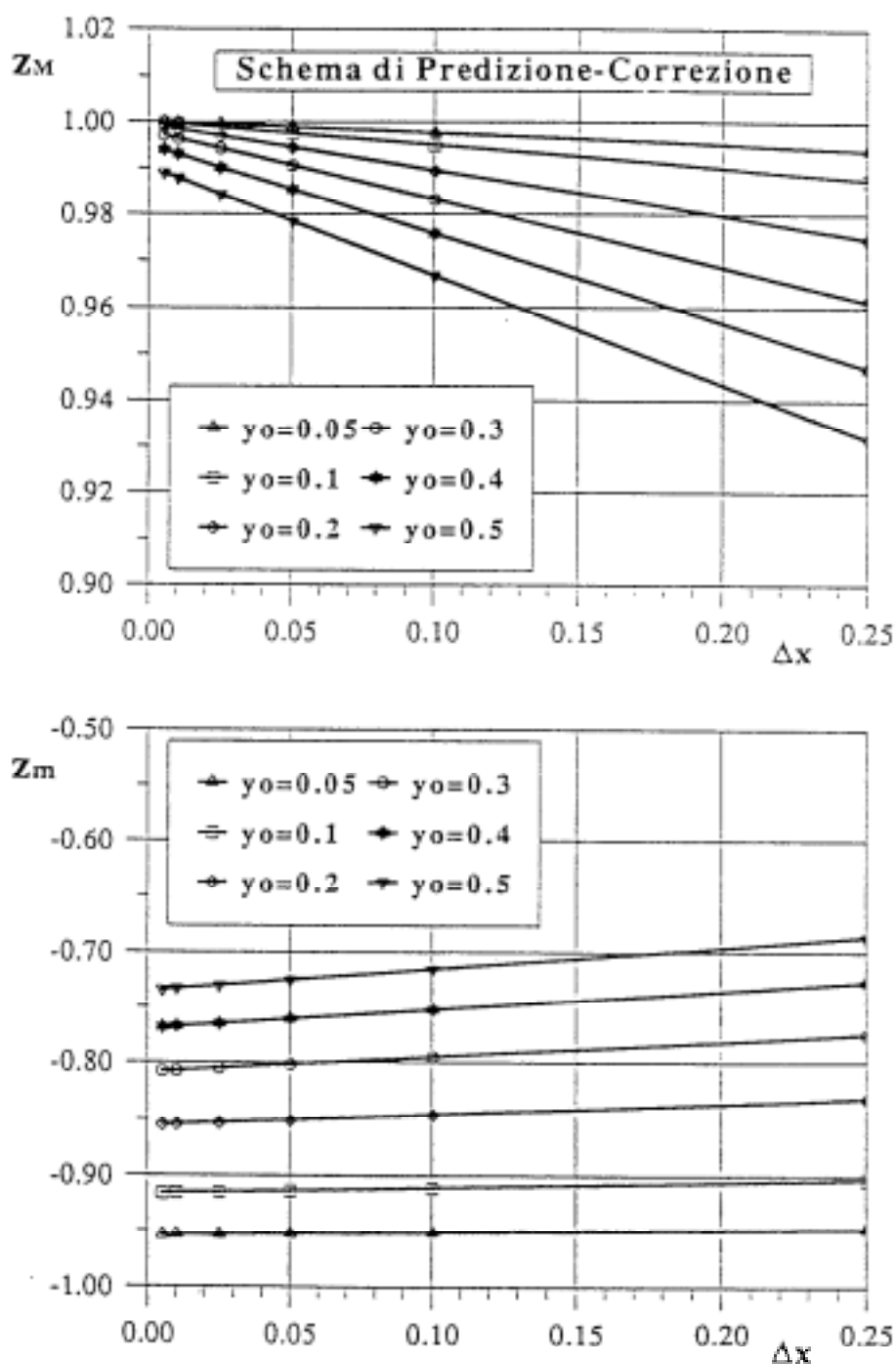


Fig. 6.2 – Integrazione con lo schema di predizione-correzione (Testa, 1993)

In alternativa, si può adottare uno schema più semplice basato sul metodo di Eulero, che consiste in pratica nell'adottare lo schema precedente arrestato alla semplice fase di predizione, senza alcuna correzione. Un'altra possibilità è di adottare uno schema implicito. Solitamente però lo schema descritto è abbastanza accurato senza essere troppo oneroso dal punto di vista del calcolo.

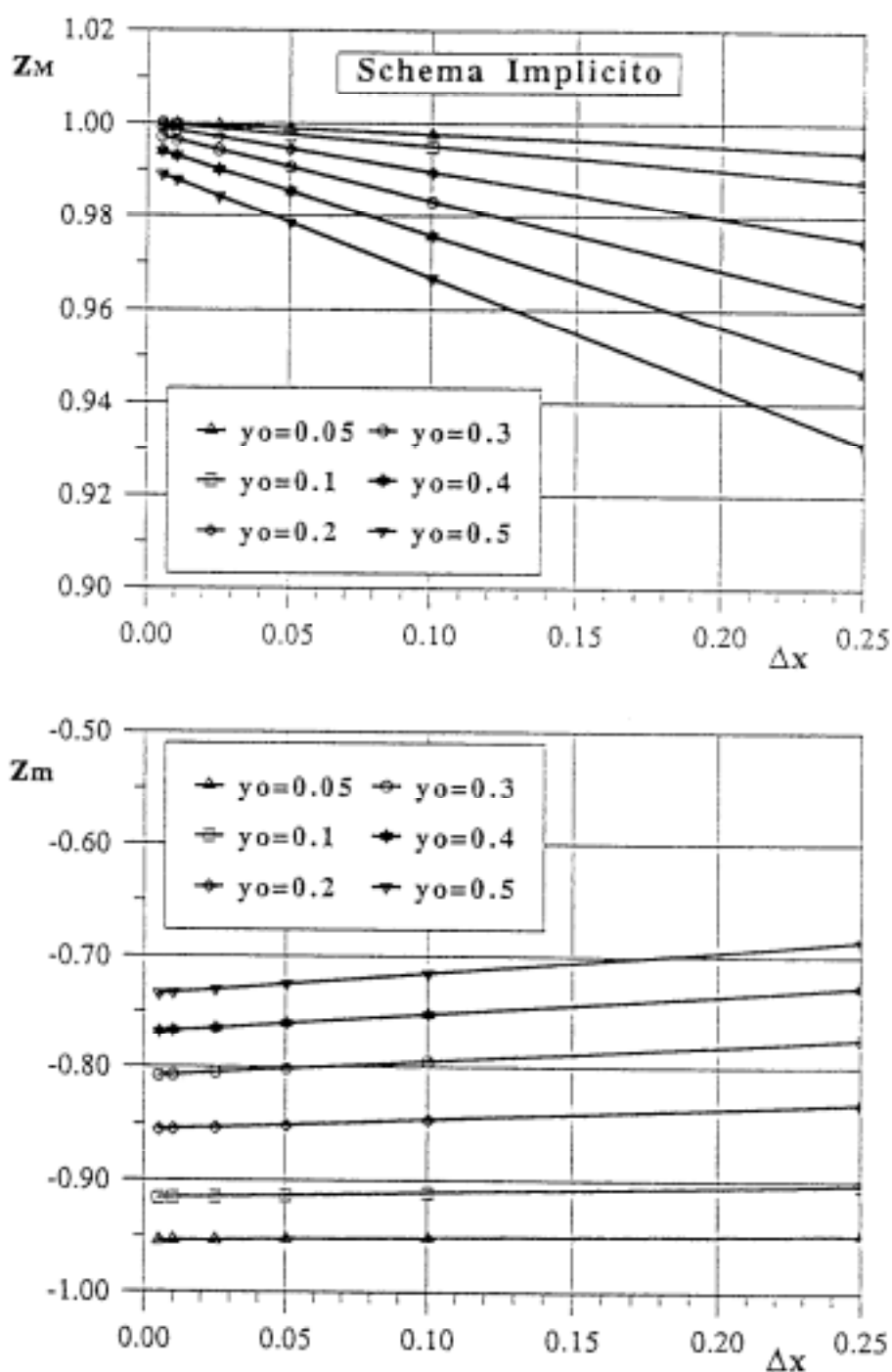


Fig. 6.3 – Integrazione con lo schema implicito (Testa, 1993)

Naturalmente le equazioni scritte valgono per una tubazione con caratteristiche geometriche, elastiche e di scabrezza uniformi. La generalizzazione tuttavia è semplice: in un intervallo in cui si ha una disuniformità basta mediare l'area, la celerità, le resistenze tra i due valori alle estremità.

Le equazioni alle differenze finite scritte valgono per i nodi interni del reticolo. Per i nodi sui contorni bisogna opportunamente combinare l'equazione valevole lungo una linea caratteristica con l'equazione, in termini differenziali o finiti, che rappresenta la particolare condizione al contorno. In particolare, all'estremo di monte occorre fare sistema tra la condizione al contorno e l'equazione valevole lungo la linea caratteristica negativa, mentre all'estremo di valle il sistema da risolvere è tra la condizione al contorno e l'equazione valevole lungo la linea caratteristica positiva.

6.6 Condizioni al contorno

6.6.1 CONDIZIONI INIZIALI

Le condizioni al contorno, necessarie per l'integrazione delle equazioni, sono costituite dalle condizioni iniziali, che rappresentano le condizioni dell'impianto all'istante iniziale del processo di moto vario, e dalle condizioni ai limiti, che esprimono le modificazioni subite dalle onde elastiche alle due estremità della condotta. In particolare le condizioni iniziali coincidono con le condizioni di regime. Si può quindi scrivere:

$$Q_{X,0} = Q_0$$

$$H_{X,0} = H_0 - J_0 X$$

6.6.2 CLASSIFICAZIONE DEI DISPOSITIVI D'ESTREMITÀ

La grande varietà di condizioni che si possono presentare alle estremità della tubazione richiede un criterio di classificazione. La classificazione matematica delle condizioni di estremità si traduce in un corrispondente comportamento fisico.

Un criterio di classificazione adottato è di ordine energetico: riguarda il carattere degli scambi di energia tra la tubazione e il dispositivo di estremità. Si individuano così due classi di condizioni ai limiti, alle quali corrisponde una differente struttura delle equazioni rappresentatrici.

I sistemi del primo tipo, detti "non dinamici", governano il flusso all'estremo del tubo, ma non sono in grado di crearvi accumulazioni di energia. Sono descritti da relazioni fra il carico e la portata in termini finiti, del tipo:

$$F(H, Q, T) = 0.$$

Se in tale equazione compare una sola delle due grandezze H o Q il sistema terminale è detto una "sorgente" della stessa grandezza.

I sistemi del secondo tipo, detti "dinamici", possono scambiare energia con la tubazione. Ammettono una rappresentazione matematica in termini differenziali, genericamente espressa tramite il sistema di equazioni

$$\frac{d\theta}{dT} = \psi(\theta; Q, H; T)$$

$$\phi(\theta; Q, H; T) = 0$$

Le equazioni del sistema dinamico contengono almeno una delle due grandezze Q o H all'estremo della tubazione. La seconda di queste equazioni è detta di impedenza e contiene le componenti di un vettore di stato θ del sistema considerato, rappresentativo dello stato del sistema stesso durante la evoluzione del fenomeno. Un altro importante criterio di caratterizzazione dei sistemi terminali è basato sul fatto che il tempo compaia o meno esplicitamente nelle condizioni ai limiti: si differenziano così rispettivamente i sistemi "non autonomi" da quelli "autonomi". La differenza fisica tra questi consiste nel fatto che i sistemi "non autonomi" sono attivi nel generare perturbazioni, mentre i sistemi "autonomi" possono solo assorbire, trasmettere e riflettere perturbazioni generate da altre cause.

6.6.3 ESEMPI DI CONDIZIONI AI LIMITI

Descriveremo nel seguito una serie di possibili condizioni di estremità. Faremo riferimento in generale a un dispositivo presente nella sezione iniziale della condotta, come normalmente si ha in un impianto di sollevamento che si voglia proteggere dalle sovrappressioni eccessive susseguenti allo stacco improvviso dell'impianto di pompaggio.

6.6.3.1 Volano

In questo caso la condizione al limite, rappresentante il fenomeno di arresto del gruppo di pompaggio, si ricava dalle seguenti equazioni:

- equazione del bilancio energetico della pompa

$$C dT = -I d\Omega;$$

- equazione caratteristica prevalenza-portata

$$F(Q, \Omega, Y) = 0;$$

- equazione caratteristica coppia-portata

$$F(Q, \Omega, C) = 0;$$

- equazione che lega carico d'aspirazione e carico di mandata

$$H_{0,T} = Y + H_a.$$

6.6.3.2 Cassa d'aria

All'istante iniziale, ipotizzando come di consueto un'interruzione istantanea della portata di alimentazione, il valore della portata può ricavarsi uguagliando la variazione elastica di carico alla perdita di carico dovuta alla strozzatura. Facendo riferimento per semplicità ad una formula quadratica con coefficiente costante K_s , si ottiene:

$$\frac{c}{gA}(Q_0 - Q_{0,0}) = K_s Q_{0,0} |Q_{0,0}| = H_0 - H_{0,0} .$$

Il corrispondente valore del carico risulta

$$H_{0,0} = H_s + J_0 L - \frac{c}{gA}(Q_0 - Q_{0,0})$$

La condizione al limite si basa sulle seguenti equazioni:

- l'equazione della trasformazione politropica per l'aria contenuta nella cassa

$$H_c W^n = H_s W_s^n;$$

essendo H_c il carico assoluto dell'aria e W e W_s rispettivamente il generico volume d'aria e il volume d'aria in condizioni statiche;

- l'equazione della perdita di carico attraverso l'eventuale strozzatura tra cassa e condotta, ricavata nelle ipotesi di trascurare sia il dislivello tra l'interfaccia aria-acqua nella cassa e il baricentro della sezione d'innesto della cassa, sia l'inerzia del liquido contenuto nella cassa stessa

$$H_c = H_{0,T} + K_s Q_{0,T} |Q_{0,T}|;$$

- l'equazione di continuità tra la cassa e la condotta

$$Q_{0,T} - \frac{dW}{dT} = 0.$$

6.6.3.3 Cassa d'aria con strozzatura dissimmetrica

Se si ha un dispositivo di strozzatura dissimmetrica si adottano due valori del coefficiente K_s rispettivamente per la fase di flusso e per la fase di riflusso:

$$K_s = K_{sa} \quad Q_{0,T} \geq 0 ,$$

$$K_s = K_{sr} \quad Q_{0,T} < 0 .$$

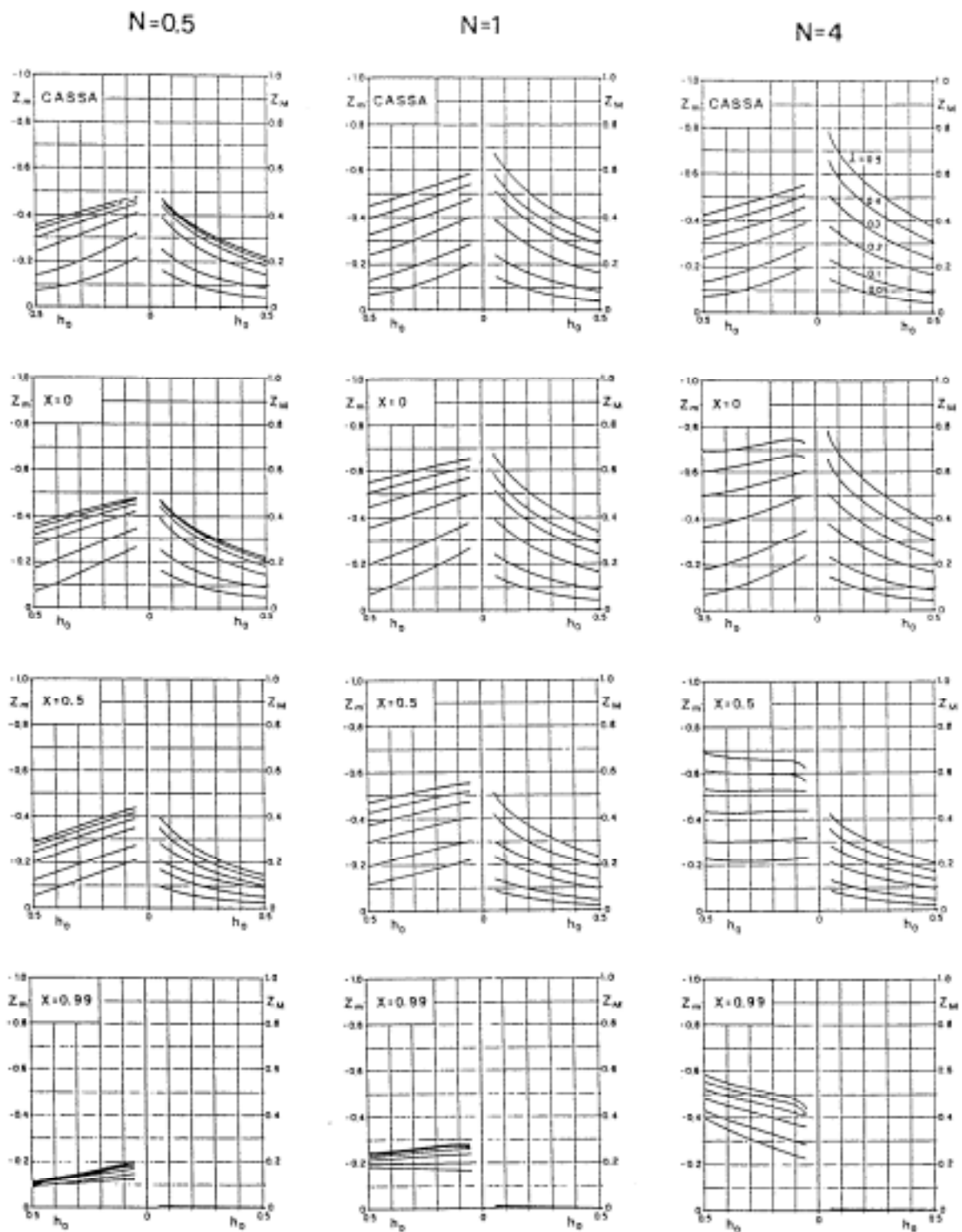


Fig. 6.4 - Strozzatura ottima. Oscillazioni estreme (Modica e Pezzinga, 1989)

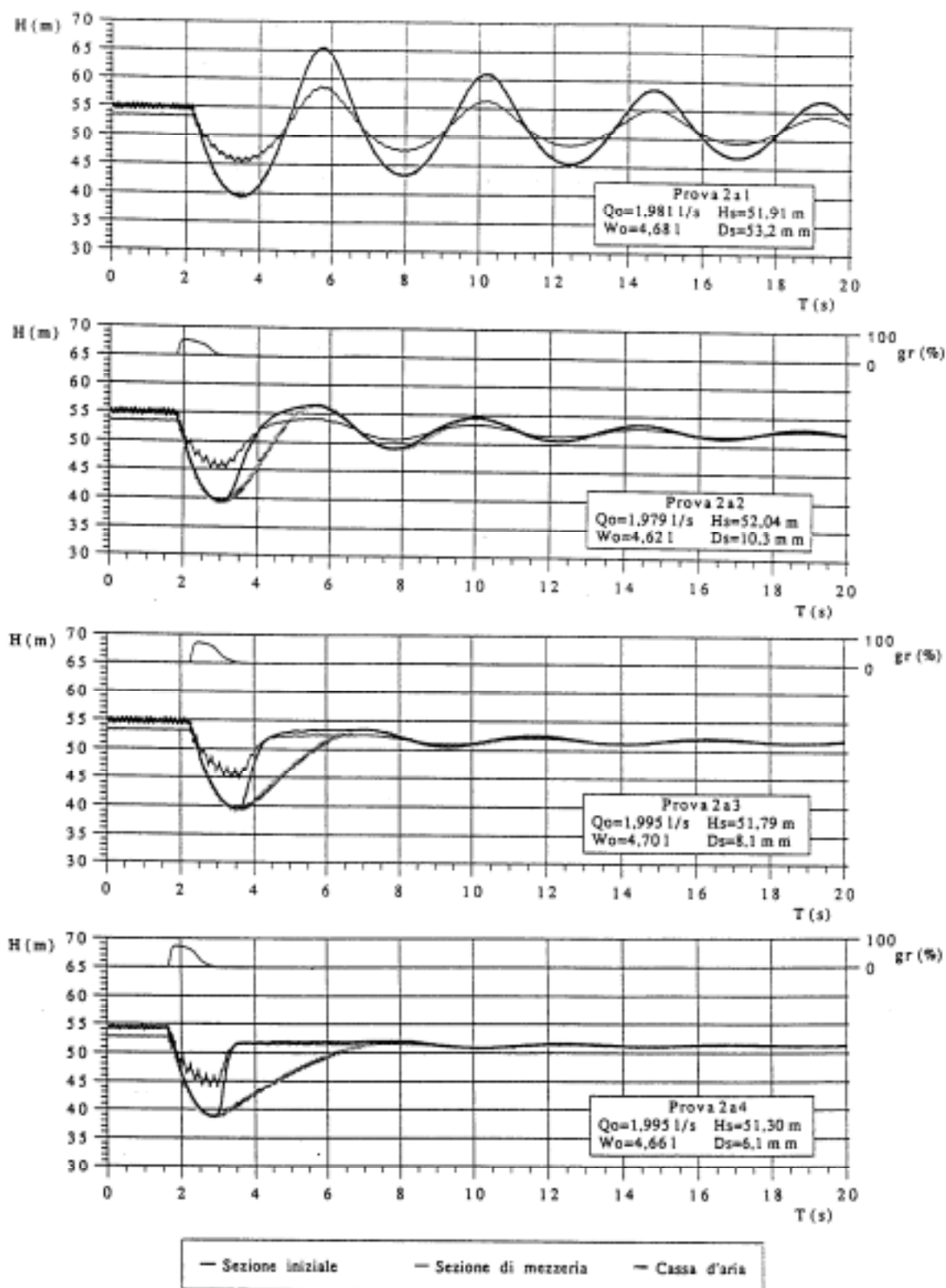


Fig. 6.5 - Oscillazioni per strozzatura dissimmetrica (Modica e Pezzinga, 1990)

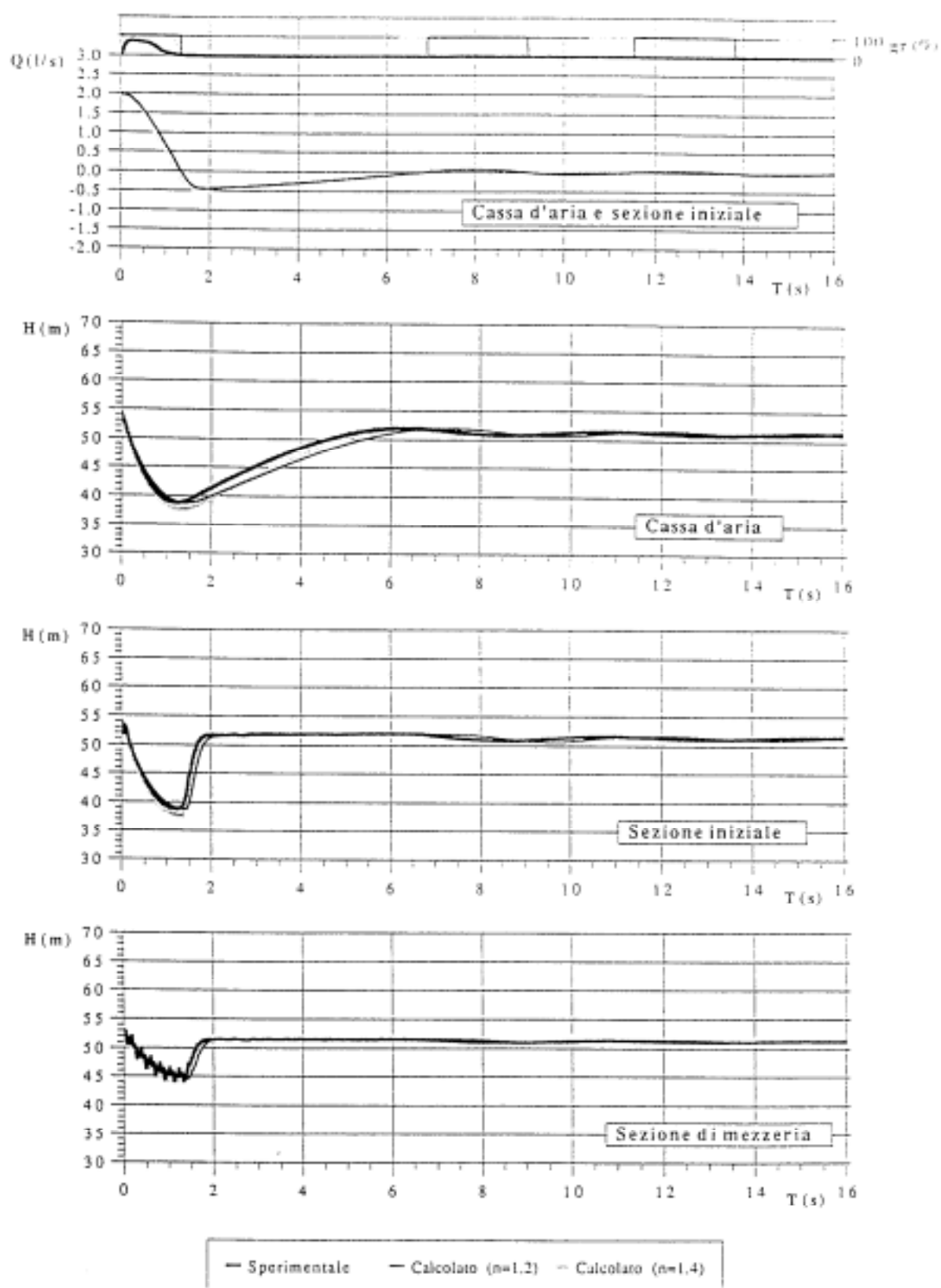


Fig. 6.6 - Confronti per strozzatura dissimmetrica (Modica e Pezzinga, 1990)

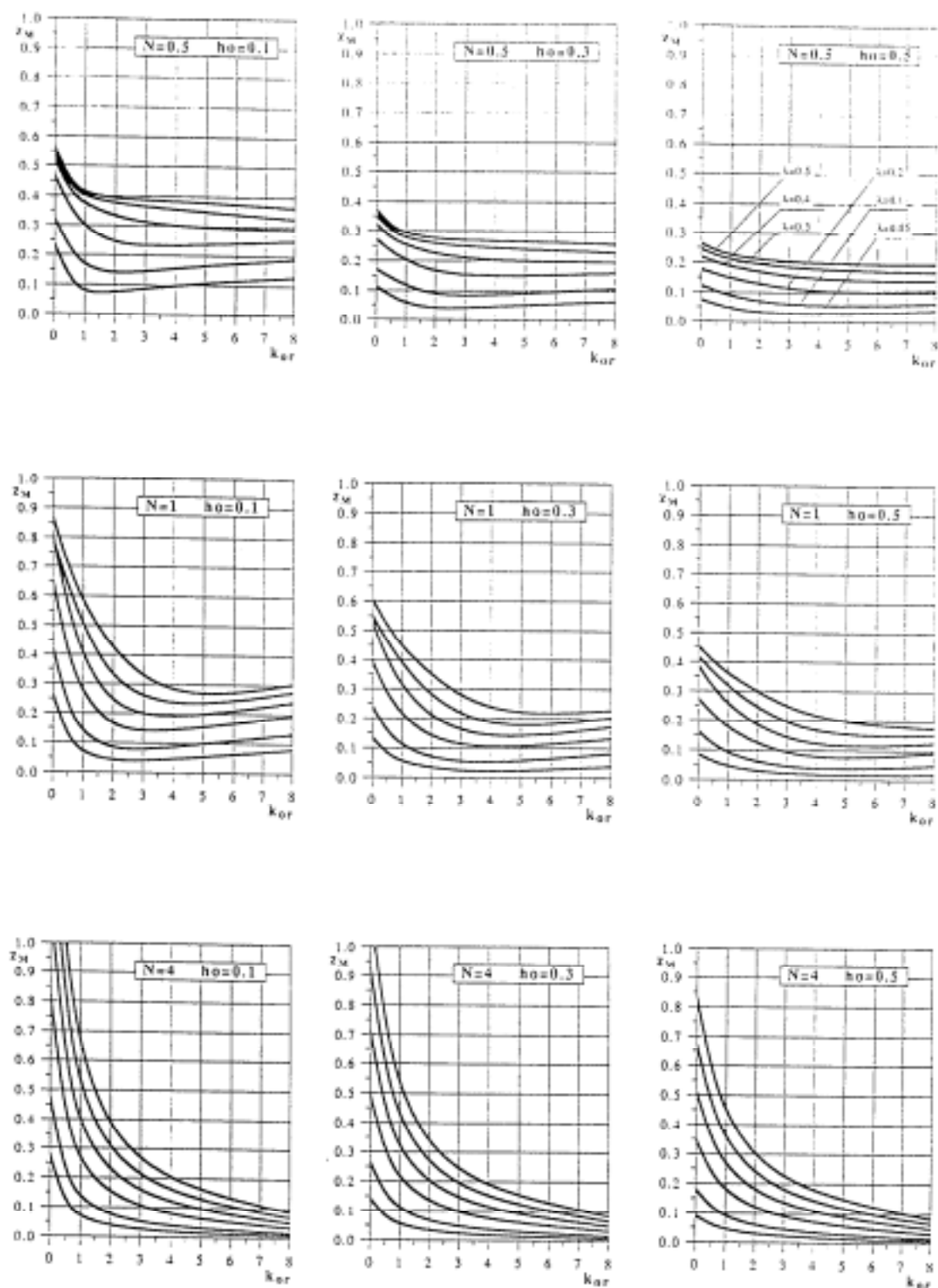


Fig. 6.7 - Massimi per strozzatura dissimmetrica (Modica e Pezzinga, 1990)

6.6.3.4 Pozzo piezometrico

Per la condotta con pozzo piezometrico la condizione al limite si basa sull'equazione di continuità tra pozzo e condotta, che, nell'ipotesi di trascurare l'inerzia del liquido contenuto nel pozzo e in assenza di perdite di carico concentrate, può essere scritta nella forma

$$\Sigma dH_{0,T} = - Q_{0,T} dT .$$

6.6.3.5 Cassa d'acqua

Per la condotta con cassa d'acqua la condizione al limite si scrive:

$$\begin{aligned} \Sigma dH_{0,T} &= - Q_{0,T} dT & Q_{0,T} &\geq 0 , \\ Q_0 &= 0 & Q_{0,T} &< 0 . \end{aligned}$$

6.6.3.6 Tronco elastico a parametri concentrati

Per la condotta con tronco elastico la condizione al limite lega la portata alla deformazione, considerata elastica, del tronco e dell'acqua contenuta al suo interno. L'equazione di continuità si può scrivere quindi

$$\frac{gW_t}{c_t^2} dH_{0,T} = - Q_{0,T} dT .$$

6.6.3.7 Serbatoio

La condizione al limite di valle, prendendo in considerazione un serbatoio a livello invariabile, si può esprimere nella forma

$$H_{L,T} = H_s .$$

6.7 Verifica di un impianto di sollevamento con cassa d'aria. Moto vario elastico (esercitazione)

L'esercitazione consiste nell'utilizzare un programma in Fortran per il calcolo delle oscillazioni di moto vario in un impianto di sollevamento con cassa d'aria nell'ipotesi elastica. Per risolvere le equazioni il programma utilizza il metodo delle caratteristiche e uno schema di predizione-correzione. Nel programma si fa riferimento ai seguenti parametri adimensionali che definiscono il problema:

$$N = \frac{cV_0}{gH_s}, \quad \lambda = \frac{ALV_0^2}{2gH_sW_s}, \quad y_0 = \frac{J_0L}{H_s}, \quad k_{0a} = \frac{K_{sa}Q_0^2}{H_s}, \quad k_{0r} = \frac{K_{sr}Q_0^2}{H_s}.$$

L'impianto da prendere in considerazione ha le stesse caratteristiche di quello dell'esercitazione precedente. Inoltre, le grandezze da prendere in considerazione per il calcolo della celerità sono le seguenti:

$$s = 0,02 \text{ m}$$

$$E = 30000 \text{ N/mm}^2$$

Bisogna calcolare l'andamento nel tempo e la massima oscillazione del carico nella cassa in assenza di strozzatura ed in presenza di una strozzatura con coefficiente $K_s=500 \text{ s}^2/\text{m}^5$, e confrontare i risultati con quelli ottenuti nell'ipotesi anelastica.

6.8 Cavitazione

Quando in condotta, a causa dell'arrivo di onde di depressione, la pressione scende al di sotto della tensione di vapore del liquido si verificano fenomeni di cavitazione. In tal caso il processo di moto vario risulta di più difficile studio in quanto il deflusso si altera a causa della formazione di una fase aeriforme non disciolta. In generale la successiva scomparsa della fase aeriforme è accompagnata da elevati valori di sovrappressione, che possono danneggiare la condotta. Si possono identificare due tipi di cavitazione. Nel primo la fase gassosa arriva, in determinati tratti di condotta, a interessare quasi completamente la sezione trasversale: questo primo tipo è designato come "rottura di vena liquida". Nel secondo tipo definito "deflusso a bolle", la fase gassosa si trova distribuita in un tratto abbastanza lungo sotto forma di bolle più o meno grandi. Sono ambedue fenomeni la cui modellazione matematica è piuttosto complessa.

In generale le cavità sono caratterizzate dalla presenza sia di gas che di vapore. Tuttavia è usuale, nei modelli di cavitazione, considerare la presenza di un solo componente della fase aeriforme. Si parla quindi di cavitazione vaporosa o di cavitazione gassosa. Nel primo caso si ipotizza l'assenza di gas in condotta e la cavità si forma quando la pressione raggiunge la tensione di vapore. Nel secondo caso la massa del vapore è trascurata e si considera invece una certa quantità di gas libero, costante nel tempo nel caso più semplice, in forma di bolle che accrescono il loro volume quando la pressione diminuisce, con variazione della celerità. In entrambi i casi un rilascio di gas disciolto può avvenire in seguito alla diminuzione della pressione. Inoltre si manifestano dissipazioni addizionali che nascono dalle interazioni tra fase liquida e fase aeriforme. Quindi quelli descritti sono due schemi ideali, che comunque forniscono risultati abbastanza vicini tra loro e che danno indicazioni molto precise sulla oscillazioni di pressione massime e minime. Inoltre, pur potendosi utilizzare sempre il metodo delle caratteristiche, la dipendenza della celerità dalla pressione rende più appropriati schemi numerici di cui si tratterà in maniera approfondita a proposito delle correnti a superficie libera in moto vario. Di seguito si illustrano due semplici modelli di cavitazione

vaporosa o gassosa distribuita, rimandando ai capitoli successivi per gli schemi numerici per l'integrazione delle equazioni.

6.8.1 CAVITAZIONE VAPOROSA

La densità della miscela liquido-vapore può essere espressa in funzione delle densità del liquido e del vapore:

$$\rho = \rho_l(1 - \alpha) + \rho_v \alpha$$

dove ρ_l è la densità del liquido, ρ_v è la densità del vapore e α è il rapporto tra volume del vapore e volume totale. Essendo la densità della miscela una funzione della pressione p e della frazione di vapore α , l'equazione di continuità della miscela può essere scritta, considerando piccole frazioni di vapore, nella forma:

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \rho c^2 \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\rho c^2}{A} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

Introducendo la variabile ϕ :

$$\phi = \frac{p}{\rho g} - \frac{c^2}{g} \alpha$$

l'equazione di continuità può essere riscritta nella forma:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{c^2}{gA} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

da cui si può ricavare ϕ . La pressione e la frazione di vapore si possono quindi calcolare rispettivamente come:

$$p = \max(\rho g \phi, p_v)$$

$$\alpha = \max\left(0, \frac{p_v - \rho g \phi}{\rho a^2}\right)$$

essendo p_v è la tensione di vapore.

6.8.2 CAVITAZIONE GASSOSA

La densità della miscela liquido-gas può essere espressa in funzione delle densità del liquido e della massa di gas libero per unità di volume della miscela m :

$$\rho = \left(1 - \frac{mRT}{p}\right)\rho_l + m$$

Considerando per semplicità m costante, nell'ipotesi di piccole quantità di gas, l'equazione di continuità si può scrivere:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\rho c^2}{A} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

con la celerità c della miscela liquido-gas data dall'espressione:

$$c = c_0 \frac{p}{\sqrt{p^2 + \rho c_0^2 mRT}}$$

dove c_0 è la celerità per $m = 0$. Introdotta la variabile ϕ :

$$\phi = p - \frac{\rho c_0^2 mRT}{p}$$

l'equazione di continuità si scrive:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{c_0^2}{gA} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

da cui si può ricavare ϕ . La pressione si calcola quindi dall'espressione:

$$p = \frac{\phi + \sqrt{\phi + 4\rho c_0^2 mRT}}{2}$$

La pressione totale si valuta quindi come somma della pressione del gas e della tensione di vapore, perché nelle bolle di gas è presente anche il vapore. Naturalmente le pressioni a cui si fa riferimento sono assolute.

6.9 Equazioni indefinite per tubazione viscoelastica

Si è visto che parte degli effetti dissipativi presenti nel moto vario in condotte di materiale plastico sono dovuti al comportamento non elastico del materiale costituente la condotta. In particolare si è visto che adottando un comportamento di tipo viscoelastico si riescono a riprodurre i fenomeni di moto vario nelle tubazioni in materiale plastico con sufficiente accuratezza.

Ammettendo per il materiale un comportamento viscoelastico lineare, si può adottare un modello di Kelvin-Voigt, con cui il comportamento meccanico del materiale viene rappresentato con una catena di elementi, costituiti da una molla accoppiata in parallelo ad uno smorzatore viscoso e congiunti ad una estremità ad una semplice molla per rappresentare la componente di deformazione istantanea. Maggiore è il numero di elementi meglio il modello approssima il comportamento reale del materiale, anzi è possibile dimostrare che il modello può simulare qualsiasi comportamento viscoelastico qualora sia dotato di un numero infinito di elementi.

La deformazione totale può essere espressa come la somma di una componente istantanea e di una ritardata:

$$\varepsilon = \varepsilon_i + \varepsilon_r$$

Utilizzando il modello di Kelvin-Voigt a n elementi si ottiene:

$$\varepsilon_r = \sum_{j=1}^n \varepsilon_j$$

La componente di deformazione istantanea è data da: $\varepsilon_i = \sigma/E_0$.

Per la componente ritardata, detti η_j ed E_j rispettivamente la viscosità ed il modulo elastico del generico elemento, imponendo l'equilibrio del generico elemento si ottiene l'equazione differenziale:

$$\sigma = E_j \varepsilon_j + \eta_j \frac{d\varepsilon_j}{dT}$$

Questa equazione può essere messa sotto la seguente forma:

$$\frac{d\varepsilon_j}{dT} = \frac{1}{\tau_j} \left(\frac{\sigma}{E_j} - \varepsilon_j \right)$$

dove $\tau_j = \eta_j/E_j$ è detto tempo di ritardo del j -esimo elemento di Kelvin-Voigt.

Nel caso di una condotta di diametro D e spessore s , soggetta alla pressione interna p , nelle ipotesi che alla parete siano trascurabili gli sforzi di taglio e le forze d'inerzia, per le deformazioni si ottengono le seguenti espressioni:

$$\varepsilon_i = \frac{pD\lambda}{2sE_0}$$

$$\frac{d\varepsilon_j}{dT} = \frac{1}{\tau_j} \left(\frac{pD\lambda}{2sE_j} - \varepsilon_j \right).$$

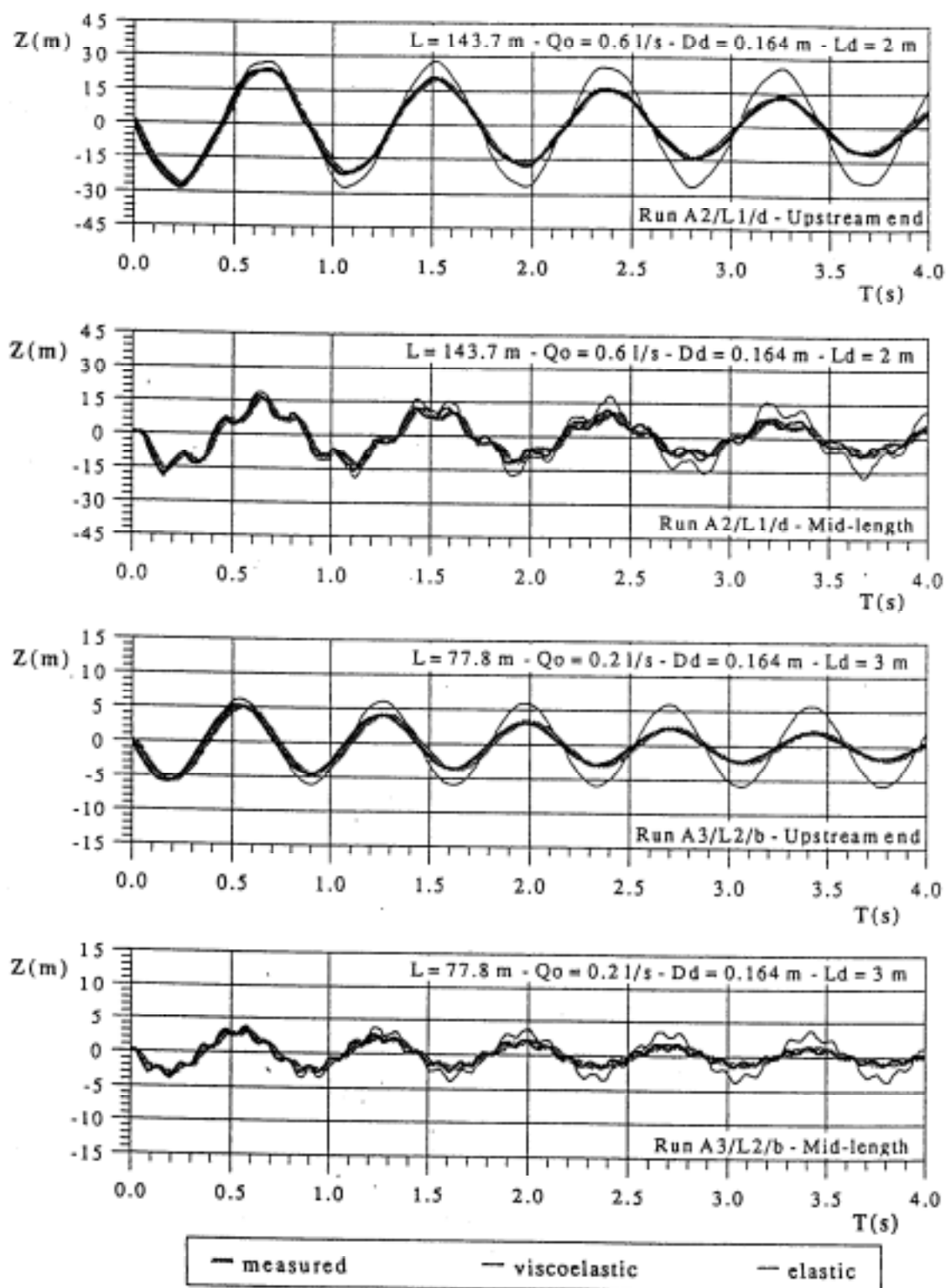


Fig. 6.8 – Oscillazioni con tronco deformabile (Pezzinga e Scandura, 1995)

λ è un parametro legato alle condizioni di vincolo ed è dato da

$$\lambda = (1 + \mu) \frac{2s}{D} + \frac{D}{D + s}$$

se la condotta è vincolata in modo che la deformazione longitudinale non sia impedita, e

$$\lambda = (1 + \mu) \frac{2s}{D} + (1 - \mu^2) \frac{D}{D + s}$$

per deformazione longitudinale nulla, essendo μ il coefficiente di Poisson.

L'introduzione del comportamento viscoelastico lineare rispetto al caso del materiale puramente elastico modifica solo l'equazione di continuità che si può scrivere:

$$\frac{\partial V}{\partial X} + 2 \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial T} + \frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial p}{\partial T} = 0$$

dove c è da calcolare con il modulo E_0 relativo alla deformazione istantanea.

All'equazione di continuità occorre associare l'equazione del moto:

$$\frac{1}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial X} + \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial T} + J = 0$$

e quella della deformazione ritardata

$$\frac{\partial \varepsilon_j}{\partial T} = \frac{1}{\tau_j} (b_j p - \varepsilon_j)$$

Queste equazioni possono essere trasformate in equazioni ai differenziali sulle linee caratteristiche:

$$dp \pm \rho c dV + 2 \rho c^2 \sum_{j=1}^n \frac{(b_j p - \varepsilon_j)}{\tau_j} dT \pm \rho g J c dT = 0$$

$$\frac{d\varepsilon_j}{dT} - \frac{1}{\tau_j} (b_j p - \varepsilon_j) = 0$$

Nell'ipotesi di condotta orizzontale, scegliendo il riferimento in corrispondenza del suo asse, tali equazioni possono essere scritte nella seguente forma:

$$dH \pm \frac{c}{gA} dQ + 2 \frac{c^2}{g} \sum_{j=1}^n \frac{(b_j \rho g H - \varepsilon_j)}{\tau_j} dT \pm J c dT = 0$$

$$d\varepsilon_j - \frac{(b_j \rho g H - \varepsilon_j)}{\tau_j} dT = 0$$

Limitandosi al modello di Kelvin-Voigt ad un solo elemento le equazioni diventano:

$$dH \pm \frac{c}{gA} dQ + \frac{2\rho c^2 b_1}{\tau_1} H dT - \frac{2c^2}{\tau_1 g} \varepsilon_1 dT \pm J c dT = 0$$

$$d\varepsilon_1 - \frac{(b_1 \rho g H - \varepsilon_1)}{\tau_1} dT = 0$$

6.10 Le equazioni del moto bidimensionali in coordinate cilindriche e i modelli quasi bidimensionali

Numerosi studi teorici e sperimentali hanno messo in evidenza che nei fenomeni di moto vario nelle correnti in pressione le dissipazioni di energia differiscono sensibilmente da quelle che si manifestano in condizioni di moto uniforme. Poiché gli errori di valutazione delle resistenze rilevati nei modelli unidimensionali possono essere imputati alla diversità che intercorre fra gli effettivi profili della velocità in condizioni di moto vario e quelli, uniformi sulla sezione, considerati nei modelli unidimensionali stessi, per valutare più accuratamente le resistenze si può ricorrere a modelli quasi bidimensionali, in cui si prende in considerazione la disuniformità della distribuzione della velocità lungo la direzione radiale, ma si assume un unico valore della pressione nella sezione.

L'equazione di continuità e le equazioni del moto in coordinate cilindriche per una tubazione elastica a sezione circolare nell'ipotesi di campo di moto bidimensionale a simmetria assiale possono essere espresse nella forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial T} + \frac{\partial(\rho U)}{\partial X} + \frac{1}{R} \frac{\partial(\rho R V)}{\partial R} = 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial T} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial R} = -g \frac{\partial H}{\partial X} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_X}{\partial X} - \frac{1}{\rho R} \frac{\partial(R \tau_{XR})}{\partial R},$$

$$\frac{\partial V}{\partial T} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial R} = -g \frac{\partial H}{\partial R} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{XR}}{\partial X} - \frac{1}{\rho R} \frac{\partial(R \sigma_R)}{\partial R} + \frac{\sigma_\theta}{R},$$

essendo X l'ascissa lungo l'asse della condotta, R la distanza dall'asse, T il tempo, H il carico piezometrico, U e V le componenti della velocità rispettivamente in direzione X e R , ρ la densità del fluido, g l'accelerazione di gravità, σ_X , τ_{XR} , σ_R e σ_θ le componenti del tensore degli sforzi.

Queste equazioni consentono di determinare le variabili H , U e V , dipendenti in generale da X , R e T , una volta che siano definiti i legami tra gli sforzi e le velocità di deformazione, le condizioni ai limiti e le condizioni iniziali. Tuttavia, essendo la risoluzione delle equazioni notevolmente onerosa, si può ricorrere a semplificazioni che rendano le equazioni stesse più facilmente risolvibili.

Normalmente è possibile trascurare la componente V della velocità in direzione radiale e le sue derivate, così come nell'equazione del moto in direzione longitudinale la derivata dello sforzo normale σ_X e il termine convettivo residuo, in analogia a quanto si fa nei modelli unidimensionali.

Un'ulteriore ipotesi semplificativa che rende il modello quasi bidimensionale consiste nell'assumere per ogni istante di tempo un unico valore del carico piezometrico in ciascuna sezione, il che equivale a trascurare i termini contenenti gli sforzi nell'equazione del moto in direzione radiale, assumendo quindi:

$$\frac{\partial H}{\partial R} = 0.$$

Delle variabili dipendenti U e H , la prima è considerata funzione di X , R e T , mentre la seconda solo di X e T . L'insieme di queste ipotesi, con l'ulteriore usuale semplificazione di trascurare la derivata di ρ rispetto a X nell'equazione di continuità, consente di riscrivere il sistema di equazioni nella forma:

$$\frac{\partial H}{\partial T} + \frac{c^2}{gA} \frac{\partial Q}{\partial X} = 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial T} + g \frac{\partial H}{\partial X} + \frac{1}{\rho R} \frac{\partial (R\tau_{XR})}{\partial R} = 0,$$

essendo c la celerità delle onde elastiche e Q la portata. Quest'ultima può essere calcolata integrando il profilo di velocità sull'intera sezione:

$$Q = \int_0^{R_0} U 2\pi R dR.$$

essendo R_0 il raggio della condotta.

Lo sforzo tangenziale τ_{XR} (d'ora in poi indicato semplicemente τ) può essere valutato per il regime laminare per mezzo della legge di Newton:

$$\tau = -\rho \nu \frac{\partial U}{\partial R}$$

dove ν è la viscosità cinematica.

Osservando poi che $dA = 2\pi R dR$, l'equazione del moto si può anche scrivere:

$$\frac{\partial U}{\partial T} + g \frac{\partial H}{\partial X} + \frac{2\pi}{\rho} \frac{\partial(R\tau)}{\partial A} = 0.$$

Per il regime turbolento si può estendere al moto vario un semplice modello degli sforzi valido per il moto uniforme basato, all'interno del substrato laminare, sulla legge di Newton, e, all'esterno di questo, sull'ipotesi della lunghezza di mescolamento di Prandtl, assumendo per lo sforzo tangenziale l'espressione:

$$\tau = -\rho \nu \frac{\partial U}{\partial R} - \rho l^2 \left| \frac{\partial U}{\partial R} \right| \frac{\partial U}{\partial R},$$

essendo l la lunghezza di mescolamento. Per tale grandezza si può adottare l'espressione di Marchi:

$$l = \kappa Y e^{-Y/R_0},$$

essendo $Y = R_0 - R$ la distanza dalla parete.

Per ricavare lo spessore del substrato laminare δ si possono estendere al moto vario le semplici relazioni valide per il moto uniforme. In particolare si suppone in prima approssimazione che all'interno del substrato il profilo di velocità segua una legge lineare e all'esterno di questo il profilo localmente segua una legge logaritmica e si ricerca l'intersezione tra questi due profili. Introdotta la velocità d'attrito U^* , legata come è noto allo sforzo alla parete τ_p dall'espressione:

$$U^* = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}},$$

l'equazione che definisce il profilo lineare di velocità all'interno del substrato è la seguente:

$$\frac{U}{U^*} = \frac{U^* Y}{\nu}.$$

Il profilo logaritmico di velocità all'esterno del substrato è definito dall'espressione:

$$\frac{U}{U^*} = 2,5 \ln \frac{Y}{\epsilon} + B$$

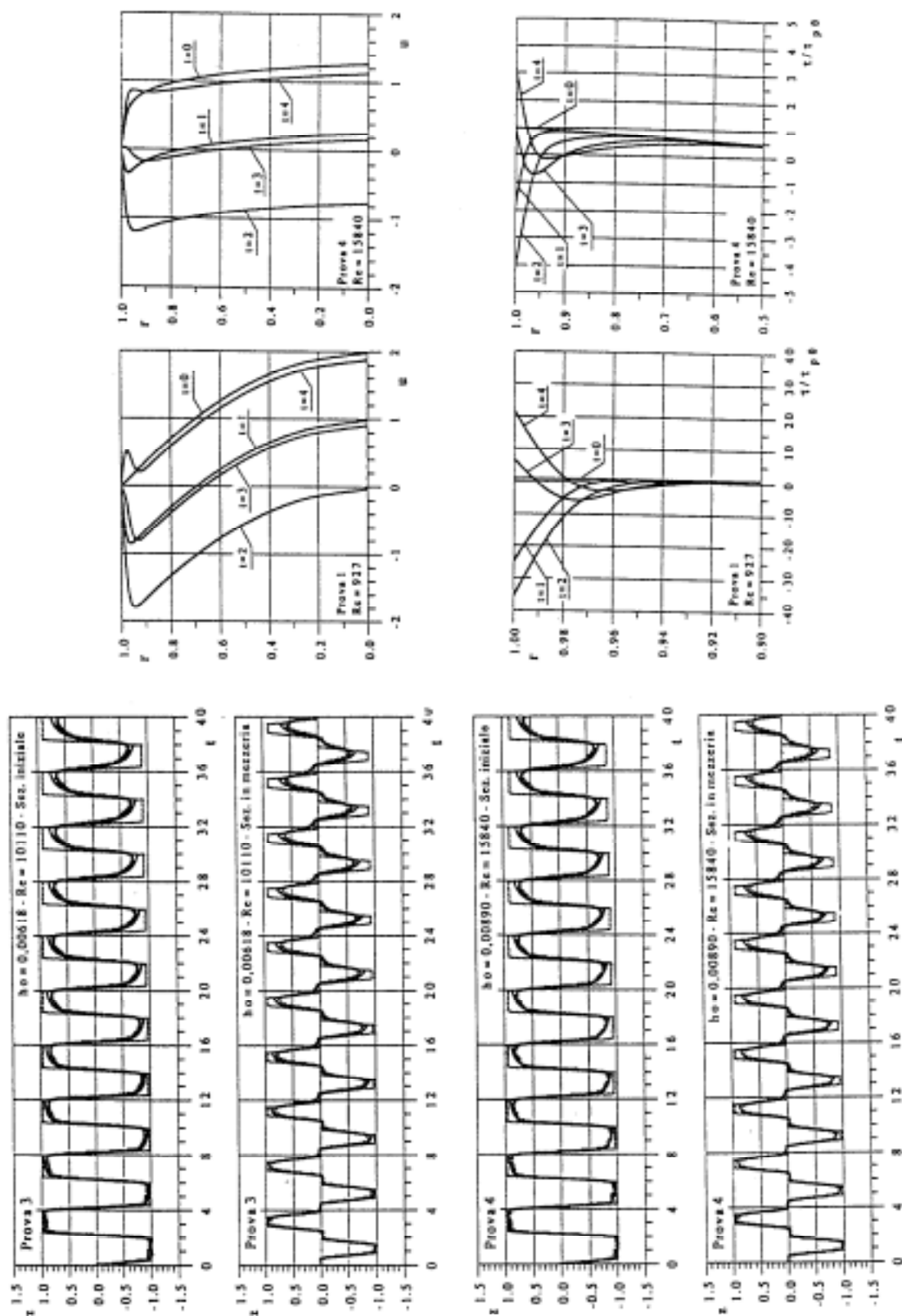


Fig. 6.9 – Risultati del modello quasi bidimensionale (Modica e Pezzinga, 1992)

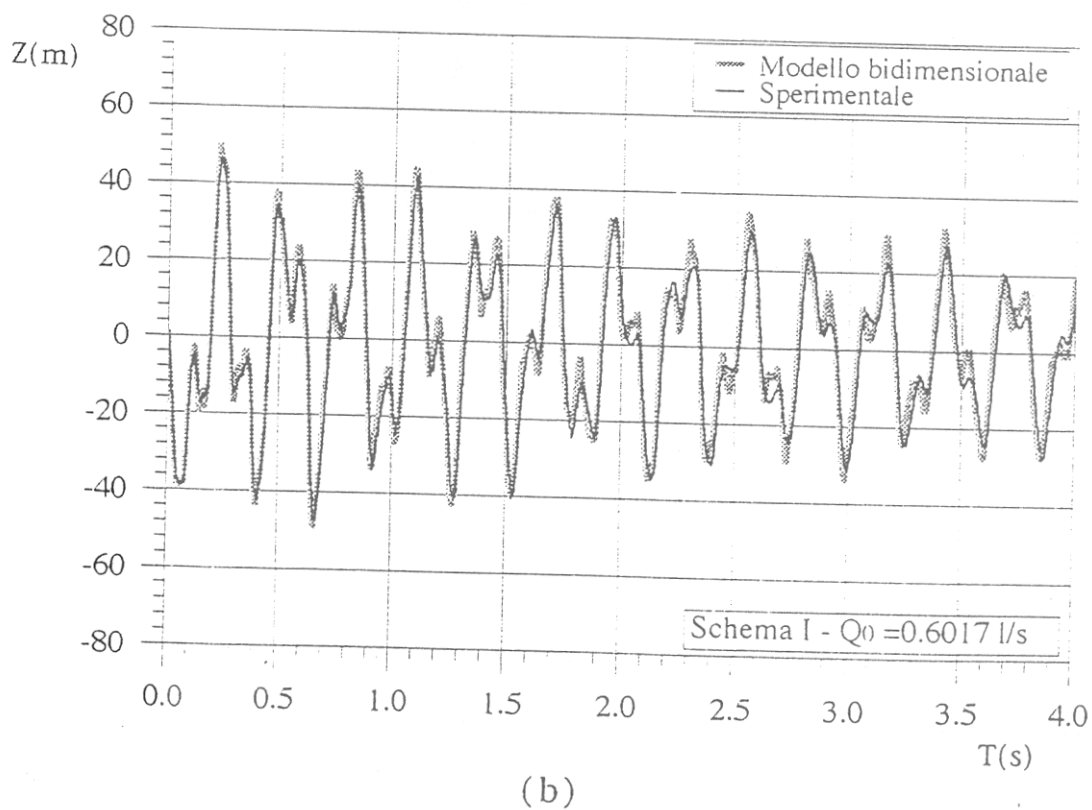
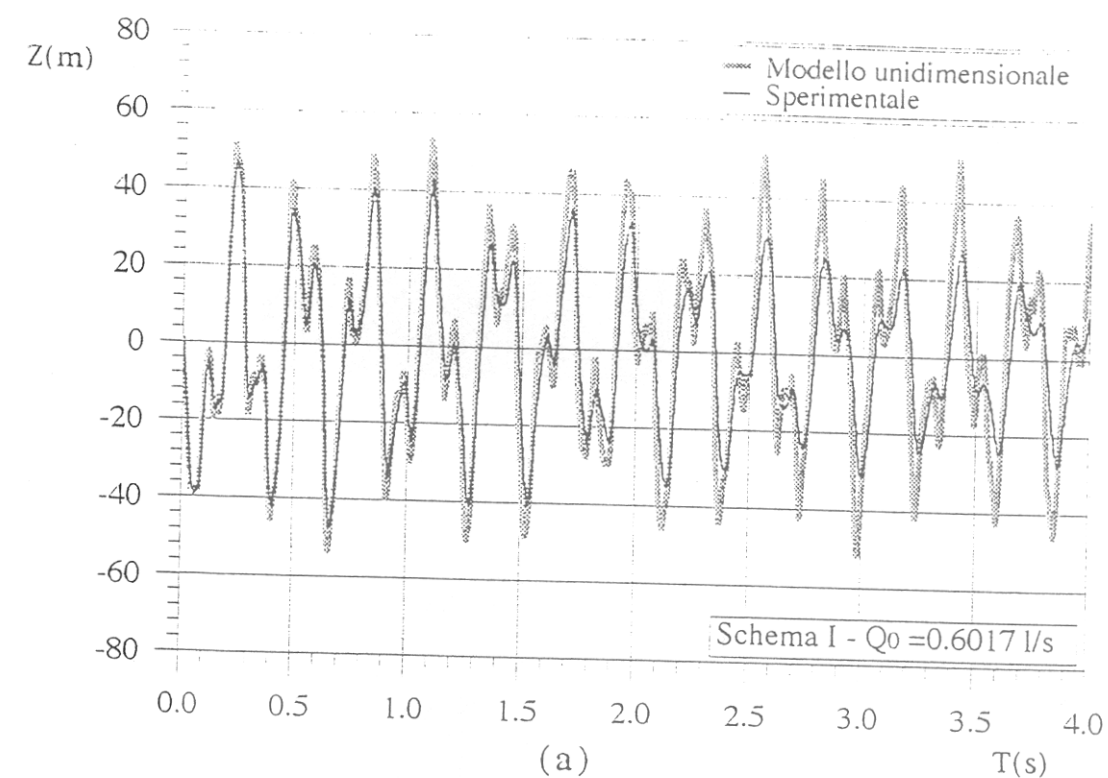


Fig. 6.10 – Oscillazioni in rete di condotte (Lombardo e Triberio, 1995)

ε è la scabrezza equivalente e B un parametro dipendente dal numero di Reynolds d'attrito:

$$Re^* = \frac{U^* \varepsilon}{\nu}.$$

Lo spessore del substrato è calcolabile allora imponendo l'uguaglianza:

$$\frac{U^* \delta}{\nu} = 2,5 \ln \frac{\delta}{\varepsilon} + B.$$

L'espressione di B in funzione di Re^* che si può utilizzare per tubi commerciali è

$$B = 8.5 - 2.5 \ln \left(1 + \frac{3,32}{Re^*} \right)$$

6.11 I modelli unidimensionali non stazionari

Nei modelli unidimensionali con resistenze non stazionarie, per tener conto degli incrementi del termine delle resistenze, rispetto ai valori legati all'andamento delle velocità medie, si propongono formulazioni per le resistenze in moto vario. Un modello possibile è basato sull'aggiunta nell'equazione del moto di due termini, uno dipendente dall'accelerazione locale e uno dipendente dall'accelerazione convettiva. L'equazione assume quindi la forma:

$$\frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x} + J + \frac{k}{g} \frac{\partial V}{\partial t} + \text{segno} \left(V \frac{\partial V}{\partial x} \right) \frac{kc}{g} \frac{\partial V}{\partial x} = 0.$$

in cui V è la velocità media, J è il termine di resistenza quasi stazionario e k è un coefficiente considerato indipendente dall'ascissa e dal tempo.

A tale equazione deve essere associata l'equazione di continuità. Le equazioni di continuità e del moto possono essere integrate ricorrendo al metodo delle caratteristiche o a schemi direttamente operanti sulle equazioni differenziali alle derivate parziali. Il difetto dei modelli di questo tipo è la difficoltà di definire in maniera rigorosa i valori del coefficiente k .

7. MOTO VARIO DI CORRENTI A PELO LIBERO

7.1 Generalità

Il moto vario nelle correnti a pelo libero si ha quando si produce una variazione rispetto al valore di regime della portata o dell'altezza in una sezione. Queste variazioni possono essere determinate dall'uomo, dovute ad eventi naturali o accidentali.

Esempi di fenomeni di moto vario nelle correnti a pelo libero sono:

- le onde nei canali causate da attacco o stacco di turbine o pompe, o da apertura o chiusura di paratoie;
- le onde nei canali di navigazione, causate dalle operazioni di manovra;
- le piene nei corsi d'acqua naturali;
- le onde di marea negli estuari;
- l'onda creata dal crollo di una diga.

Il moto vario è sempre un fenomeno di tipo propagatorio. Le equazioni del moto infatti sono iperboliche. Così come nel moto vario nelle correnti in pressione, in cui, nel caso di fluido incomprimibile e condotta indeformabile, si arrivava a descrivere il comportamento del sistema con equazioni differenziali ordinarie, perché l'equazione di continuità diventava superflua, anche nel moto vario a superficie libera, in determinati casi, è lecito trascurare l'aspetto propagatorio del fenomeno. Questo avviene ad esempio quando si hanno fenomeni di lento riempimento o svuotamento di serbatoi; in questo caso si possono trascurare nell'equazione del moto il termine d'inerzia e il termine delle resistenze, rendendo così superflua la scrittura dell'equazione del moto. Anche in questo caso si giunge quindi ad un problema definito da equazioni differenziali ordinarie, perché si trascura la dipendenza spaziale del fenomeno.

7.2 Equazioni del moto

L'equazione del moto unidimensionale delle correnti a superficie libera gradualmente variata si può scrivere nella forma:

$$\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\alpha V}{g} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\beta}{g} \frac{\partial V}{\partial t} = i - J$$

mentre, in assenza di apporti laterali, l'equazione di continuità assume la forma:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 .$$

Queste equazioni rappresentano rispettivamente il bilancio dell'energia per unità di peso e la continuità della massa per un volume elementare.

Solitamente si possono assumere costanti e pari a 1 i coefficienti di ragguglio α e β , cosicché, moltiplicando per g , l'equazione del moto assume la forma:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial y}{\partial x} = g (i - J)$$

È più conveniente inoltre scrivere l'equazione di continuità nella forma:

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{A}{B} \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

che si ottiene ricordando la regola di derivazione del prodotto e che si ha

$$\frac{\partial A}{\partial x} = B \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{\partial A}{\partial t} = B \frac{\partial y}{\partial t}.$$

Anche nel caso del moto vario a superficie libera il sistema è di tipo iperbolico e si presta alla risoluzione per mezzo del metodo delle caratteristiche.

7.3 Metodo delle caratteristiche

Analogamente a quanto fatto nel caso delle equazioni del moto vario nelle condotte in pressione, possiamo trasformare le equazioni scritte per il moto vario nelle correnti a pelo libero in equazioni differenziali ordinarie valevoli lungo le linee caratteristiche.

Una combinazione lineare delle equazioni scritte prima è la seguente:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial y}{\partial x} + \lambda \left(\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{A}{B} \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial y}{\partial x} \right) = g (i - J),$$

e, riordinando i termini, nella forma:

$$\left[\frac{\partial V}{\partial t} + \left(V + \lambda \frac{A}{B} \right) \frac{\partial V}{\partial x} \right] + \lambda \left[\frac{\partial y}{\partial t} + \left(V + \frac{g}{\lambda} \right) \frac{\partial y}{\partial x} \right] = g (i - J),$$

essendo λ un valore arbitrario.

Scegliendo questa volta λ in maniera tale che:

$$\frac{dx}{dt} = V + \lambda \frac{A}{B} = V + \frac{g}{\lambda}$$

si ottiene:

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{gB}{A}} = \pm \frac{g}{c},$$

avendo introdotto la celerità delle piccole perturbazioni in una corrente:

$$c = \sqrt{\frac{gA}{B}}.$$

Le equazioni del moto vario in termini di derivate totali possono essere quindi scritte nella forma:

$$\frac{dV}{dt} \pm \frac{g}{c} \frac{dy}{dt} = g (i - J),$$

valendo il segno + lungo la linea caratteristica di equazione $dx/dt=V+c$ e il segno - lungo la linea caratteristica di equazione $dx/dt=V-c$.

7.4 Integrazione numerica

Esistono diverse possibilità per calcolare le grandezze che compaiono nelle equazioni del metodo delle caratteristiche, così come per il moto vario nelle condotte in pressione. Nel moto vario nelle correnti a pelo libero gli schemi differiscono per il modo in cui vengono valutate le resistenze e la celerità, che dipende da y .

Lo schema più semplice consiste nel valutare la celerità e le resistenze in base ai soli valori al tempo precedente, basandosi cioè su uno schema di Eulero. Indicando rispettivamente con l'indice A e con l'indice B i valori al tempo precedente lungo la linea caratteristica positiva e lungo la linea caratteristica negativa e con l'indice P i valori al tempo attuale, le equazioni in termini discreti possono essere scritte nella forma:

$$V_P - V_A + \left(\frac{g}{c} \right)_A (y_P - y_A) = g (i - J)_A \Delta t,$$

$$V_P - V_B - \left(\frac{g}{c} \right)_B (y_P - y_B) = g (i - J)_B \Delta t.$$

Le due condizioni al contorno vanno assegnate una a monte e una a valle per corrente lenta, entrambe a monte per corrente veloce.

7.5 Schemi alle differenze finite

7.5.1 SCHEMI ESPliciti

Con il metodo delle caratteristiche si risolvono equazioni differenziali ordinarie ma bisogna effettuare interpolazioni, perché il punto di intersezione tra la linea

caratteristica e la retta che rappresenta l'istante di tempo precedente non coincide in generale con uno dei punti della griglia di calcolo.

In alternativa si possono usare schemi alle differenze finite espliciti o impliciti che si basano su diverse possibili discretizzazioni delle derivate parziali che compaiono nelle equazioni del moto vario, e si basano su una griglia fissa.

7.5.1.1 Schema di Lax

Uno dei più semplici schemi espliciti è lo schema diffusivo di Lax, che dà risultati soddisfacenti. In questo schema le derivate e le grandezze $D=A/B$ e J vengono approssimate nel modo seguente (i è l'indice delle ascisse, k è l'indice dei tempi):

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{y_i^{k+1} - y_i^*}{\Delta t},$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{V_i^{k+1} - V_i^*}{\Delta t},$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{y_{i+1}^k - y_{i-1}^k}{2\Delta x},$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{V_{i+1}^k - V_{i-1}^k}{2\Delta x},$$

$$D_i^* = 0,5(D_{i-1}^k + D_{i+1}^k),$$

$$J_i^* = 0,5(J_{i-1}^k + J_{i+1}^k),$$

essendo:

$$y_i^* = 0,5(y_{i-1}^k + y_{i+1}^k),$$

$$V_i^* = 0,5(V_{i-1}^k + V_{i+1}^k).$$

Sostituendo queste espressioni nelle equazioni del moto e di continuità e semplificando si ottiene:

$$y_i^{k+1} = y_i^* - 0,5 \frac{\Delta t}{\Delta x} D_i^* (V_{i+1}^k - V_{i-1}^k) - 0,5 \frac{\Delta t}{\Delta x} V_i^* (y_{i+1}^k - y_{i-1}^k)$$

$$V_i^{k+1} = V_i^* - 0,5 \frac{\Delta t}{\Delta x} g(y_{i+1}^k - y_{i-1}^k) - 0,5 \frac{\Delta t}{\Delta x} V_i^* (V_{i+1}^k - V_{i-1}^k) + g \Delta t (i - J_i^*)$$

Espandendo in serie di Taylor i termini di queste equazioni e confrontandole con le equazioni originarie, si può vedere che lo schema di Lax introduce termini addizionali simili a termini diffusivi:

$$\frac{1}{2} \frac{\Delta x^2}{\Delta t} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad \frac{1}{2} \frac{\Delta x^2}{\Delta t} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2},$$

e a questa circostanza deve il suo nome.

7.5.1.2 Criterio di stabilità di Courant

Effettuando un'analisi di stabilità si può vedere che lo schema descritto è stabile sotto la condizione:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{|V| + c}$$

che è detta condizione di Courant-Friedrichs-Lewy o semplicemente condizione di Courant. Il numero adimensionale

$$C = \frac{(|V| + c) \Delta t}{\Delta x}$$

è detto numero di Courant, e per la stabilità deve risultare minore di 1.

7.5.2 SCHEMI IMPLICITI

Nello schema di Lax le grandezze D e J e le derivate in x sono valutate al tempo precedente t e per questo lo schema è esplicito. Tenendo conto nella discretizzazione delle derivate in direzione x anche dei valori al tempo successivo $t + \Delta t$, si hanno gli schemi impliciti. Le equazioni algebriche diventano più complesse da risolvere, in generale non lineari, ma si ha stabilità incondizionata.

7.5.2.1 Schema di Preissman

Uno degli schemi impliciti più usati è lo schema di Preissman. In questo schema le derivate parziali sono approssimate nella maniera seguente:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{(f_i^{k+1} + f_{i+1}^{k+1}) - (f_i^k + f_{i+1}^k)}{2\Delta t} \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\alpha(f_{i+1}^{k+1} - f_i^{k+1})}{\Delta x} + \frac{(1-\alpha)(f_{i+1}^k - f_i^k)}{\Delta x} \\ f(x,t) &= \frac{\alpha(f_{i+1}^{k+1} + f_i^{k+1})}{2} + \frac{(1-\alpha)(f_{i+1}^k + f_i^k)}{2}\end{aligned}$$

essendo α un coefficiente di peso ($0,5 < \alpha \leq 1$). Sostituendo espressioni di questo tipo nelle equazioni del moto e di continuità, con y , V , D o J al posto di f , si ottiene:

$$\begin{aligned}y_i^{k+1} + y_{i+1}^{k+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\alpha(D_{i+1}^{k+1} + D_i^{k+1}) + (1-\alpha)(D_{i+1}^k + D_i^k) \right] \cdot \\ \cdot \left[\alpha(V_{i+1}^{k+1} - V_i^{k+1}) + (1-\alpha)(V_{i+1}^k - V_i^k) \right] + \\ + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\alpha(V_{i+1}^{k+1} + V_i^{k+1}) + (1-\alpha)(V_{i+1}^k + V_i^k) \right] \cdot \\ \cdot \left[\alpha(y_{i+1}^{k+1} - y_i^{k+1}) + (1-\alpha)(y_{i+1}^k - y_i^k) \right] = y_i^k + y_{i+1}^k \\ V_i^{k+1} + V_{i+1}^{k+1} + 2g \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\alpha(y_{i+1}^{k+1} - y_i^{k+1}) + (1-\alpha)(y_{i+1}^k - y_i^k) \right] + \\ + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\alpha(V_{i+1}^{k+1} + V_i^{k+1}) + (1-\alpha)(V_{i+1}^k + V_i^k) \right] \cdot \\ \cdot \left[\alpha(V_{i+1}^{k+1} - V_i^{k+1}) + (1-\alpha)(V_{i+1}^k - V_i^k) \right] = \\ = V_i^k + V_{i+1}^k + 2g\Delta t i - g\Delta t \left[\alpha(J_{i+1}^{k+1} + J_i^{k+1}) + (1-\alpha)(J_{i+1}^k + J_i^k) \right]\end{aligned}$$

In queste due equazioni compaiono le quattro incognite y_i^{k+1} , y_{i+1}^{k+1} , V_i^{k+1} e V_{i+1}^{k+1} . Tenendo conto delle analoghe equazioni scritte per gli altri intervalli, se n è il numero di intervalli (e quindi $n+1$ il numero di nodi della griglia), si ottengono $2n$ equazioni in $2n+2$ incognite. Tenendo conto delle due condizioni al contorno il numero delle equazioni bilancia il numero delle incognite. Occorre dunque risolvere un sistema non lineare di $2n+2$ equazioni in $2n+2$ incognite, usando ad

esempio il metodo di Newton. Si può osservare che la matrice dei coefficienti è bandata.

Un'analisi di stabilità dell'equazione di Saint Venant linearizzata mostra che lo schema di Preissman è incondizionatamente stabile. Tuttavia l'accuratezza del calcolo richiede comunque la scelta di un intervallo di tempo dello stesso ordine di grandezza di quello dato dalla condizione di Courant. Una scelta dell'intervallo di tempo può essere effettuata confrontando le soluzioni per differenti intervalli Δt ; si può adottare allora l'intervallo di tempo in corrispondenza al quale le differenze tra le soluzioni cominciano a essere trascurabili.

7.5.3 SCHEMI ESPlicitI DI SECONDO ORDINE

Gli schemi espliciti del secondo ordine sono più accurati degli schemi del primo ordine e sono di più semplice applicazione dei metodi impliciti. Anche se richiedono per ogni passo qualche calcolo in più rispetto ai metodi del primo ordine, in compenso, essendo di ordine superiore, hanno bisogno di un numero minore di passi di calcolo per raggiungere la stessa accuratezza.

7.5.3.1 Schema di Mac Cormack

Lo schema di Mac Cormack è il più diffuso degli schemi espliciti di secondo ordine. È del secondo ordine sia nel passo temporale che nel passo spaziale. Si presta particolarmente per analizzare moti con onde di shock ed è adatto per studiare le onde che si propagano su un alveo inizialmente secco, come quella conseguente al crollo di una diga.

Nella parte di predizione si usano differenze finite in avanti e nella parte di correzione si usano differenze finite all'indietro (o viceversa).

Scrivendo l'equazione differenziale nella forma generale:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = \mathbf{D}(\mathbf{U})$$

lo schema di Mac Cormack è definito dai seguenti due passi di predizione e di correzione:

$$\mathbf{U}_i^* = \mathbf{U}_i^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i+1}^k - \mathbf{F}_i^k) + \Delta t \mathbf{D}_i^k$$

$$\mathbf{U}_i^{k+1} = \frac{1}{2} \left[\mathbf{U}_i^k + \mathbf{U}_i^* - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_i^* - \mathbf{F}_{i-1}^*) + \Delta t \mathbf{D}_i^* \right]$$

L'analisi di stabilità mostra che anche lo schema di Mac Cormack è stabile se si rispetta la condizione di Courant.

7.6 Crollo di diga

Uno dei problemi classici da studiare integrando le equazioni del moto vario nelle correnti a pelo libero è quello dell'onda conseguente al crollo di una diga. Le equazioni scritte prima possono essere utilizzate nell'ipotesi di corrente unidimensionale, quindi se la vallata si sviluppa prevalentemente in direzione longitudinale, distribuzione delle pressioni idrostatica e componente verticale della velocità nulla. Tali ipotesi hanno ovviamente validità limitata, ma di solito danno risultati soddisfacenti.

Il problema normalmente viene affrontato ipotizzando la rimozione istantanea della diga. Tale semplice ipotesi consente di prescindere dalle modalità di rottura della diga ed è quella che fornisce i risultati più gravosi. In laboratorio tale fenomeno può essere simulato rimuovendo istantaneamente una paratoia che sbarra la zona con acqua ferma. Studi recenti hanno preso in considerazione l'effettivo crollo dello sbarramento in casi in cui le modalità di questo possono influire sulla riproduzione dell'onda a valle, come nel caso delle dighe in materiali sciolti.

Le resistenze possono essere calcolate in prima approssimazione con le formule valide per il moto uniforme, anche se, come abbiamo già visto nel caso del moto vario in pressione, queste non sono tanto attendibili nel caso di transitori rapidi.

Le condizioni iniziali sono ovviamente quelle di acqua ferma a monte della diga e di alveo secco a valle della diga. A volte viene considerato anche il caso di alveo a valle con una certa portata, che rappresenta la portata rilasciata dal serbatoio per assicurare una minima quantità d'acqua nel fiume. L'istantanea rimozione della diga provoca un'onda negativa a monte della diga e un'onda positiva a valle di questa.

Una soluzione classica del problema è quella per alveo rettangolare con pendenza nulla e nell'ipotesi di resistenze trascurabili. Questa soluzione si può ottenere con il metodo delle caratteristiche. Siccome tale soluzione può servire per controllo dell'accuratezza della soluzione numerica, ricavata con uno degli schemi visti in precedenza, scriviamo le equazioni che la definiscono senza soffermarci sul modo per ottenerla:

$$\begin{array}{lll}
 y = y_0 \left(\frac{2}{3} - \frac{x}{3t\sqrt{gy_0}} \right)^2 & V = \frac{2}{3} \left(\frac{x}{t} + \sqrt{gy_0} \right) & \text{per } -\sqrt{gy_0} < \frac{x}{t} < 2\sqrt{gy_0} \\
 y = y_0 & V = 0 & \text{per } \frac{x}{t} < -\sqrt{gy_0} \\
 y = 0 & V = 0 & \text{per } 2\sqrt{gy_0} < \frac{x}{t}
 \end{array}$$

Esiste anche una soluzione analitica per alveo con altezza idrica non nulla (e velocità nulla) a valle della diga.

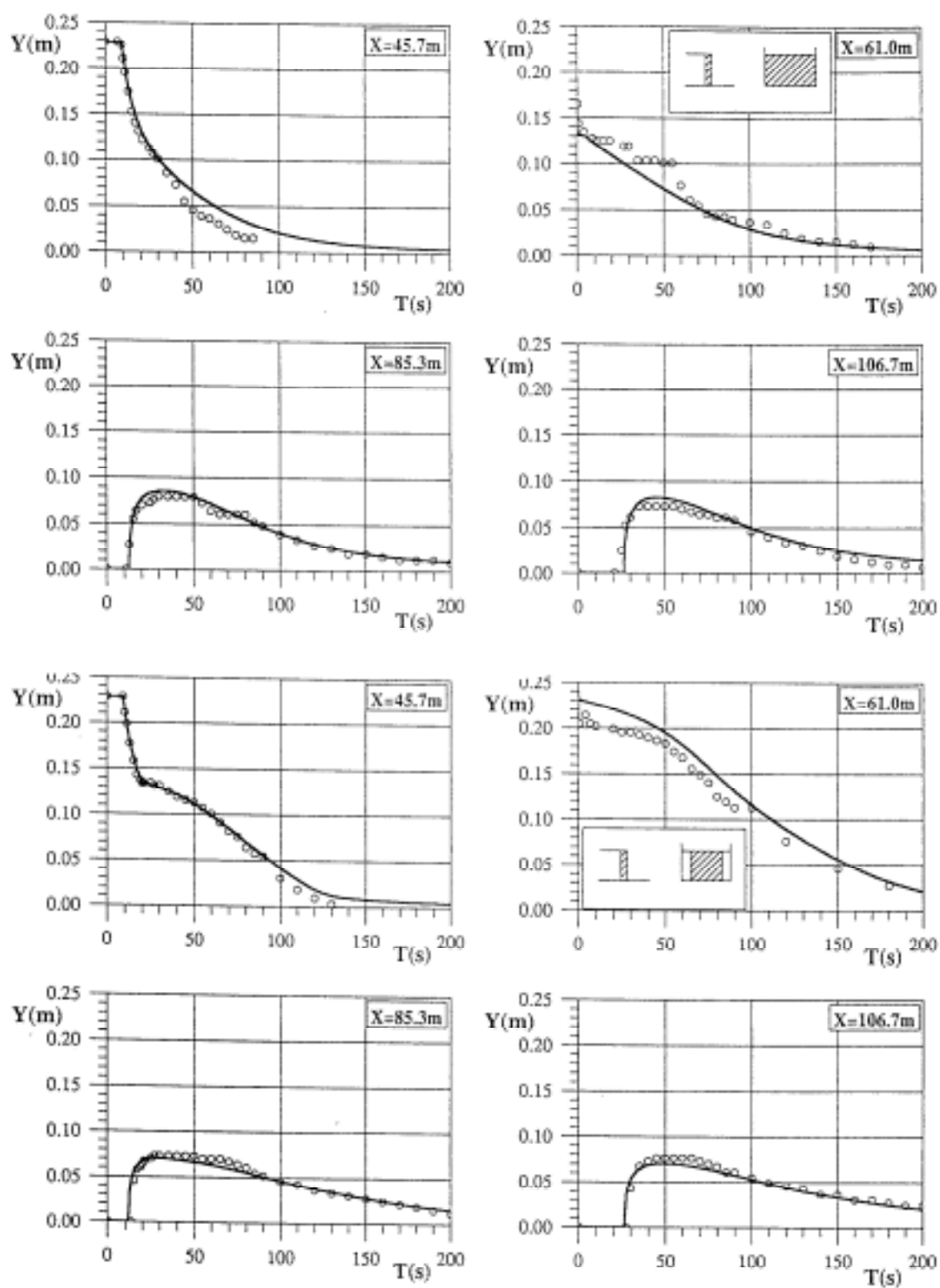


Fig. 7.1 – Crollo di diga. Modello unidimensionale (Pezzinga, 1997)

7.7 Calcolo numerico dell'onda conseguente ad un crollo di diga (esercitazione)

L'esercitazione consiste nell'utilizzare un semplice programma in Fortran per il calcolo numerico dell'onda conseguente al crollo di una diga, che integra le equazioni del moto vario con lo schema di Mac Cormack.

I dati da prendere in considerazione sono i seguenti:

$$\begin{aligned}y_0 &= 100 \text{ m}, \\ B &= 50 \text{ m}, \\ i &= 0,01, \\ k &= 30 \text{ m}^{1/3}/\text{s}.\end{aligned}$$

Bisogna calcolare l'andamento nel tempo e la massima altezza raggiunta in una sezione posta a valle della diga ad una distanza di 5000 m.

7.8 Modelli bidimensionali

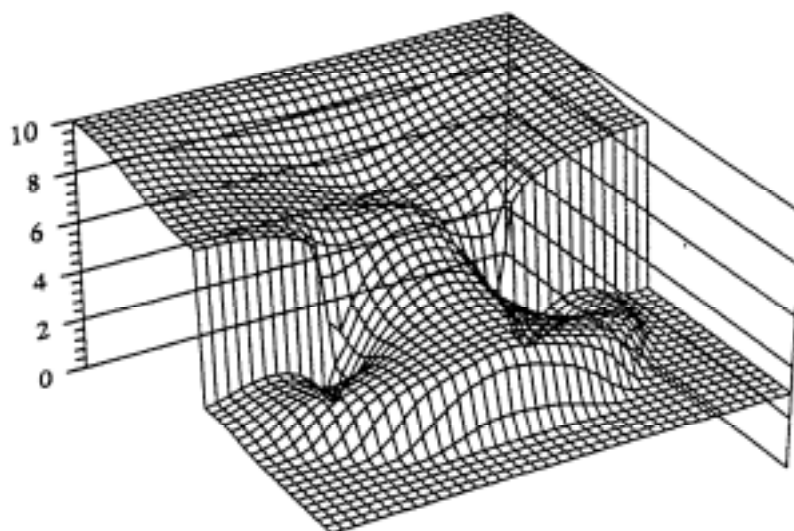
Nel caso che il moto non abbia una direzione prevalente, si può ricorrere alle equazioni bidimensionali del moto, che, sempre nell'ipotesi di distribuzione idrostatica delle pressioni e considerando le velocità medie sulla verticale, si scrivono:

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(Uh)}{\partial x} + \frac{\partial(Vh)}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial(Uh)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(U^2h + \frac{1}{2}gh^2\right) + \frac{\partial(UVh)}{\partial y} &= gh(i_x - J_x) \\ \frac{\partial(Vh)}{\partial t} + \frac{\partial(UVh)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(V^2h + \frac{1}{2}gh^2\right) &= gh(i_y - J_y)\end{aligned}$$

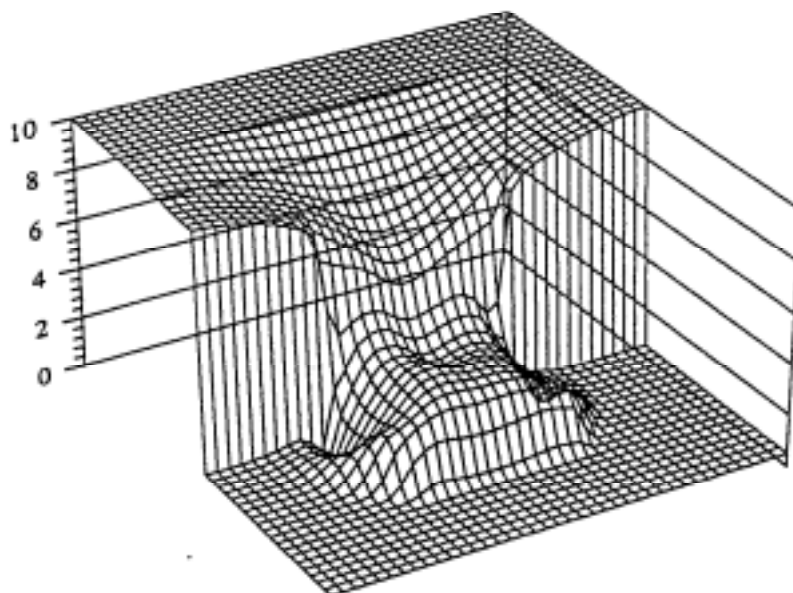
Le componenti J_x e J_y della forza resistente per unità di peso possono essere calcolate, adottando la formula di Strickler, con le seguenti espressioni:

$$J_x = \frac{U\sqrt{U^2 + V^2}}{c^2h^{4/3}} \quad J_y = \frac{V\sqrt{U^2 + V^2}}{c^2h^{4/3}}$$

assumendo che il raggio idraulico sia uguale all'altezza d'acqua. Dalla composizione di queste si ottiene la forza resistente per unità di peso nella direzione del vettore velocità



Onda di piena al tempo $t=8.0$ sec. Prova 9b.



Onda di piena al tempo $t=4.6$ sec. Prova 10b.

Fig. 7.2 – Crollo di diga. Modello bidimensionale (Cataliotti, 1994)

$$J = \frac{U^2 + V^2}{c^2 h^{4/3}}$$

Gli schemi visti per le equazioni del moto unidimensionali possono essere estesi al caso delle equazioni bidimensionali. Lo schema di Mac Cormack ad esempio per le equazioni bidimensionali, prendendo in considerazione le equazioni nella forma generale:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} = \mathbf{D}$$

è definito dai seguenti due passi di predizione:

$$\mathbf{U}_{i,j}^* = \mathbf{U}_{i,j}^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{E}_{i+1,j}^k - \mathbf{E}_{i,j}^k) - \frac{\Delta t}{\Delta y} (\mathbf{F}_{i,j+1}^k - \mathbf{F}_{i,j}^k) + \Delta t \mathbf{D}_{i,j}^k$$

e di correzione:

$$\mathbf{U}_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{2} \left[\mathbf{U}_{i,j}^k + \mathbf{U}_{i,j}^* - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{E}_{i,j}^* - \mathbf{E}_{i-1,j}^*) - \frac{\Delta t}{\Delta y} (\mathbf{F}_{i,j}^* - \mathbf{F}_{i,j-1}^*) + \Delta t \mathbf{D}_{i,j}^* \right]$$

7.9 Semplificazioni possibili per le onde di piena

Nel caso che le trasformazioni di energia potenziale in energia cinetica e viceversa siano modeste, come succede per le onde di piena, l'equazione del moto può essere semplificata trascurando i termini di accelerazione, locale e convettiva, che essa comprende.

L'equazione del moto

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial y}{\partial x} = g (i - J)$$

si scrive allora nella forma

$$\frac{\partial y}{\partial x} = i - J.$$

dando luogo al modello parabolico.

In molti casi si può semplificare ulteriormente l'equazione, quando il termine $\partial y / \partial x$ sia trascurabile rispetto alla pendenza di fondo i , ottenendo l'equazione

$$i = J$$

che dà luogo al modello cinematico. L'equazione di continuità resta la stessa del modello completo e può essere scritta nella forma

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + B \frac{\partial y}{\partial t} = 0 .$$

L'integrazione numerica in questi casi si modifica leggermente, poiché le equazioni sia del modello cinematico che del modello parabolico si possono sintetizzare in un'unica equazione alle derivate parziali nella sola incognita portata (o altezza).

7.9.1 MODELLO CINEMATICO

Nel caso del modello cinematico l'equazione del moto coincide con la scala delle portate in moto uniforme e si può scrivere

$$Q = Q(y)$$

in cui la funzione dipende dalla relazione di moto uniforme utilizzata. Si può quindi utilizzare tale relazione per eliminare una delle due incognite dall'equazione differenziale.

Si ha ad esempio:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{dy}{dQ} \frac{\partial Q}{\partial t}$$

e sostituendo nell'equazione di continuità si ottiene:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + B \frac{dy}{dQ} \frac{\partial Q}{\partial t} = 0 ,$$

o anche, essendo $dA=Bdy$:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{dQ}{dA} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 .$$

Un osservatore che si muova con velocità $c=dx/dt=dQ/dA$ non vede variare la portata; infatti si può scrivere:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial t} + c \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{dQ}{dA} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 .$$

Nel modello cinematico la celerità c della portata (e anche dell'altezza idrica) è pari quindi a dQ/dA e dipende quindi dalla legge di resistenza adottata.

7.9.2 MODELLO PARABOLICO

Per ottenere l'equazione del modello parabolico si può derivare l'equazione di continuità rispetto a x e l'equazione del moto rispetto a t ottenendo quindi dopo la sostituzione:

$$\frac{1}{B} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = \frac{\partial J}{\partial t}.$$

Essendo la cadente J funzione del tempo attraverso y e Q , il secondo membro si può esplicitare scrivendo:

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \frac{\partial J}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}.$$

Tenendo conto dell'equazione di continuità e facendo le sostituzioni si ottiene l'equazione

$$\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial J / \partial y}{B \partial J / \partial Q} \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{B \partial J / \partial Q} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2},$$

che può anche essere messa sotto la forma:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + c \frac{\partial Q}{\partial x} = D \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}.$$

Si può vedere che la celerità c è la stessa del modello cinematico. In più al secondo membro è comparso un termine diffusivo, che consente ad esempio di riprodurre l'attenuazione della portata al colmo e il cosiddetto cappio di piena.

7.9.3 SCHEMI NUMERICI

7.9.3.1 Modello cinematico

Per integrare l'equazione del modello cinematico si può ricorrere a schemi numerici espliciti o impliciti. Un possibile schema esplicito si basa sulla seguente discretizzazione delle derivate:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{Q_i^{n+1} - Q_i^*}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n}{2\Delta x}$$

essendo

$$Q_i^* = (1 - \alpha)Q_i^n + \frac{\alpha}{2}(Q_{i+1}^n + Q_{i-1}^n)$$

con α compreso tra 0 e 1. Si ottiene quindi il seguente schema:

$$Q_i^{n+1} = \alpha \frac{Q_{i+1}^n + Q_{i-1}^n}{2} + (1 - \alpha)Q_i^n - c_i^n \Delta t \frac{Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n}{2\Delta x}$$

Si può vedere che lo schema è stabile per:

$$\left(\frac{c\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \leq \alpha \leq 1$$

Un possibile schema implicito è basato sulla seguente discretizzazione delle derivate:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial t} &= (1 - \alpha) \frac{Q_i^{n+1} - Q_i^n}{\Delta t} + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{Q_{i+1}^{n+1} - Q_{i+1}^n}{\Delta t} + \frac{Q_{i-1}^{n+1} - Q_{i-1}^n}{\Delta t} \right) \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= \theta \frac{Q_{i+1}^{n+1} - Q_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} + (1 - \theta) \frac{Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n}{2\Delta x} \end{aligned}$$

Si può vedere che per $\theta \geq 0,5$ lo schema è incondizionatamente stabile. Essendo implicito, lo schema richiede a ogni passo la risoluzione di un sistema lineare.

7.9.3.2 Modello parabolico

L'estensione dello schema implicito precedentemente visto per il modello cinematico all'equazione del modello parabolico si attua esprimendo la derivata seconda in direzione x per mezzo dell'espressione

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = \theta \frac{Q_{i+1}^{n+1} - 2Q_i^{n+1} + Q_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + (1 - \theta) \frac{Q_{i+1}^n - 2Q_i^n + Q_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

utilizzando il coefficiente di peso θ analogamente a quanto fatto per la derivata prima. Anche questo schema è incondizionatamente stabile per $\theta \geq 0,5$.

Per $\alpha = \theta = 0$ si ottiene uno schema esplicito che è stabile sotto la condizione:

$$\left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \leq \frac{2D\Delta t}{\Delta x^2} \leq 1$$

La prima disuguaglianza impone che l'intervallo temporale sia:

$$\Delta t \leq \frac{2D}{c^2}$$

La seconda disuguaglianza impone che l'intervallo temporale sia:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2D}$$

Solitamente se è verificata la seconda la prima risulta verificata ampiamente. Lo schema esplicito dà luogo alla semplice soluzione:

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - c_i^n \Delta t \frac{Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n}{2\Delta x} + D_i^n \Delta t \frac{Q_{i+1}^n - 2Q_i^n + Q_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

7.10 Equazione dei serbatoi

Uno degli effetti principali dei serbatoi, siano o non siano questi progettati a tale esclusivo scopo, è quello di laminazione delle onde di piena, cioè l'attenuazione delle portate di piena al colmo, che si ha a causa dell'invaso di parte del volume di piena e della sua restituzione al corso d'acqua in un tempo successivo.

I fenomeni di moto vario all'interno dei serbatoi possono essere studiati prescindendo dalle caratteristiche di propagazione in quanto l'equazione del moto risulta banale, essendo le velocità trascurabili, così come i termini di resistenza ed i termini d'inerzia.

L'unica equazione significativa è l'equazione di continuità, che si può scrivere nella forma:

$$\frac{dW}{dt} = Q_e - Q_u$$

essendo W il volume all'interno del serbatoio, Q_e e Q_u rispettivamente la portata entrante e la portata uscente. L'unica variabile indipendente è il tempo, mentre le grandezze che compaiono nell'equazione di continuità possono essere considerate funzioni note del tempo, come la portata entrante, o funzioni della quota h del pelo libero nel serbatoio, che a sua volta è una funzione del tempo.

La legge con cui la portata uscente è legata alla quota dipende dal tipo di luce di efflusso dal serbatoio. In particolare, se la luce è a battente, come per uno scarico di fondo, la portata è legata alla radice quadrata del carico sulla luce:

$$Q_u = \mu_f A \sqrt{2g(h - h_f)}$$

dove A è l'area della luce e h_f è la quota del baricentro della luce. Il coefficiente di efflusso μ_f tiene conto dell'eventuale contrazione e di tutte le perdite di carico concentrate e distribuite.

Nel caso di una luce a stramazzo, come per uno scarico di superficie, la portata è legata al carico sulla soglia mediante la legge:

$$Q_u = \mu_s L \sqrt{2g(h - h_s)}^{3/2}$$

dove L è la larghezza della luce e h_s è la quota della soglia. Il coefficiente di efflusso μ_s dipende principalmente dalla conformazione della soglia, oltre che dal carico stesso. Nel caso che l'efflusso avvenga da entrambe le luci, la portata uscente è data dalla somma dei due contributi.

Il volume del serbatoio stesso è legato alla quota del pelo libero attraverso la cosiddetta curva dei volumi, che può essere considerata esprimibile per punti, con interpolazione lineare tra un punto e l'altro, oppure può essere espressa mediante una funzione monomia del tipo:

$$W = a h^n$$

con i coefficienti a e n ricavabili facilmente per mezzo di un'interpolazione con il metodo dei minimi quadrati.

L'andamento dell'idrogramma entrante in funzione del tempo si ricava con i metodi dell'idrologia. Di solito si parte dalle piogge e si usa il metodo delle fasce isocorive o il metodo dell'idrogramma unitario.

Normalmente gli intervalli temporali usati per la ricostruzione di un'idrogramma di piena sono molto ampi rispetto agli intervalli temporali di integrazione necessari per una buona accuratezza di qualunque schema numerico adottato. L'idrogramma di piena può essere considerato lineare a tratti.

Sostituendo le funzioni di h viste in precedenza nell'equazione di continuità del serbatoio, si ottiene un'equazione differenziale di primo ordine, che si può risolvere con uno degli schemi numerici già visti.

In particolare si può scrivere:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d(ah^n)}{dt} = an h^{n-1} \frac{dh}{dt}$$

Inoltre la legge della portata uscente può essere considerata variabile al variare di h secondo il seguente schema:

$$\begin{array}{ll} Q_u = 0 & \text{per } 0 \leq h \leq h_f \\ Q_u = \mu_f A \sqrt{2g(h - h_f)} & \text{per } h_f < h \leq h_s \\ Q_u = \mu_f A \sqrt{2g(h - h_f)} + \mu_s L \sqrt{2g(h - h_s)}^{3/2} & \text{per } h_s < h \end{array}$$

Naturalmente se una delle due luci non esiste basta porre uguale a zero il coefficiente di efflusso. Il coefficiente di efflusso della luce di fondo deve essere ricavato imponendo un bilancio di energia tra il serbatoio e la sezione di sbocco della galleria, considerando tutte le perdite concentrate e distribuite. Il coefficiente di efflusso dello sfioratore di superficie dipende dalla forma di questo. Ad esempio per stramazzo a larga soglia (Belanger) vale 0,385, mentre per soglia con profilo Creager assume un valore tra 0,48 e 0,50 in corrispondenza al carico per cui è stato progettato, mentre assume valori inferiori per diversi valori del carico. Nella legge di efflusso si è trascurato il caso del possibile funzionamento della luce di fondo come soglia a stramazzo, che avviene per altezze d'acqua comprese tra il fondo e la sommità della galleria di scarico.

7.11 Verifica di un serbatoio di laminazione (esercitazione)

L'esercitazione consiste nel realizzare un semplice programma di calcolo in Fortran per la verifica di un serbatoio di laminazione con una luce di fondo e uno scarico di superficie. Occorre integrare l'equazione del serbatoio, considerando come variabile dipendente la quota del pelo libero nel serbatoio stesso, utilizzando lo schema di predizione-correzione. Bisogna calcolare l'andamento della portata uscente e l'attenuazione subita dalla portata al colmo prendendo in considerazione i seguenti dati:

Curva volumi-altezze:	$W(\text{m}^3) = 176 h(\text{m})^{2,93}$
Quota luce di fondo:	$h_f = 2 \text{ m}$
Area luce di fondo:	$A = 4 \text{ m}^2$
Coefficiente di efflusso luce di fondo:	$\mu_f = 0,9$
Quota soglia sfiorante:	$h_s = 25 \text{ m}$
Larghezza soglia sfiorante:	$L = 10 \text{ m}$
Coefficiente di efflusso soglia sfiorante:	$\mu_s = 0,48$
Quota iniziale:	$h_0 = 1 \text{ m}$

L'idrogramma di piena è dato nella tabella seguente:

$t(\text{h})$	$Q(\text{m}^3/\text{s})$
0,0	0,00
0,5	66,64
1,0	172,52
1,5	244,14
2,0	788,92
2,5	1053,92
3,0	517,13
3,5	121,27
4,0	62,48
4,5	12,64
5,0	0,00

8. FENOMENI DI FILTRAZIONE E DISPERSIONE NEGLI ACQUIFERI

8.1 Generalità

Lo studio dei fenomeni di filtrazione e dispersione negli acquiferi sotterranei è importante perché le acque sotterranee sono tuttora una delle maggiori fonti di approvvigionamento idrico, soprattutto a fini potabili. Lo sviluppo della popolazione e delle attività produttive ha portato a fenomeni come il sovrasfruttamento e l'inquinamento delle falde, che possono pregiudicare l'utilizzazione della risorsa anche per tempi molto lunghi. Per evitare danni irreversibili alle falde è quindi necessario saper prevedere le conseguenze che un intervento dell'uomo possa avere sia in termini di quantità che in termini di qualità dell'acqua.

Ad esempio lo sfruttamento di una falda, abbassandone il livello, può incidere sullo sviluppo della vegetazione. La costruzione di una diga può porre problemi di innalzamento della falda, con conseguente necessità di opportuni lavori di drenaggio. Lo scarico di liquami civili o industriali, in molti casi tossici, può inquinare le falde, pregiudicandone lo sfruttamento a fini potabili. Il sovrasfruttamento delle falde in vicinanza delle coste può provocare fenomeni di intrusione di acqua del mare, con conseguente aumento della salinità.

I modelli matematici che descriveremo in seguito sono basati su una schematizzazione bidimensionale di fenomeni che in realtà sono tridimensionali. Questa assunzione è ovviamente valida nel caso di un problema piano, come ad esempio il fenomeno della filtrazione sotto una traversa di sbarramento, ed è sufficientemente approssimata nel caso dei fenomeni a scala regionale, come sono ad esempio quelli prima descritti. Infatti in questo caso l'estensione planimetrica della superficie interessata dal fenomeno è nettamente preponderante sullo spessore dell'acquifero; si possono quindi usare modelli bidimensionali mediati sulla verticale.

I modelli matematici sono di particolare importanza nei fenomeni a scala regionale, che non possono essere studiati su modello fisico, sia per la grande scala che per la difficile determinazione delle caratteristiche del terreno che influenzano la filtrazione e la dispersione. In tale tipo di fenomeni occorre quindi sempre una taratura dei parametri del modello, possibilmente in base ad osservazioni e misure dirette sull'acquifero studiato.

8.2 I fenomeni di filtrazione

I modelli bidimensionali che illustreremo possono essere adottati per i fenomeni in cui lo spessore dell'acquifero è piccolo rispetto all'estensione planimetrica dell'acquifero (modelli a scala regionale).

Il moto di filtrazione in un acquifero sotterraneo si distingue in moto nella zona satura e moto nella zona non satura. Il moto nella zona non satura è prevalentemente in direzione verticale, ma nei fenomeni a scala regionale ha principalmente importanza il moto nella zona satura. La discussione sarà ristretta allora al moto nella zona satura. Verranno presi in considerazione terreni porosi, anche se i metodi descritti possono essere adattati anche ai terreni fratturati.

Le falde acquifere sotterranee possono essere di vari tipi:

- falde confinate, dette anche falde artesiane, dalla regione francese dell'Artois, in cui l'acqua si trova tra due strati di terreno impermeabile, detti rispettivamente letto e tetto della falda; l'acqua della falda è in pressione e in un piezometro infisso nel terreno il livello sale fino ad un valore superiore al tetto della falda;
- falde non confinate, dette anche falde freatiche, che sono confinate alla base da una formazione impermeabile, detta letto della falda, e sono superiormente in comunicazione con l'atmosfera;
- falde semiconfinate, delimitate da almeno uno strato semimpermeabile, che può essere sia quello inferiore che quello superiore, e che quindi scambiano portata con le falde circostanti.

Nei modelli bidimensionali che considereremo si assume nulla la componente della velocità in direzione verticale e si considera di conseguenza un unico valore del carico piezometrico lungo la verticale (ipotesi di Dupuit).

8.3 Equazioni della filtrazione

Nelle ipotesi prima esposte, le equazioni del moto di filtrazione di un fluido in un acquifero sotterraneo sono l'equazione di continuità e la legge di Darcy.

L'equazione di continuità per il moto bidimensionale in un acquifero sotterraneo si può scrivere:

$$-\frac{\partial(mu)}{\partial x} - \frac{\partial(mv)}{\partial y} + q = S \frac{\partial h}{\partial t}$$

essendo m lo spessore dello strato saturo, u e v le componenti della velocità in direzione x e y , q la portata entrante, S il coefficiente d'immagazzinamento.

Nel caso della falda artesianiana il coefficiente d'immagazzinamento è legato alla comprimibilità del fluido, mentre nel caso della falda freatica l'effetto della comprimibilità può essere trascurato rispetto alle variazioni di volume di fluido causate dall'innalzamento e dall'abbassamento del livello della falda; in questo caso il coefficiente d'immagazzinamento coincide con la porosità effettiva del terreno n_e . Inoltre lo spessore dell'acquifero è funzione del livello piezometrico, essendo la falda a contatto con l'atmosfera. Detta b la quota del letto impermeabile della falda, l'equazione di continuità si può allora scrivere:

$$-\frac{\partial[(h-b)u]}{\partial x} - \frac{\partial[(h-b)v]}{\partial y} + q = n_e \frac{\partial h}{\partial t}$$

Tenendo conto della legge di Darcy le componenti di velocità si possono legare alle componenti del gradiente del carico nelle rispettive direzioni:

$$u = -k \frac{\partial h}{\partial x}, \quad v = -k \frac{\partial h}{\partial y},$$

essendo k il coefficiente di permeabilità. La legge di Darcy può essere generalizzata per un acquifero anisotropo:

$$u = -k_{xx} \frac{\partial h}{\partial x} - k_{xy} \frac{\partial h}{\partial y}, \quad v = -k_{yx} \frac{\partial h}{\partial x} - k_{yy} \frac{\partial h}{\partial y},$$

introducendo cioè, al posto del coefficiente di permeabilità k , un tensore di permeabilità:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix}$$

per tener conto del fatto che in un mezzo anisotropo la direzione della velocità può differire dalla direzione del gradiente del carico.

Combinando le precedenti equazioni, l'equazione del moto si può scrivere, nel caso di un acquifero artesiano:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(mk \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(mk \frac{\partial h}{\partial y} \right) + q = S \frac{\partial h}{\partial t}$$

per un mezzo isotropo e

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(mk_{xx} \frac{\partial h}{\partial x} + mk_{xy} \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(mk_{yx} \frac{\partial h}{\partial x} + mk_{yy} \frac{\partial h}{\partial y} \right) + q = S \frac{\partial h}{\partial t}$$

per un mezzo anisotropo. Nel caso di un acquifero freatico si può invece scrivere:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[(h-b)k \frac{\partial h}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[(h-b)k \frac{\partial h}{\partial y} \right] + q = n_e \frac{\partial h}{\partial t}$$

per un mezzo isotropo e

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[(h-b)k_{xx} \frac{\partial h}{\partial x} + (h-b)k_{xy} \frac{\partial h}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[(h-b)k_{yx} \frac{\partial h}{\partial x} + (h-b)k_{yy} \frac{\partial h}{\partial y} \right] + q = n_e \frac{\partial h}{\partial t}$$

per un mezzo anisotropo. La scrittura dell'equazione di continuità per un acquifero semiconfinato è più complessa e prende in considerazione termini di scambio con gli acquiferi circostanti basati su una formulazione in accordo con la legge di Darcy.

Le equazioni appena viste valgono per il moto vario, mentre quelle valevoli per il moto permanente si ottengono eliminando il termine $\partial h / \partial t$. Le equazioni del moto vario in un acquifero sono equazioni differenziali alle derivate parziali di tipo parabolico. Per l'integrazione alle equazioni devono essere associate le condizioni

iniziali (l'andamento del carico al tempo iniziale) e le condizioni al contorno (valevoli sulla frontiera del dominio d'integrazione). Nel caso del moto permanente invece le equazioni sono ellittiche e richiedono la definizione delle condizioni al contorno.

Le condizioni al contorno possono essere di tre tipi:

- condizioni al contorno del primo tipo (di Dirichlet), che impongono il valore del carico. In ogni problema è necessario almeno un punto in cui sia definita una condizione al contorno del primo tipo, per garantire l'unicità della soluzione, che altrimenti è definita a meno di una costante;
- condizioni al contorno del secondo tipo (di Neumann), che impongono un valore del flusso al contorno. Su tali parti della frontiera è quindi assegnato il valore del gradiente del carico. In particolare i contorni impermeabili sono punti in cui il flusso è nullo;
- condizioni al contorno del terzo tipo (miste), che impongono un legame che è una combinazione lineare del carico e del flusso, valevoli per contorni semimpermeabili.

8.4 Il metodo delle differenze finite per i problemi di filtrazione

8.4.1 SOLUZIONE PER IL CASO DI ACQUIFERO ISOTROPO E CONFINATO

Faremo riferimento per semplicità al caso di un acquifero confinato. In tal caso la scrittura delle equazioni in forma discreta darà luogo alla formulazione di un sistema lineare, contrariamente al caso dell'acquifero non confinato, per cui si avranno equazioni non lineari nei carichi piezometrici ai nodi. Infatti nel caso dell'acquifero non confinato la trasmissività, definita come prodotto del coefficiente di permeabilità per lo spessore dell'acquifero, dipende dalla soluzione. Tuttavia si può attuare in questi casi una linearizzazione del problema, esprimendo la trasmissività in base al valore attuale del carico e considerandola come costante. Nel caso di terreno isotropo si può fare quindi riferimento all'equazione:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial h}{\partial y} \right) + q = S \frac{\partial h}{\partial t}$$

essendo T la trasmissività, prodotto dello spessore dell'acquifero per il coefficiente di permeabilità, e quindi funzione, nel caso di acquifero confinato e isotropo, delle sole coordinate spaziali.

8.4.2 MOTO PERMANENTE

Nel caso del moto permanente l'equazione vista prima si particolarizza nella seguente:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial h}{\partial y} \right) + q = 0$$

che, nel caso che la portata q emunta o immessa nell'acquifero sia nulla, e nel caso di trasmissività costante (acquifero omogeneo) diventa:

$$\Delta^2 h = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$$

Questa è l'equazione di Laplace, che abbiamo già incontrato come classico esempio di equazione ellittica. Si ottiene questa forma dell'equazione anche nel caso di un problema piano. Infatti in tale ipotesi e nel caso di moto permanente l'equazione di continuità si scrive:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

e utilizzando la legge di Darcy nell'ipotesi di acquifero omogeneo si ottiene ancora l'equazione di Laplace.

Abbiamo già visto un possibile schema iterativo per la soluzione dell'equazione di Laplace, basato sull'idea di raggiungere la soluzione del problema di equilibrio come soluzione finale di un problema di dispersione, che evita di risolvere il sistema lineare.

Vedremo adesso lo schema completo, che si basa sempre sulla valutazione delle derivate seconde in direzione x e y nella forma:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{h_{i+1,j} - 2h_{i,j} + h_{i-1,j}}{\Delta x^2} \quad \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{h_{i,j+1} - 2h_{i,j} + h_{i,j-1}}{\Delta y^2}$$

L'equazione discretizzata si scrive quindi:

$$\frac{h_{i+1,j} - 2h_{i,j} + h_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{h_{i,j+1} - 2h_{i,j} + h_{i,j-1}}{\Delta y^2} = 0.$$

Questo schema è valido se le dimensioni delle maglie della griglia di calcolo sono costanti (anche se la dimensione Δx può essere diversa da Δy) e in questo caso ha consistenza del secondo ordine. Nel caso che sia anche $\Delta x = \Delta y$, lo schema diventa semplicemente esprimibile attraverso l'equazione:

$$-4h_{i,j} + h_{i+1,j} + h_{i-1,j} + h_{i,j+1} + h_{i,j-1} = 0.$$

Una volta numerati gli n nodi del reticolo, si tratta quindi di scrivere n equazioni lineari e di risolvere il sistema. Naturalmente le equazioni del tipo di quella appena

scritta valgono per i nodi interni, mentre per i nodi sulla frontiera del dominio di integrazione bisogna tener conto delle condizioni al contorno.

Esaminiamo condizioni al contorno di due tipi: quelle in cui si impone il valore del carico e quelle in cui si impone che la parete sia impermeabile, e quindi che il valore della velocità (e quindi della derivata del carico in direzione normale) sia nullo. Per i punti della frontiera in cui si impone il valore del carico la condizione al contorno assume la forma:

$$h_{i,j} = h_{i,j}^o.$$

Per i punti in cui si assume che la derivata del carico in direzione normale alla frontiera stessa sia nullo, la condizione al contorno assume la forma:

$$h_{i+1,j} = h_{i-1,j}$$

se la frontiera è ortogonale alla direzione x , oppure la forma:

$$h_{i,j+1} = h_{i,j-1}$$

se la frontiera è ortogonale alla direzione y .

8.4.3 CALCOLO DELLA FILTRAZIONE IN UN ACQUIFERO ARTESIANO OMOGENEO E ISOTROPO (ESERCITAZIONE)

L'esercitazione consiste nel calcolare con il metodo di Seidel l'andamento della piezometrica in un acquifero artesianesimo omogeneo e isotropo largo 600 m e lungo 700 m. Sui lati dell'acquifero esistono frontiere impermeabili. A monte e a valle il carico è fissato rispettivamente pari a 7 m e a 0. La trasmissività è costante e pari a 0,1 m²/s. Sull'asse di simmetria a 300 m dalla frontiera di monte c'è un pozzo che emunge una portata di 1 m³/s.

8.4.4 MOTO VARIO

L'equazione del moto vario per acquifero confinato e isotropo:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial h}{\partial y} \right) + q = S \frac{\partial h}{\partial t}$$

può essere discretizzata in base al seguente schema generale:

$$S_{i,j} \frac{h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^n}{\Delta t} = q_{i,j} + \frac{T_{i+1/2,j} (h_{i+1,j}^* - h_{i,j}^*) - T_{i-1/2,j} (h_{i,j}^* - h_{i-1,j}^*)}{\Delta x^2} +$$

$$+ \frac{T_{i,j+1/2}(h_{i,j+1}^* - h_{i,j}^*) - T_{i,j-1/2}(h_{i,j}^* - h_{i,j-1}^*)}{\Delta y^2}$$

dove n è l'indice dei tempi e la trasmissività è mediata tra due punti vicini per tener conto del fatto che i flussi di portata sono definiti sulle pareti di una cella di calcolo. In particolare la trasmissività media può essere valutata semplicemente con la media aritmetica:

$$T_{i+1/2,j} = \frac{T_{i,j} + T_{i+1,j}}{2}$$

o più correttamente con la media armonica:

$$T_{i+1/2,j} = \frac{2T_{i,j}T_{i+1,j}}{T_{i,j} + T_{i+1,j}}$$

perché due trasmissività in serie sono equivalenti a due resistenze in parallelo.

Il generico termine $h_{i,j}^*$ può essere valutato nella forma:

$$h_{i,j}^* = (1 - \theta)h_{i,j}^n + \theta h_{i,j}^{n+1}$$

con θ , compreso tra 0 e 1, coefficiente di peso tra il valore al tempo precedente e il valore al tempo successivo. Tale scrittura dà luogo ad uno schema implicito per $\theta \neq 0$ e a uno schema esplicito per $\theta = 0$.

L'equazione discretizzata appena vista vale naturalmente per i nodi interni del campo d'integrazione, mentre per i nodi di frontiera bisogna porre le condizioni al contorno nelle possibili forme viste (di Dirichlet, di Neumann, miste).

8.4.4.1 Schema esplicito

Nel caso che si scelga $\theta = 0$, il carico al generico nodo (i,j) al tempo $n+1$ può essere valutato con la semplice formula esplicita:

$$h_{i,j}^{n+1} = h_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{S_{i,j}} q_{i,j} + \frac{\Delta t}{S_{i,j}} \frac{T_{i+1/2,j}(h_{i+1,j}^n - h_{i,j}^n) - T_{i-1/2,j}(h_{i,j}^n - h_{i-1,j}^n)}{\Delta x^2} +$$

$$+ \frac{\Delta t}{S_{i,j}} \frac{T_{i,j+1/2}(h_{i,j+1}^n - h_{i,j}^n) - T_{i,j-1/2}(h_{i,j}^n - h_{i,j-1}^n)}{\Delta y^2}$$

Si può vedere che questo schema è stabile sotto la condizione:

$$\left(\frac{\Delta t}{\Delta x^2} + \frac{\Delta t}{\Delta y^2} \right) \leq \frac{1}{2} \frac{S}{T}$$

che nella maggior parte dei casi risulta molto gravosa. Infatti, soprattutto nei modelli a scala regionale, che riguardano fenomeni di moto vario con scale temporali dell'ordine degli anni, e in cui le dimensioni delle maglie vanno normalmente da un ordine di grandezza di 10 m ad uno di 100 m, gli intervalli di tempo risultano dell'ordine dei secondi, dando luogo a tempi di calcolo inaccettabili.

8.4.4.2 Schema implicito

È opportuno ricorrere allora a schemi impliciti, che richiedono ad ogni intervallo di tempo la risoluzione di un sistema con un numero di equazioni pari al numero dei nodi del reticolo di calcolo. Ponendo $\theta \neq 0$ nella formula

$$h_{i,j}^* = (1 - \theta)h_{i,j}^n + \theta h_{i,j}^{n+1}$$

si ha uno schema implicito. Se si sceglie $\theta=0,5$, in particolare, si ha lo schema di Cranck-Nicholson, largamente usato per la sua accuratezza, in quanto risulta con consistenza di secondo ordine.

Ponendo $\theta=1$, in particolare, si ottiene:

$$\begin{aligned} & \frac{T_{i-1/2,j}h_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i+1/2,j}h_{i+1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j-1/2}h_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} + \frac{T_{i,j+1/2}h_{i,j+1}^{n+1}}{\Delta y^2} - \\ & - h_{i,j}^{n+1} \left(\frac{T_{i-1/2,j}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i+1/2,j}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j-1/2}}{\Delta y^2} + \frac{T_{i,j+1/2}}{\Delta y^2} + \frac{S_{i,j}}{\Delta t} \right) = -q_{i,j} - \frac{S_{i,j}h_{i,j}^n}{\Delta t}. \end{aligned}$$

Bisogna quindi risolvere un sistema lineare con numero di equazioni pari al numero dei nodi del reticolo di calcolo. Nei nodi interni valgono equazioni del tipo di quella appena scritta, mentre nei nodi di frontiera bisogna imporre le condizioni al contorno.

Il sistema di equazioni da risolvere è caratterizzato da una matrice bandata e simmetrica, e può essere risolto con metodo diretto o con metodo iterativo, come già visto a proposito dei sistemi lineari. In particolare tra i metodi diretti può essere utilizzato il metodo di Gauss.

Tra i metodi iterativi, utilizzando il metodo di Jacobi, la soluzione iterativa dell'equazione precedente scritta nella forma:

$$h_{i,j}^{n+1} = f(h_{i-1,j}^{n+1} + h_{i+1,j}^{n+1} + h_{i,j-1}^{n+1} + h_{i,j+1}^{n+1})$$

può essere ottenuta mediante lo schema iterativo:

$$h_{i,j}^{n+1(\text{new})} = f\left(h_{i-1,j}^{n+1(\text{old})} + h_{i+1,j}^{n+1(\text{old})} + h_{i,j-1}^{n+1(\text{old})} + h_{i,j+1}^{n+1(\text{old})}\right)$$

riferendosi gli indici (old) e (new) rispettivamente all'iterazione precedente e alla nuova iterazione. Tale procedura converge verso la soluzione del sistema in quanto la matrice è diagonalmente dominante. Utilizzando il metodo di Seidel, invece, lo schema iterativo è definito dall'equazione:

$$h_{i,j}^{n+1(\text{new})} = f\left(h_{i-1,j}^{n+1(\text{new})} + h_{i+1,j}^{n+1(\text{old})} + h_{i,j-1}^{n+1(\text{new})} + h_{i,j+1}^{n+1(\text{old})}\right)$$

Anche in questo caso l'introduzione di un fattore di sovrarilassamento (compreso tra 1 e 2) può accelerare la convergenza.

8.4.5 ESTENSIONE AGLI ALTRI TIPI DI ACQUIFERO

8.4.5.1 Acquifero non isotropo

In questo caso, analogamente al tensore di permeabilità introdotta precedentemente, può essere definito un tensore di trasmissività:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} \\ T_{yx} & T_{yy} \end{bmatrix}$$

e l'equazione generale discretizzata vista in precedenza può essere estesa nel modo seguente:

$$\begin{aligned} S_{i,j} \frac{h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^n}{\Delta t} = q_{i,j} + & \frac{T_{xx\,i+1/2,j}(h_{i+1,j}^* - h_{i,j}^*) - T_{xx\,i-1/2,j}(h_{i,j}^* - h_{i-1,j}^*)}{\Delta x^2} + \\ & + \frac{T_{yy\,i,j+1/2}(h_{i,j+1}^* - h_{i,j}^*) - T_{yy\,i,j-1/2}(h_{i,j}^* - h_{i,j-1}^*)}{\Delta y^2} + \\ & + \frac{T_{xy\,i,j+1/2}(h_{i+1,j+1}^* - h_{i-1,j+1}^* + h_{i+1,j}^* - h_{i-1,j}^*)}{4\Delta x\Delta y} - \\ & - \frac{T_{xy\,i,j-1/2}(h_{i+1,j}^* - h_{i-1,j}^* + h_{i+1,j-1}^* - h_{i-1,j-1}^*)}{4\Delta x\Delta y} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{T_{xy \, i+1/2, j} (h_{i+1, j+1}^* - h_{i+1, j-1}^* + h_{i, j+1}^* - h_{i, j-1}^*)}{4\Delta x \Delta y} -$$

$$- \frac{T_{xy \, i-1/2, j} (h_{i, j+1}^* - h_{i, j-1}^* + h_{i-1, j+1}^* - h_{i-1, j-1}^*)}{4\Delta x \Delta y}$$

8.4.5.2 Acquifero freatico

Nel caso di acquifero freatico, la trasmissività dipende, oltre che dalle coordinate spaziali, anche dal carico piezometrico, e quindi in generale dal tempo. Introducendo la quota del fondo impermeabile dell'acquifero $b_{i,j}$, la trasmissività si esprime nella forma:

$$T_{i,j} = k_{i,j} (h_{i,j} - b_{i,j})$$

La trasmissività media tra due punti può ancora essere valutata mediante la media armonica vista in precedenza:

$$T_{i+1/2, j} = \frac{2T_{i,j}T_{i+1,j}}{T_{i,j} + T_{i+1,j}}$$

In alternativa si può valutare lo spessore dell'acquifero con una media geometrica:

$$T_{i+1/2, j} = k_{i+1/2, j} \sqrt{(h_{i+1, j} - b_{i+1, j})(h_{i, j} - b_{i, j})}$$

essendo la permeabilità valutata sempre con la media armonica:

$$k_{i+1/2, j} = \frac{2k_{i,j}k_{i+1,j}}{k_{i,j} + k_{i+1,j}}$$

Quindi, se nello schema implicito anche le trasmissività sono valutate implicitamente, il sistema risultante diventa non lineare e uno degli schemi iterativi visti prima diventa strettamente necessario per la soluzione.

8.5 Trasporto di sostanze in falde acquifere

L'inquinamento delle falde acquifere sotterranee dovuto alle attività umane avviene in vari modi. Ad esempio, acqua inquinata può infiltrarsi nell'acquifero da corpi idrici superficiali inquinati, da collettori fognari fessurati, da pozzi neri. Le sostanze inquinanti utilizzate in agricoltura (nitrati, pesticidi) trasportate dalle

piogge possono raggiungere le falde. Allo stesso modo le sostanze tossiche o nocive presenti nelle discariche di rifiuti solidi possono inquinare le falde.

Il processo di dispersione degli inquinanti nelle falde è molto complesso. Si può distinguere una prima fase in cui l'inquinante si disperde nella direzione verticale principalmente per percolazione attraverso la zona non satura, da una seconda fase in cui il moto avviene nella zona satura. Nel seguito si prenderanno in considerazione, anche per il fenomeno della dispersione, modelli a scala regionale, considerando il problema bidimensionale con riferimento alle grandezze mediate sulla verticale. Ci limiteremo quindi a esaminare la fase del trasporto nella zona satura, trascurando la prima fase del processo. Questa approssimazione è sicuramente accettabile quando le dimensioni planimetriche dell'acquifero sono prevalenti rispetto alla sua dimensione verticale. Gli effetti tridimensionali possono essere importanti in acquiferi fortemente stratificati.

Si possono distinguere i soluti trasportati in base al loro comportamento. In particolare si distinguono soluti attivi o inattivi dal punto di vista chimico. L'eventuale attività chimica può essere messa in conto attraverso le opportune equazioni di reazioni chimiche o attraverso equazioni che tengano conto dell'interazione tra la sostanza e la matrice solida dell'acquifero (assorbimento). Inoltre, per forti concentrazioni del soluto, le disuniformità spaziali della densità della sostanza trasportata possono influenzare il campo idrodinamico. Nel seguito si considereranno soltanto soluti inattivi sia dal punto di vista chimico che dal punto di vista idrodinamico. Questa ipotesi comporta che le equazioni che risolvono il campo di moto sono disaccoppiate dalle equazioni che risolvono il problema di trasporto. Il campo di velocità deve essere conosciuto a priori per la risoluzione delle equazioni di trasporto. In particolare il modello di trasporto richiede la conoscenza delle effettive velocità attraverso i pori, che possono essere ottenute dalle velocità del modello di filtrazione dividendo per la porosità effettiva n_e .

8.6 Equazioni della dispersione

Il trasporto del soluto ideale precedentemente definito può essere analizzato sulla base del bilancio di massa in un volume infinitesimo. Il trasporto a livello microscopico all'interno dei singoli meati avviene secondo due modalità fondamentali: il trasporto convettivo e il trasporto diffusivo. Mentre il flusso convettivo della sostanza considerata attraverso una superficie è proporzionale alla componente della velocità ortogonale alla superficie stessa:

$$\Phi_c = u_n c A$$

il flusso diffusivo, secondo la legge di Fick, è proporzionale all'opposto del gradiente della concentrazione in direzione normale alla superficie:

$$\Phi_d = - D_m \frac{\partial c}{\partial n} A$$

essendo D_m il coefficiente di diffusione molecolare.

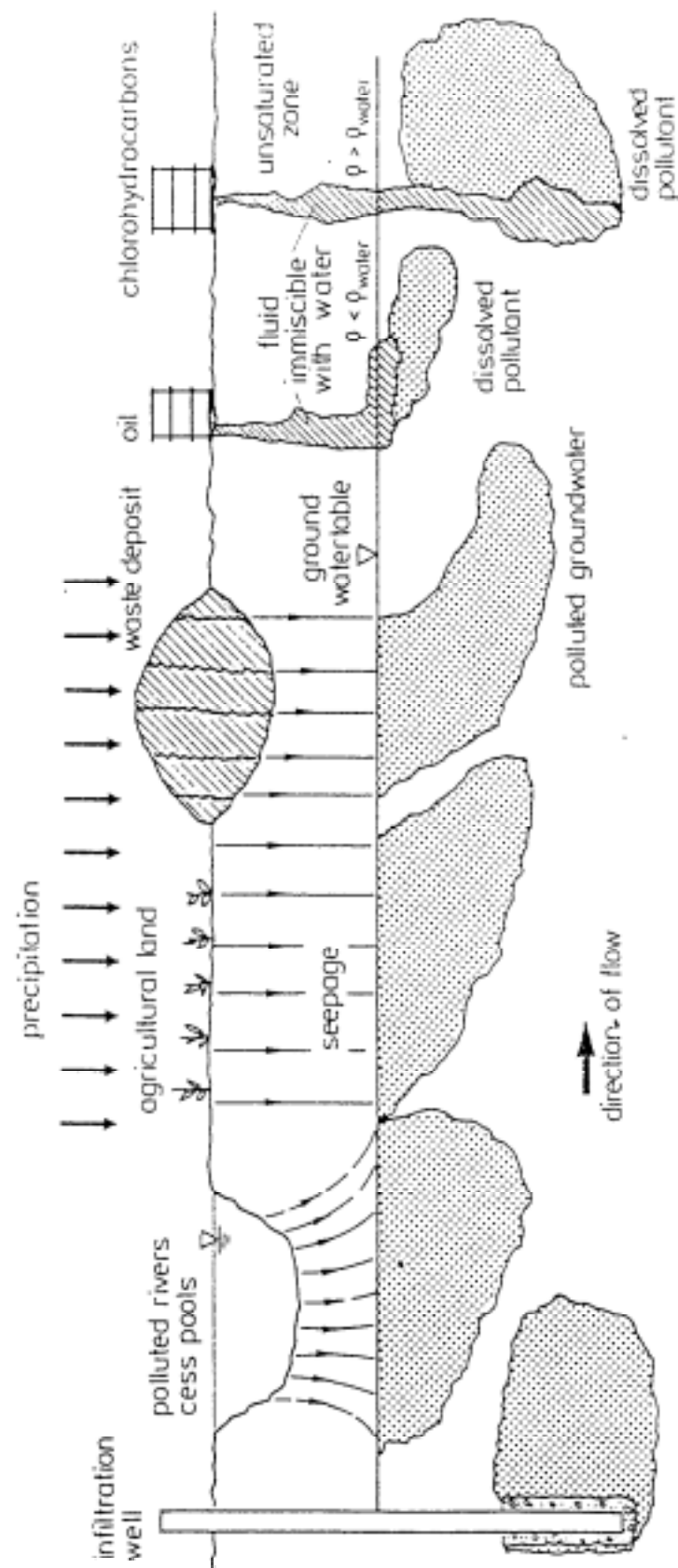


Fig. 8.1 – Possibili fonti di inquinamento (Kinzelbach, 1986)

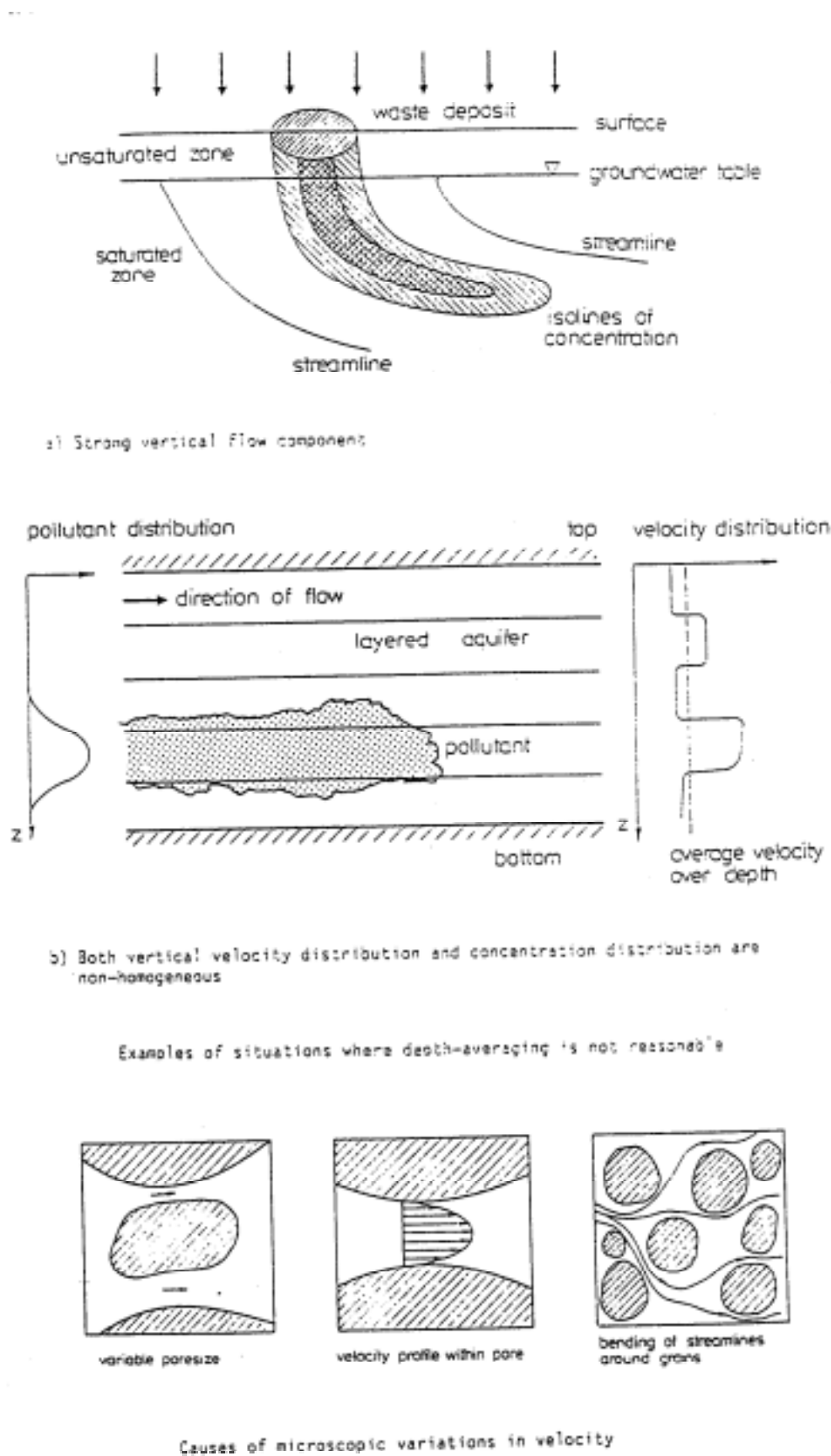


Fig. 8.2 – Modalità della dispersione (Kinzelbach, 1986)

L'equazione indefinita del trasporto a livello microscopico in assenza di apporti esterni si può scrivere allora nella forma:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial(uc)}{\partial x} + \frac{\partial(vc)}{\partial y} + \frac{\partial(wc)}{\partial z} = D_m \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right)$$

Dal punto di vista applicativo, tuttavia, questa equazione è di scarsa utilità, in quanto i volumi su cui è opportuno effettuare il bilancio sono macroscopici. Per ottenere l'equazione indefinita su un volume macroscopico si considerano valori medi delle grandezze sui pori contenuti nel volume stesso. I valori medi sull'intero volume si ottengono moltiplicando per la porosità effettiva n_e .

Come in molti processi statistici, si esprimono le grandezze locali come somma della media della stessa grandezza sull'intero volume e dello scarto locale dalla media:

$$u = \bar{u} + u', \quad v = \bar{v} + v', \quad w = \bar{w} + w', \quad c = \bar{c} + c'.$$

Con tale procedimento, sostituendo i valori locali nell'equazione di bilancio scritta in precedenza e mediando, si ottiene l'equazione del trasporto per un volume macroscopico, che in assenza di apporti esterni si scrive:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(n_e c)}{\partial t} + \frac{\partial(n_e u c)}{\partial x} + \frac{\partial(n_e v c)}{\partial y} + \frac{\partial(n_e w c)}{\partial z} + \frac{\partial(n_e \bar{u}' c')}{\partial x} + \frac{\partial(n_e \bar{v}' c')}{\partial y} + \frac{\partial(n_e \bar{w}' c')}{\partial z} = \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_m n_e \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_m n_e \frac{\partial c}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_m n_e \frac{\partial c}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

in cui per semplicità sono stati omessi i segni di media. I nuovi termini introdotti in seguito al procedimento descritto sono detti termini di dispersione e sono dovuti alle variazioni microscopiche di velocità dovute alla disuniformità delle dimensioni dei pori, all'effettivo profilo di velocità all'interno dei pori e alla curvatura delle linee di corrente attorno ai grani. Su volumi ancora più grandi intervengono inoltre anche disuniformità nella permeabilità, che creano le maggiori deviazioni della velocità dal suo valore medio.

Nei modelli di dispersione a scala regionale, il processo di media si effettua su un volume prismatico con dimensioni planimetriche dx e dy e avente come dimensione verticale tutto lo spessore dell'acquifero. Con riferimento alle grandezze medie sulla verticale, si ottiene quindi la seguente forma dell'equazione di trasporto:

$$\frac{\partial(mn_e c)}{\partial t} + \frac{\partial(mn_e u c)}{\partial x} + \frac{\partial(mn_e v c)}{\partial y} + \frac{\partial(mn_e \bar{u}' c')}{\partial x} + \frac{\partial(mn_e \bar{v}' c')}{\partial y} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left(D_m m n_e \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_m m n_e \frac{\partial c}{\partial y} \right)$$

Il processo di dispersione all'interno dell'acquifero, dovuto all'effetto delle disuniformità della velocità, consiste in un mescolamento e spargimento di una distribuzione iniziale di concentrazione. Esistono quindi analogie tra il processo di diffusione e il processo di dispersione. Per tale motivo i termini di dispersione vengono di solito modellati in analogia ai termini diffusivi, introducendo un coefficiente di dispersione D_s :

$$\overline{u'c'} = -D_s \frac{\partial c}{\partial x}, \quad \overline{v'c'} = -D_s \frac{\partial c}{\partial y}.$$

In tale ipotesi l'equazione del trasporto bidimensionale può essere scritta nella forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(mn_e c)}{\partial t} + \frac{\partial(mn_e u c)}{\partial x} + \frac{\partial(mn_e v c)}{\partial y} &= \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[(D_m + D_s) m n_e \frac{\partial c}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[(D_m + D_s) m n_e \frac{\partial c}{\partial y} \right] \end{aligned}$$

Più in generale, se si vuole tener conto dell'anisotropia della dispersione si può introdurre un tensore di dispersione:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{xx} & D_{xy} \\ D_{yx} & D_{yy} \end{bmatrix}$$

L'equazione di trasporto bidimensionale si scrive allora nella forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(mn_e c)}{\partial t} + \frac{\partial(mn_e u c)}{\partial x} + \frac{\partial(mn_e v c)}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(D_m m n_e \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_m m n_e \frac{\partial c}{\partial y} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left[m n_e \left(D_{xx} \frac{\partial c}{\partial x} + D_{xy} \frac{\partial c}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[m n_e \left(D_{yx} \frac{\partial c}{\partial x} + D_{yy} \frac{\partial c}{\partial y} \right) \right] \end{aligned}$$

Introducendo una sorgente per unità di volume σ e tenendo conto della portata infiltrata per unità di area q in direzione verticale, si ottiene in definitiva l'equazione di Bear:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(mn_e c)}{\partial t} + \frac{\partial(mn_e u c)}{\partial x} + \frac{\partial(mn_e v c)}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(D_m mn_e \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_m mn_e \frac{\partial c}{\partial y} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left[mn_e \left(D_{xx} \frac{\partial c}{\partial x} + D_{xy} \frac{\partial c}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[mn_e \left(D_{yx} \frac{\partial c}{\partial x} + D_{yy} \frac{\partial c}{\partial y} \right) \right] + \sigma m + q c_{in} \end{aligned}$$

essendo c_{in} la concentrazione della portata in ingresso. I coefficienti di dispersività sono raramente noti a priori. Solitamente vengono posti nella forma di un prodotto tra il valore assoluto di una velocità e una grandezza che ha le dimensioni di una lunghezza ed è chiamata dispersività. In particolare, il tensore di dispersione è in forma diagonale se uno degli assi coordinati è allineato con il vettore velocità. Assumendo che l'asse x sia allineato si ottiene:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_L & 0 \\ 0 & D_T \end{bmatrix}$$

essendo D_L e D_T i coefficienti di dispersione longitudinale e trasversale. Si può porre allora:

$$D_L = \alpha_L |\mathbf{v}|, \quad D_T = \alpha_T |\mathbf{v}|,$$

essendo α_L e α_T rispettivamente la dispersività longitudinale e trasversale.

I coefficienti di dispersività in un sistema di riferimento qualunque possono essere ottenuti dalle espressioni:

$$D_{xx} = \alpha_L \frac{u^2}{|\mathbf{v}|} + \alpha_T \frac{v^2}{|\mathbf{v}|}, \quad D_{yy} = \alpha_T \frac{u^2}{|\mathbf{v}|} + \alpha_L \frac{v^2}{|\mathbf{v}|}, \quad D_{xy} = D_{yx} = (\alpha_L - \alpha_T) \frac{uv}{|\mathbf{v}|}.$$

Si nota un aumento della dispersività longitudinale α_L all'aumentare della scala dell'area considerata, a causa dell'aumento delle disomogeneità che comportano maggiori dispersioni. I rapporti osservati tra α_T e α_L sono nel campo 0,01-0,3, con un valore medio attorno a 0,1. La valutazione delle dispersività è tuttavia un problema di grande difficoltà e il metodo migliore resta l'osservazione diretta nell'acquifero preso in esame.

8.7 Il metodo delle differenze finite per i problemi di dispersione

L'equazione del trasporto di una sostanza in una falda acquifera è un'equazione di convezione-diffusione. Supponiamo per semplicità di ipotizzare la dispersione isotropa e la porosità costante.

I termini dispersivi possono essere discretizzati nella forma:

$$-n_e \frac{m_{i+1/2,j} D_{s\ i+1/2,j} (c_{i+1,j} - c_{i,j}) - m_{i-1/2,j} D_{s\ i-1/2,j} (c_{i,j} - c_{i-1,j})}{\Delta x^2} -$$

$$-n_e \frac{m_{i,j+1/2} D_{s\ i,j+1/2} (c_{i,j+1} - c_{i,j}) - m_{i,j-1/2} D_{s\ i,j-1/2} (c_{i,j} - c_{i,j-1})}{\Delta y^2}$$

I termini convettivi possono essere discretizzati nella forma generale:

$$n_e \frac{m_{i+1/2,j} u_{i+1/2,j} [\alpha c_{i,j} + (1 - \alpha) c_{i+1,j}] - m_{i-1/2,j} u_{i-1/2,j} [\beta c_{i-1,j} + (1 - \beta) c_{i,j}]}{\Delta x} +$$

$$+ n_e \frac{m_{i,j+1/2} v_{i,j+1/2} [\gamma c_{i,j} + (1 - \gamma) c_{i,j+1}] - m_{i,j-1/2} v_{i,j-1/2} [\delta c_{i,j-1} + (1 - \delta) c_{i,j}]}{\Delta y}$$

Le velocità devono essere considerate note, perché sono state ricavate precedentemente con un modello di filtrazione. I coefficienti α , β , γ e δ assumono diverse espressioni a seconda dello schema adottato. In particolare se si adotta uno schema centrato si ha:

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0,5$$

Se si adotta uno schema "upwind" i coefficienti si calcolano con le seguenti espressioni:

$$\alpha = \frac{1 + \text{sgn}(u_{i+1/2,j})}{2} \quad \beta = \frac{1 + \text{sgn}(u_{i-1/2,j})}{2}$$

$$\gamma = \frac{1 + \text{sgn}(v_{i,j+1/2})}{2} \quad \delta = \frac{1 + \text{sgn}(v_{i,j-1/2})}{2}$$

Lo schema centrato è più accurato ma introduce oscillazioni nella soluzione che possono essere evitate scegliendo intervalli spaziali sufficientemente piccoli. Lo schema upwind invece introduce un termine di dispersione numerica che dipende dall'entità dei coefficienti dei termini convettivi, oltre che dagli intervalli spaziali della griglia di calcolo. In particolare si può definire un numero adimensionale, detto numero di Peclet, che assume le seguenti espressioni a seconda della direzione considerata:

$$Pe_x = \frac{u \Delta x}{D_s}, \quad Pe_y = \frac{v \Delta y}{D_s}.$$

Scegliere numeri di Peclet minori di 2 è un buon criterio sia per evitare le oscillazioni numeriche nel caso che si adotti lo schema centrato, sia per far sì che il

termine di dispersione numerica rimanga contenuto rispetto alla dispersione effettiva nel caso che si adotti lo schema upwind.

La derivata temporale si può discretizzare nella forma:

$$n_e m_{i,j} \frac{c_{i,j}^{n+1} - c_{i,j}^n}{\Delta t}$$

Le concentrazioni che compaiono nelle espressioni discretizzate dei termini convettivi e dispersivi possono essere espresse nella forma generale:

$$c_{i,j} = \theta c_{i,j}^{n+1} + (1 - \theta) c_{i,j}^n$$

con θ coefficiente di peso compreso tra 0 e 1. Per $\theta=0$ si ottiene uno schema esplicito, per $\theta=0,5$ uno schema di Cranck-Nicholson e per $\theta=1$ uno schema totalmente implicito. Lo schema esplicito è stabile se è rispettata la condizione di Courant nelle due direzioni:

$$C_x = \frac{u\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \qquad C_y = \frac{v\Delta t}{\Delta y} \leq 1$$

e il criterio di Neumann, che si esprime con la condizione:

$$D_s \left(\frac{\Delta t}{\Delta x^2} + \frac{\Delta t}{\Delta y^2} \right) \leq \frac{1}{2}$$

Alle equazioni appena viste bisogna associare le condizioni al contorno che possono essere rispettate imponendo che il valore della concentrazione sia uguale a un valore assegnato, o imponendo che il flusso convettivo così come quello dispersivo sia nullo sui contorni impermeabili.

9. LE EQUAZIONI DI NAVIER-STOKES

9.1 Le equazioni di Navier-Stokes e le equazioni di Reynolds

Un modello idrodinamico nel caso più generale si basa sulle equazioni differenziali alle derivate parziali che esprimono il bilancio di massa e quantità di moto nelle tre direzioni. Per l'applicazione di un modello idrodinamico a campi di moto turbolenti risulta allo stato attuale impossibile, per le capacità di memoria e per la velocità di esecuzione dei calcolatori, risolvere le equazioni relative alle grandezze istantanee, che sono l'equazione di continuità e le equazioni di Navier-Stokes nelle tre direzioni. Utilizzando la notazione tensoriale e nell'ipotesi di fluido incomprimibile, queste equazioni possono essere espresse nella forma:

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0,$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2},$$

È allora usuale ricorrere alle stesse equazioni riferite alla pressione e alle componenti della velocità del moto medio, utilizzando l'approccio statistico introdotto da Reynolds, che considera la pressione e le componenti della velocità separate nella parte media e in quella fluttuante:

$$p = \bar{p} + p', \quad U_i = \bar{U}_i + u_i.$$

Le equazioni di Navier-Stokes, dopo la sostituzione appena definita, fatte le opportune semplificazioni e omettendo i soprasedgni delle grandezze medie, danno luogo alle equazioni:

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0,$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j}.$$

Come si nota, mentre l'equazione di continuità resta formalmente analoga, il processo di media ha introdotto nelle equazioni del moto nuovi termini contenenti le medie dei prodotti tra le velocità fluttuanti, che sono incognite. Tali termini rappresentano flussi di quantità di moto, ma, se moltiplicati per la densità ρ , assumono la dimensione di sforzi, e sono pertanto detti sforzi turbolenti o sforzi di Reynolds.

9.2 Modelli di turbolenza

È possibile introdurre equazioni di trasporto anche per gli sforzi turbolenti, sfruttando opportunamente il principio di conservazione della quantità di moto, ma in tal modo compaiono ulteriori correlazioni di ordine superiore tra grandezze fluttuanti. È questo il problema della chiusura della turbolenza, che si può solo risolvere definendo un modello empirico per legare le correlazioni tra grandezze fluttuanti a grandezze medie del campo di moto.

In particolare, nei modelli di trasporto degli sforzi, si scrivono equazioni di trasporto degli sforzi di Reynolds e si modellano i termini contenenti correlazioni di ordine superiore, con formulazioni che risultano di incerta definizione e sono comunque molto complesse.

Più semplicemente, nei modelli algebrici si assegnano espressioni algebriche agli sforzi di Reynolds, ricavando le grandezze rappresentative della turbolenza che compaiono in tali espressioni dalle relative equazioni di trasporto. I modelli di questa categoria si differenziano in base al numero di equazioni di trasporto di grandezze turbolente che entrano nella formulazione del modello per ricavare gli sforzi turbolenti. Esistono in particolare modelli a zero equazioni, modelli a una equazione e modelli a due equazioni.

9.2.1 MODELLI DIFFUSIVI

Nei modelli diffusivi si utilizza un'ipotesi dovuta a Boussinesq, e l'espressione dello sforzo turbolento generico, modificata per quanto riguarda gli sforzi normali per rispettare l'equazione di continuità, è la seguente:

$$\overline{u_i u_j} = \delta_{ij} k - \nu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right).$$

Si introduce cioè un coefficiente di diffusione turbolenta ν_t , che, in analogia alla viscosità cinematica molecolare ν , viene anche detto "viscosità turbolenta".

9.2.2 MODELLI A ZERO EQUAZIONI

Nei modelli a zero equazioni, la viscosità turbolenta è definita esclusivamente in base a grandezze turbolente che risultano funzioni locali delle caratteristiche geometriche e cinematiche del campo di moto, senza nessuna equazione di trasporto delle grandezze stesse.

Uno dei modelli a zero equazioni più noti è quello della "lunghezza di mescolamento" dovuto a Prandtl, che è stato ad esempio di grande importanza per l'interpretazione dei risultati sperimentali relativi al moto uniforme nelle condotte a sezione circolare. In tale fenomeno il tensore degli sforzi turbolenti si riduce a un solo sforzo tangenziale, che introducendo l'ipotesi della lunghezza di mescolamento può essere espresso nella forma:

$$\overline{uv} = l_m^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \frac{\partial U}{\partial y}$$

con la viscosità turbolenta che assume quindi l'espressione

$$\nu_t = l_m^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right|$$

Alla base dell'idea di Prandtl sta il fatto che in un campo di moto turbolento, i vortici di scala opportuna si muovono in modo da approssimare il moto delle molecole libere di un gas. La distanza effettiva che essi attraversano in direzione trasversale è chiamata lunghezza di mescolamento l_m , e viene assimilata al cammino libero medio delle molecole.

La lunghezza di mescolamento è una funzione locale del campo di moto. Prandtl, in problemi cosiddetti di turbolenza di parete, propose che l_m fosse proporzionale alla distanza dalla parete più vicina:

$$l_m = \kappa y$$

dove κ è la costante di Von Karman e vale 0,4. Naturalmente, data la scarsa generalità del modello, la definizione della legge per la lunghezza di mescolamento dipende dal problema considerato.

Il vantaggio principale dell'impiego del modello della lunghezza di mescolamento è la semplicità della formulazione, in quanto non c'è necessità di risolvere ulteriori equazioni differenziali. Tuttavia questo modello non fornisce risultati attendibili nella predizione di campi di moto complessi, ad esempio campi di moto con separazione e ricircolazione, perché non può tener conto degli effetti di trasporto della turbolenza.

9.2.3 MODELLI AD UNA EQUAZIONE. L'EQUAZIONE DELL'ENERGIA CINETICA TURBOLENTA

I modelli a una equazione sono stati sviluppati per tener conto del trasporto delle grandezze turbolente, almeno attraverso un'equazione differenziale di bilancio. In particolare la grandezza turbolenta di cui si fa il bilancio è l'energia cinetica turbolenta. Il più importante modello appartenente a questa classe è il modello k - L . Esso consiste nel correlare la viscosità turbolenta alla radice quadrata dell'energia cinetica turbolenta k , definita dall'espressione:

$$k = \frac{u_i^2}{2},$$

La viscosità turbolenta ν_t , in base a considerazioni dimensionali, si può esprimere nella forma:

$$\nu_t = c_\mu' \sqrt{k} L$$

dove c_μ è una costante empirica e L è una scala spaziale rappresentativa del campo di moto. La variabile k è ottenuta dalla risoluzione dell'equazione di bilancio per l'energia cinetica turbolenta, che può essere ottenuta dalle equazioni di Navier-Stokes e per alti numeri di Reynolds si può scrivere nella forma:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[u_i \left(\frac{u_j u_j}{2} + \frac{p}{\rho} \right) \right] - \overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2$$

Il primo termine rappresenta lo scambio locale, il secondo termine il trasporto convettivo, il terzo il trasporto diffusivo, il quarto la produzione P e il quinto la dissipazione ε .

Per risolvere questa equazione occorre modellare i termini di correlazione turbolenta in essa presenti. In particolare, il termine di diffusione turbolenta si assume proporzionale al gradiente di k :

$$\left[u_i \left(\frac{u_j u_j}{2} + \frac{p}{\rho} \right) \right] = \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_i}$$

in cui σ_k è una costante empirica. Lo sforzo turbolento si può esprimere in accordo con l'ipotesi diffusiva vista in precedenza. La dissipazione ε è modellata con l'espressione:

$$\varepsilon = c_D \frac{k^{3/2}}{L}$$

in cui c_D è una costante empirica. L'equazione di trasporto dell'energia cinetica turbolenta in forma modellata si può scrivere quindi:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) + \nu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - c_D \frac{k^{3/2}}{L}$$

Per poter risolvere questa equazione bisogna prescrivere una legge per la scala L ed assegnare i valori delle costanti c_D e σ_k . In base a dati sperimentali le costanti empiriche assumono i valori $c_\mu' c_D = 0.08$ e $\sigma_k = 1$.

La grandezza L può essere determinata da semplici relazioni empiriche simili a quelle usate per la lunghezza di mescolamento l_m . Tuttavia, in alcune condizioni del flusso, in particolare quando il campo di moto varia molto rapidamente, i

modelli a una equazione, a causa della scarsa accuratezza della legge formulata per L , non forniscono più risposte in accordo con i dati sperimentali. L'applicazione dei modelli ad una equazione è quindi limitata per la difficoltà di definire in maniera soddisfacente la distribuzione della scala L .

9.2.4 MODELLI A DUE EQUAZIONI. L'EQUAZIONE DELLA DISSIPAZIONE DI ENERGIA CINETICA

La difficoltà di definire la grandezza L in base a leggi algebriche porta a prendere in considerazione un'ulteriore equazione di trasporto. Infatti la grandezza L è soggetta a processi di trasporto in maniera simile all'energia cinetica turbolenta k . La scala L può essere determinata da una seconda equazione di trasporto di una variabile Z che può essere espressa nella forma generale $Z=k^m L^n$. Esperienze fatte con varie equazioni hanno mostrato che l'ipotesi che il termine diffusivo sia proporzionale al gradiente della grandezza appare migliore per $Z=\varepsilon$ che per tutte le altre possibili variabili. Principalmente per questa ragione l'equazione di trasporto per ε è la più usata.

Nel modello k - ε l'espressione che si assume per il coefficiente di diffusione turbolenta è quindi la seguente:

$$\nu_t = c_\mu' c_D \frac{k^2}{\varepsilon} = c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon},$$

L'equazione di trasporto per ε si può esprimere nella forma modellata:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(U_j \varepsilon - \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) - \frac{\varepsilon}{k} (c_{1\varepsilon} P - c_{2\varepsilon} \varepsilon) = 0,$$

Le equazioni di trasporto per k e per ε , unite alle equazioni del moto nelle diverse direzioni ed all'equazione di continuità consentono di risolvere il problema, assegnate le opportune condizioni al contorno. I valori delle costanti empiriche c_μ , $c_{1\varepsilon}$, $c_{2\varepsilon}$, σ_k , σ_ε , in base a valutazioni sperimentali, sono di solito assunti pari a $c_\mu=0,09$; $c_{1\varepsilon}=1,44$; $c_{2\varepsilon}=1,92$; $\sigma_k=1,0$; $\sigma_\varepsilon=1,3$.

9.2.5 MODELLI NON DIFFUSIVI

Il principale limite dei modelli diffusivi è che non riescono a riprodurre i fenomeni in cui gli sforzi normali hanno un ruolo importante, come ad esempio le correnti secondarie in condotte non circolari. Diversi autori hanno proposto leggi di chiusura che superassero questo limite, tenendo conto di un legame non lineare tra tensore degli sforzi turbolenti e tensore delle velocità di deformazione. In particolare Speziale ricorre a equazioni di chiusura ottenute introducendo una dipendenza dello sforzo turbolento, oltre che dal gradiente della velocità, anche

dalla derivata totale di tale gradiente. Tali espressioni degli sforzi turbolenti sono inserite in un classico modello k - ε , dando luogo ad un modello detto " k - ε non lineare".

Nel modello k - ε non lineare si esprime il generico sforzo turbolento nella forma:

$$\overline{u_i u_j} = \frac{2}{3} \delta_{ij} k - 2 c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} D_{ij} - c_\mu^2 C_D \frac{k^3}{\varepsilon^2} \left(D_{im} D_{mj} - \frac{1}{3} D_{mn} D_{mn} \delta_{ij} \right) - 4 c_\mu^2 C_E \frac{k^3}{\varepsilon^2} \left(\overset{\circ}{D}_{ij} - \frac{1}{3} \overset{\circ}{D}_{mm} \delta_{ij} \right),$$

essendo:

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$$

e

$$\overset{\circ}{D}_{ij} = \frac{\partial D_{ij}}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla D_{ij} - \frac{\partial U_i}{\partial x_k} D_{kj} - \frac{\partial U_j}{\partial x_k} D_{ki}.$$

C_D e C_E sono costanti adimensionali i cui valori sono stati valutati pari a $C_D=1,68$ e $C_E=1,68$.

Il modello k - ε non lineare è più accurato di quello lineare in quanto tiene conto degli effetti dovuti alla differenza tra gli sforzi turbolenti normali. Ad esempio predice con sufficiente esattezza la circolazione secondaria presente in una condotta a sezione quadrata in moto uniforme.

9.3 Condizioni al contorno

9.3.1 CONDIZIONE ALLA PARETE

Alla parete si dovrebbe applicare la condizione di aderenza, che impone l'annullamento delle componenti delle velocità medie e fluttuanti. Tuttavia l'applicazione di questa condizione richiederebbe l'integrazione delle equazioni all'interno del substrato laminare, e quindi l'infillimento della griglia di calcolo, a causa dei forti gradienti di velocità. Inoltre i modelli di turbolenza, validi per alti numeri di Reynolds, all'interno del substrato diventano imprecisi.

Si preferisce allora non simulare il fenomeno all'interno del sottostrato laminare, ricorrendo alle leggi empiriche dello strato limite per legare le condizioni alla parete a quelle nel primo punto della griglia di calcolo. In particolare, introdotte le variabili adimensionali:

$$y_+ = \frac{yU^*}{\nu}, \quad u_+ = \frac{U_{res}}{U^*},$$

in cui U_{res} è il modulo della risultante della velocità e U^* rappresenta la velocità d'attrito, per il profilo della velocità in parete liscia si utilizza, per $y_+ > 11.63$, la legge logaritmica:

$$u_+ = \frac{1}{\kappa} \ln(Ey_+),$$

dove k è la costante di Von Karman ed E è un parametro di scabrezza che vale 9 per parete idraulicamente liscia, e, per $y_+ < 11.63$, la legge lineare:

$$u_+ = y_+.$$

Per quanto riguarda le condizioni al contorno per k ed ε , nell'ipotesi di equilibrio tra produzione e dissipazione ($P=\varepsilon$) si ottiene la relazione:

$$k = \frac{U^{*2}}{c_{\mu}^{0,5}}$$

per l'energia cinetica turbolenta e la relazione:

$$\varepsilon = \frac{U^{*3}}{\kappa y}$$

per la dissipazione ε .

9.3.2 CONDIZIONE DI SIMMETRIA

In corrispondenza a piani di simmetria si impongono derivate nulle per le componenti delle velocità parallele a tali piani e per le grandezze turbolente k ed ε e si pone nullo il valore della componente normale della velocità.

Risultano poi con derivata nulla gli sforzi turbolenti normali e gli sforzi tangenziali collegati a deformazioni nei piani paralleli al piano di simmetria; viceversa gli sforzi tangenziali collegati a deformazioni su piani ortogonali al piano di simmetria ammettono valore nullo.

9.4 Risoluzione numerica delle equazioni

Illustreremo il metodo dei volumi finiti che può essere utilizzato per la soluzione delle equazioni del modello k - ε . Si prende in considerazione una forma

dell'equazione generalizzata, che, specificando opportunamente le grandezze che vi compaiono, si può riferire ad un qualunque problema di diffusione-convezione in più dimensioni. La generica forma dell'equazione differenziale, nell'ipotesi di moto permanente, è la seguente:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(U_j \Phi - \Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right) - S_\Phi = 0,$$

dove, nel caso del modello $k-\varepsilon$, le grandezze generiche che compaiono sono quelle specificate nella tabella seguente.

Tabella 9.1 - Espressioni delle grandezze dell'equazione di convezione-diffusione per il modello $k-\varepsilon$

Φ	Γ_Φ	S_Φ
1	0	0
U_x	$v+v_t$	$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[(v+v_t) \frac{\partial U_x}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[(v+v_t) \frac{\partial U_y}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[(v+v_t) \frac{\partial U_z}{\partial x} \right]$
U_y	$v+v_t$	$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[(v+v_t) \frac{\partial U_x}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[(v+v_t) \frac{\partial U_y}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[(v+v_t) \frac{\partial U_z}{\partial y} \right]$
U_z	$v+v_t$	$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left[(v+v_t) \frac{\partial U_x}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[(v+v_t) \frac{\partial U_y}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[(v+v_t) \frac{\partial U_z}{\partial z} \right]$
k	$\frac{v_t}{\sigma_k}$	$P - \varepsilon$
ε	$\frac{v_t}{\sigma_\varepsilon}$	$c_{1\varepsilon} P - c_{2\varepsilon} \varepsilon$

9.4.1 METODO DEI VOLUMI FINITI

La soluzione delle equazioni può essere condotta all'interno del dominio, scrivendola in forma discretizzata per il generico volume elementare. Nel seguito, per semplicità, ci si riferirà allo schema bidimensionale, senza perdita di generalità. Si fa ricorso ad una griglia sfalsata, in cui si localizzano le grandezze Φ , Γ , S_Φ nel generico punto P della griglia, mentre le componenti della velocità sono supposte note sulle pareti del volume di controllo attorno a P .

Integrando l'equazione sul volume attorno a P , si ha:

$$\int_V [\text{div}(\mathbf{U}\Phi - \Gamma \text{grad } \Phi) - S_\Phi] dV = 0.$$

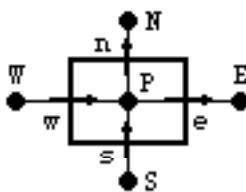


Fig. 9.1 - Schema per l'applicazione del metodo dei volumi finiti all'equazione di convezione-diffusione

Ricorrendo al teorema di Green si può scrivere:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{U}\Phi - \Gamma \text{grad } \Phi) \cdot \mathbf{n} d\Omega - \int_V S_{\Phi} dV = 0.$$

Occorre dunque valutare sulla frontiera del volume di controllo il termine:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{U}\Phi - \Gamma \text{grad } \Phi) \cdot \mathbf{n} d\Omega ,$$

con la condizione che esso sia continuo attraverso la frontiera comune a due volumi contigui. Per uno schema bidimensionale ed un volume rettangolare si può scrivere:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{U}\Phi - \Gamma \text{grad } \Phi) \cdot \mathbf{n} d\Omega = F_w + F_e + F_s + F_n,$$

avendo indicato con F_w , F_e , F_s e F_n i flussi attraverso le quattro pareti. Si ipotizza Φ variabile solo in direzione perpendicolare ad una parete del volume e variabile linearmente tra due punti consecutivi della griglia.

9.4.2 NUMERO DI PECLLET

L'equazione differenziale unidimensionale:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(U\Phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) = 0$$

nell'ipotesi che U e Γ siano costanti, ammette una soluzione analitica nella forma:

$$\Phi(x) = a + b e^{\frac{Ux}{\Gamma}}.$$

In base a questa, l'espressione esatta per il flusso della grandezza Φ , facendo riferimento alla parete west, si può scrivere nella forma:

$$F_w = U_w A_w [f_w \Phi_W + (1-f_w) \Phi_P],$$

dove:

$$f_w = \frac{e^{Pe_w} - e^{Pe_w/2}}{e^{Pe_w} - 1}, \quad Pe_w = \frac{U \delta x_{PW}}{\Gamma}.$$

La soluzione può quindi essere vista come media pesata in cui il fattore di peso f_w dipende dal cosiddetto numero di Peclet Pe_w . Operando analogamente con i flussi attraverso le altre pareti si potrà scrivere quindi:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{U}\Phi - \Gamma \text{grad } \Phi) \cdot \mathbf{n} d\Omega = -a_P \Phi_P + a_W \Phi_W + a_E \Phi_E + a_S \Phi_S + a_N \Phi_N,$$

in cui ad esempio il coefficiente a_W assume l'espressione:

$$a_W = U_w A_w f_w.$$

Si esamineranno tre possibili schemi alle differenze finite per approssimare la soluzione esatta.

9.4.3 SCHEMA CENTRATO

Ricorrendo a tale schema, sempre con riferimento al flusso di Φ attraverso la parete west, si può scrivere:

$$F_w = A_w \left[U_w \frac{\Phi_P + \Phi_W}{2} - \Gamma_w \frac{\Phi_P - \Phi_W}{\delta x_{PW}} \right],$$

essendo:

$$U_w = \frac{U_P + U_W}{2}, \quad \Gamma_w = \frac{\Gamma_P + \Gamma_W}{2},$$

da cui si ottiene per il coefficiente a_W l'espressione:

$$a_w = d_w \left(1 + \frac{Pe_w}{2} \right),$$

con:

$$d_w = \frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{PW}}.$$

In maniera analoga si ha per gli altri coefficienti:

$$a_E = d_e \left(1 - \frac{Pe_e}{2} \right), \quad a_S = d_s \left(1 + \frac{Pe_s}{2} \right), \quad a_N = d_n \left(1 - \frac{Pe_n}{2} \right),$$

e, tenendo conto dell'equazione di continuità:

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_N.$$

Tale schema è a coefficienti positivi per $|Pe| < 2$. Esso risulta del secondo ordine su griglia uniforme e del primo ordine su griglia disuniforme.

9.4.4 SCHEMA UPWIND

In tale schema il termine convettivo è valutato in base al segno della velocità nella maniera seguente:

$$\int_{\Omega_w} (\mathbf{U}\Phi - \Gamma \text{grad } \Phi) \cdot \mathbf{n} d\Omega = U_w A_w \Phi_W \quad \text{se } U_w \geq 0,$$

$$\int_{\Omega_w} (\mathbf{U}\Phi - \Gamma \text{grad } \Phi) \cdot \mathbf{n} d\Omega = U_w A_w \Phi_P \quad \text{se } U_w < 0,$$

o con l'identica espressione algebrica:

$$\int_{\Omega_w} (\mathbf{U}\Phi - \Gamma \text{grad } \Phi) \cdot \mathbf{n} d\Omega = A_w \left[\frac{U_w + |U_w|}{2} \Phi_W + \frac{U_w - |U_w|}{2} \Phi_P \right].$$

Riscrivendo il termine diffusivo come nello schema centrato, i coefficienti si possono scrivere nella forma seguente:

$$a_W = d_w \left(1 + \frac{Pe_w + |Pe_w|}{2} \right), \quad a_E = d_e \left(1 - \frac{Pe_e - |Pe_e|}{2} \right),$$

$$a_S = d_s \left(1 + \frac{Pe_s + |Pe_s|}{2} \right), \quad a_N = d_n \left(1 - \frac{Pe_n - |Pe_n|}{2} \right),$$

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_N.$$

Questo schema risulta del primo ordine anche per una griglia uniforme, ma è a coefficienti positivi per qualunque valore del numero di Peclet.

9.4.5 SCHEMA IBRIDO

Lo schema ibrido è basato sulla combinazione opportuna dello schema centrato e dello schema upwind, in modo da mantenere lo schema più accurato possibile, con il vincolo che i coefficienti rimangano positivi. In tal modo la matrice dei coefficienti risulta diagonalmente dominante e si rispetta la condizione sufficiente ai fini della convergenza del procedimento iterativo di soluzione.

Il termine convettivo sarà valutato con uno schema ponderato tra lo schema centrato e lo schema upwind, in modo che sia assicurata la positività dei coefficienti della matrice, mentre il termine diffusivo sarà valutato in base allo schema centrato:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}(\alpha U_j \Phi)}_{\text{upwind}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left((1-\alpha) U_j \Phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right)}_{\text{centrato}} = 0,$$

essendo α un coefficiente di peso.

Si ottiene, ad esempio per il coefficiente a_W , l'espressione:

$$a_W = d_w \left(1 + \alpha \frac{|Pe_w|}{2} + \frac{Pe_w}{2} \right),$$

da cui, imponendo $a_W \geq 0$, si ottiene:

$$\alpha = \frac{|Pe_w| - 2}{|Pe_w|} \quad \text{per } |Pe_w| > 2,$$

$$\alpha = 0 \quad \text{per } |Pe_w| \leq 2.$$

Si ottiene in definitiva per a_W l'espressione:

$$a_W = d_w \left(\frac{|Pe_w|}{2} + \frac{Pe_w}{2} \right) \quad \text{per } |Pe_w| > 2,$$

$$a_W = d_w \left(1 + \frac{Pe_w}{2} \right) \quad \text{per } |Pe_w| \leq 2.$$

Tale schema, detto "ibrido", in quanto coincide con lo schema centrato per $|Pe_w| \leq 2$ e con lo schema upwind in cui si trascuri il termine diffusivo per $|Pe_w| > 2$, tende verso la soluzione esatta per Pe_w tendente a zero e per Pe_w tendente all'infinito.

I termini che esprimono le sorgenti della grandezza Φ relative al volume di controllo sono linearizzati nella forma:

$$\int_V S_\Phi dV = b\Phi_P + c.$$

Si arriva in definitiva alla generica equazione scritta per il volume di controllo nella forma discretizzata:

$$(a_P - b)\Phi_P - \sum a_i \Phi_i - c = 0.$$

Le condizioni ai limiti vengono messe in conto con due operazioni:

- si annullano i coefficienti relativi ai flussi attraverso il contorno del dominio fluido considerato;
- si inserisce una sorgente, sempre specificata attraverso i coefficienti b e c , che simuli la condizione considerata.

9.4.6 RISOLUZIONE DEL SISTEMA DI EQUAZIONI

Attraverso la procedura descritta precedentemente si arriva in definitiva alla formulazione di un problema lineare, in un numero di variabili pari al numero dei nodi della griglia moltiplicato per il numero delle equazioni differenziali. Poiché il coefficiente b è minore o uguale a zero, la matrice è diagonalmente dominante ed il sistema soddisfa la condizione sufficiente per la convergenza essendo:

$$|a_P - b| \geq \sum |a_i|.$$

Per la convergenza occorre che in almeno un punto valga la disuguaglianza. A tal fine occorre che il coefficiente b sia positivo in almeno un punto e tale condizione viene soddisfatta mediante l'introduzione delle condizioni al contorno di parete.

La non linearità delle equazioni differenziali originarie richiede inoltre qualche accorgimento per la convergenza del metodo iterativo. Conviene adottare un procedimento di sottorilassamento basato sulla seguente espressione:

$$\Phi_P^{R(i)} = f \Phi_P^{(i)} + (1-f) \Phi_P^{(i-1)},$$

essendo $\Phi_P^{R(i)}$ e $\Phi_P^{(i)}$ la variabile all'iterazione attuale rispettivamente con e senza sottorilassamento, $\Phi_P^{(i-1)}$ la variabile all'iterazione precedente e f un fattore di sottorilassamento ricavato empiricamente per assicurare la convergenza.

Il sistema può essere risolto con un metodo detto "line iteration procedure" (LIP), con il quale si prendono in considerazione ogni volta le variabili su una verticale, supponendo note le variabili sulle verticali vicine. Quindi il termine noto viene riscritto nella forma:

$$c' = c + a_W \Phi_W + a_E \Phi_E.$$

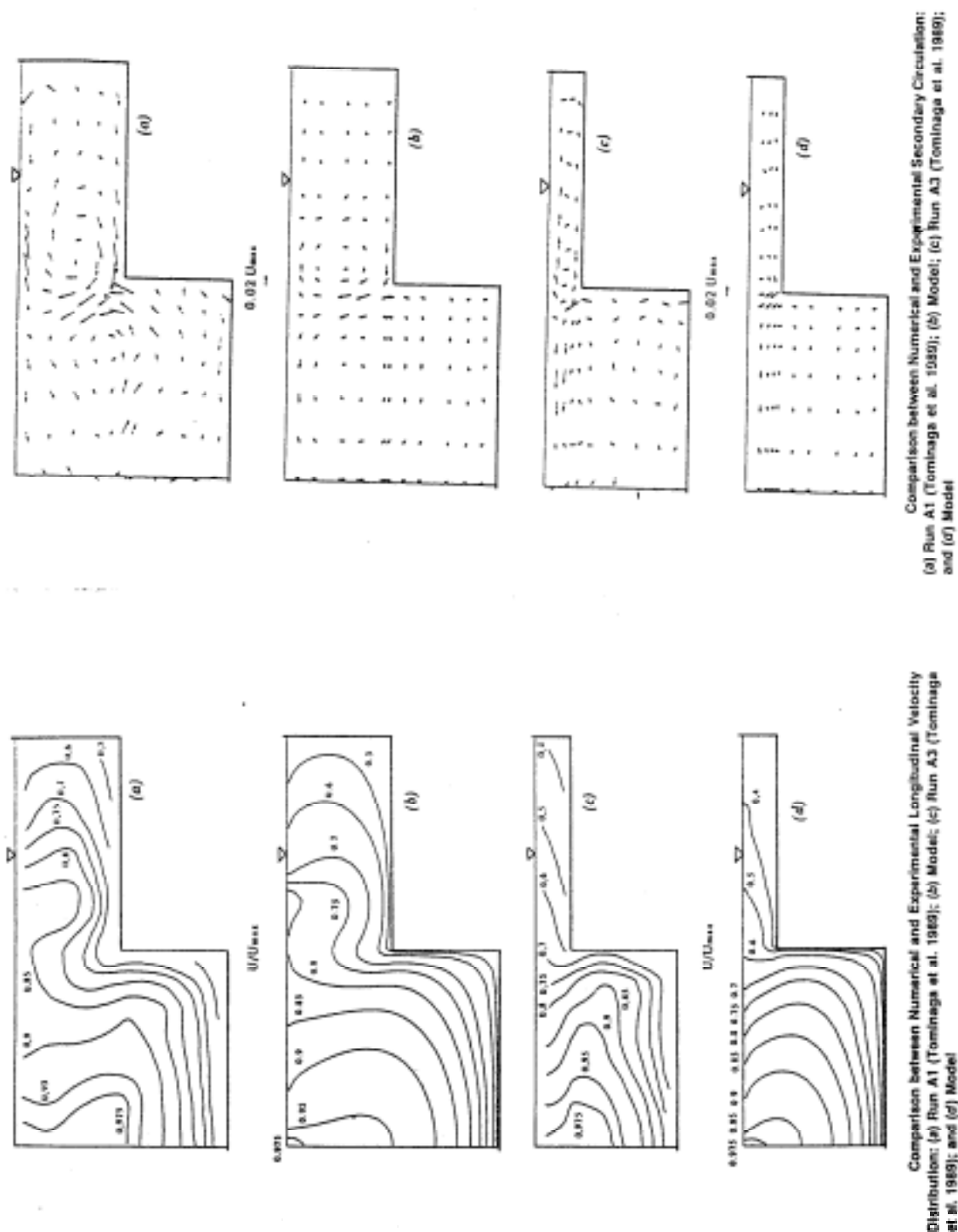


Fig. 9.2 – Campo di moto in alveo a sezione composta (Pezzinga, 1994)

Questo dà luogo a un sottosistema avente la matrice dei coefficienti tridiagonale a banda, che viene risolto in maniera diretta con un metodo, detto "tri-diagonal matrix algorithm" (TDMA), che consiste nello scomporre la matrice in due matrici, una triangolare alta e una triangolare bassa, e nel calcolare le incognite con semplici formule ricorsive.

Tale procedimento viene ripetuto un certo numero di volte ad ogni iterazione per aggiornare i valori delle variabili inserite provvisoriamente nel vettore dei termini noti.

9.4.7 RISOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DELLA PRESSIONE

Per ottenere la pressione, che non compare direttamente nell'equazione di continuità, è utilizzato l'algoritmo detto "semi-implicit method for pressure linked equations" (SIMPLE). Con tale metodo si risolvono dapprima le equazioni del moto, con un campo di pressione stimato, quindi ottenendo stime delle componenti della velocità e finalmente correggendo il campo di pressione e quello di velocità in accordo con l'equazione di continuità.

BIBLIOGRAFIA

- GAMBOLATI G. - "Elementi di calcolo numerico" - Edizioni Libreria Cortina, 1988
- PERUGINELLI A. - "Idraulica e analisi numerica" - Libreria Flaccovio Editrice, 1991
- BREBBIA C.A., FERRANTE A. - "Computational hydraulics" - Butterworths, 1983
- STEPHENSON D. - "Pipeflow analysis" - Elsevier, 1984
- HENDERSON F.M. - "Open channel flow" - Macmillan, 1966
- WYLIE E.B., STREETER V.L. - "Fluid transients" - FEB Press, 1982
- CHAUDRY M.H. - "Applied hydraulic transients" - Van Nostrand Reinhold, 1987
- KINZELBACH W. - "Groundwater modelling" - Elsevier, 1986
- PATANKAR S.V. - "Numerical heat transfer and fluid flow" - Hemisphere Publishing Corporation, 1980