

Lezione

Tecnica delle Costruzioni

La torsione

CONSIDERAZIONI PRELIMINARI

- **TORSIONE PER EQUILIBRIO**

allorché le forze esterne possono essere equilibrate unicamente attraverso l'attivazione di una resistenza a torsione.

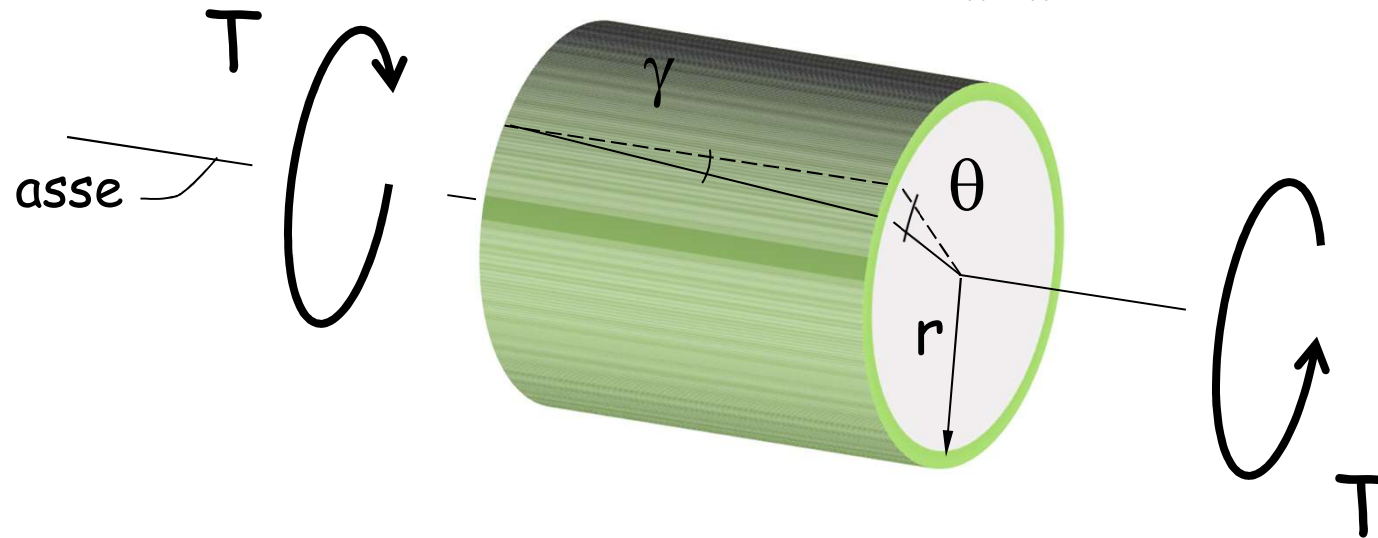
- **TORSIONE PER CONGRUENZA**

allorché le forze esterne possono essere equilibrate anche a seguito di una variazione del vincolo mutuo e quindi attraverso caratteristiche della sollecitazione diverse dalla torsione.

Torsione

Sezione anulare di materiale omogeneo

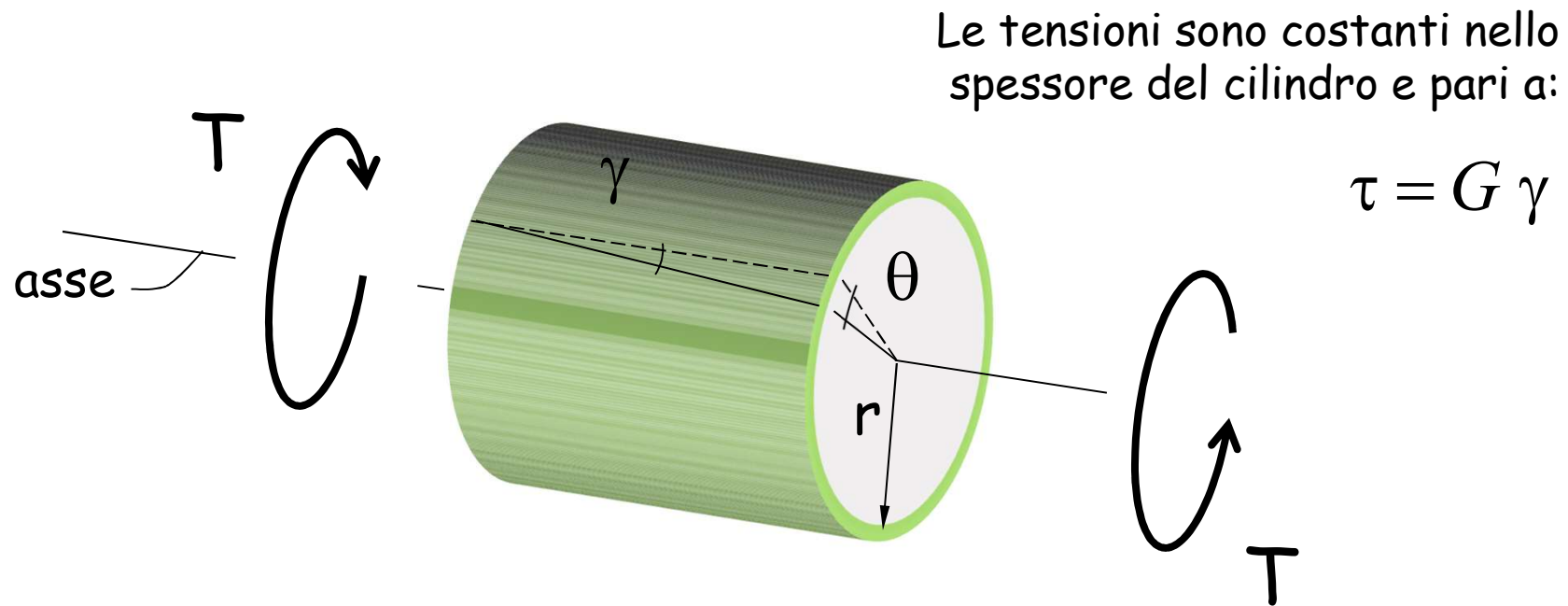
Se un elemento a sezione anulare di piccolo spessore e è soggetto a un momento torcente ...



L'asse dell'asta rimane rettilineo e le fibre anulari ruotano rigidamente. Le fibre longitudinali si deformano trasformandosi in eliche che si avvolgono lungo il cilindro.

Torsione

Sezione anulare di materiale omogeneo



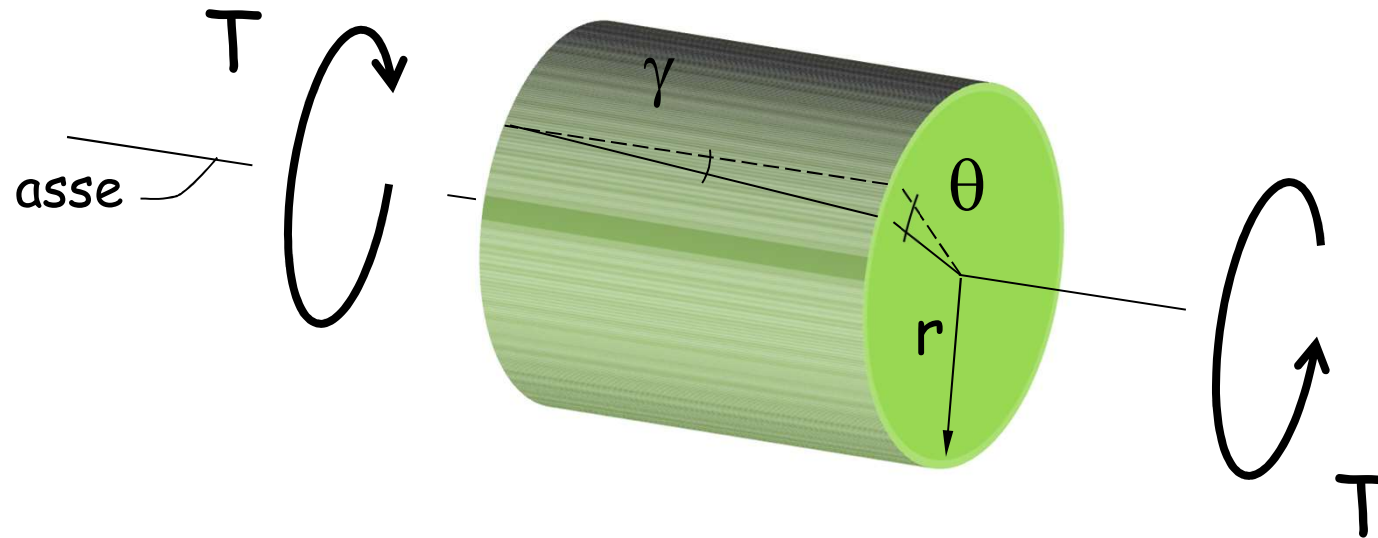
L'angolo unitario di rotazione θ
(rotazione relativa tra due facce a distanza unitaria)
è :

$$\theta = \gamma / r$$

Torsione

Sezione circolare di materiale omogeneo

Se un elemento a sezione circolare piena e' soggetto a un momento torcente ...

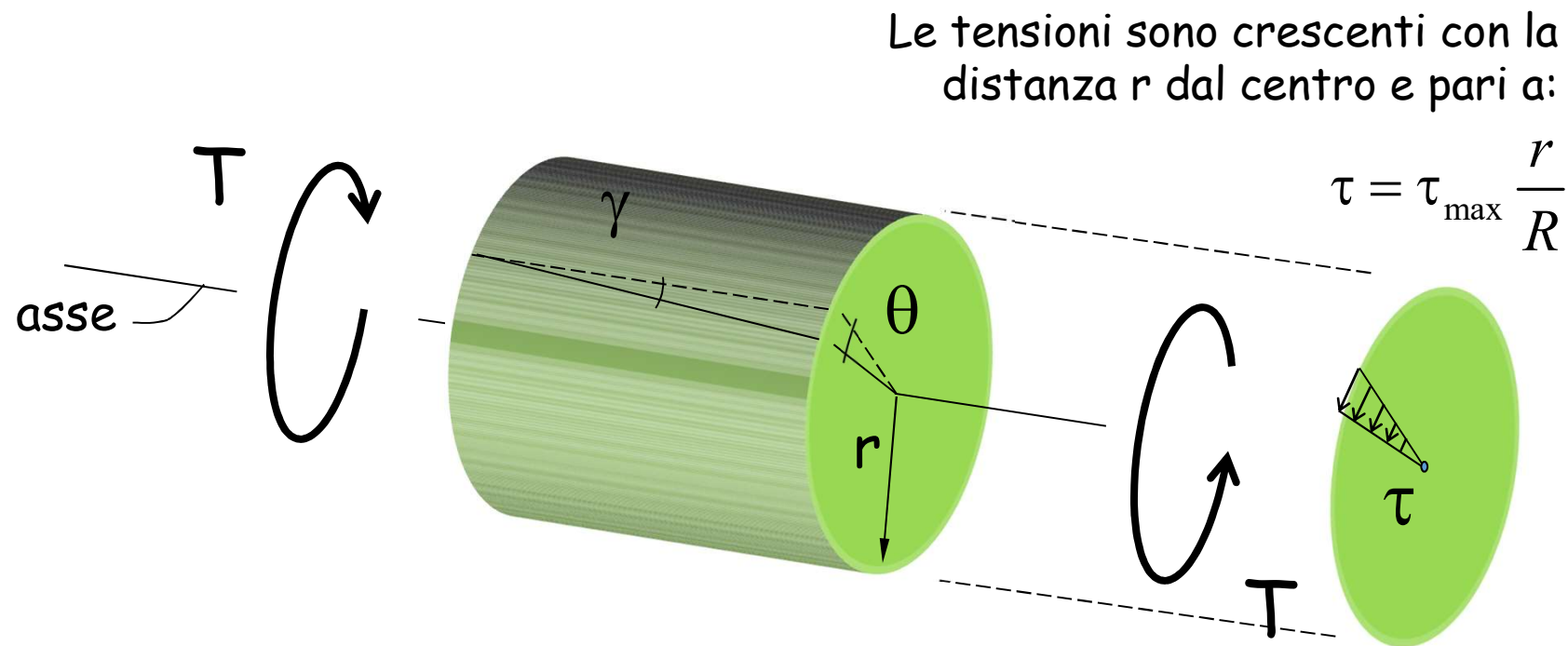


L'asse dell'asta rimane rettilineo e le fibre anulari ruotano rigidamente.

Le fibre longitudinali subiscono uno scorrimento γ crescente con r .

Torsione

Sezione circolare di materiale omogeneo



L'asse dell'asta rimane rettilineo e le fibre anulari ruotano rigidamente.

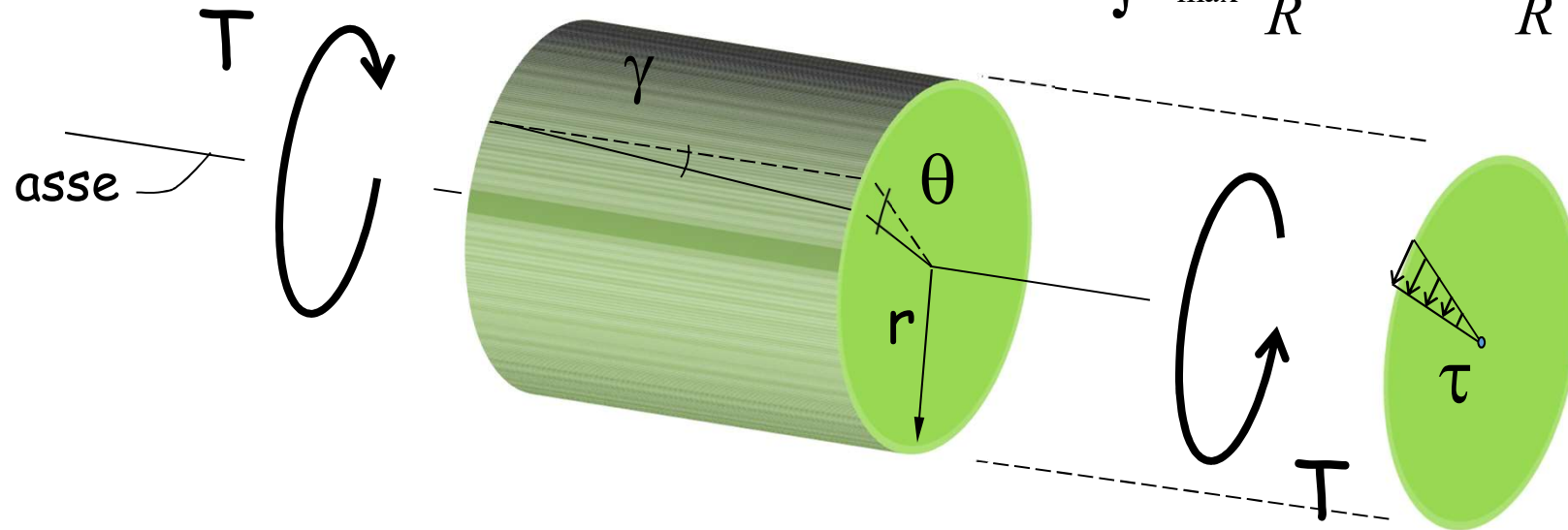
Le fibre longitudinali subiscono uno scorrimento γ crescente con r .

Torsione

Sezione circolare di materiale omogeneo

Imponendo l'equilibrio alla rotazione si ha :

$$T = \int \tau_{\max} \frac{r^2}{R} dA = \frac{\tau_{\max} I_p}{R}$$



dove I_p e' il momento polare della sezione,
che nel caso di una sezione circolare vale :

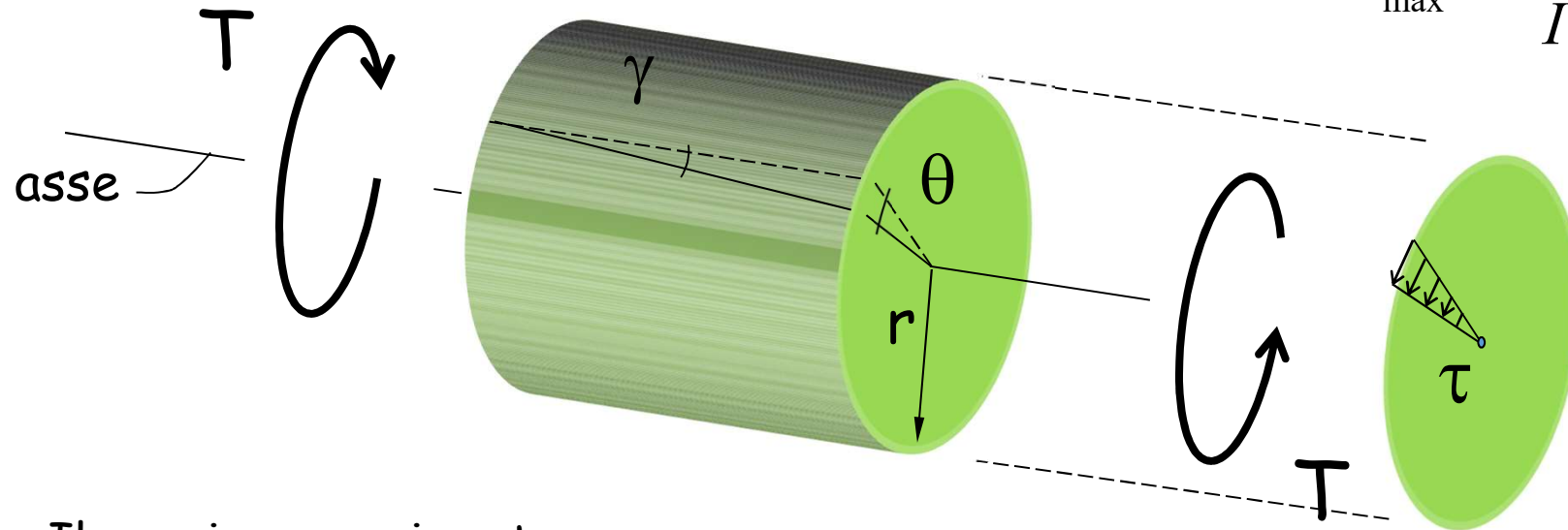
$$I_p = \frac{\pi R^4}{2}$$

Torsione

Sezione circolare di materiale omogeneo

La massima tensione tangenziale vale :

$$\tau_{\max} = \frac{T R}{I_p}$$



Il massimo scorrimento e
l'angolo unitario di rotazione valgono :

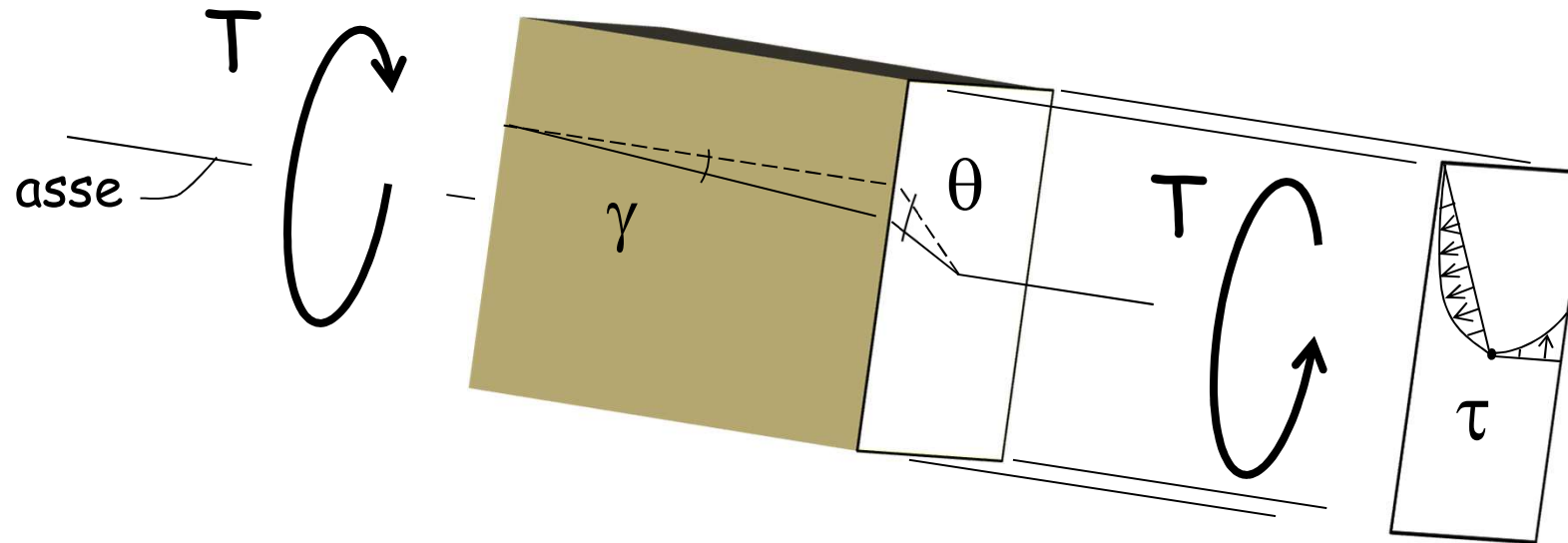
$$\gamma_{\max} = \frac{T R}{G I_p}$$

$$\theta = \frac{T}{G I_p}$$

Torsione

Sezione rettangolare di materiale omogeneo

La tensione tangenziale deve essere parallela al contorno
e quindi nulla agli spigoli

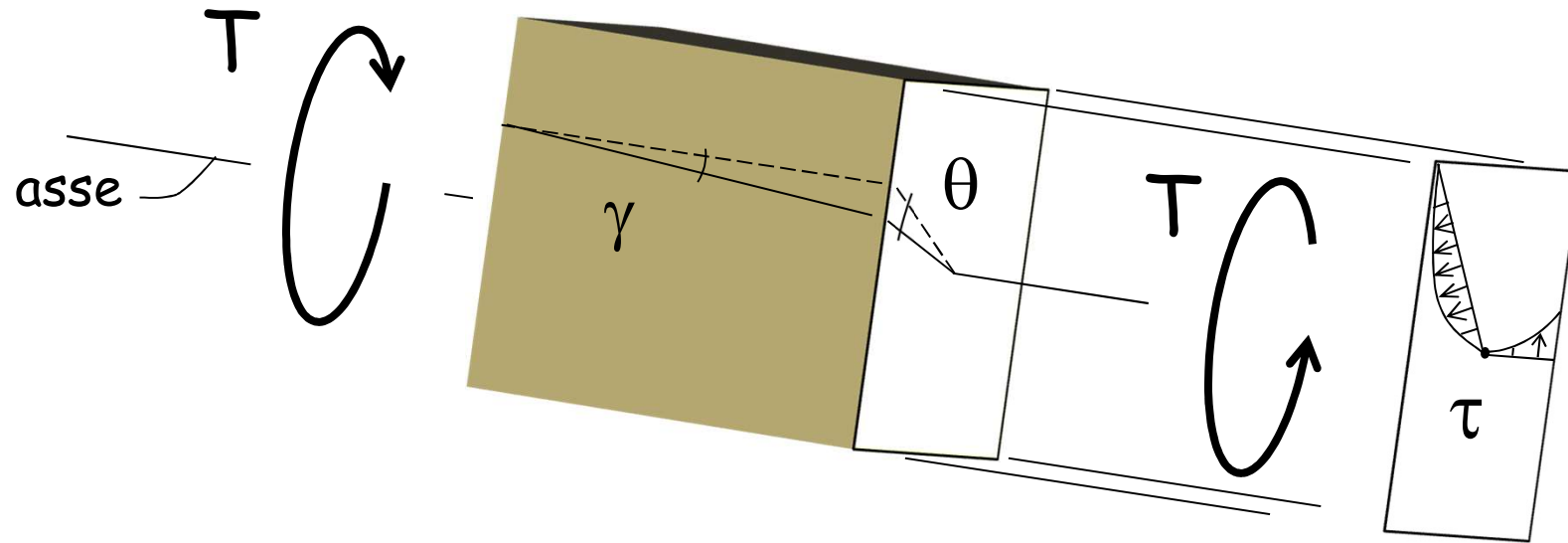


La sezione trasversale,
oltre a ruotare nel proprio piano,
deve presentare deformazioni fuori piano
(ingobbimento)

Torsione

Sezione rettangolare di materiale omogeneo

La tensione tangenziale deve essere parallela al contorno
e quindi nulla agli spigoli



Il valore massimo della tensione tangenziale e' :

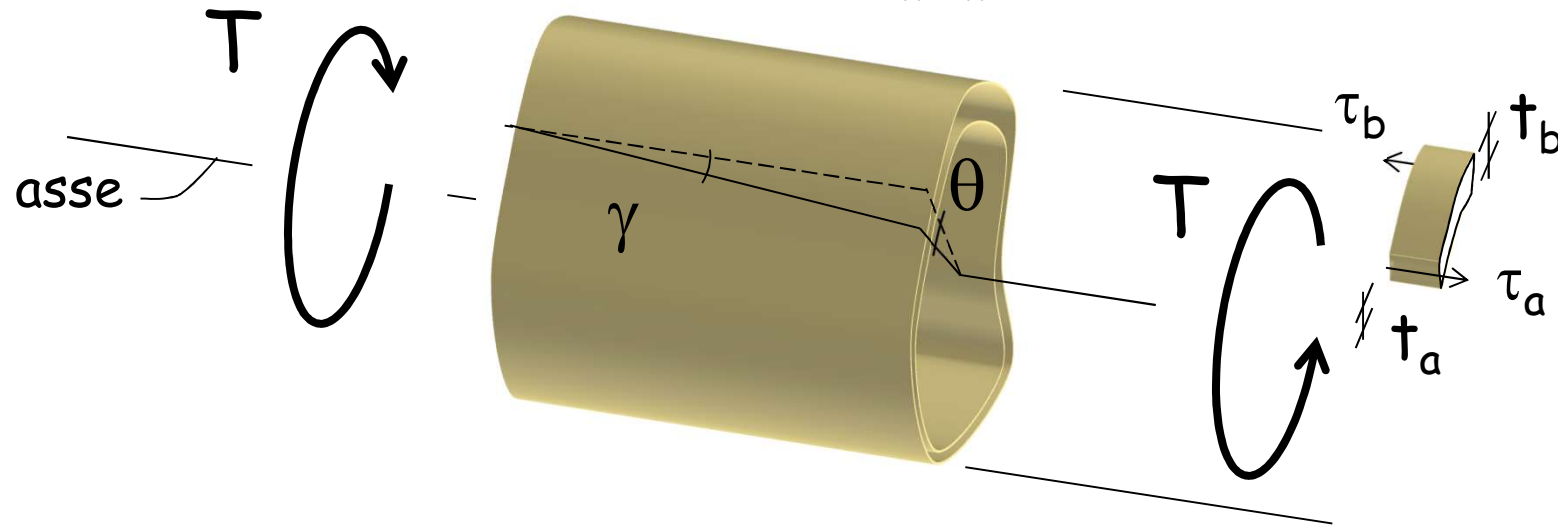
$$\tau_{\max} = \psi \frac{T}{a b^2} \quad \text{dove} \quad \psi = 3 + \frac{2.6}{0.45 + a/b}$$

a dim. lato maggiore
b dim. lato minore

Torsione

Sezione sottile a spessore variabile di materiale omogeneo

Se un elemento a sezione sottile di spessore piccolo e variabile e' soggetto a un momento torcente ...



Per l'equilibrio, il prodotto $\tau \cdot t$ è costante
(essendo t lo spessore della corda)

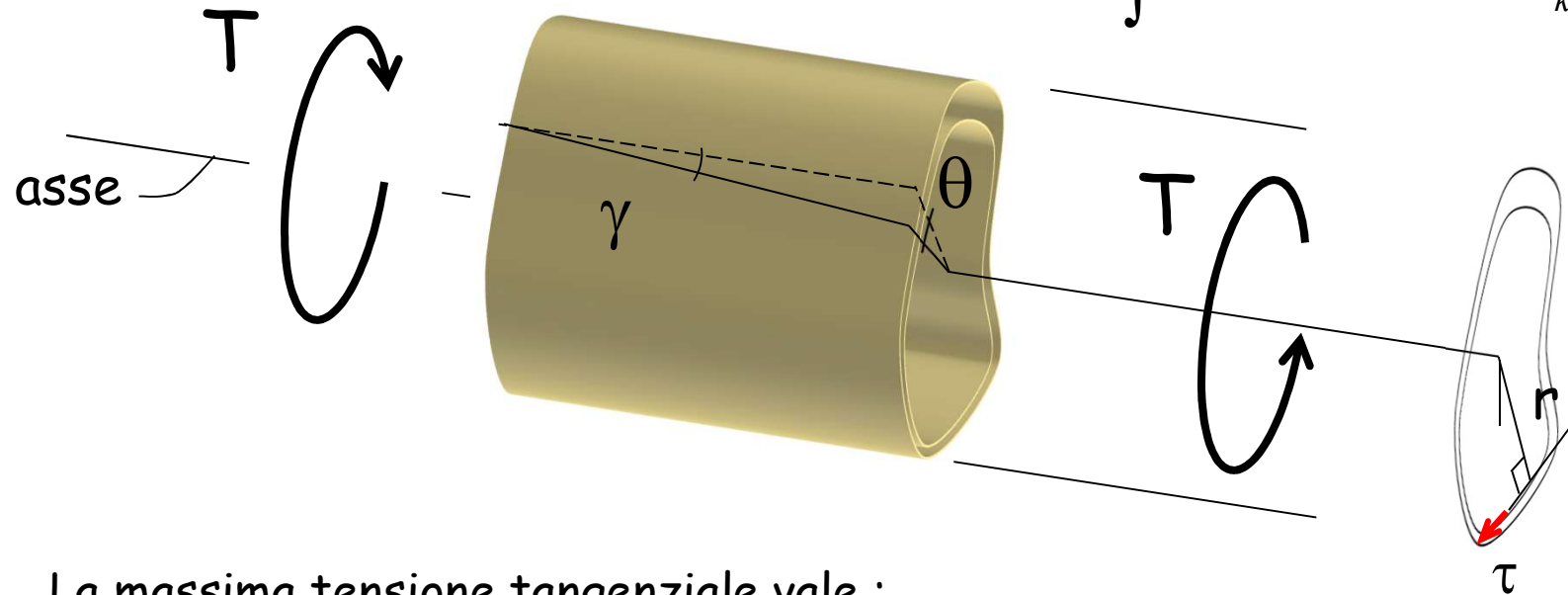
ovvero
$$\tau_a t_a = \tau_b t_b$$

Torsione

Sezione sottile a spessore variabile di materiale omogeneo

Imponendo l'equilibrio alla rotazione
si ha :

$$T = \int \tau t r ds = 2 \tau t A_k$$



La massima tensione tangenziale vale :

$$\tau_{\max} = \frac{T}{2 A_k t_{\min}}$$

essendo A_k l'area settoriale
racchiusa dalla linea media

Torsione

Elementi in conglomerato armato

I° stadio di comportamento

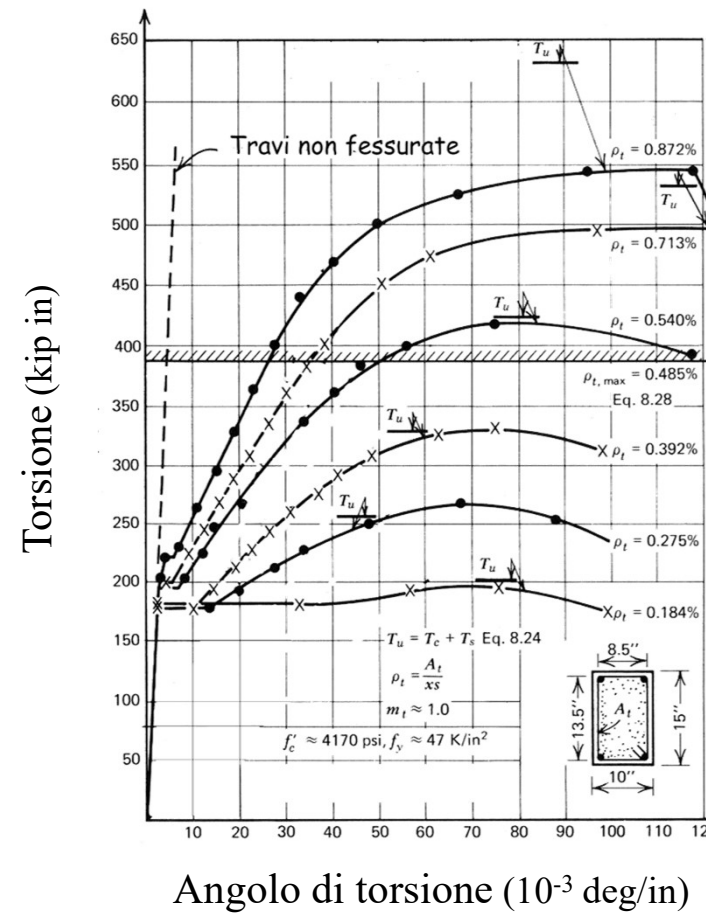
1. La torsione, fin quando l'elemento in c.a. non è fessurato, è fronteggiata dallo stato tensionale che si sviluppa nel calcestruzzo. Le armature non partecipano efficacemente alla resistenza strutturale.

II° stadio di comportamento

2. Quando le tensioni principali di trazione nel calcestruzzo attingono il valore di rottura, subentra una radicale modifica del meccanismo resistente, con l'instaurarsi di un quadro fessurativo specifico, e con l'intervento diretto delle armature metalliche.

Torsione

Elementi in conglomerato armato



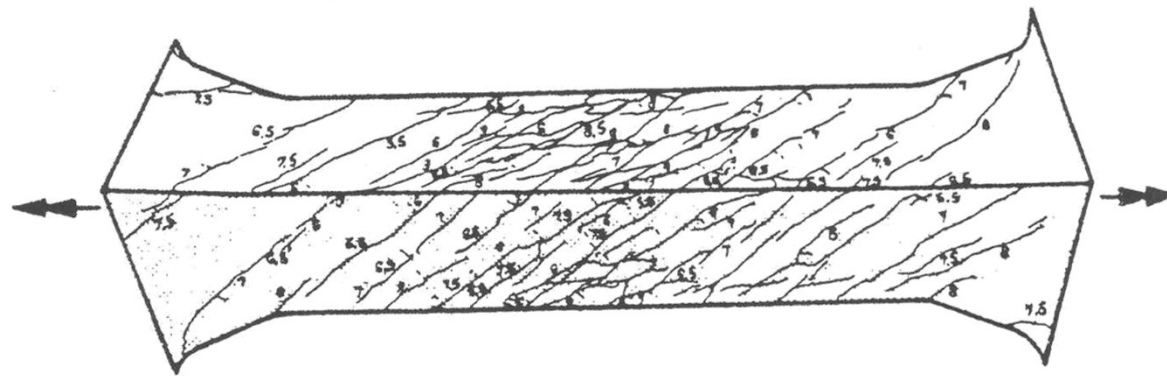
(tratto da R. Park and T. Paulay: Reinforced Concrete Structures)

Torsione

Elementi in conglomerato armato

II° stadio di comportamento

3. L'evidenza sperimentale ha mostrato che le fessure nel calcestruzzo risultano inclinate di un angolo pari all'incirca a 45° , e si sviluppano con un andamento a spirale lungo la superficie del solido.



(tratto da F. Leonhardt: calcolo di progetto e tecniche costruttive)

Torsione

Elementi in conglomerato armato

II° stadio di comportamento

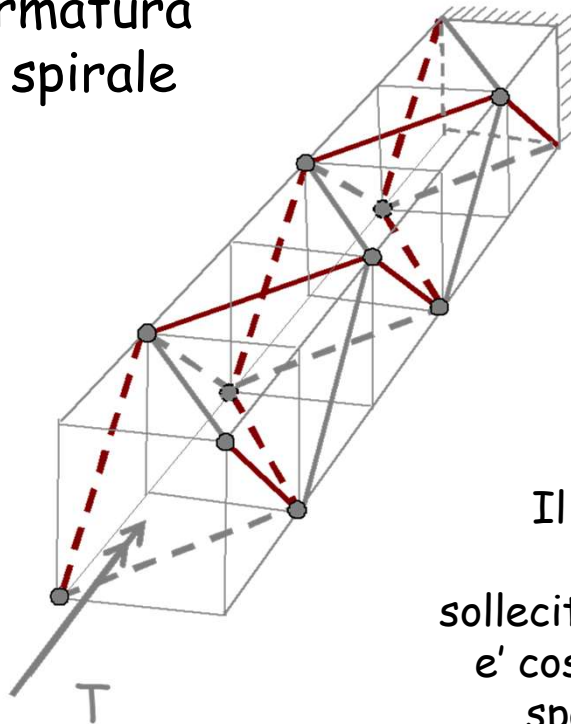
4. Inoltre, solo uno strato di calcestruzzo, vicino alla superficie esterna dell'elemento e relativamente poco spesso, partecipa alla resistenza torsionale

5. Su ogni parete della trave può essere ipotizzato un traliccio del tutto analogo a quello di Mörsch, costituito da bielle di conglomerato inclinate di 45° rispetto all'asse della trave, ivi tangenti alle isostatiche di compressione, ed armature contenute nello spessore t della parete tubolare fittizia, che possono essere costituite da un'elica inclinata a 45° rispetto all'asse della trave e tangenti alle isostatiche di trazione, o da barre parallele all'asse della trave e a staffe ad esse normali.

Il traliccio tubolare (modello di Rausch) si ipotizza isostatico.

IL MODELLO DI RAUSCH

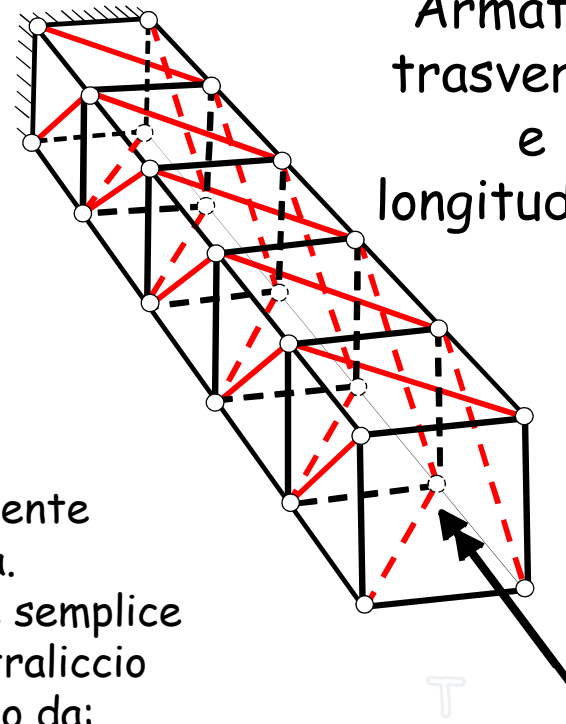
Armatura
a spirale



correnti longitudinali
diagonali tese (armatura a spirale)
diagonali compresse (calcestruzzo)

Il modello resistente
di travi in c.a.
sollecitate a torsione semplice
e' costituito da un traliccio
spaziale composto da:

Armatura
trasversale
e
longitudinale



correnti longitudinali
(staffe) montanti tesi
(calcestruzzo) diagonali compresse

(ispirata a F. Leonhardt: calcolo di progetto e tecniche costruttive)

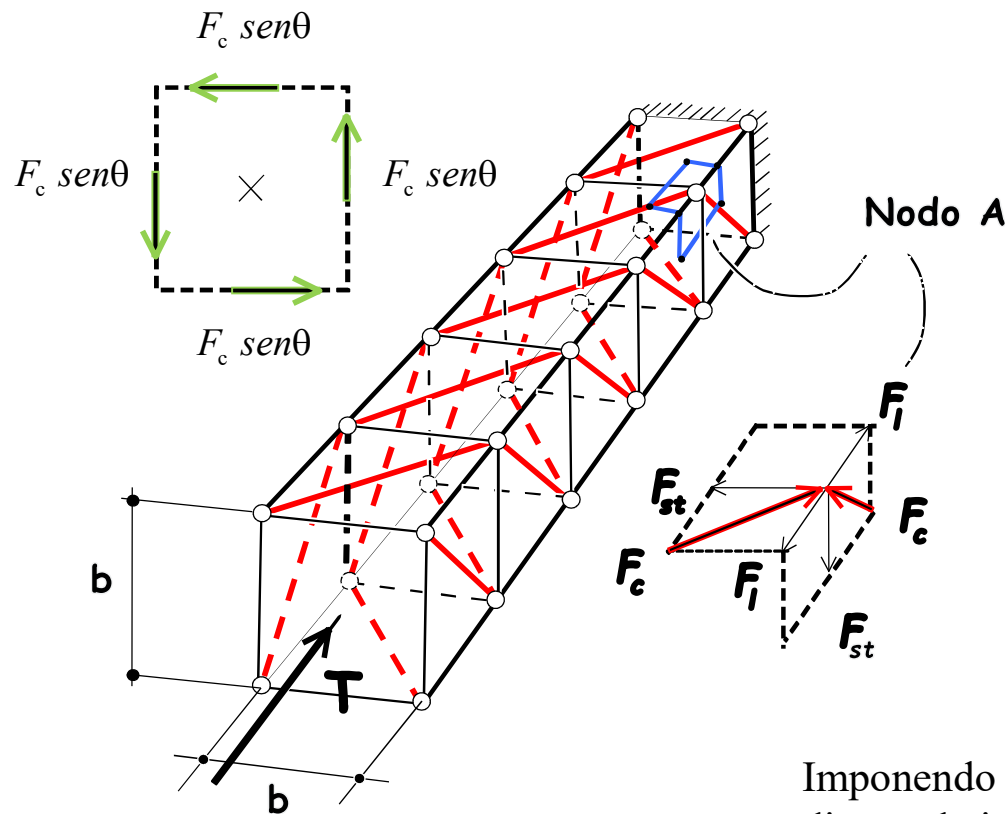
VERIFICHE DI SICUREZZA

Nella logica degli stati limite la verifica di sicurezza strutturale viene ricondotta alla verifica dei quattro stati limite ultimi:

- Rottura per compressione delle bielle di calcestruzzo;
- Snervamento delle staffe;
- Snervamento dell'armatura longitudinale;
- Cedimenti degli ancoraggi o di nodi dell'elemento strutturale.

Il modello resistente in presenza di staffe e ferri longitudinali ($\theta=45^\circ$)

Sezione trasversale



Dall'equilibrio alla traslazione del nodo A si ha:

$$F_c \sin \theta = F_{st} \quad F_c \cos \theta = F_l$$

Dall'equilibrio alla rotazione del generico tronco si ha:

$$4 F_c \sin \theta \cdot \frac{b}{2} = T \quad \text{quindi} \quad F_c = \frac{T}{2 \sin \theta b}$$

La tensione di compressione della diagonale in calcestruzzo vale:

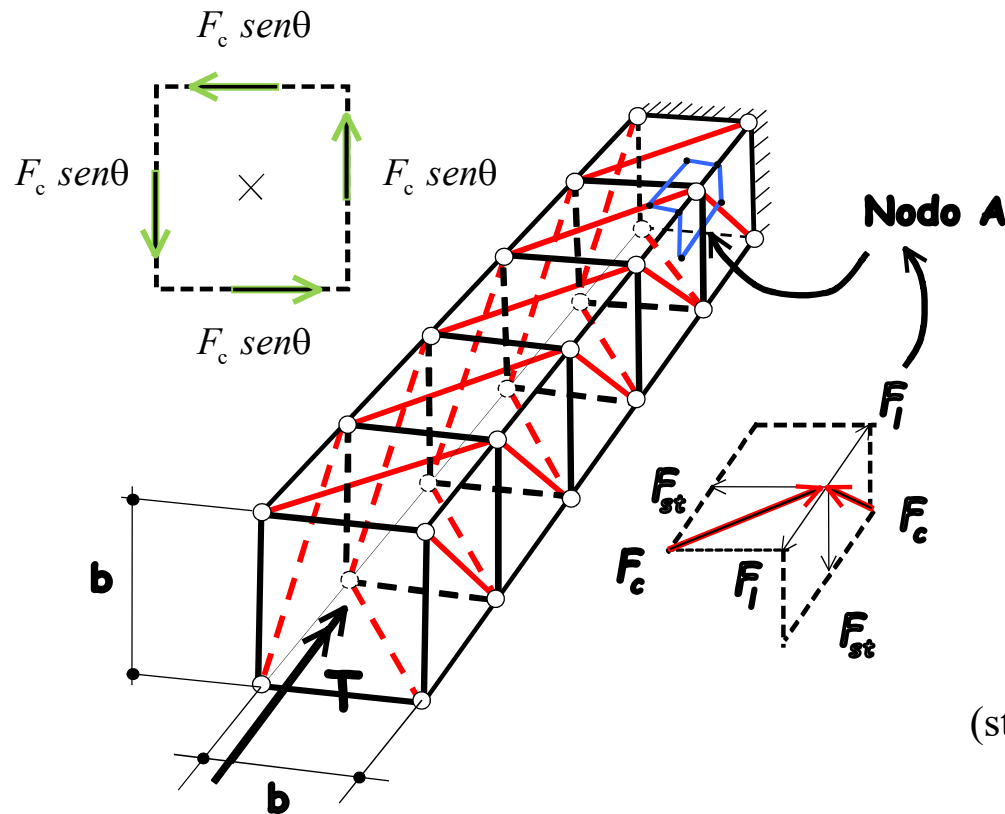
$$\sigma_c = \frac{T}{2 \sin \theta b} \cdot \frac{1}{b t \cos \theta} = \frac{T (1 + \cot^2 \theta)}{2 t A_k \cot \theta}$$

Imponendo per la tensione di compressione della diagonale in calcestruzzo il suo valore ultimo si ha:

$$T_{Rd, \max} = \frac{2 v f_{cd} t A_k \cot \theta}{1 + \cot^2 \theta}$$

Il modello resistente in presenza di staffe e ferri longitudinali ($\theta=45^\circ$)

Sezione trasversale



La tensione nelle staffe e nell'armatura longitudinale vale:

(staffe)
$$\sigma_{st} = \frac{T \Delta x}{2 b^2 \cot \theta A_{st}}$$

(arm. longitudinale)
$$\sigma_l = \frac{2 T \cot \theta u_k}{2 b^2 A_{sl}}$$

Imponendo per la tensione di trazione dell'armatura il suo valore di snervamento si ha:

(staffe)
$$T_{Rd,s(st)} = 2 A_k f_{ywd} \frac{A_{st}}{\Delta x} \cot \theta$$

(arm. long.)
$$T_{Rd,s(l)} = \frac{2 A_k f_{yld} A_{lw}}{u_k \cot \theta}$$

Metodi di calcolo a torsione

Eurocodice 2

Il momento torcente di calcolo deve soddisfare le due condizioni seguenti:

$$T_{Ed} \leq T_{Rd,max}$$

$$T_{Ed} \leq T_{Rd,s}$$

$T_{Rd,max}$ massimo momento torcente che può essere sopportato dalle bielle compresse

$T_{Rd,s}$ massimo momento torcente che può essere sopportato dall'armatura

Metodi di calcolo a torsione

Eurocodice 2

Il momento resistente portato dalle bielle compresse si valuta

$$T_{Rd,max} = 2 v f_{cd} t A_k / (\cot \theta + \tan \theta)$$

- t spessore di parete equivalente $\leq A / u$
- A area totale della sezione retta racchiusa dal perimetro esterno
- u perimetro esterno
- A_k area compresa all'interno della linea media della sezione trasversale a pareti sottili
- θ angolo tra le bielle di calcestruzzo e l'asse longitudinale della trave

Metodi di calcolo a torsione

Eurocodice 2

Il momento resistente portato dalle bielle compresse si valuta

$$T_{Rd,max} = 2 v f_{cd} t A_k / (\cot \theta + \tan \theta)$$

essendo:

$$v = 0.7 * (0.7 - f_{ck} / 200) \geq 0.35 \quad (f_{ck} \text{ in N/mm}^2)$$

Questo valore di v si applica se ci sono staffe solo lungo il perimetro esterno dell'elemento. Se si dispongono staffe chiuse su entrambi le facce di ciascun elemento della sezione cava equivalente, o di ciascun elemento di una sezione a cassone:

$$v = (0.7 - f_{ck}/200) \geq 0.5 \quad (f_{ck} \text{ in N/mm}^2)$$

Metodi di calcolo a torsione

Eurocodice 2

$$T_{Rd,s} = \min \left\{ \begin{array}{l} 2A_k f_{ywd} \frac{A_{sw}}{s} \cot \theta \\ \frac{2A_k f_{yld} A_{lw}}{u_k \cot \theta} \end{array} \right.$$

u_k è il perimetro dell'area A_k ;

s è il passo delle staffe;

f_{ywd} è la tensione di snervamento di calcolo delle staffe;

f_{yld} è la tensione di snervamento di calcolo dell'armatura longitudinale A_{sl} ;

A_{sw} è l'area della sezione trasversale delle staffe;

A_{sl} è l'area aggiuntiva di acciaio longitudinale richiesta per la torsione.

Metodi di calcolo a torsione

Eurocodice 2

Dalla relazione

$$T_{Rd,s} = \min \left\{ \begin{array}{l} 2A_k f_{ywd} \frac{A_{sw}}{s} \cot \theta \\ \frac{2A_k f_{yld} A_{lw}}{u_k \cot \theta} \end{array} \right.$$

posto $T_{Sd} = T_{Rd,s}$, le aree aggiuntive di staffe e di barre longitudinali per torsione sono fornite dalle equazioni:

$$\frac{A_{sw}}{s} = \frac{T_{Ed}}{2A_k f_{ywd} \cot \theta}$$

$$A_{lw} = \frac{T_{Ed} u_k \cot \theta}{2A_k f_{yld}}$$

Limiti per la torsione nelle travi

Eurocodice 2

ARMATURE A TORSIONE

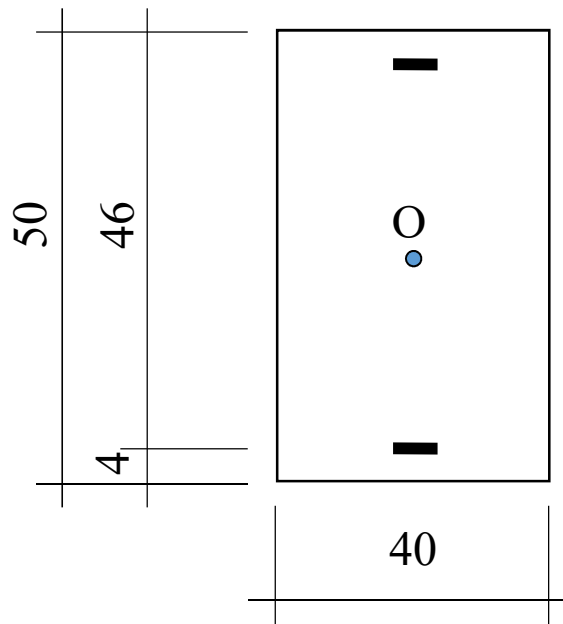
Le staffe per la torsione devono di regola essere o chiuse e ancorate per sovrapposizione e formare un angolo di 90° con l'asse dell'elemento strutturale.

La distanza longitudinale fra le staffe di torsione non deve di regola essere maggiore di $|u_k/8|$

Le barre longitudinali devono di regola essere disposte in modo tale che ci sia almeno una barra per angolo, essendo le rimanenti uniformemente distribuite lungo il perimetro delle staffe e distanti fra loro non più di $|350 \text{ mm}|$.

Esempio n. 5

3° stadio di comportamento



Lo spessore della sezione tubolare è :

$$T = 35 \text{ kNm} \quad t = \max \begin{cases} 2c = 8 \text{ cm} \\ A/u = 2400/200 = 12 \text{ cm} \end{cases}$$

Dunque :

$$a_k = 60 - 12 = 48 \text{ cm}$$

$$b_k = 40 - 12 = 28 \text{ cm}$$

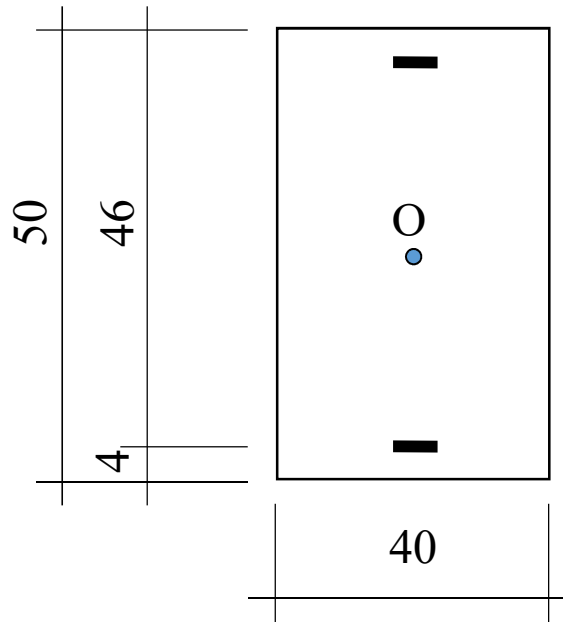
$$A_k = 48 \times 28 = 1344 \text{ cm}^2$$

$$T_{Rd,max} = \frac{2 \cdot 0.5 \cdot 14.17 \cdot 12 \cdot 1344 \cdot \cot \theta}{1 + \cot^2 \theta} \cdot 10^{-3} = 228.5 \frac{\cot \theta}{1 + \cot^2 \theta}$$

Quindi : $T_{Rd,max} = 114.3 \text{ kNm}$ se $\cot \theta = 1$ e $T_{Rd,max} = 78.8 \text{ kNm}$ se $\cot \theta = 2.5$

Esempio n. 6

3° stadio di comportamento



$T = 35 \text{ kNm}$
 $\leftarrow \leftarrow$

L'armatura necessaria a torsione ($\cot\theta=1$) è :

$$A_{st} = \frac{35 \cdot 100}{2 \cdot 1344 \cdot 391.3 \cdot 1} \cdot 10^3 = 3.33$$

$$A_{s,lon} = \frac{35 \cdot 152 \cdot 1}{2 \cdot 1344 \cdot 391.3} \cdot 10^3 = 5.06$$

Se si dispongono staffe $\phi 8/20$ ($>u/8$) e si impone :

$$T_{Rd,s(st)} = 2A_k f_{yd} \frac{A_{st}}{s} \cot\theta = T_{Ed}$$

$$\cot\theta = \frac{T_{Ed} s}{2A_k f_{yd} A_{st}} = \frac{35 \cdot 100}{2 \cdot 1344 \cdot 391.3 \cdot 2.5} \cdot 10^3 = 1.331$$

$$A_{s,lon} = \frac{35 \cdot 152 \cdot 1.331}{2 \cdot 1344 \cdot 391.3} \cdot 10^3 = 6.73 \text{ cm}^2$$

EFFETTI COMBINATI

Procedimento generale

Si usa lo stesso procedimento descritto per la torsione pura per definire una sezione chiusa equivalente a pareti sottili. Le tensioni normali e tangenziali in tale sezione si determinano con i metodi di calcolo convenzionali elastico o plastico.

Quando siano state calcolate le tensioni, l'armatura necessaria in ogni punto della sezione a pareti sottili può essere determinata con le formule per lo stato di tensione biassiale. Analogamente può essere determinata la tensione del calcestruzzo.

L'armatura così trovata, se non è praticamente realizzabile, può essere sostituita con un'altra disposizione staticamente equivalente, a condizione che gli effetti di tale modifica siano presi in conto nelle zone vicine a fori e alle estremità della trave.

EFFETTI COMBINATI

Procedimento generale

La tensione nel calcestruzzo risultante da taglio e torsione combinati nelle singole pareti della sezione equivalente a pareti sottili non deve, di regola, essere maggiore di $\sigma_c = v f_{cd}$.

Per sezioni a cassone, con armatura su entrambe le facce di ogni parete, nel caso di tensioni tangenziali originate da taglio e torsione combinati v può essere assunto pari a

$$v = (0,7 - f_{ck}/200) \geq 0,5.$$

EFFETTI COMBINATI

Torsione combinata con flessione e/o forze longitudinali

Le armature longitudinali richieste per flessione e torsione devono, di regola, essere determinate separatamente.

Si applicano inoltre le seguenti regole:

- nella zona tesa per flessione, l'armatura longitudinale di torsione va di regola aggiunta a quella richiesta per resistere alla flessione e alle forze assiali;
- nella zona compressa per flessione, se la tensione di trazione dovuta alla torsione è minore della tensione di compressione nel calcestruzzo dovuta alla flessione, non è necessaria armatura longitudinale aggiuntiva per torsione.

EFFETTI COMBINATI

Torsione combinata con flessione e/o forze longitudinali

Nelle zone in cui la torsione è combinata con un momento flettente significativo possono insorgere tensioni principali critiche nella zona di compressione, in particolare nelle travi a cassone. In tali casi la tensione principale di compressione non deve di regola essere maggiore di f_{cd} , essendo tale tensione ricavata dalla compressione longitudinale media per flessione e dalla tensione tangenziale dovuta alla torsione, assunta pari a

$$\tau_{Sd} = \frac{T_{Sd}}{2 A_k t}$$

EFFETTI COMBINATI

Torsione combinata con taglio

Il momento torcente di calcolo e il taglio di calcolo applicato, T_{Ed} e V_{Ed} rispettivamente, devono di regola soddisfare la seguente condizione:

$$\frac{T_{Ed}}{T_{Rd,max}} + \frac{V_{Ed}}{V_{Rd,max}} \leq 1$$

$T_{Rd,max}$ è il momento resistente torcente di calcolo,

$V_{Rd,max}$ è il taglio resistente di calcolo relativo a una biella inclinata di un angolo θ

EFFETTI COMBINATI

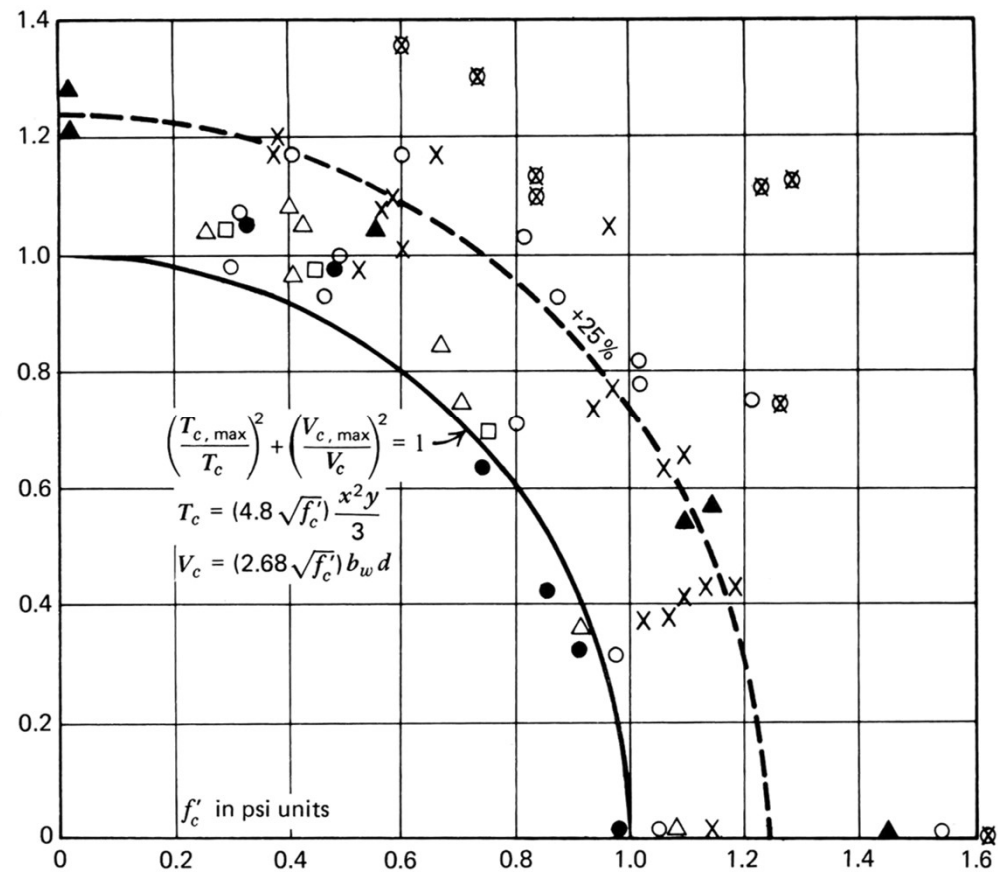
Torsione combinata con taglio

I calcoli per il progetto delle staffe possono essere effettuati separatamente, per la torsione secondo e per il taglio.

L'angolo θ delle bielle equivalenti di calcestruzzo è lo stesso sia per la torsione che per il taglio.

EFFETTI COMBINATI

Torsione - taglio



(tratto da R. Park and T. Paulay: Reinforced Concrete Structures)

Fine