

# Lezione

Tecnica delle Costruzioni

# Il momento flettente

# Verifica di sezioni inflesse

# Momento flettente

## 1° stadio (Formule di Scienza delle Costruzioni)

Con riferimento alla sezione omogeneizzata vale la formula di Scienza delle Costruzioni

$$\sigma = E(\varepsilon_G + \chi_x x + \chi_y y)$$

Pertanto:

$$N = E \varepsilon_G \int dA + E \chi_x \int x dA + E \chi_y \int y dA = E \varepsilon_G A = 0$$

$$M_x = E \varepsilon_G \int y dA + E \chi_x \int xy dA + E \chi_y \int y^2 dA = E \chi_y I_x$$

$$M_y = E \varepsilon_G \int x dA + E \chi_x \int x^2 dA + E \chi_y \int xy dA = - E \chi_x I_y$$

essendo  $\int x dA = \int y dA = 0$  e  $\int x y dA = 0$

# Momento flettente

## 1° stadio (Formule di Scienza delle Costruzioni)

Con riferimento alla sezione omogeneizzata vale la formula di Scienza delle Costruzioni

$$\sigma = E(\varepsilon_G + \chi_x x + \chi_y y)$$

Curvatura nel piano x-z

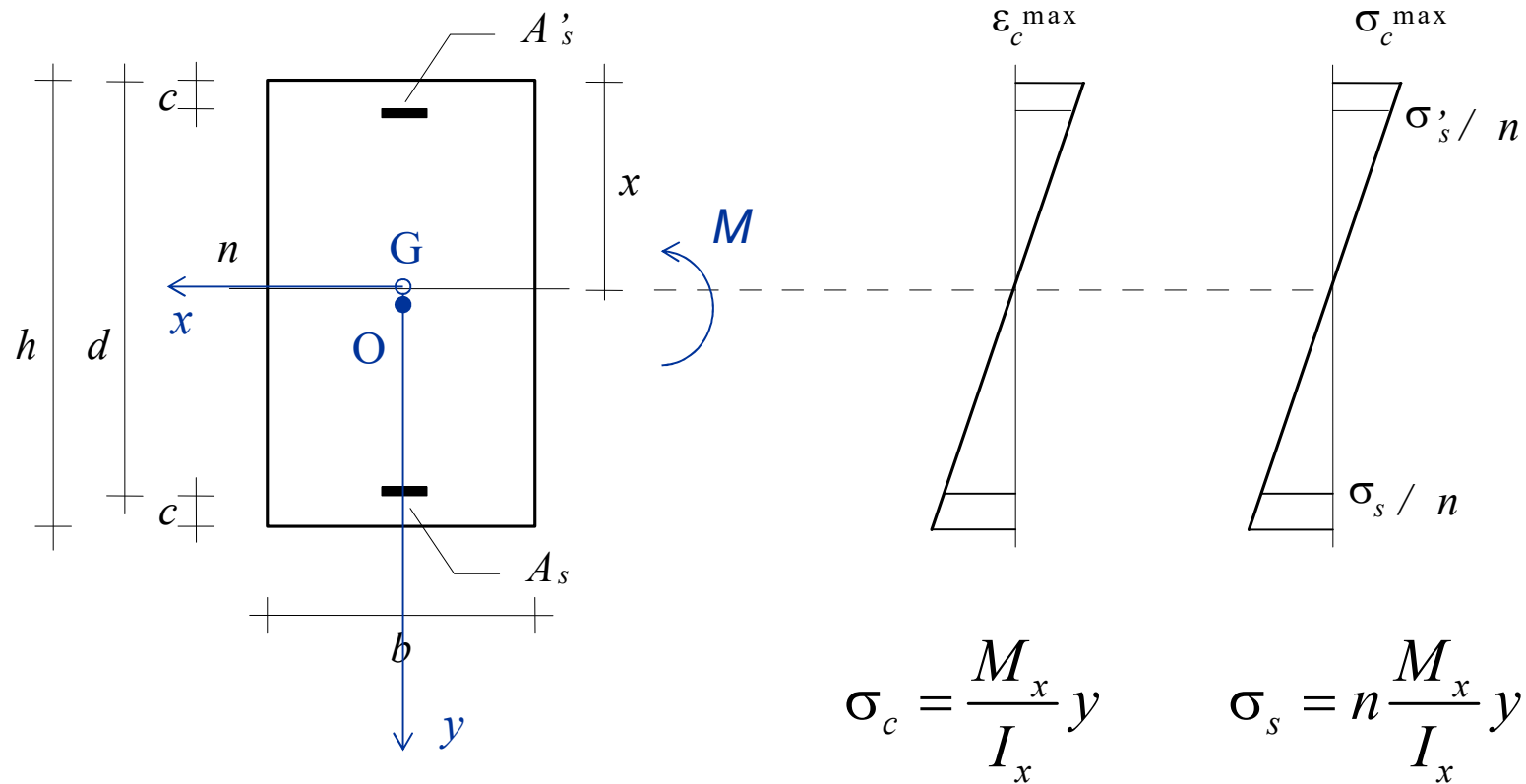
Curvatura nel piano y-z

Poiché  $\varepsilon_G=0$

$$\sigma = -\frac{M_y}{I_y} x + \frac{M_x}{I_x} y$$

# Momento flettente

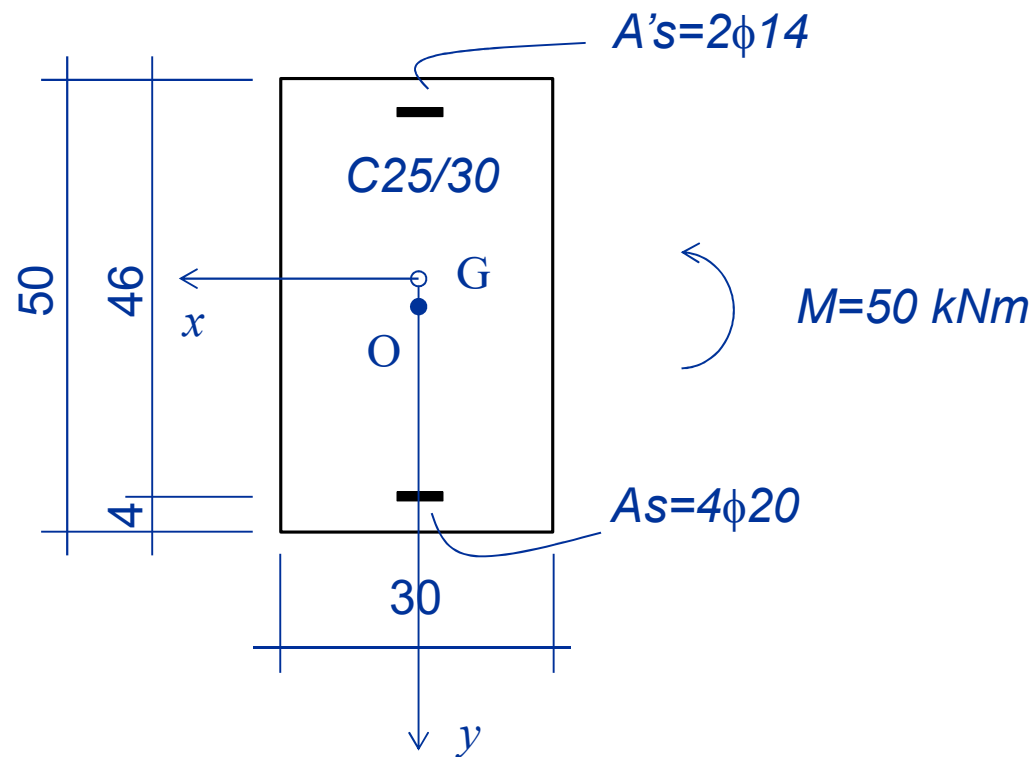
## 1° stadio (Calcolo delle tensioni)



Nota: il punto  $O$  coincide con  $G$   
se le armature  $A_s$  e  $A'_s$  sono uguali

# Momento flettente

1° stadio (Esercizio)



Dati:

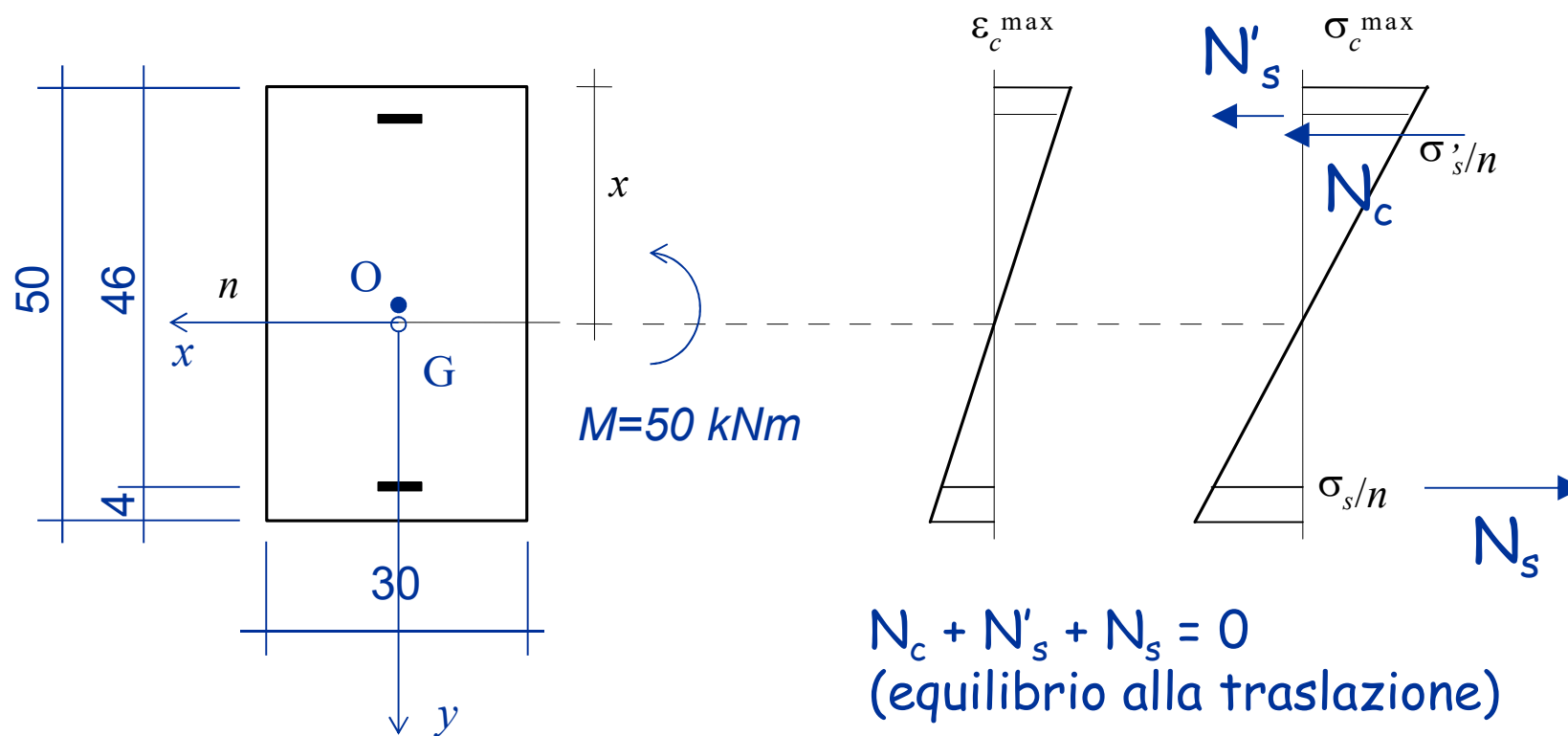
Geometria della sezione  
Armature

Incognite:

Posizione dell'asse neutro  
Tensioni massime

# Momento flettente

## 1° stadio (Esercizio)



$$N_c + N'_s + N_s = 0$$

(equilibrio alla traslazione)

oppure

$$S_n = 0$$

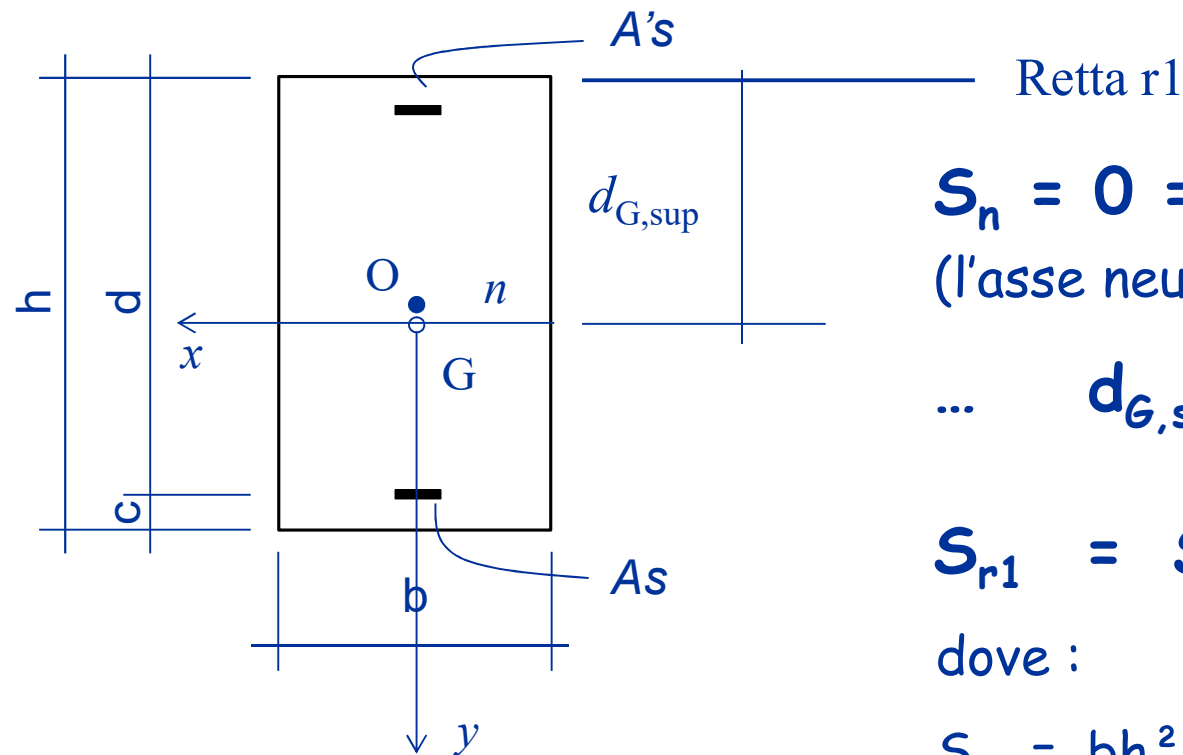
(l'asse neutro è baricentrico)

1. Calcolo della posizione dell'asse neutro



# Momento flettente

## 1° stadio (Esercizio)



$$S_n = 0 = S_{r1} + A d_{G,sup}$$

(l'asse neutro è baricentrico)

$$\dots \quad d_{G,sup} = S_{r1} / A$$

$$S_{r1} = S_{cls} + S_{As} + S_{A's}$$

dove :

$$S_{cls} = bh^2/2$$

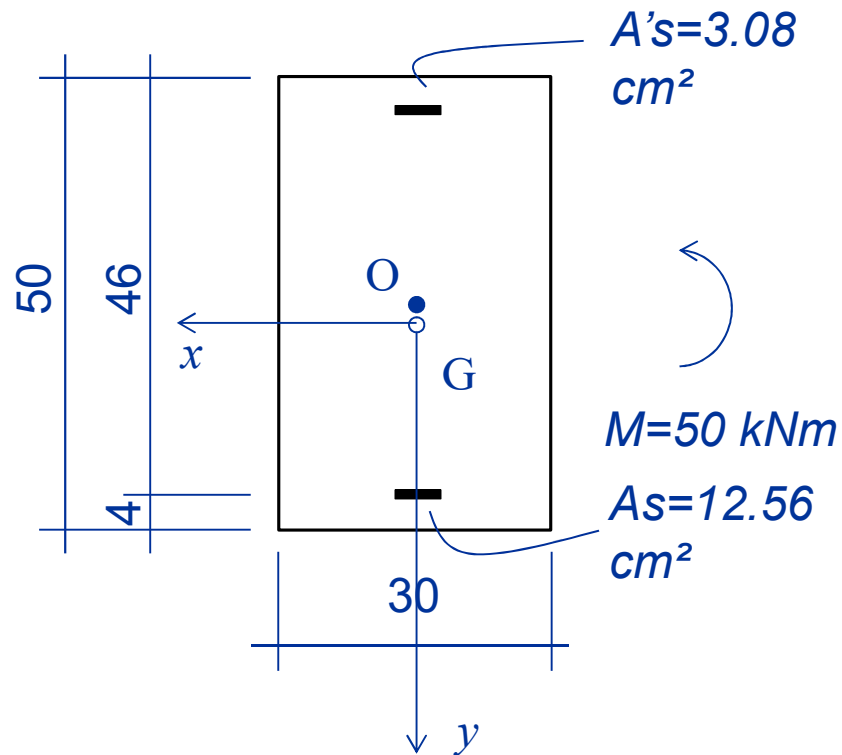
$$S_{As} = n A_s d$$

$$S_{A's} = n A'_s c$$

1. Calcolo della posizione dell'asse neutro

# Momento flettente

## 1° stadio (Esercizio)



$$S_n = 0$$

(l'asse neutro è baricentrico)

$$A = bh + n(A_s + A'_s) = 30 \times 50 + 6.35 \times (12.56 + 3.08) = 1599.3 \text{ cm}^2$$

$$S = bh^2/2 + n(A_s d + A'_s c) = 30 \times 50^2/2 + 6.35 \times (12.56 \times 46 + 3.08 \times 4) =$$

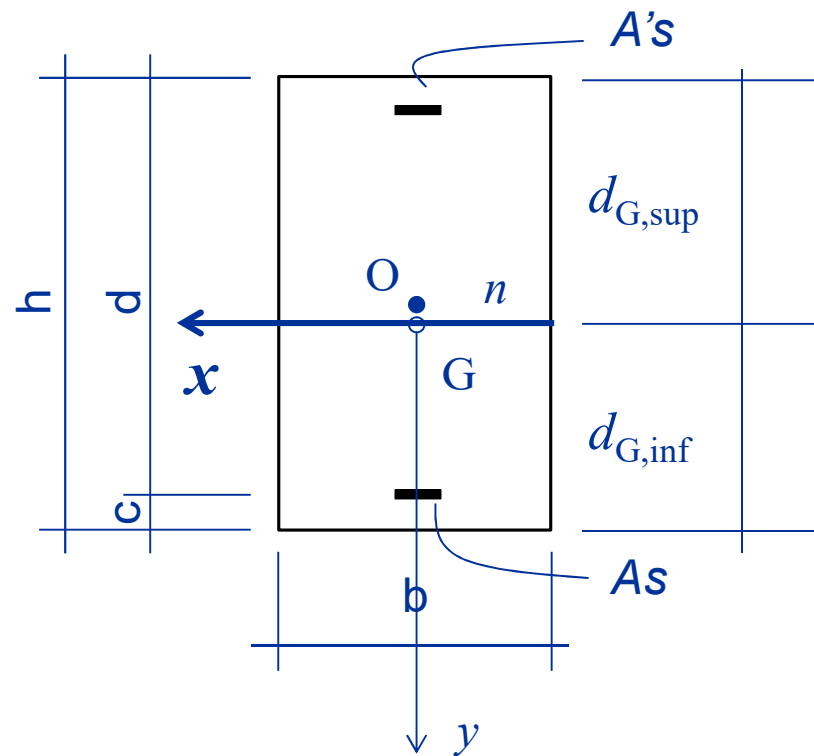
$$41247 \text{ cm}^3 \text{ (calcolato rispetto ad un asse passante per il bordo superiore della sezione)}$$

$$d_{G,\text{sup}} = S/A = 41247/1599.3 = 25.79 \text{ cm}$$

$$d_{G,\text{inf}} = h - d_{G,\text{sup}} = 50 - 25.79 = 24.21 \text{ cm}$$

# Momento flettente

## 1° stadio (Esercizio)



## 2. Calcolo del momento d'inertia

$$I_x = I_{cls} + I_{A_s} + I_{A's}$$

dove :

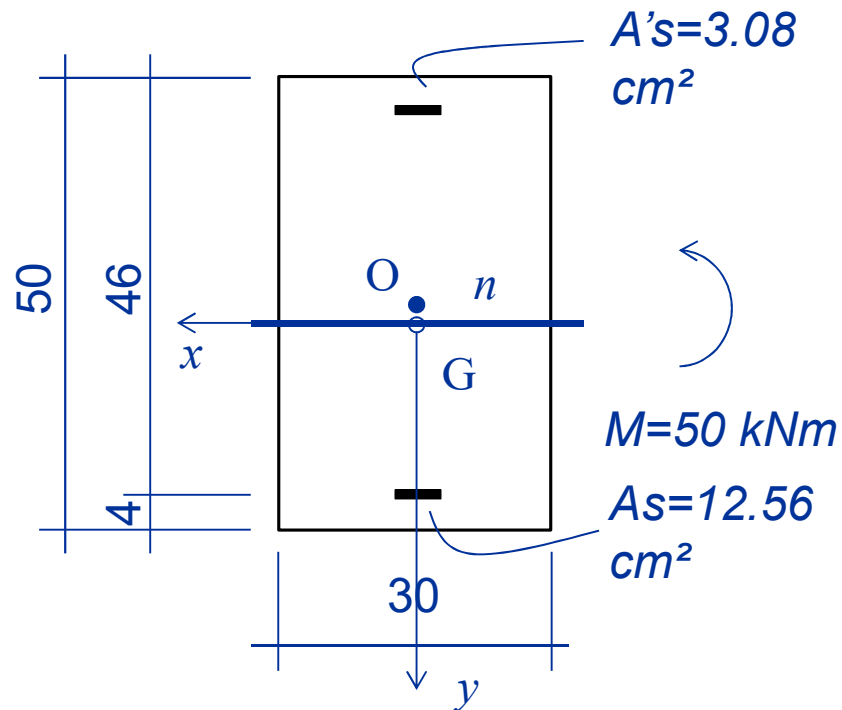
$$I_{cls} = b d_{G,sup}^3 / 3 + b d_{G,inf}^3 / 3$$

$$I_{A_s} = n A_s (d_{G,inf} - c)^2$$

$$I_{A's} = n A's (d_{G,sup} - c)^2$$

# Momento flettente

1° stadio (Esercizio)



2. Calcolo del momento d'inerzia

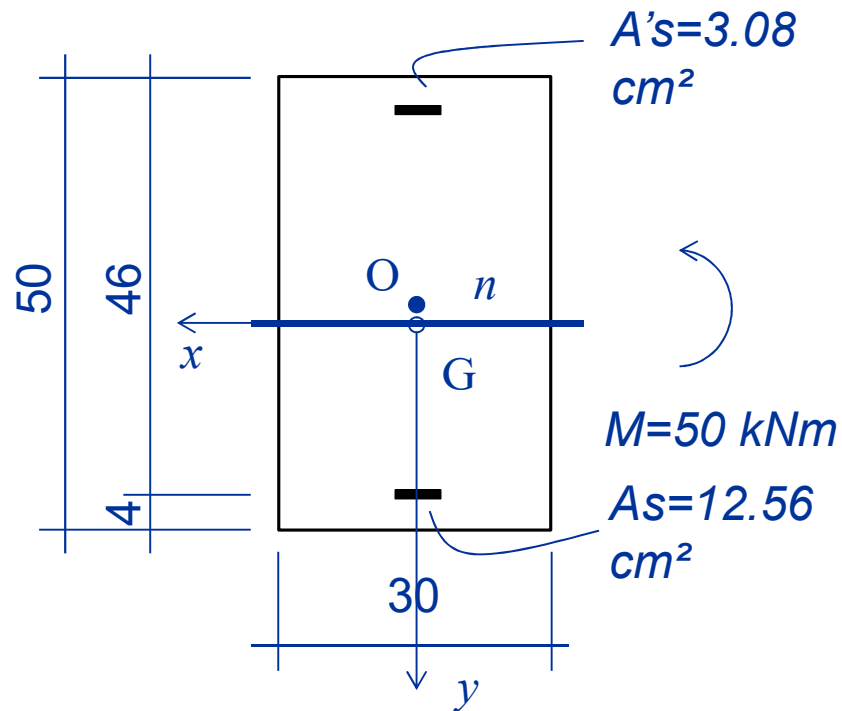
$$I = b d_{G,\text{sup}}^3/3 + b d_{G,\text{inf}}^3/3 + n[A_s(d_{G,\text{inf}} - c)^2 + A'_s(d_{G,\text{sup}} - c)^2] =$$

$$30 \times (24.21^3 + 25.79^3)/3 + 6.35 \times [12.56(24.21 - 4)^2 + 3.08(25.79 - 4)^2] =$$

$$355298 \text{ cm}^4$$

# Momento flettente

1° stadio (Esercizio)



## 3. Calcolo delle tensioni

$$\sigma_{c,\text{sup}} = \frac{50 \times 10^6}{(355298 \times 10^4)} (-25.79) \times 10 =$$

$$-3.63 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{c,\text{inf}} = 1.407 \times 10^{-2} \times 24.21 \times 10 =$$

$$3.41 \text{ MPa}$$

$$f_{cfk} = 2.16 \text{ MPa}$$

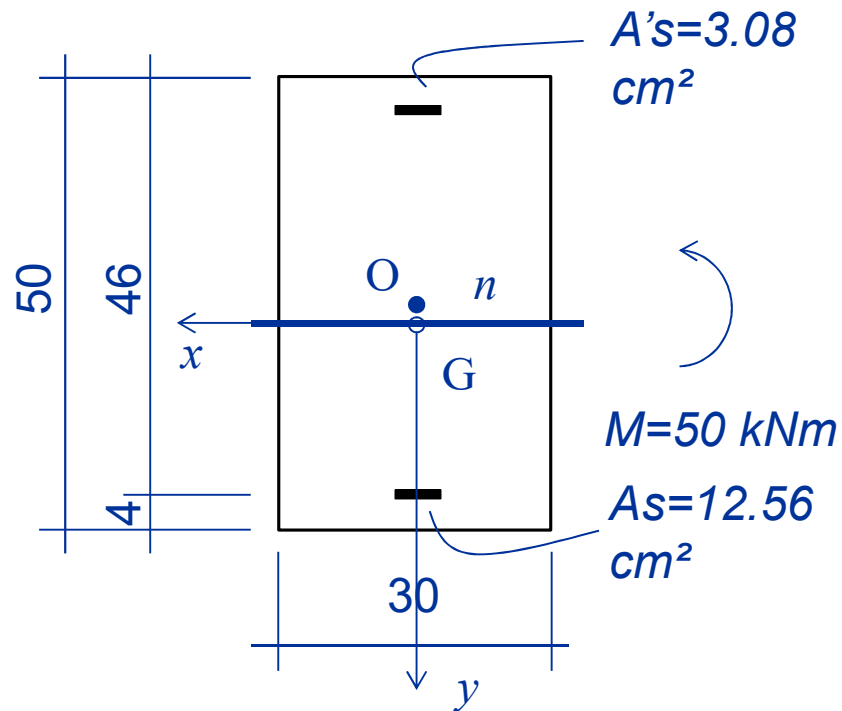
$$\sigma_{s,\text{sup}} = 6.35 \times 0.01407 \times (-25.79 + 4) \times 10 = -19.5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{s,\text{inf}} = 6.35 \times 0.01407 \times (24.21 - 4) \times 10 = 18.1 \text{ MPa}$$

*La sezione è fessurata*

# Momento flettente

## 1° stadio (Esercizio)



Calcolo del momento di  
prima fessurazione

$$\sigma_c = \frac{M_x}{I_x} d_{G,inf} = f_{cfk}$$

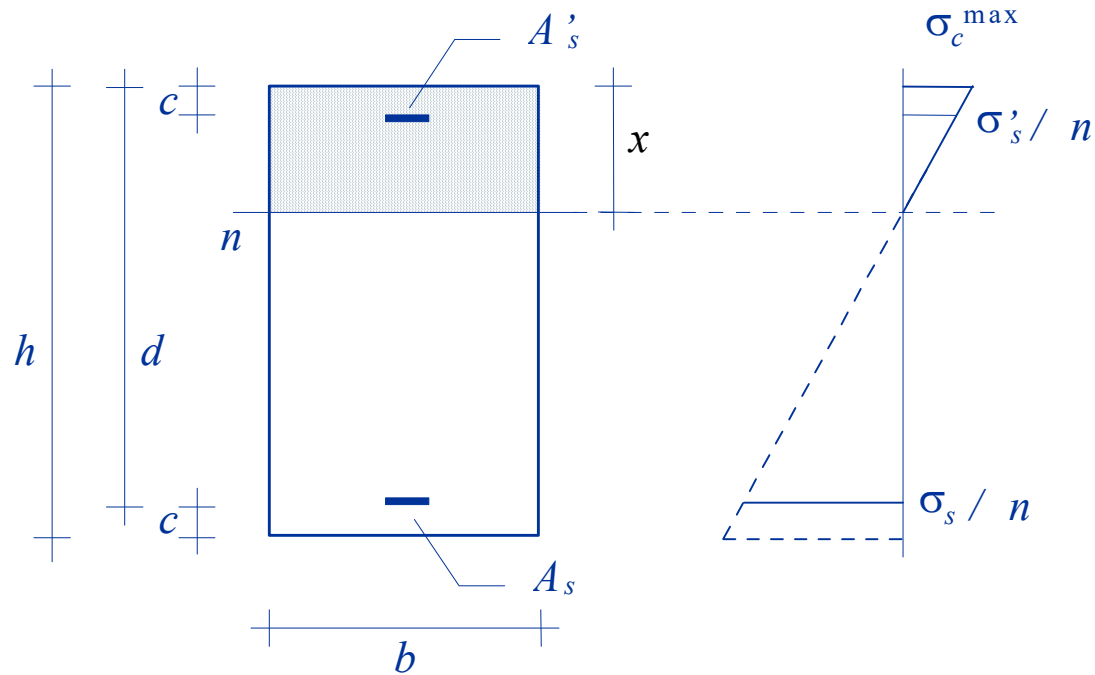
$$f_{cfk} = 2.16 \text{ MPa}$$

$$M_f = \frac{355298 \times 10^4 \times 2.16 \times 10^{-6}}{(24.21 \times 10)} =$$

$$31.7 \text{ kNm}$$

# Momento flettente

2° stadio



Dati:

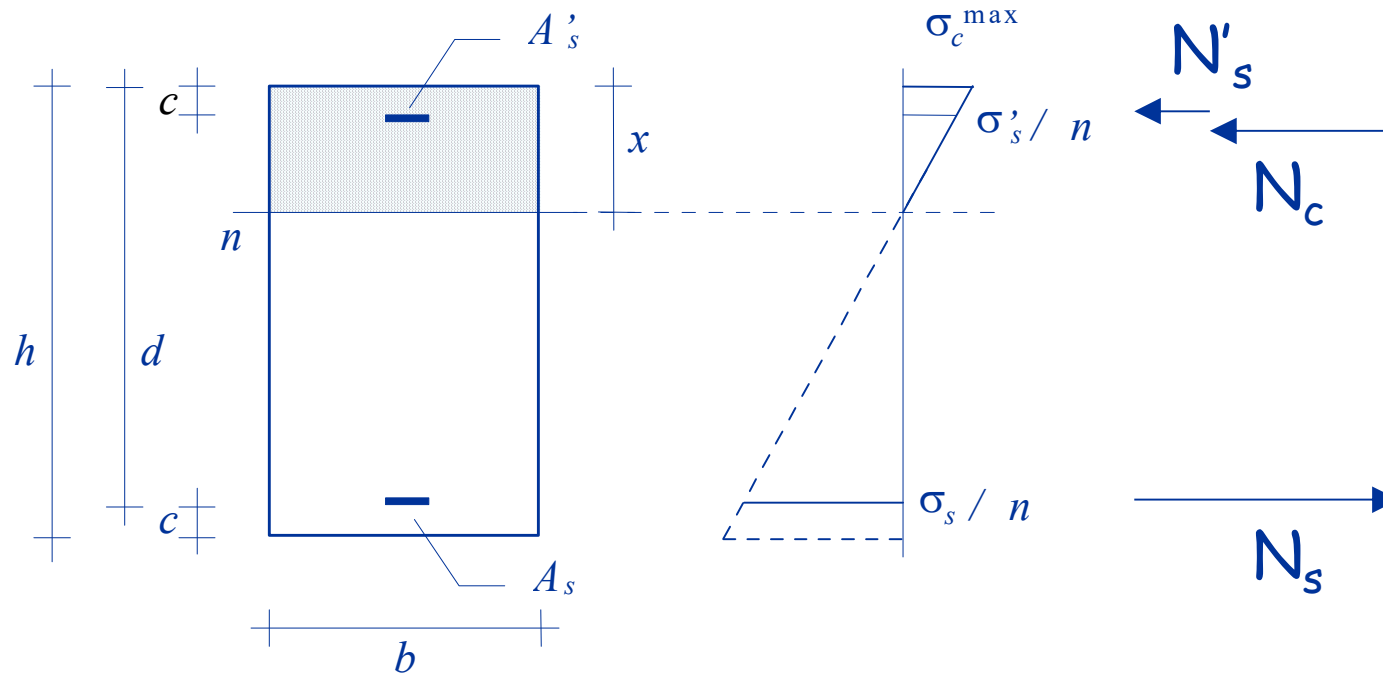
Geometria della sezione  
Armature

Incognite:

Posizione dell'asse neutro  
Tensioni massime

# Momento flettente

2° stadio



Per trovare l'asse neutro:

oppure ...

$$N_c + N'_s + N_s = 0$$

(equilibrio alla traslazione)

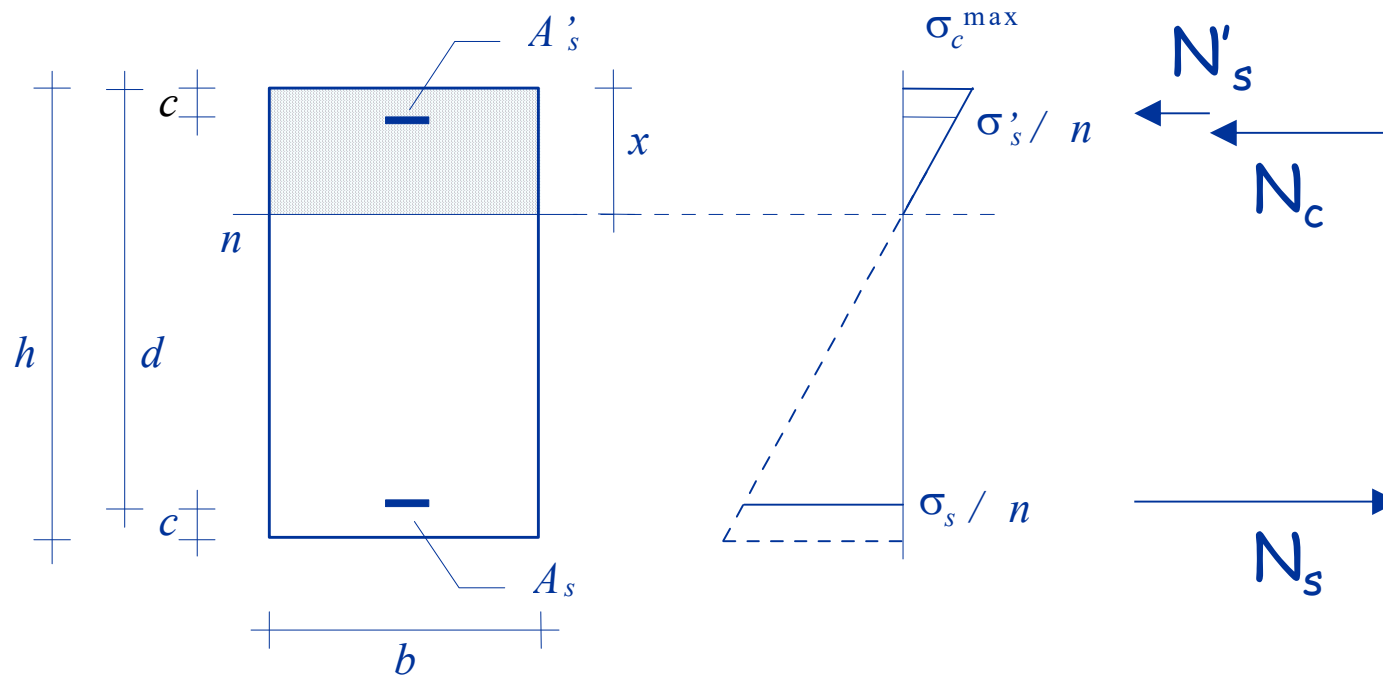
$$S_n = 0$$

(l'asse neutro è baricentrico)



# Momento flettente

2° stadio



$$S_n = -\frac{bx^2}{2} - nA'_s(x - c) + nA_s(d - x) = 0$$

ovvero ... 
$$\frac{b}{2}x^2 - n(A_s + A'_s)x - n(A_sd + A'_sc) = 0$$

# Momento flettente

2° stadio

Equazione di secondo grado, con soluzione:

$$x = \frac{n(A_s + A'_s)}{b} \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{2b(A_s d + A'_s c)}{n(A_s + A'_s)^2}} \right]$$

e poi:

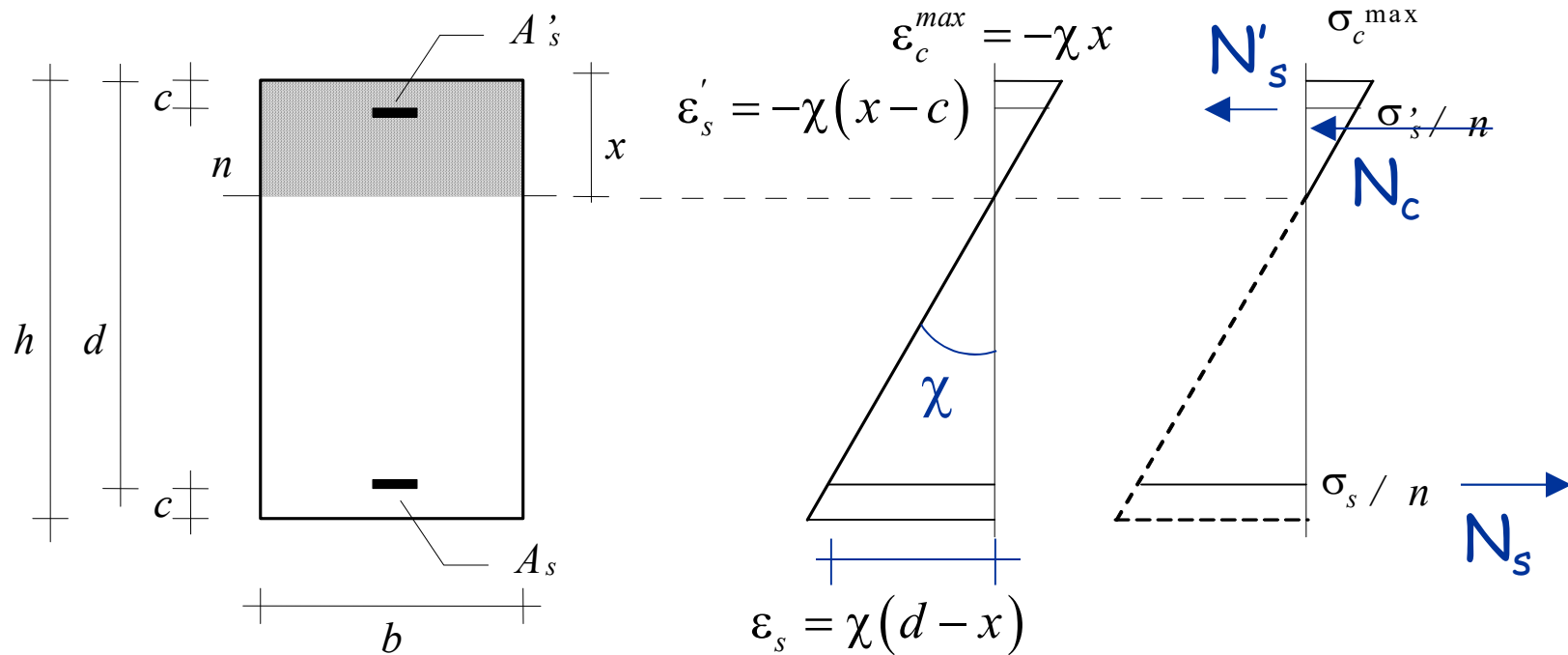
$$\sigma_c = -\frac{M_x}{I_x} y \quad \sigma_s = -n \frac{M_x}{I_x} y$$

con:

$$I_x = \frac{b x^3}{3} + n A'_s (x - c)^2 + n A_s (d - x)^2$$

# Momento flettente

2° stadio ( $N_c + N'_s + N_s = S_n = 0$ )



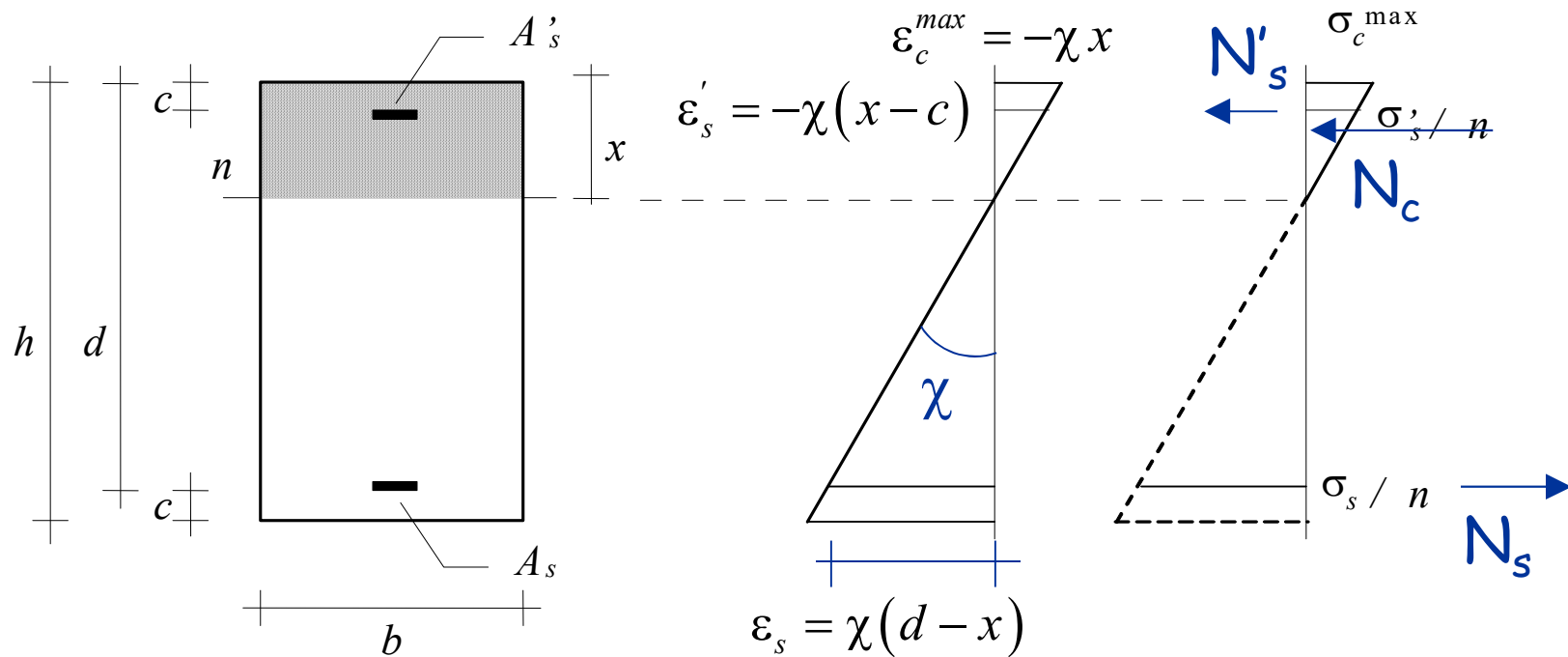
$$N_c = \frac{bx}{2} \sigma_c^{max} = -E_c \chi \frac{bx^2}{2}$$

$$N_s = \sigma_s A_s = E_c \chi n A_s (d - x)$$

$$N'_s = \sigma'_s A'_s = -E_c \chi n A'_s (x - c)$$

# Momento flettente

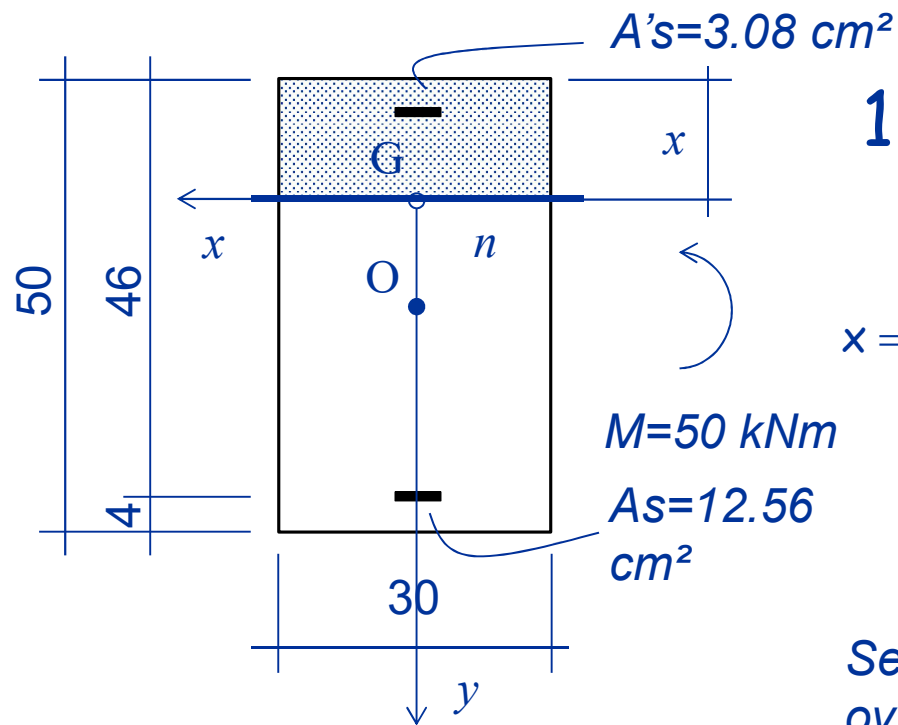
2° stadio ( $N_c + N'_s + N_s = S_n = 0$ )



$$N_c + N_s + N'_s = -E_c \chi \frac{bx^2}{2} + E_c \chi n A_s (d - x) - E_c \chi n A'_s (x - c) = 0$$

# Momento flettente

## 2° stadio (Esercizio)



### 1. Calcolo della posizione dell'asse neutro

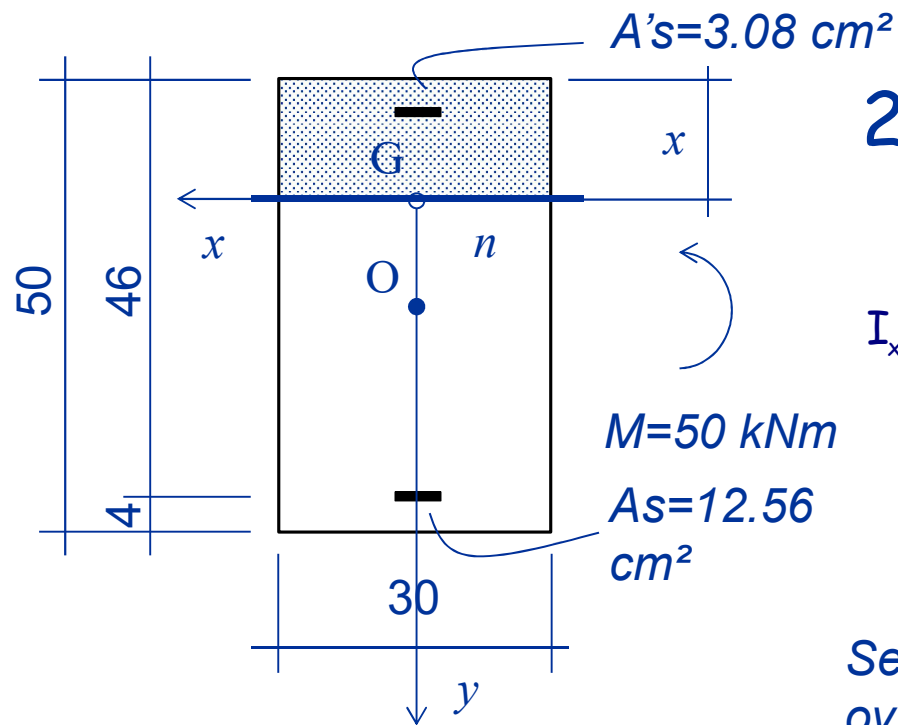
$$x = \frac{n (A_s + A'_s)}{b} \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{2 b (A_s d + A'_s c)}{n (A_s + A'_s)^2}} \right]$$

Se i carichi sono di breve durata  
ovvero...  $n=6.35$

$$x = \frac{6.35 (12.56 + 3.08)}{30} \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 30 (12.56 \cdot 46 + 3.08 \cdot 4)}{6.35 (12.56 + 3.08)^2}} \right] = 12.84 \text{ cm}$$

# Momento flettente

## 2° stadio (Esercizio)



## 2. Calcolo del momento di inerzia

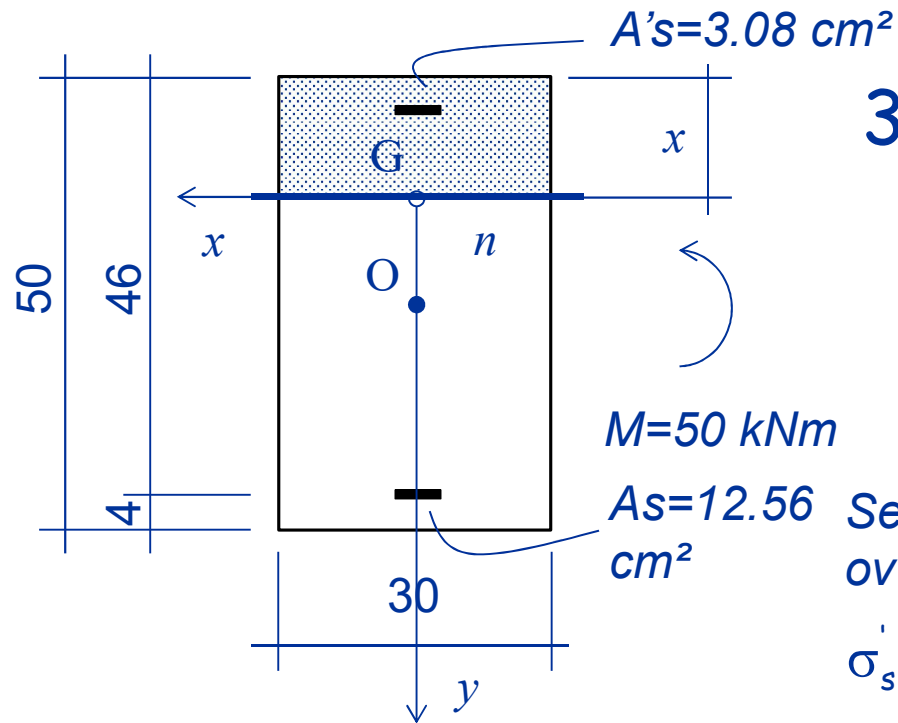
$$I_x = \frac{b x^3}{3} + n A'_s (x - c)^2 + n A_s (d - x)^2$$

Se i carichi sono di breve durata  
ovvero...  $n = 6.35$

$$I = \frac{30 \cdot 12.84^3}{3} + 6.35 \left[ 3.08 (12.84 - 4)^2 + 12.56 (46 - 12.84)^2 \right] = 110385 \text{ cm}^4$$

# Momento flettente

## 2° stadio (Esercizio)



### 3. Calcolo delle tensioni

$$\sigma_c = \frac{M_x}{I_x} y \quad \sigma_s = n \frac{M_x}{I_x} y$$

Se i carichi sono di breve durata  
ovvero...  $n=6.35$

$$\sigma'_s = -6.35 \cdot 0.0453 \cdot (12.84 - 4) \cdot 10 = -25.4 \text{ MPa}$$

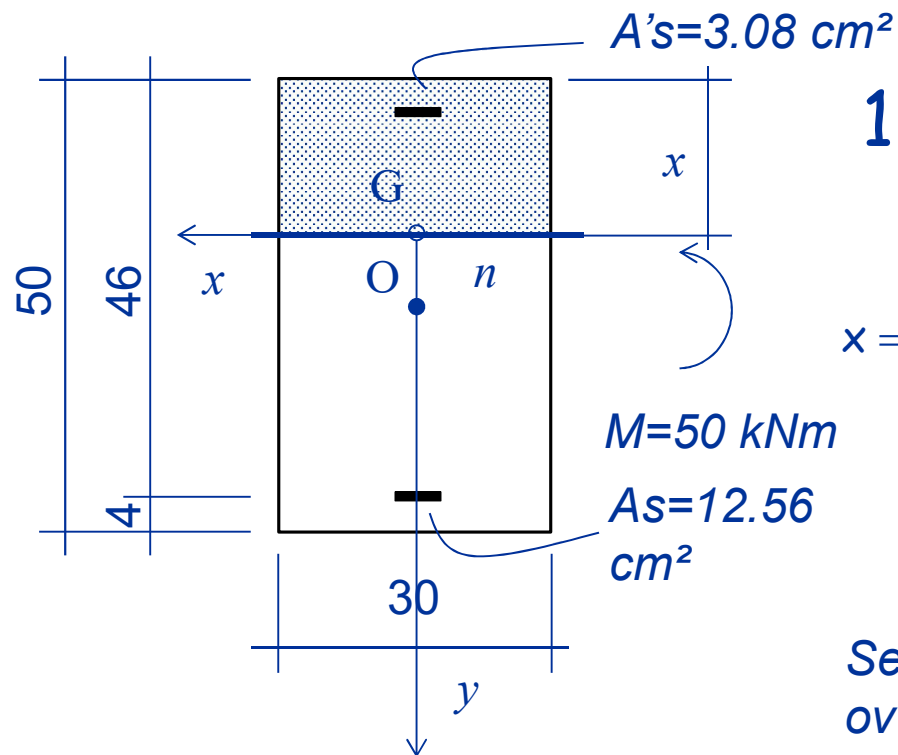
$$\sigma_s = 6.35 \cdot 0.0453 \cdot (46 - 12.84) \cdot 10 = 95.4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{c, \text{sup}} = -\frac{50 \cdot 10^6}{110385 \cdot 10^4} 12.84 \cdot 10$$

$$= -5.81 \text{ MPa}$$

# Momento flettente

## 2° stadio (Esercizio)



### 1. Calcolo della posizione dell'asse neutro

$$x = \frac{n (A_s + A'_s)}{b} \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{2 b (A_s d + A'_s c)}{n (A_s + A'_s)^2}} \right]$$

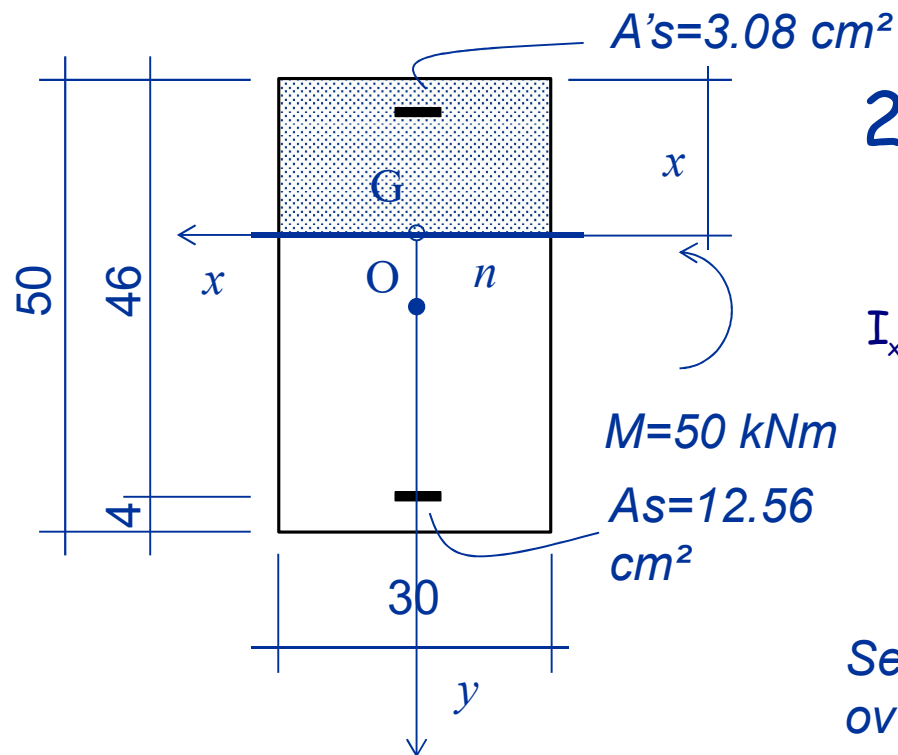
Se i carichi sono di lunga durata  
ovvero...  $n=15$

$$x = \frac{15 (12.56 + 3.08)}{30} \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 30 (12.56 \cdot 46 + 3.08 \cdot 4)}{15 (12.56 + 3.08)^2}} \right] = 17.70 \text{ cm}$$



# Momento flettente

## 2° stadio (Esercizio)



## 2. Calcolo del momento di inerzia

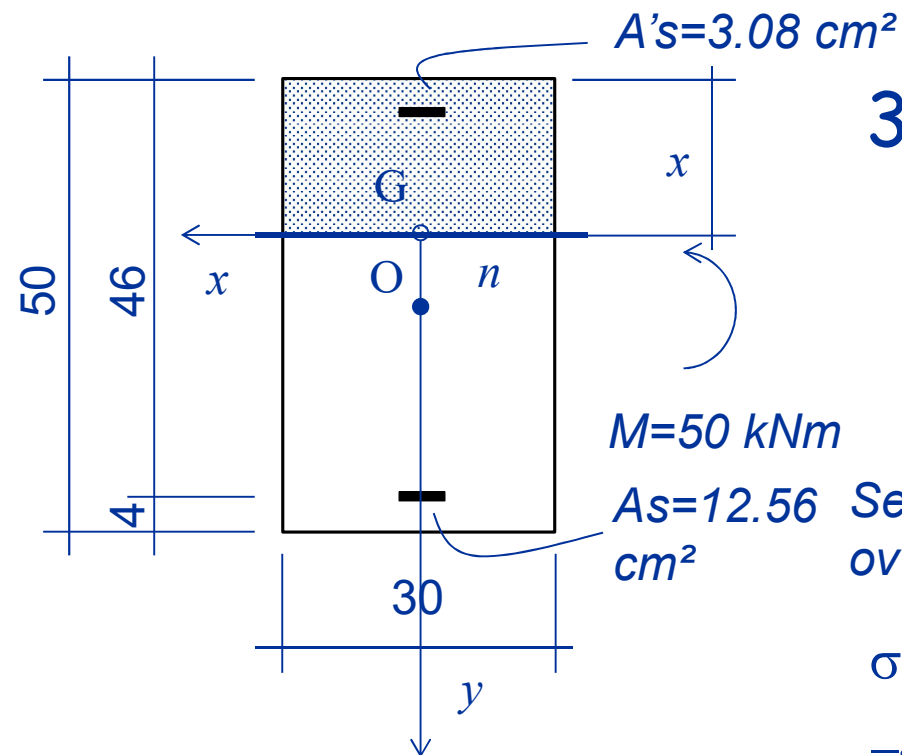
$$I_x = \frac{b x^3}{3} + n A'_s (x - c)^2 + n A_s (d - x)^2$$

Se i carichi sono di lunga durata  
ovvero...  $n=15$

$$I = \frac{30 \cdot 12.84^3}{3} + 15 \left[ 3.08 (12.84 - 4)^2 + 12.56 (46 - 12.84)^2 \right] = 215011 \text{ cm}^4$$

# Momento flettente

## 2° stadio (Esercizio)



$$\sigma_{c, \text{sup}} = -\frac{50 \cdot 10^6}{215011 \cdot 10^4} 17.70 \cdot 10$$

$$= -4.12 \text{ MPa}$$

### 3. Calcolo delle tensioni

$$\sigma_c = \frac{M_x}{I_x} y \quad \sigma_s = n \frac{M_x}{I_x} y$$

Se i carichi sono di lunga durata  
ovvero...  $n=15$

$$\sigma'_s = -15 \cdot 0.0453 \cdot (17.70 - 4) \cdot 10 =$$

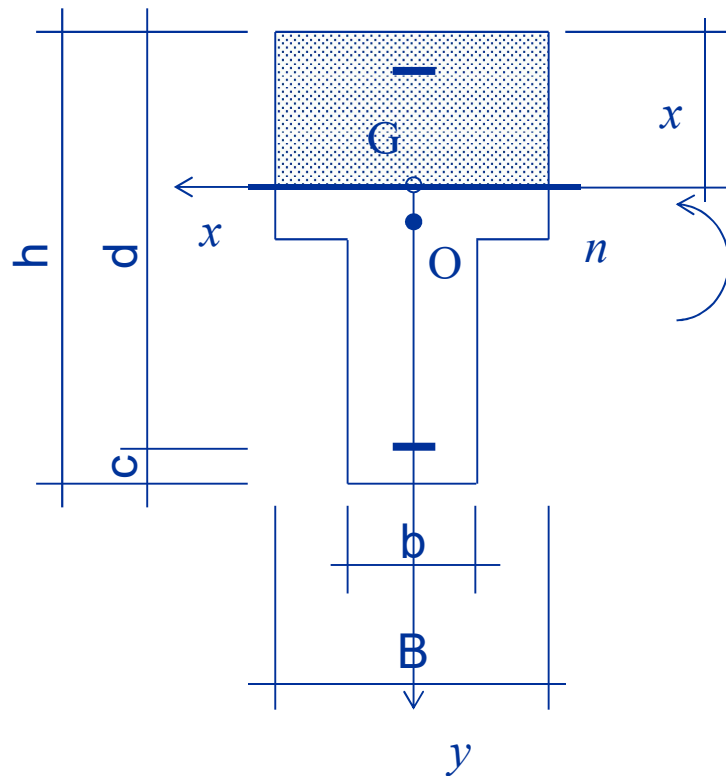
$$-47.8 \text{ MPa}$$

$$\sigma_s = 15 \cdot 0.0453 \cdot (46 - 17.70) \cdot 10 =$$

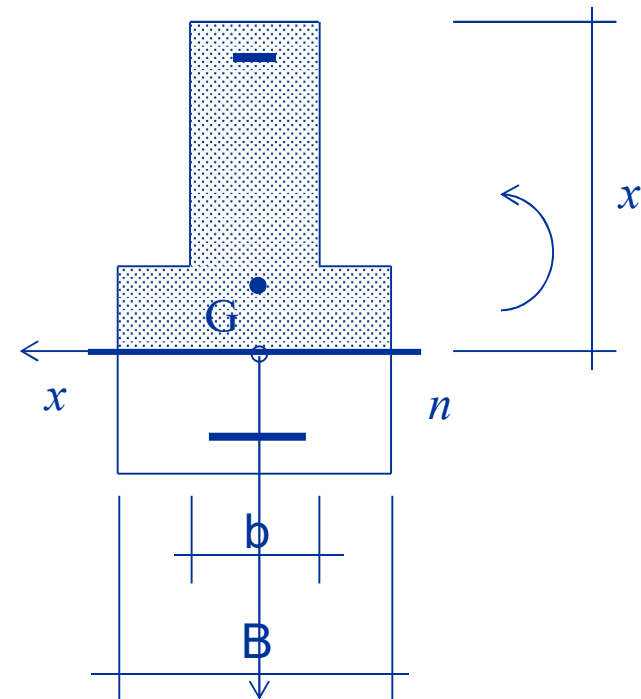
$$98.7 \text{ MPa}$$

# Momento flettente

2° stadio (sezioni non rettangolari)



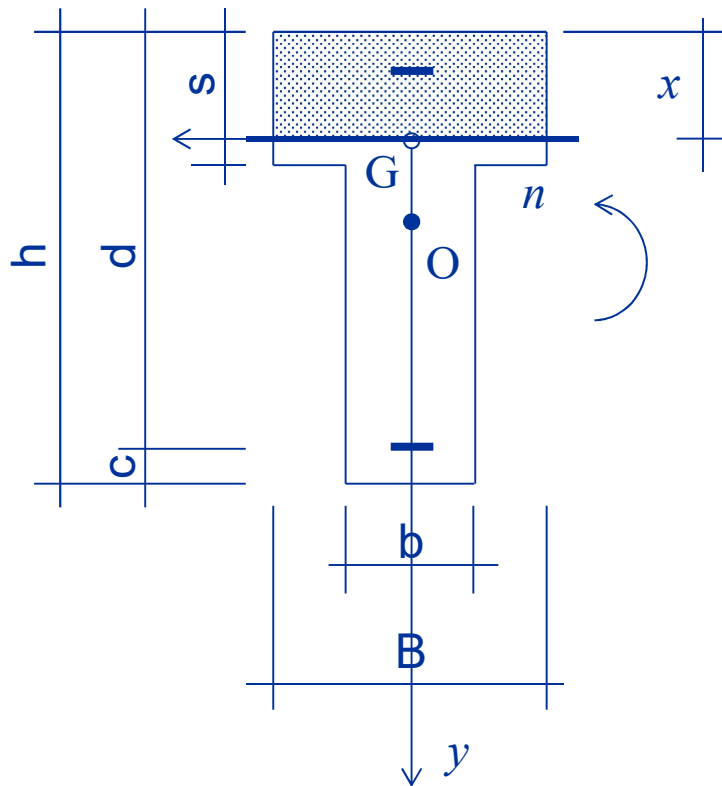
La sezione può essere trattata come rettangolare



La sezione NON può essere trattata come rettangolare

# Momento flettente

## 2° stadio (sezioni non rettangolari)



In presenza di una sezione rettangolare a tratti si può fare inizialmente l'ipotesi che la parte compressa sia rettangolare (ovvero, nel caso in figura, che l'asse neutro tagli l'ala).

Si determina la posizione dell'asse neutro con la formula:

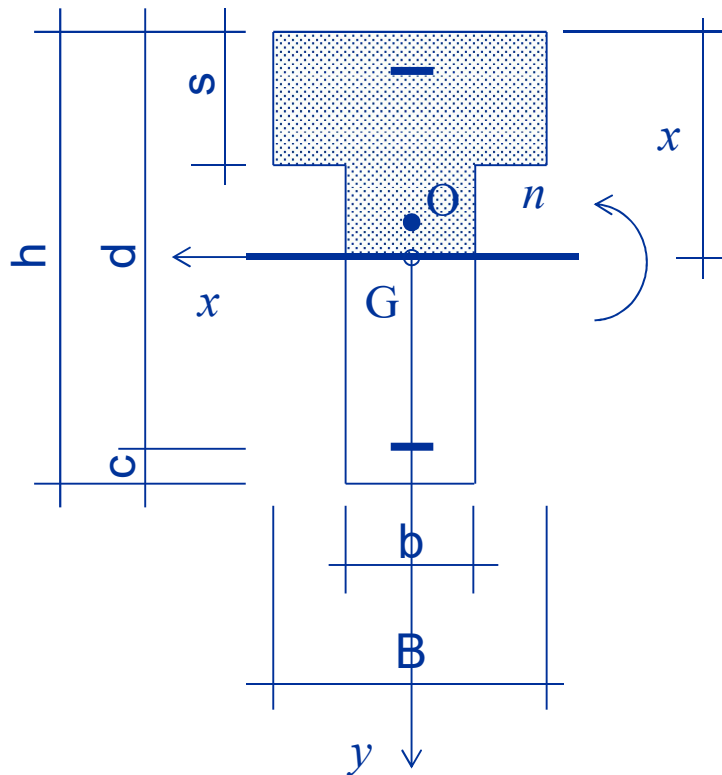
$$x = \frac{n (A_s + A'_s)}{b} \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{2 b (A_s d + A'_s c)}{n (A_s + A'_s)^2}} \right]$$

Se l'asse neutro taglia l'ala:

La posizione dell'asse neutro è corretta e il momento d'inerzia della sezione reagente omogeneizzata può essere calcolato con le formule della sezione rettangolare.

# Momento flettente

## 2° stadio (sezioni non rettangolari)



Se l'asse neutro non taglia l'ala, la posizione calcolata dell'asse neutro è errata.

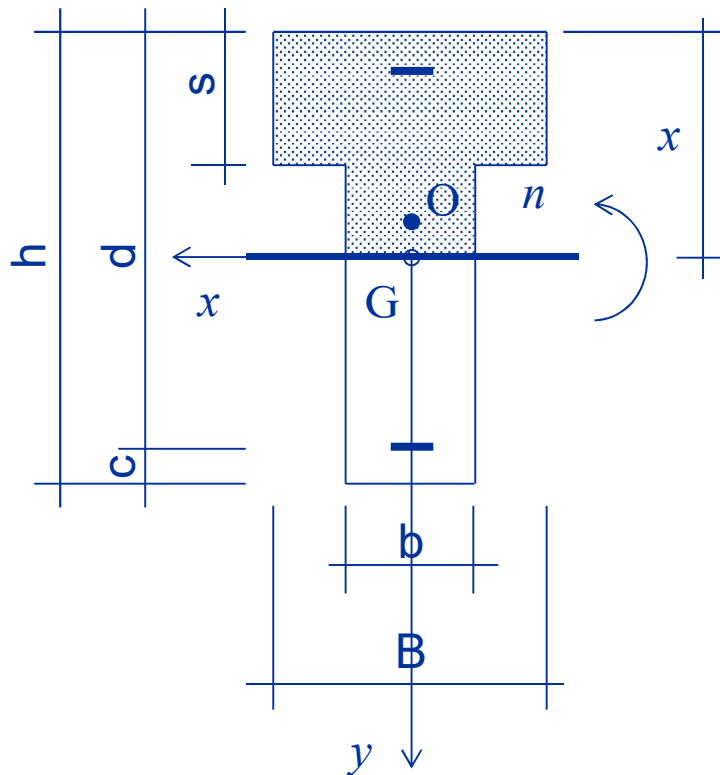
Con riferimento alla sezione in figura, la posizione dell'asse neutro deve essere rivalutata ipotizzando che l'asse neutro tagli l'anima.

La nuova posizione dell'asse neutro può essere calcolata imponendo  $N=0$  oppure  $S_n=0$ .

$$S_n = -\frac{B}{2}x^2 + \frac{(B-b)(x-s)^2}{2} - nA'_s(x-c) + nA_s(d-x) = 0$$

# Momento flettente

## 2° stadio (sezioni non rettangolari)



Se l'asse neutro non taglia l'ala, la posizione calcolata dell'asse neutro è errata.

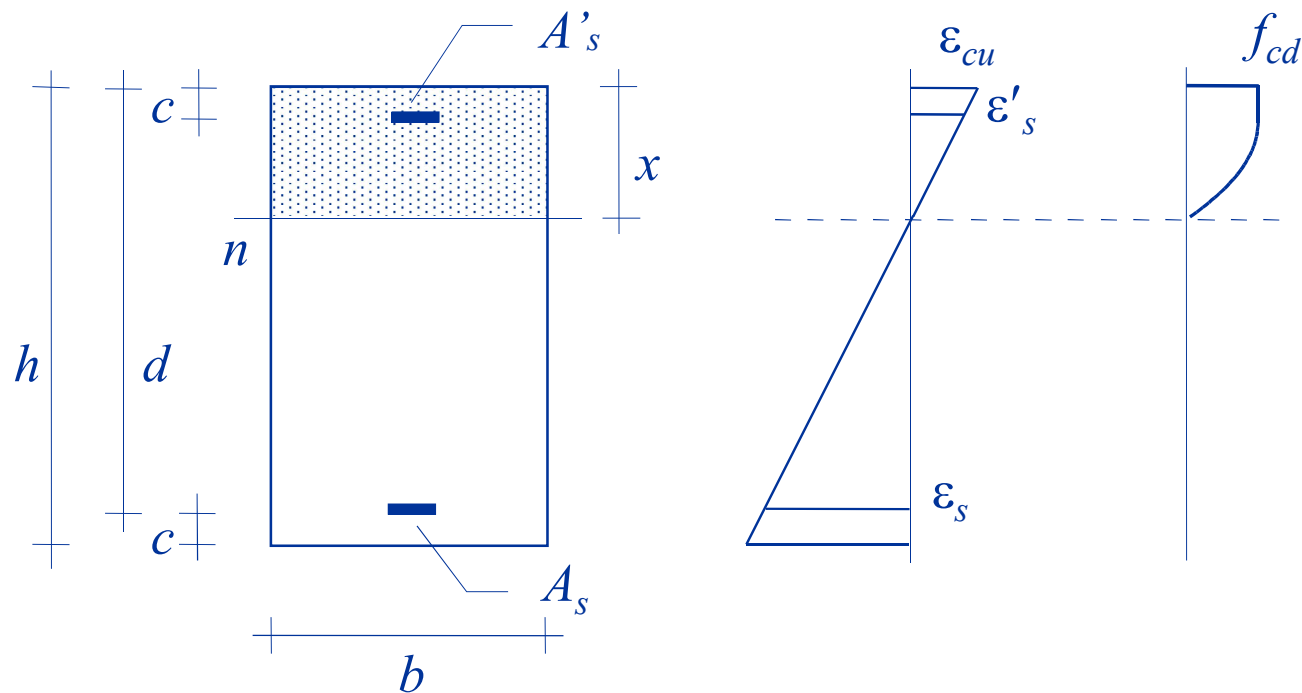
Con riferimento alla sezione in figura, la posizione dell'asse neutro deve essere rivalutata ipotizzando che l'asse neutro tagli l'anima.

Il momento d'inerzia deve essere calcolato facendo riferimento alla effettiva sezione reagente omogen.

$$I_x = \frac{Bx^3 - (B-b)(x-s)^2}{3} + nA_s(d-x)^2 + nA'_s(x-c)^2$$

# Momento flettente

3° stadio



Dati:

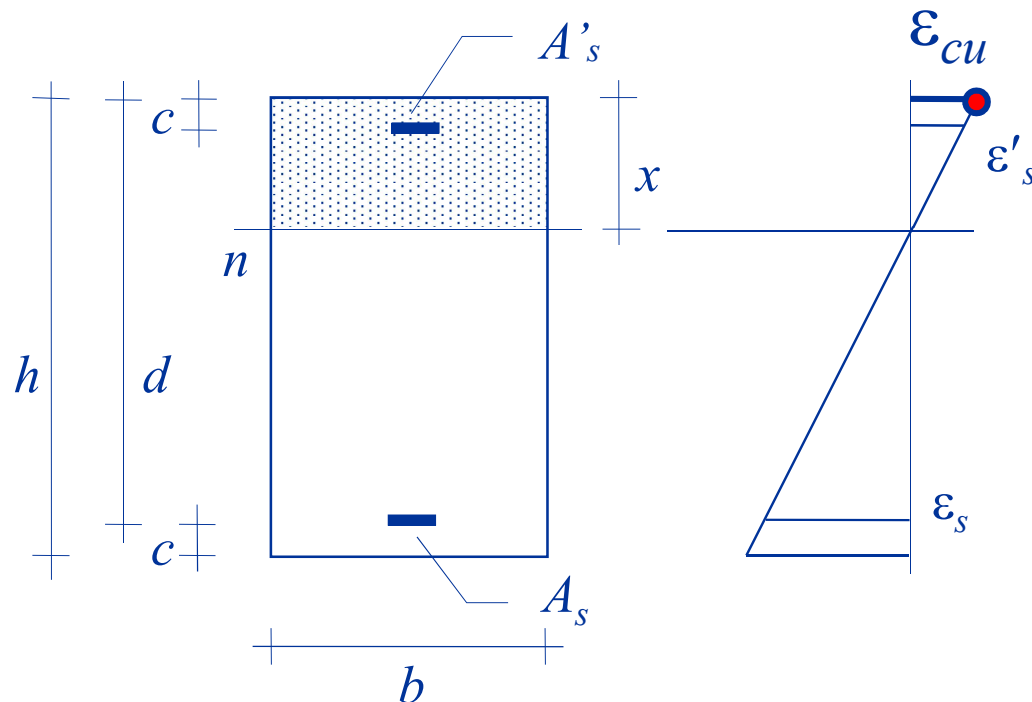
Geometria della sezione  
Armature

Incognite:

Posizione dell'asse neutro  
Momento resistente

# Momento flettente

## 3° stadio



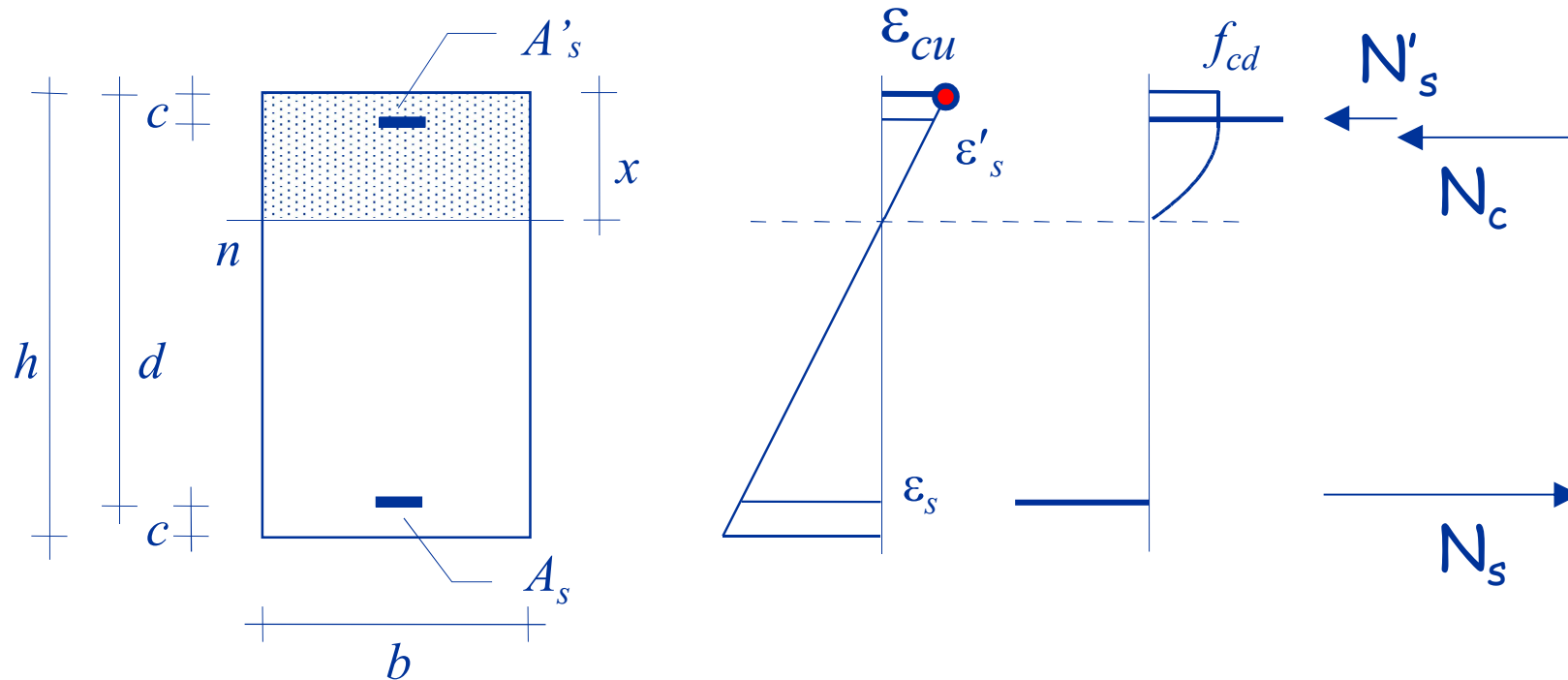
Il momento resistente corrisponde all'attingimento della deformazione ultima in almeno uno dei due materiali (calcestruzzo e acciaio)

Il legame costitutivo considerato per l'acciaio (elastico perfettamente plastico) non richiede alcun controllo della deformazione. Pertanto, il momento resistente corrisponde al raggiungimento della deformazione ultima  $\epsilon_{cu}$  del calcestruzzo compresso.



# Momento flettente

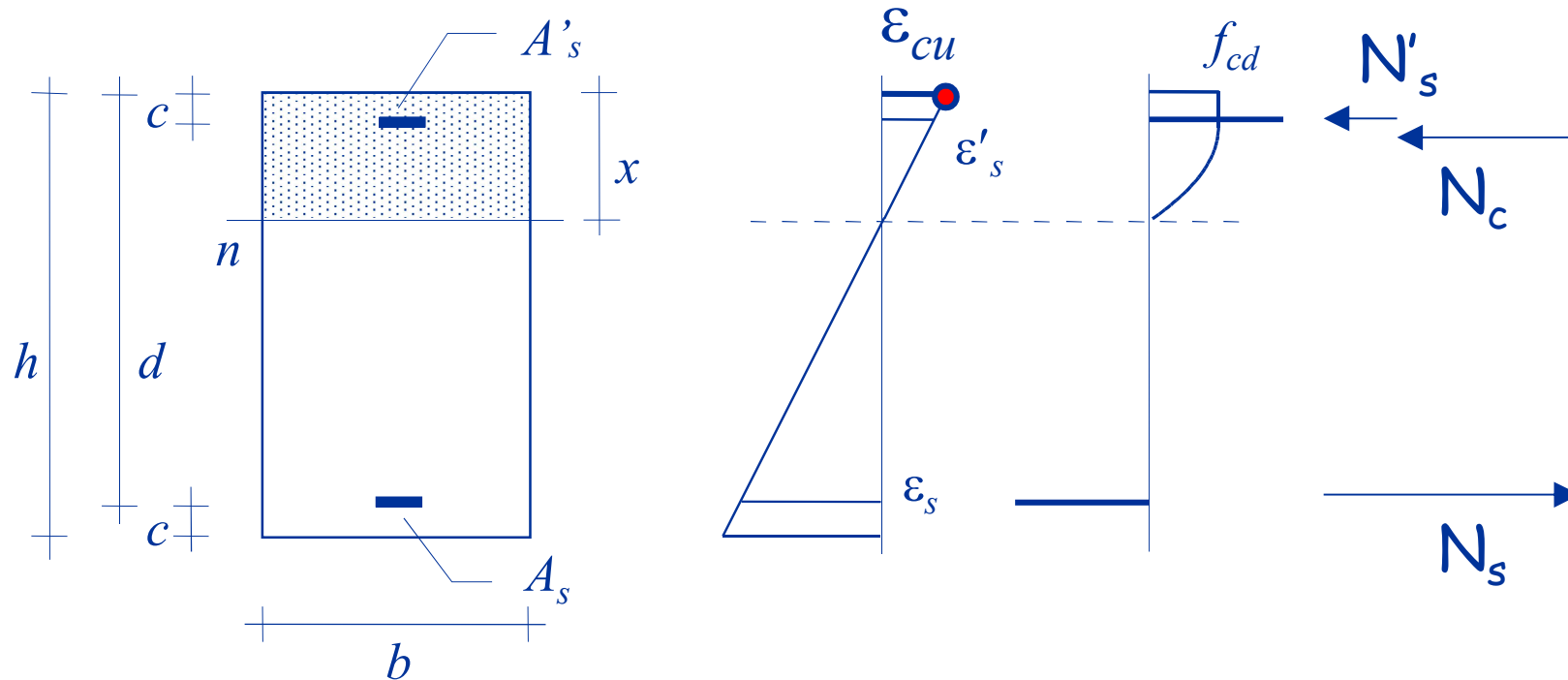
3° stadio



Per trovare l'asse neutro corrispondente al momento resistente, impongo che la deformazione sia pari ad  $\epsilon_{cu}$  in corrispondenza della fibra compressa più esterna

# Momento flettente

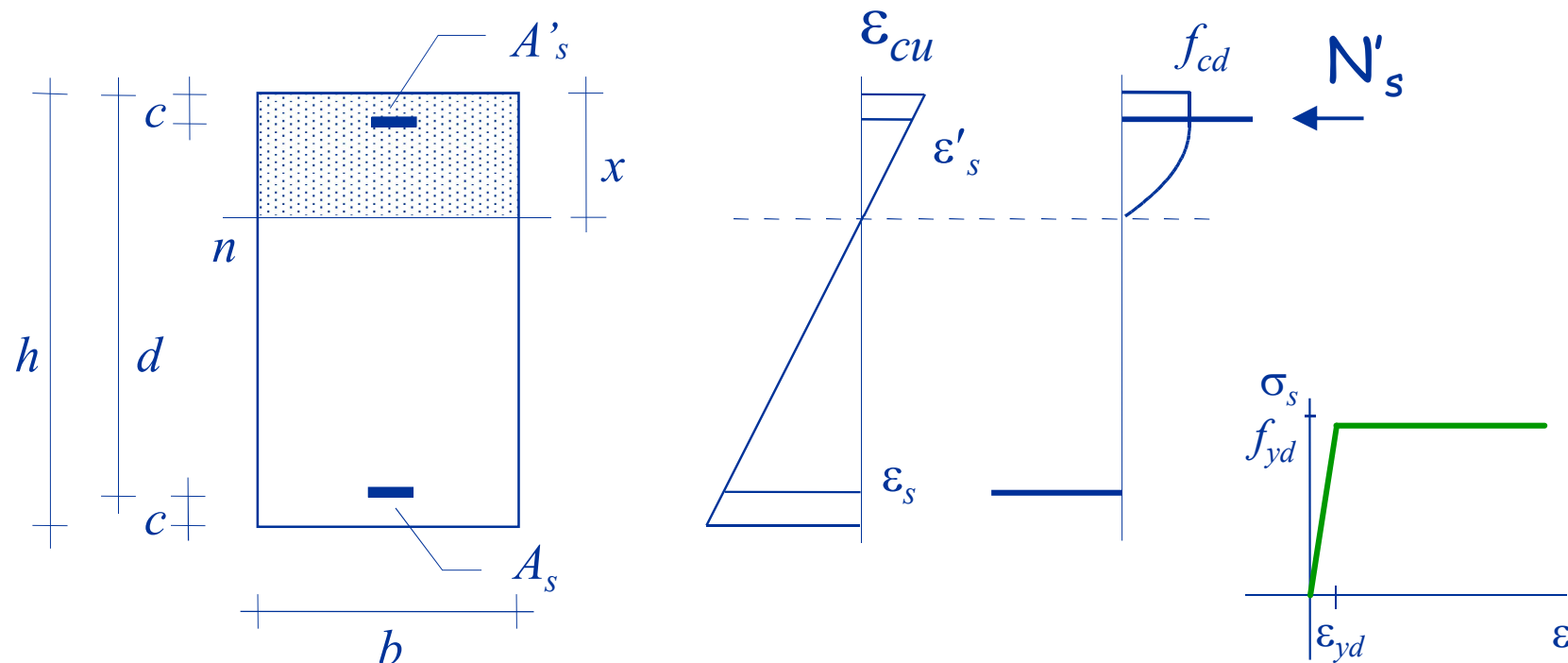
3° stadio



E impongo che ci sia  
equilibrio alla traslazione  
longitudinale:

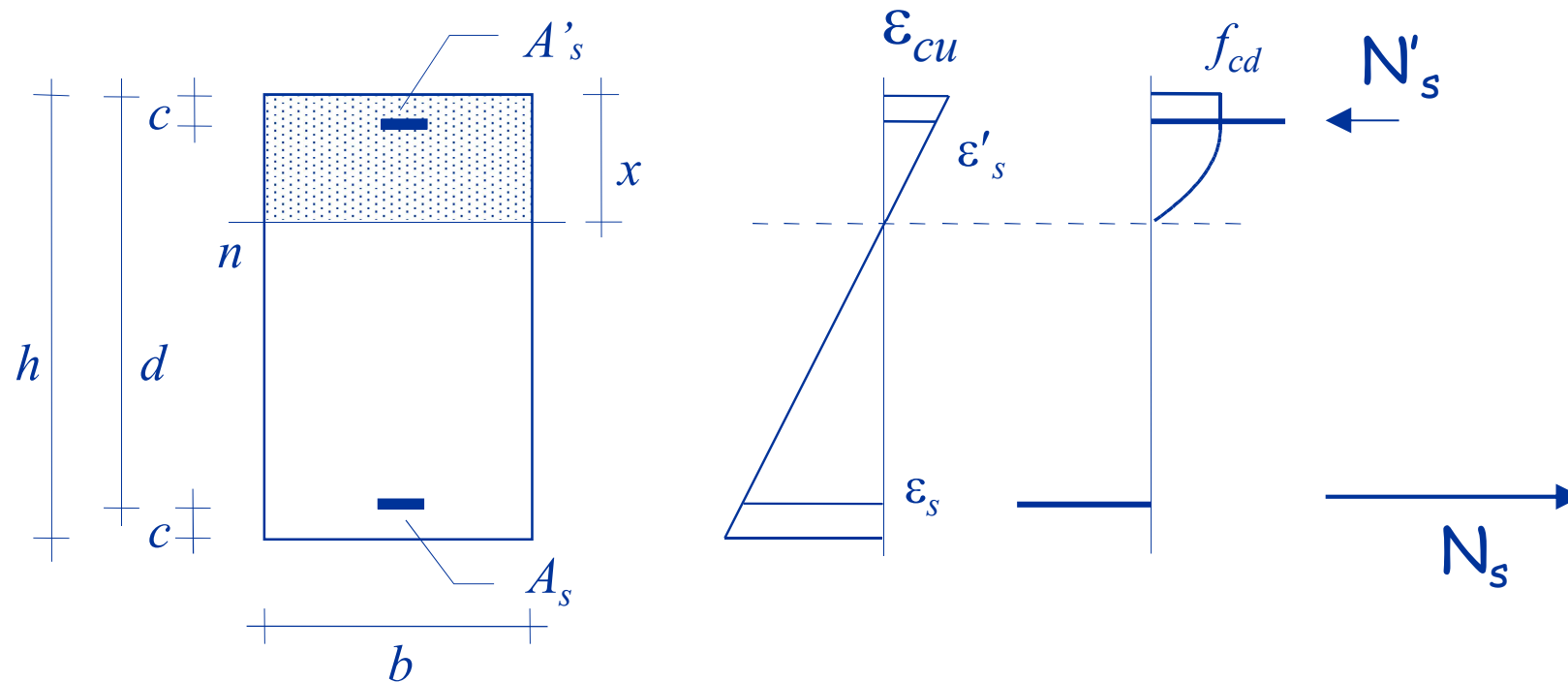
$$N_c + N'_s + N_s = 0$$

Imporre questa condizione è facile, perché:



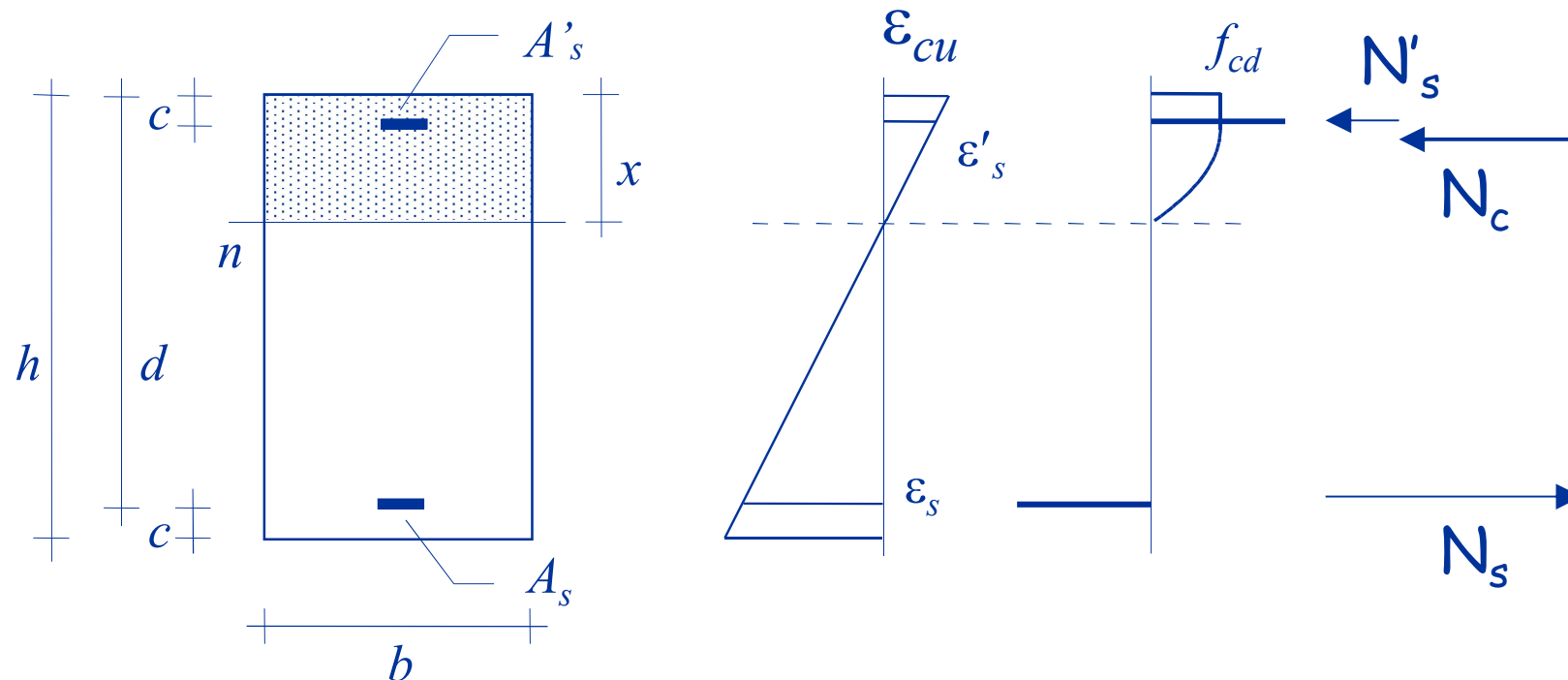
$$\epsilon'_s = \frac{x-c}{x} \epsilon_{cu} \left\{ \begin{array}{l} \text{se } \epsilon'_s > \epsilon_{yd} \quad (\text{molti casi}) \Rightarrow N'_s = -A'_s f_{yd} \\ \text{se } \epsilon'_s \leq \epsilon_{yd} \Rightarrow \sigma'_s = \frac{\epsilon'_s}{\epsilon_{yd}} f_{yd} \Rightarrow N'_s = A'_s \sigma'_s \end{array} \right.$$

Imporre questa condizione è facile, perché:



si ha sempre  $\epsilon_s > \epsilon_{yd} \Rightarrow N_s = A_s f_{yd}$

Imporre questa condizione è facile, perché:

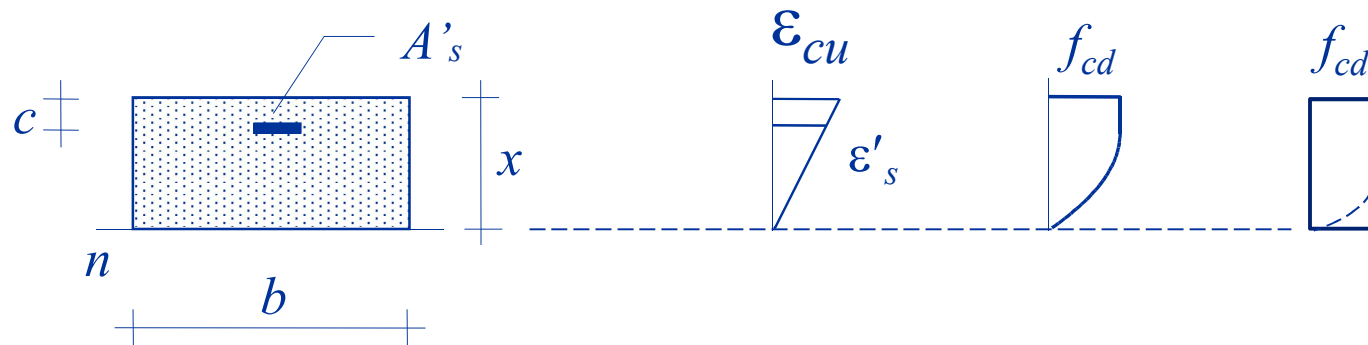


Il coefficiente  $\beta$  tiene conto del fatto che la tensione nella parte compressa non è costante

$$N_c = -\beta \ b \times f_{cd}$$

$\beta$  = fattore di riempimento

# Il coefficiente di riempimento

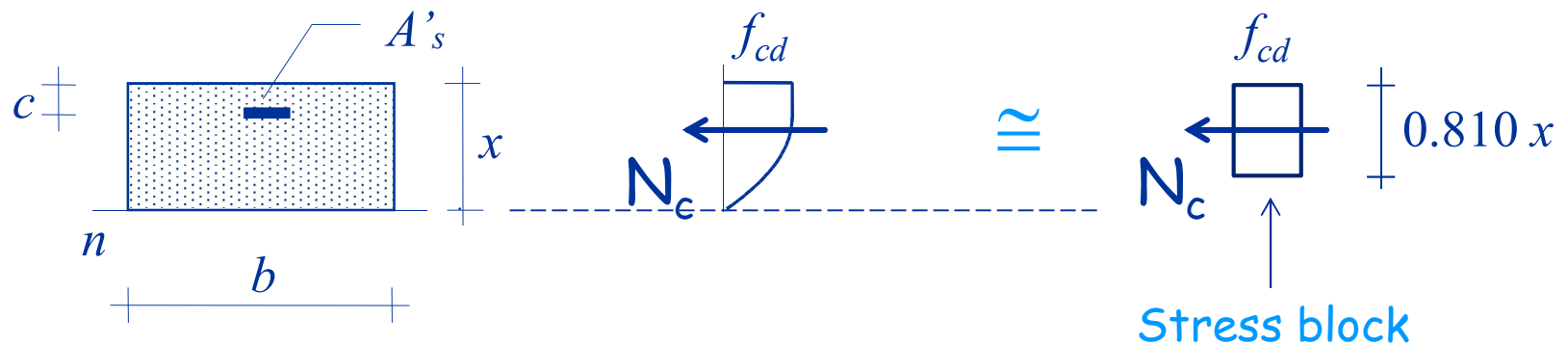


Il coefficiente  $\beta$  rappresenta il rapporto tra

- il volume delle tensioni agenti sulla parte compressa di calcestruzzo
- il volume delle tensioni caratterizzato da una tensione costante pari a  $f_{cd}$  su tutta la profondità dell'asse neutro:

$$\beta = \frac{\int_0^x \sigma b(y) dy}{f_{cd} \int_0^x b(y) dy}$$

# Il coefficiente di riempimento



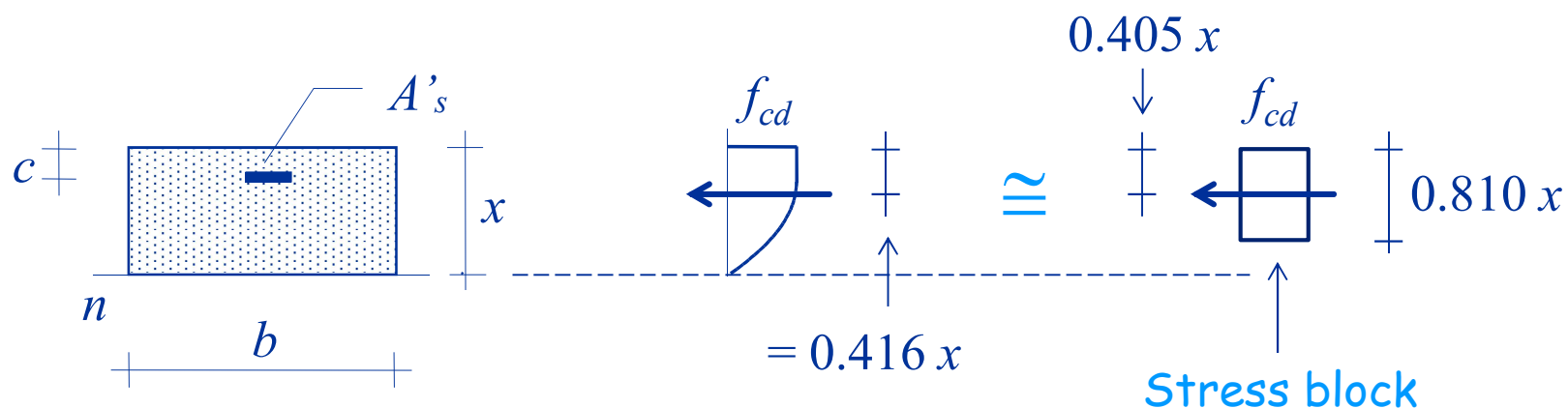
Se la larghezza della parte compressa del cls è costante

$$\beta = \frac{b \int_0^x \sigma dy}{f_{cd} b x}$$

e se la deformazione massima del cls è  $\varepsilon_{cu}$

$\beta$  vale 0.810

# Il coefficiente di profondità



Se la larghezza della parte compressa del cls è costante  
e se la deformazione massima del cls è  $\varepsilon_{cu}$  .....

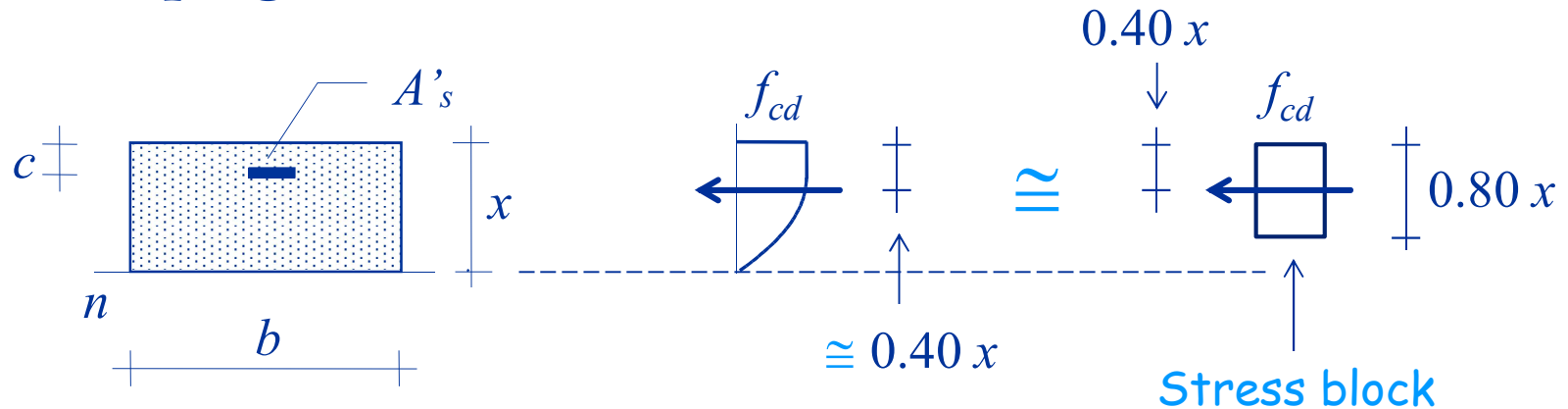
... se il coefficiente  $\beta$  assume il valore 0.810,

- La distanza della risultante delle tensioni dello stress block dal bordo superiore vale  $0.810/2$
- La posizione della risultante dello stress block è molto vicina a quella della risultante delle tensioni del diagramma parabola-rettangolo ... ovvero  $0.416 x$



# I coeff. di riempimento e profondità

Valori di progetto



Se la larghezza della parte compressa del cls è costante  
e se la deformazione massima del cls è  $\varepsilon_{cu}$  .....

... si assume

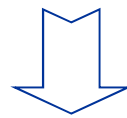
- il coefficiente di riempimento  $\beta = 0.810$  (adottati nel seguito)
- il coefficiente di profondità della risultante  $\kappa = 0.416$

... o per maggiore semplicità si può assumere

- il coefficiente di riempimento  $\beta = 0.80$
- il coefficiente di profondità della risultante  $\kappa = 0.40$

# Individuazione dell'asse neutro

$$N_c + N'_s + N_s = 0$$



$$-\beta \, b \times f_{cd} + A'_s \, \sigma'_s + A_s \, f_{yd} = 0$$

**Nota !** Il valore della tensione  $\sigma'_s$  dipende dalla deformazione dell'acciaio compresso (che non è nota a priori !).

Pertanto ...

# Individuazione dell'asse neutro

Si può prima ipotizzare che sia  $\varepsilon'_s \geq \varepsilon_{yd}$  , ovvero

$$\sigma'_s = -f_{yd}$$

In tali condizioni (o quando non vi è armatura compressa) la condizione di equilibrio diventa

$$-\beta b x f_{cd} - A'_s f_{yd} + A_s f_{yd} = 0$$

e quindi

$$x = \frac{(A_s - A'_s) f_{yd}}{\beta b f_{cd}}$$

# Individuazione dell'asse neutro

**Attenzione !** Tale soluzione è corretta se risulta verificata l'ipotesi che la deformazione  $\varepsilon'_s$  sia maggiore o uguale a  $\varepsilon_{yd}$ .

Per eseguire questa verifica,  
la deformazione  $\varepsilon'_s$  può essere calcolata mediante  
la seguente relazione di proporzionalità :

$$\varepsilon'_s = \frac{x - c}{x} \varepsilon_{cu}$$

# Individuazione dell'asse neutro

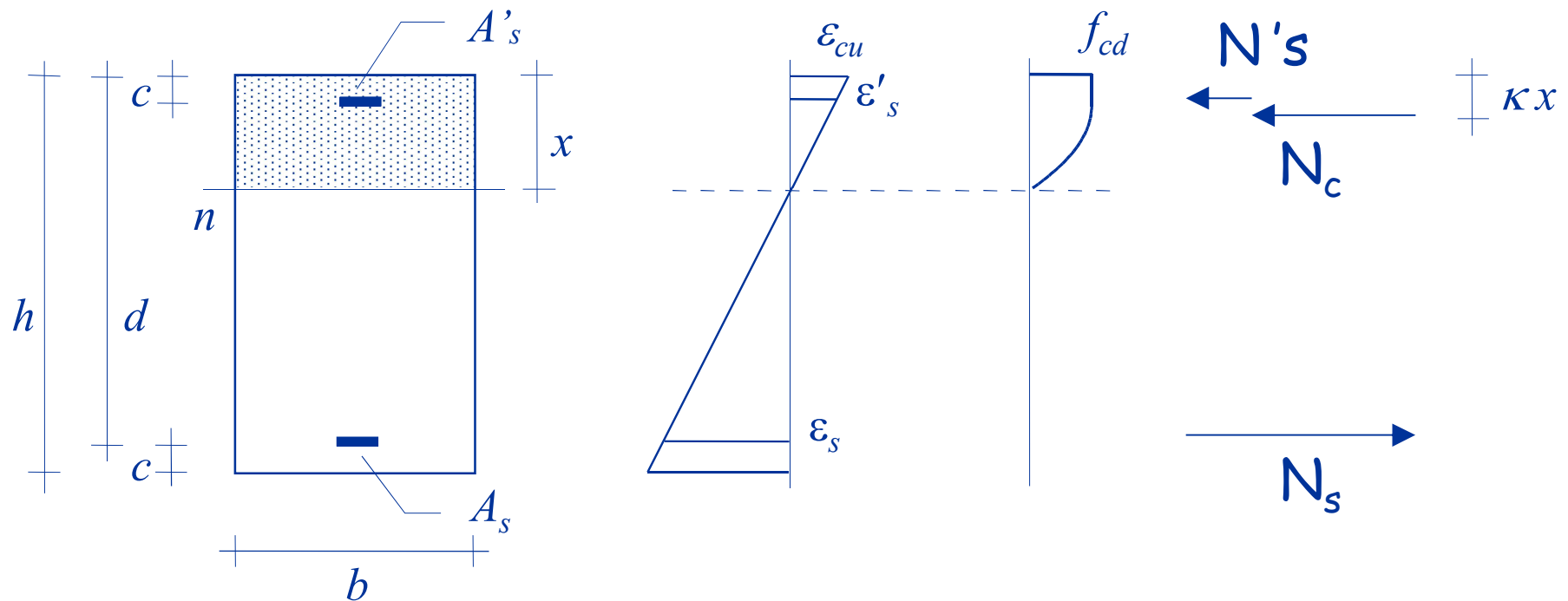
Se invece  $\varepsilon'_s < \varepsilon_{yd}$ , la condizione di equilibrio è una equazione di secondo grado :

$$-\beta b x f_{cd} - A'_s \frac{x - c}{x} \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} f_{yd} + A_s f_{yd} = 0$$

con soluzione

$$x = \left( A_s - \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} A'_s \right) \frac{f_{yd}}{2\beta b f_{cd}} + \sqrt{\left( A_s - \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} A'_s \right)^2 \left( \frac{f_{yd}}{2\beta b f_{cd}} \right)^2 + \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} \frac{A'_s c f_{yd}}{\beta b f_{cd}}}$$

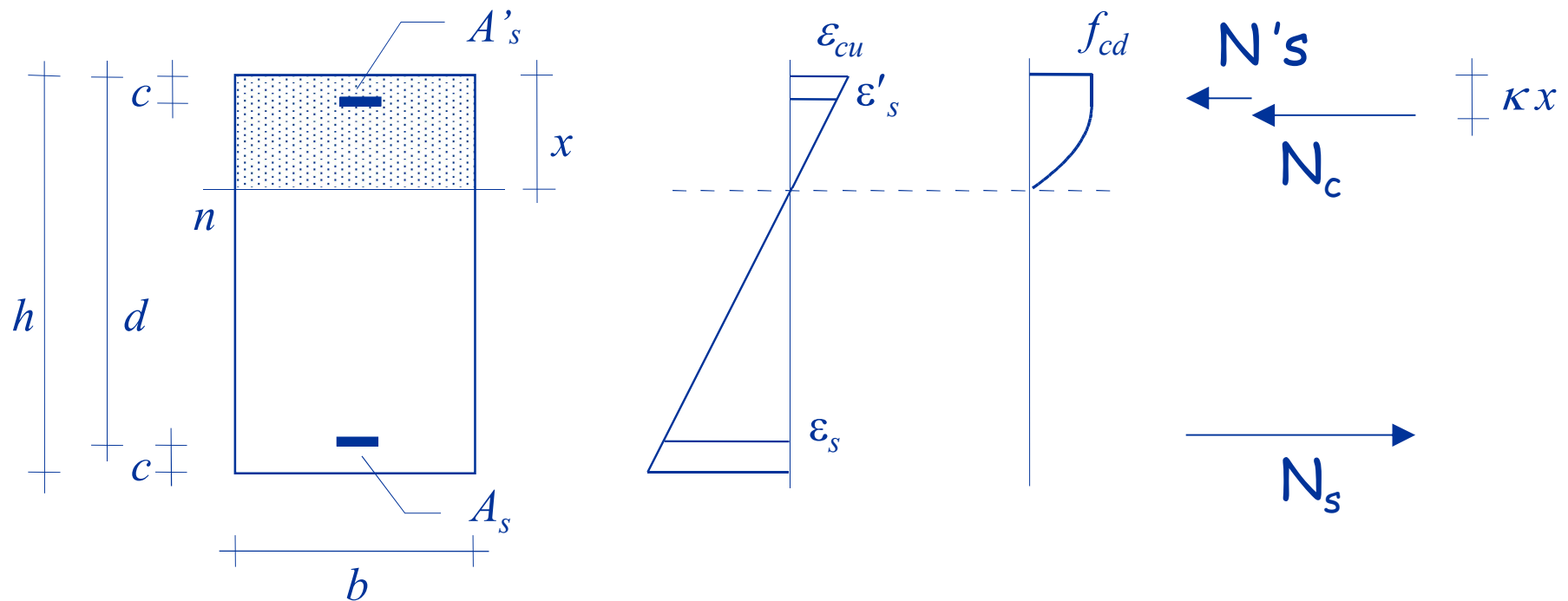
# Momento resistente



Si determina imponendo  
l'equilibrio alla rotazione  
(rispetto a un punto qualsiasi)

**Nota !** L'equilibrio può essere  
imposto rispetto ad un  
qualunque punto della sezione.  
Il risultato non cambia.

# Momento resistente



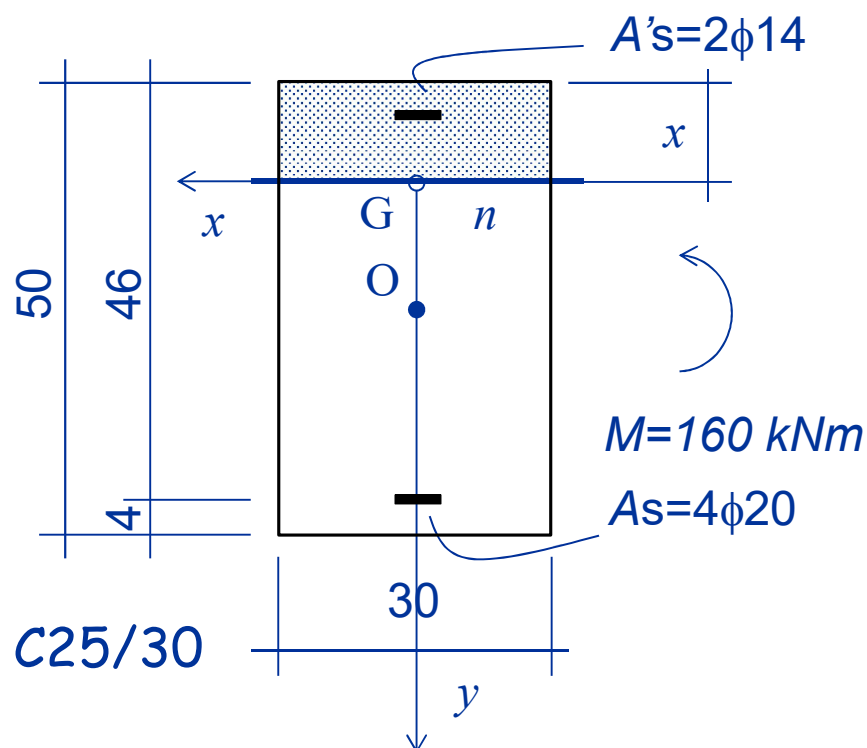
Si determina imponendo  
l'equilibrio alla rotazione  
(rispetto a un punto qualsiasi)

(rot. rispetto alla posiz. di  $N_c$ )

$$M_{Rd} = N_s (d - \kappa x) - N'_s (\kappa x - c)$$

# Esempio n. 1

## Verifica di sezione rettangolare



### Procedura:

1 - individuazione dell'asse neutro (si può ipotizzare che l'armatura compressa sia snervata, controllare se è vero e in caso contrario passare all'equazione di secondo grado)

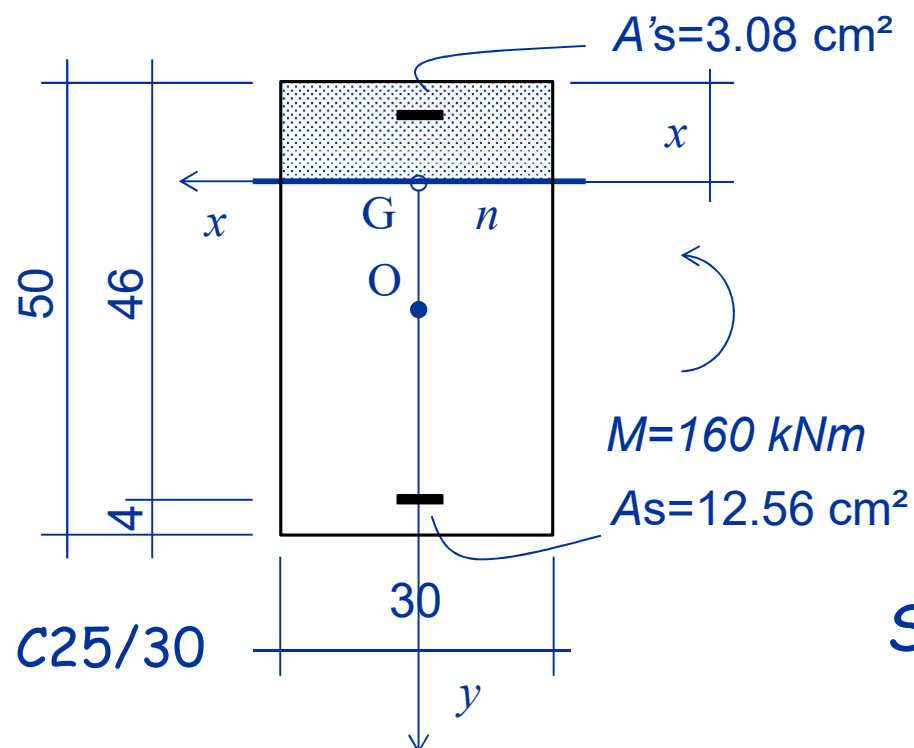
2 - determinazione del momento resistente

3 - confronto tra  $M_{Ed}$  e  $M_{Rd}$



# Esempio n. 1

## Individuazione dell'asse neutro

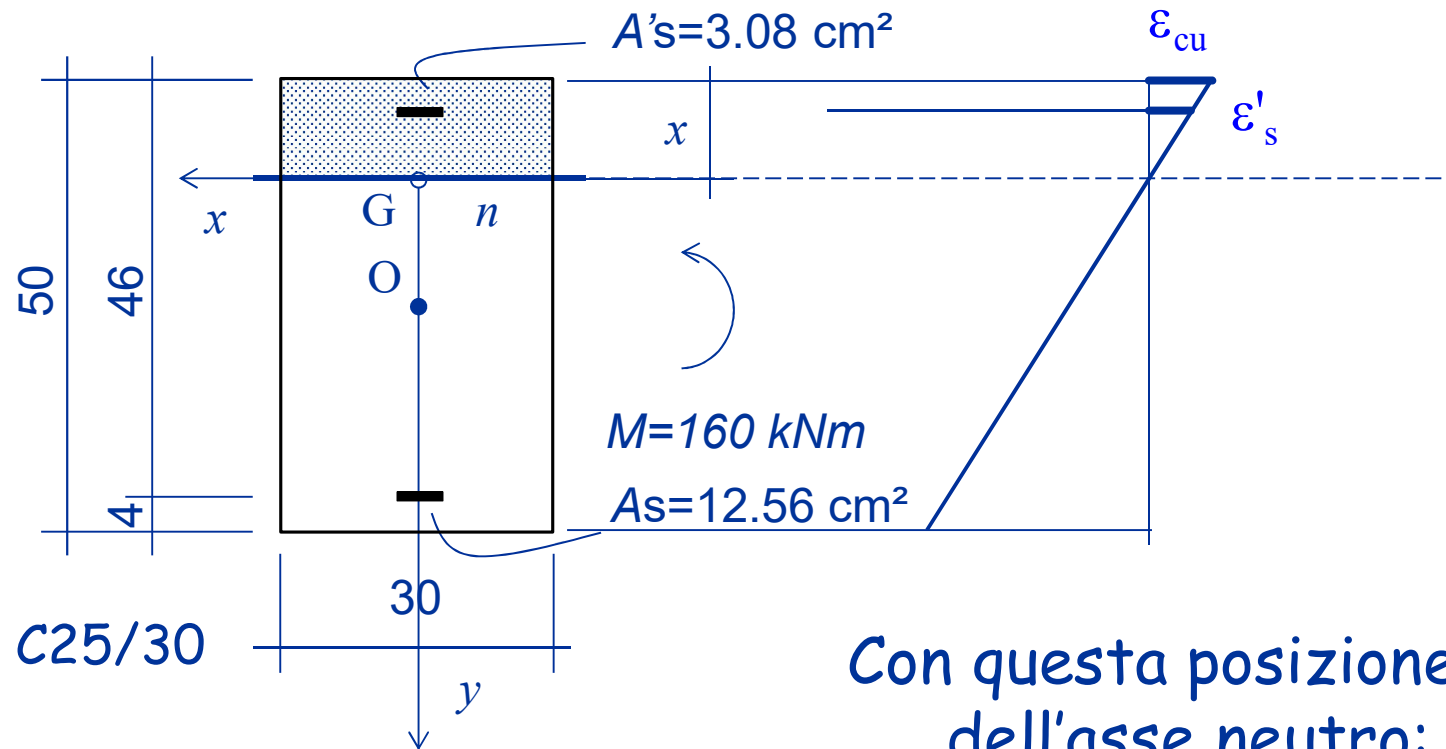


Se l'armatura compressa  
è snervata:

$$x = \frac{(A_s - A'_s) f_{yd}}{\beta b f_{cd}} = \frac{(12.56 - 3.08) \times 391}{0.810 \times 30 \times 14.2} = 10.77 \text{ cm}$$

# Esempio n. 1

## Individuazione dell'asse neutro



Con questa posizione dell'asse neutro:

$$\epsilon'_s = \frac{x - c}{x} \epsilon_{cu} = \frac{10.77 - 4}{10.77} \times 3.5 \times 10^{-3} = 2.20 \times 10^{-3}$$

Poiché  $\epsilon'_s > \epsilon_{yd} (1.96 \times 10^{-3})$  la posizione trovata è esatta

# Esempio n. 1

## Individuazione dell'asse neutro

Nota:

Ricordando che l'armatura compressa è snervata se

$$\varepsilon'_s = \frac{x - c}{x} \varepsilon_{cu} \geq \varepsilon_{yd}$$

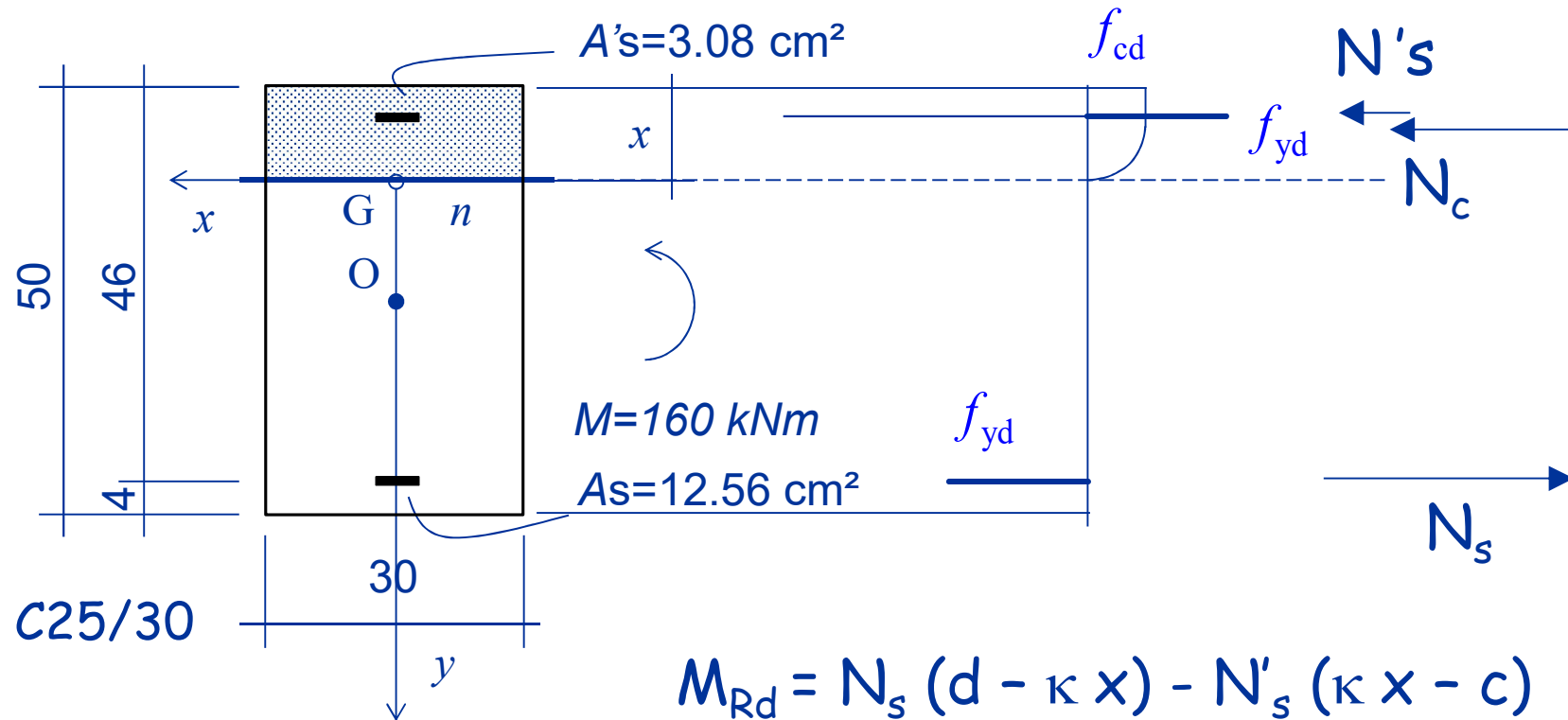
ovvero...affinché l'armatura compressa sia snervata deve essere:

$$x \geq \frac{|\varepsilon_{cu}|}{|\varepsilon_{cu}| - \varepsilon_{yd}} c = 2.27 c \quad \text{B450C}$$

Nell'esempio :  $x = 10.77 \text{ cm} \geq 2.27 c = 9.08 \text{ cm}$

# Esempio n. 1

## Calcolo del momento resistente

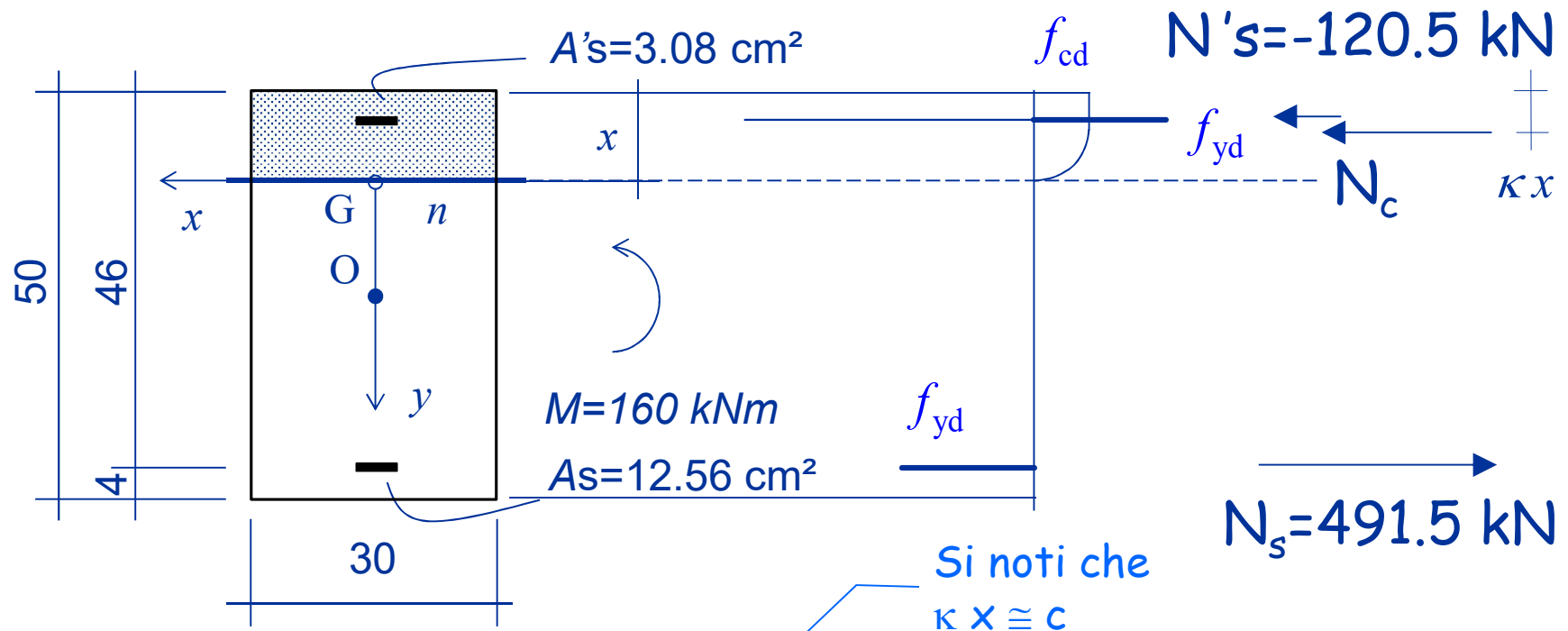


$$N_s = 12.56 \times 391.3 \times 10^{-1} = 491.5 \text{ kN}$$

$$N'_s = -3.08 \times 391.3 \times 10^{-1} = -120.5 \text{ kN}$$

# Esempio n. 1

## Calcolo del momento resistente



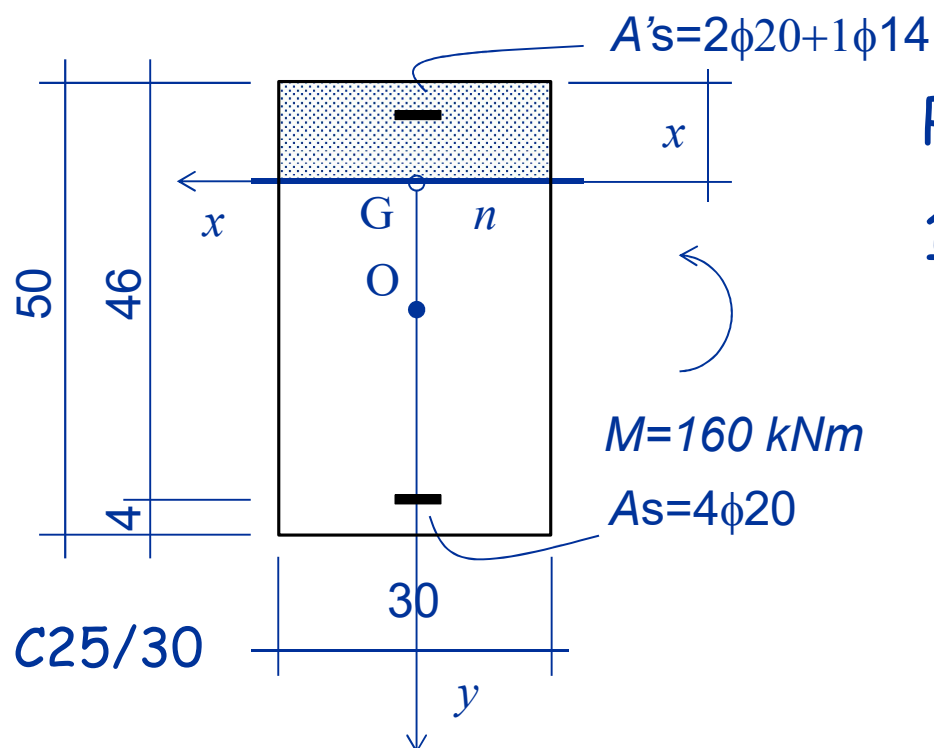
$$M_{Rd} = N_s (d - k x) - N'_s (k x - c) = 204.6 \text{ kNm}$$

$$= [491.5 \times (46 - 0.416 \times 10.77) + 120.5 \times (0.416 \times 10.77 - 4)] \times 10^{-2}$$

$M_{Ed} < M_{Rd}$  la sezione è verificata

# Esempio n. 2

## Verifica di sezione rettangolare



### Procedura:

1 - individuazione dell'asse neutro (si può ipotizzare che l'armatura compressa sia snervata, controllare se è vero e in caso contrario passare all'equazione di secondo grado)

2 - determinazione del momento resistente

3 - confronto tra  $M_{Ed}$  e  $M_{Rd}$

# Esempio n. 2

## Individuazione dell'asse neutro

Se l'armatura compressa fosse snervata:

$$x = \frac{(A_s - A'_s) f_{yd}}{\beta b f_{cd}} = \frac{(12.56 - 7.82) \times 391.3}{0.810 \times 30 \times 14.17} = 5.39 \text{ cm}$$

Ma poiché la profondità dell'asse neutro è inferiore al limite minimo (2.27 c):

$$x = 5.39 \text{ cm} < 2.27 \text{ c} = 9.1 \text{ cm}$$

L'armatura compressa non è snervata e ...

# Esempio n. 2

## Individuazione dell'asse neutro

... bisogna calcolare la profondità dell'asse neutro  
risolvendo l'equazione di secondo grado:

$$x = \left( A_s - \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} A'_s \right) \frac{f_{yd}}{2 \beta b f_{cd}} + \sqrt{\left( A_s - \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} A'_s \right)^2 \left( \frac{f_{yd}}{2 \beta b f_{cd}} \right)^2 + \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} \frac{A'_s c f_{yd}}{\beta b f_{cd}}} = 7.20 \text{ cm}$$

che è inferiore al limite minimo (2.27 c):

$$x = 7.20 \text{ cm} < 2.27 \text{ c} = 9.1 \text{ cm}$$



# Esempio n. 2

## Individuazione dell'asse neutro

... bisogna calcolare la profondità dell'asse neutro  
risolvendo l'equazione di secondo grado:

$$x = \left( A_s - \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} A'_s \right) \frac{f_{yd}}{2 \beta b f_{cd}} + \sqrt{\left( A_s - \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} A'_s \right)^2 \left( \frac{f_{yd}}{2 \beta b f_{cd}} \right)^2 + \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} \frac{A'_s c f_{yd}}{\beta b f_{cd}}} = 7.20 \text{ cm}$$

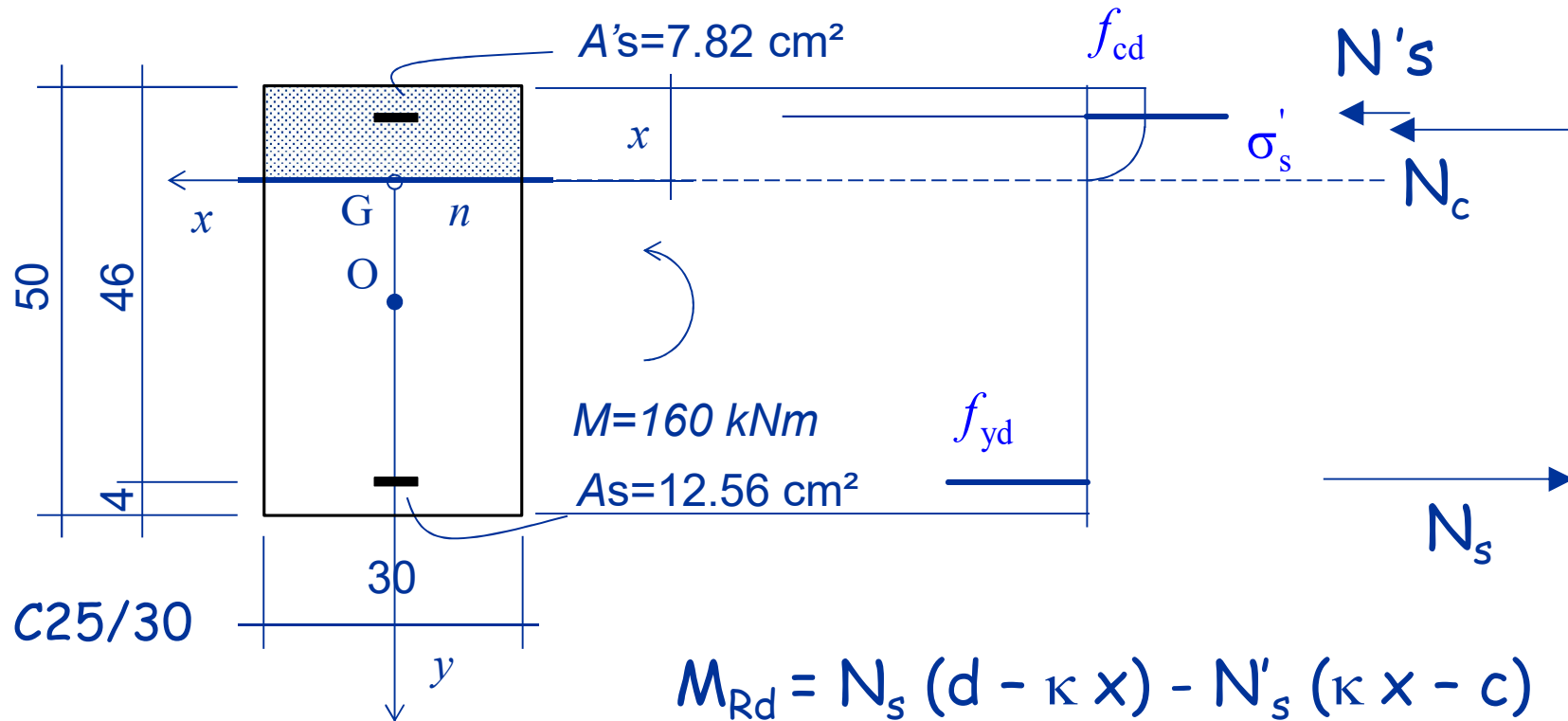
La tensione nell'armatura compressa vale:

$$\sigma'_s = - \frac{x - c}{x} \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} f_{yd} = -311.5 \text{ MPa}$$

$\varepsilon'_s$

# Esempio n. 2

## Calcolo del momento resistente

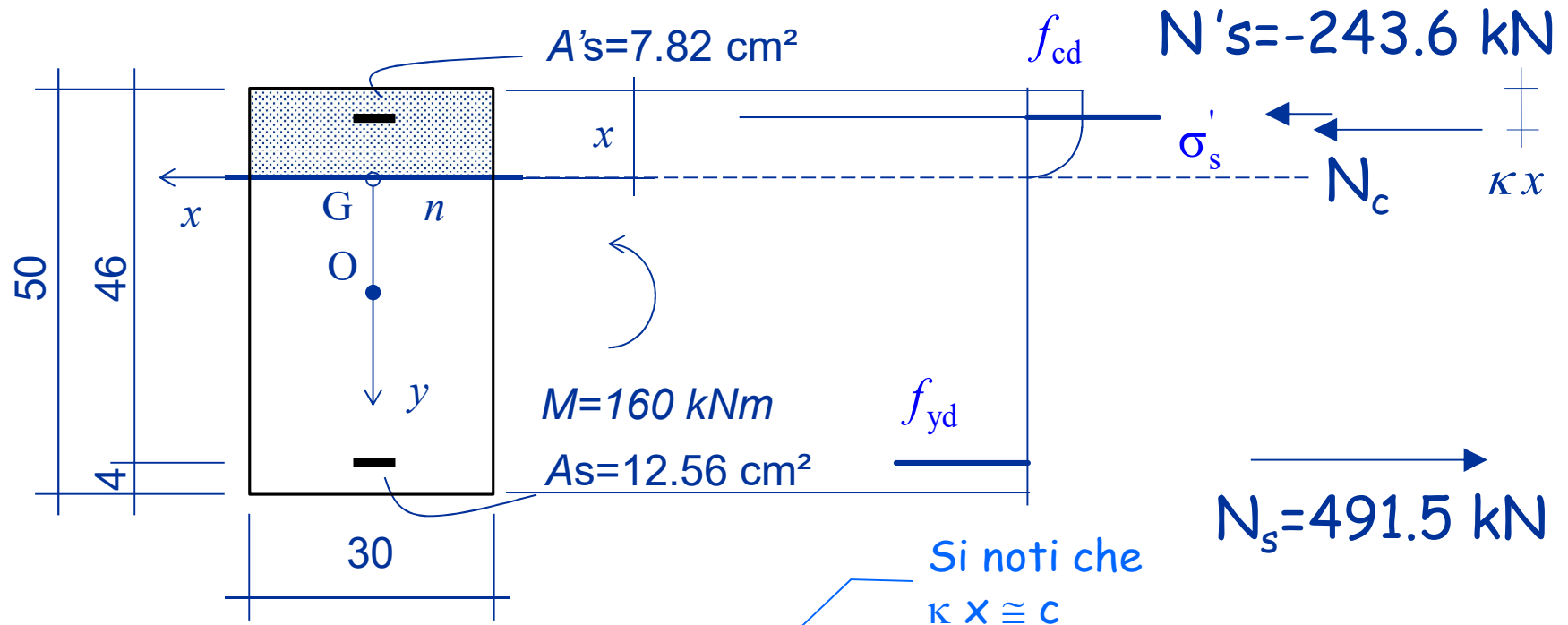


$$N_s = 12.56 \times 391.3 \times 10^{-1} = 491.5 \text{ kN}$$

$$N'_s = -7.82 \times 311.5 \times 10^{-1} = -243.6 \text{ kN}$$

# Esempio n. 2

## Calcolo del momento resistente



$$M_{Rd} = N_s (d - kx) - N'_s (kx - c) = 208.9 \text{ kNm}$$

$$= [491.5 \times (46 - 0.416 \times 7.20) + 243.6 \times (0.416 \times 7.20 - 4)] \times 10^{-2}$$

$M_{Ed} < M_{Rd}$  la sezione è verificata

# Progetto di sezioni inflesse

# Progetto

## Duttilità della sezione

Un parametro fondamentale nel valutare il modo in cui la sezione giunge al collasso è la duttilità.

Duttilità = rapporto tra rotazione ultima e rotazione corrispondente allo snervamento dell'armatura tesa

Una sezione che presenti una rottura duttile dà chiari segnali di preavviso (elevata fessurazione, notevole incremento della deformazione) che possono mettere in allarme e consentire interventi prima del crollo

In zona sismica la capacità di deformarsi plasticamente permette di dissipare con cicli isteretici

# Duttilità della sezione

## Esempio

Sezione 30x50

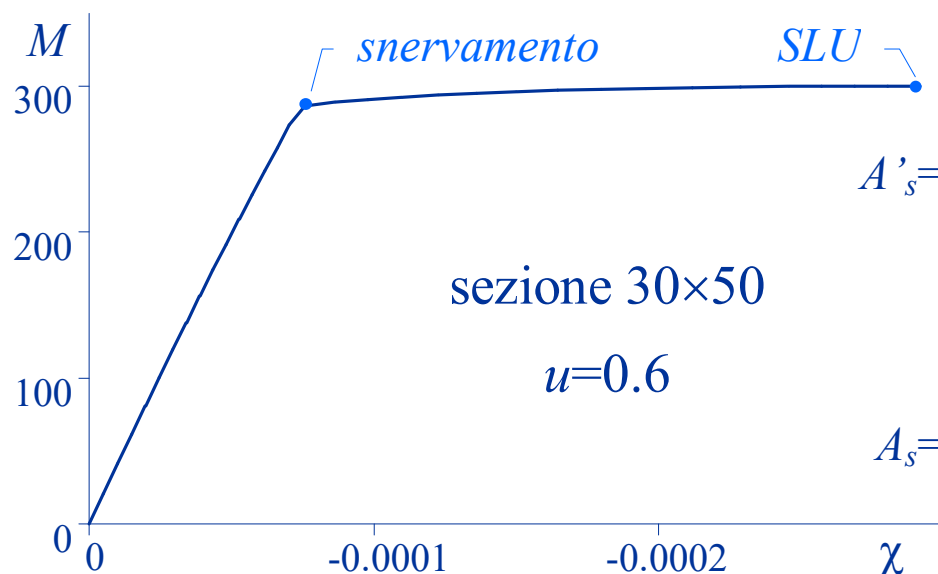
$$u = A'_s / A_s = 0.6$$

$$M_{Rd} = 300 \text{ kNm}$$

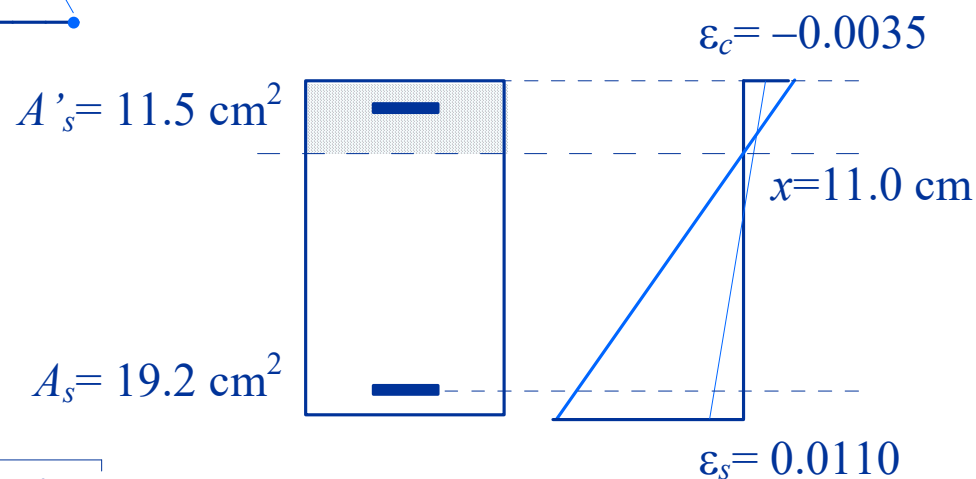
$$\varepsilon_{su} > 10 \times 10^{-3}$$

$$x_u = 11.0 \text{ cm}$$

$$\chi_u = -0.000286$$



Buona duttilità



# Duttilità della sezione

## Esempio

Sezione 30x50

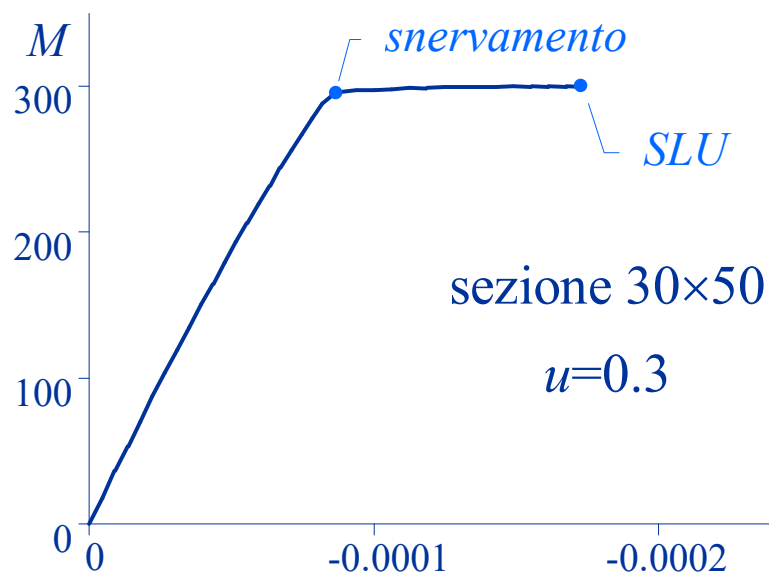
$$u = A'_s / A_s = 0.3$$

$$M_{Rd} = 300 \text{ kNm}$$

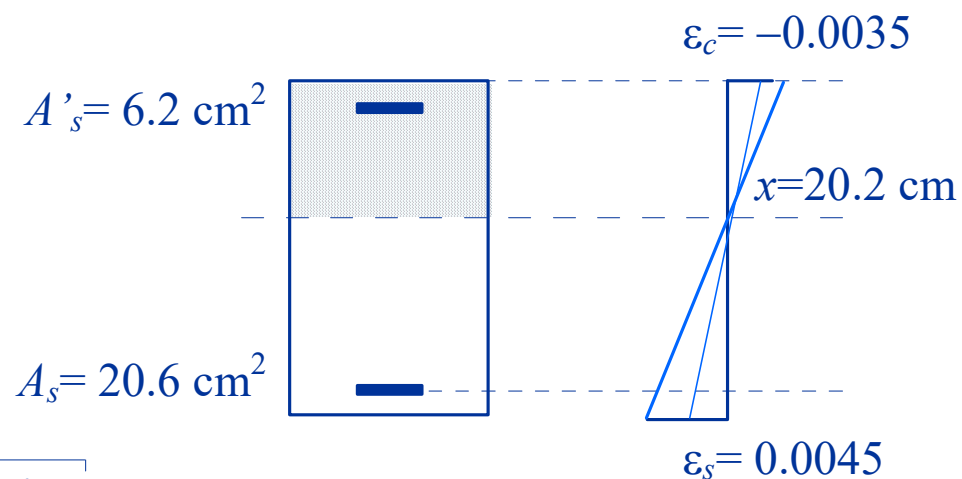
$$\varepsilon_{su} = 4.5 \times 10^{-3}$$

$$x_u = 20.2 \text{ cm}$$

$$\chi_u = -0.000184$$



## Duttilità discreta



# Duttilità della sezione

## Esempio

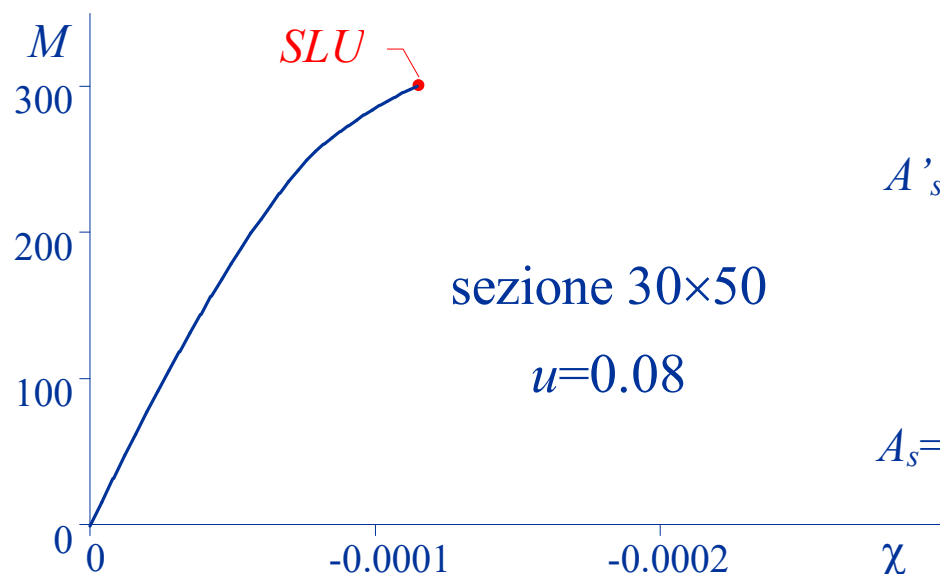
Sezione 30x50

$$u = A'_s / A_s = 0.08 \quad M_{Rd} = 300 \text{ kNm}$$

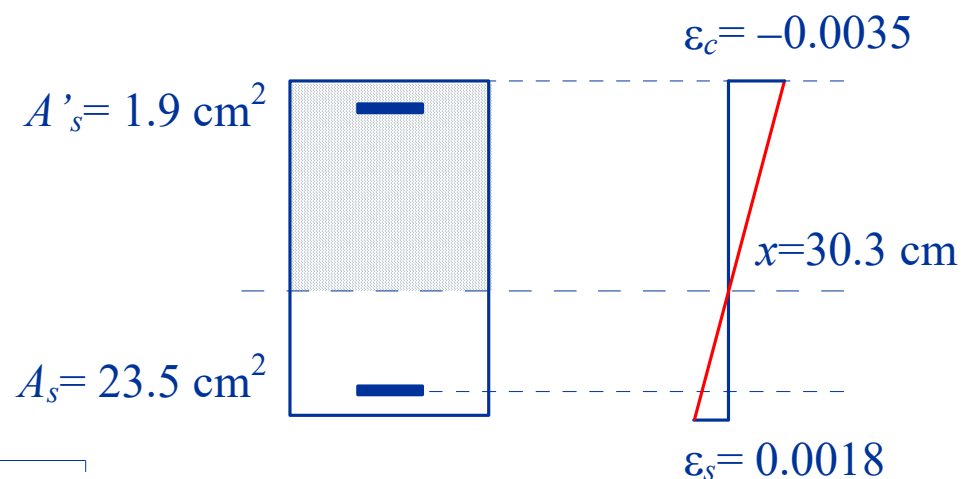
$$\varepsilon_{su} = 1.8 \times 10^{-3}$$

$$x_u = 30.3 \text{ cm}$$

$$\chi_u = -0.000116$$



Bassa duttilità





# Duttilità della sezione

- Le sezioni con minore armatura tesa sono più duttili
- La duttilità cresce con la deformazione  $\epsilon_s$  dell'armatura tesa allo SLU

Possiamo classificare le sezioni inflesse:

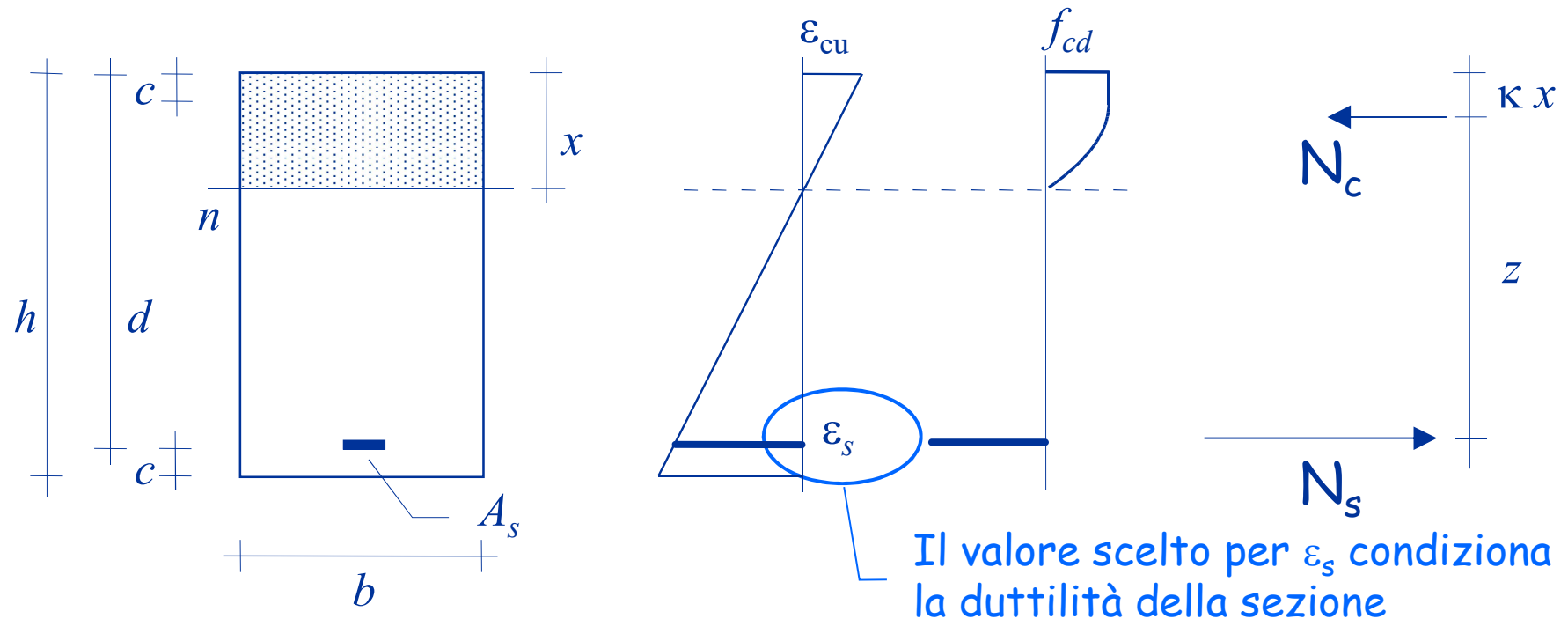
- ad alta duttilità                      se       $\epsilon_s \geq 0.010$
- a media duttilità                    se       $\epsilon_{yd} < \epsilon_s < 0.010$
- a bassa duttilità                    se       $\epsilon_s \leq \epsilon_{yd}$

Per ottenere sezioni duttili in c.a.

le progetteremo sempre assumendo  $\epsilon_s \geq 0.010$

# Progetto (caso semplice armatura)

Stato limite ultimo

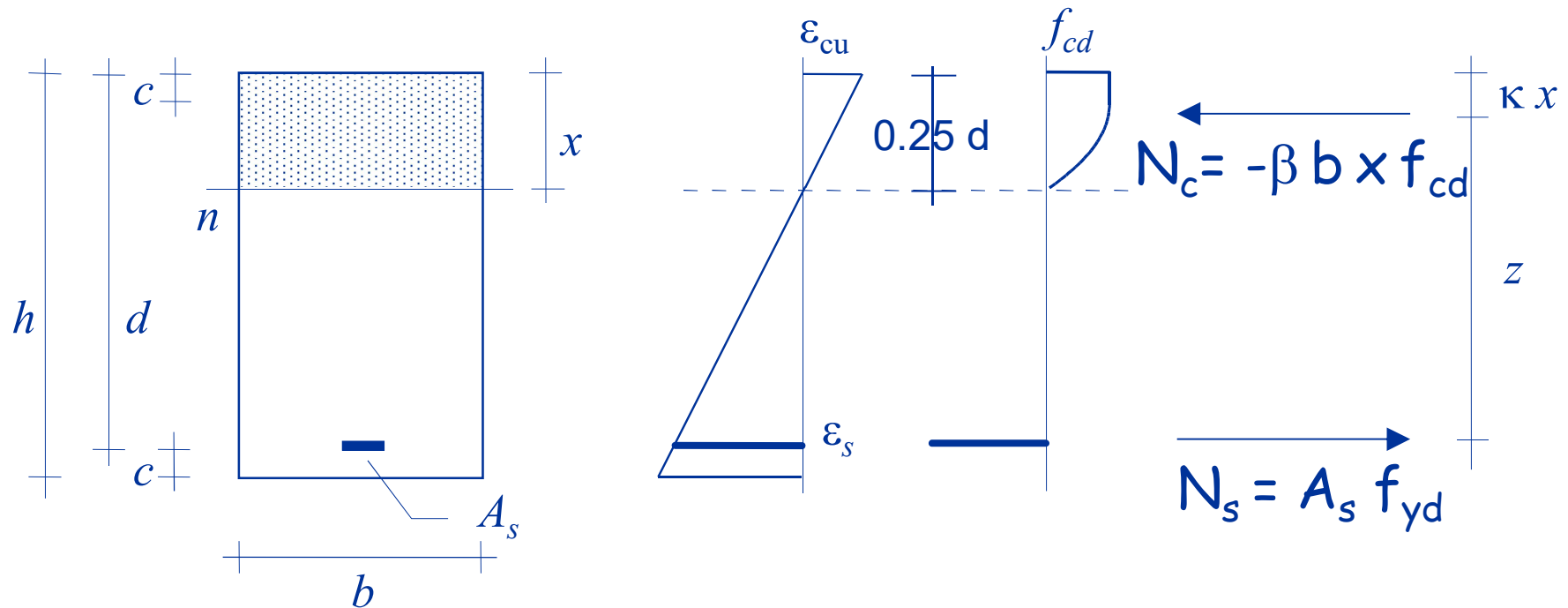


1 - Si assegna il diagramma di deformazioni che si vuole avere nella sezione

Buona duttilità con  $\epsilon_{su} \cong 10 \times 10^{-3}$  ... oppure  $x=0.25 d$

# Progetto (caso semplice armatura)

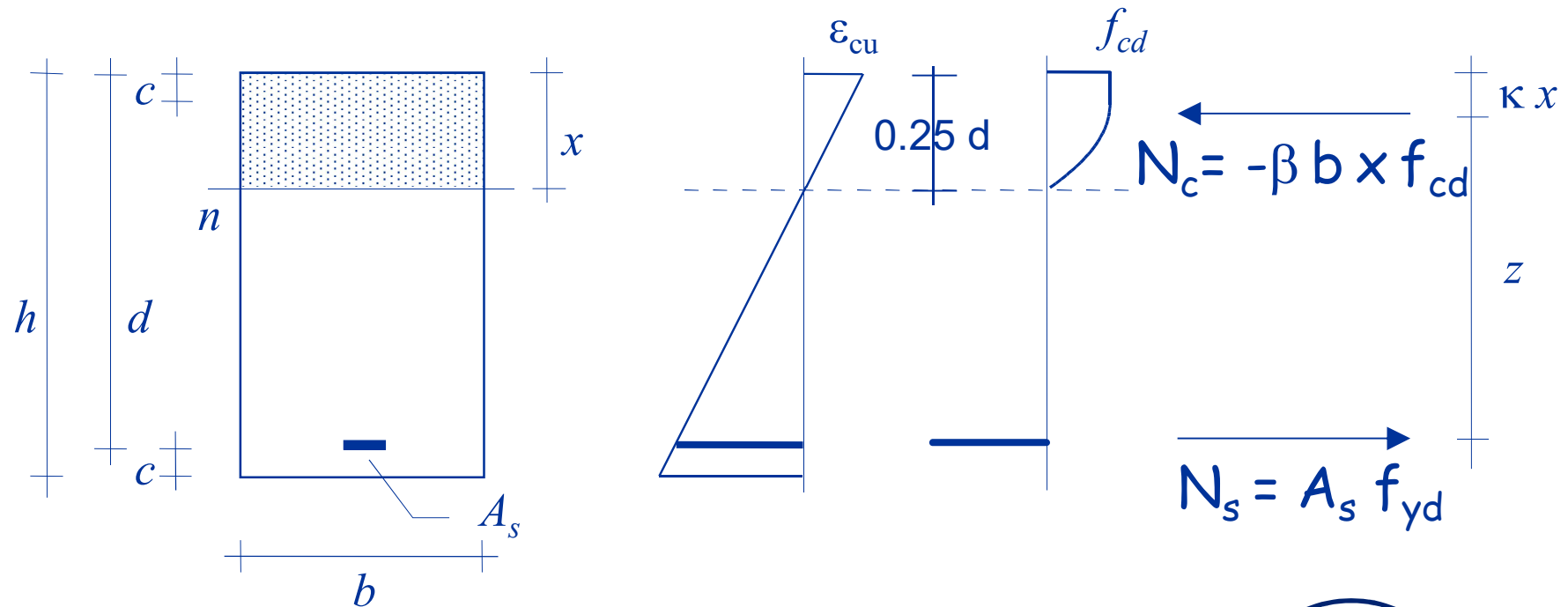
Stato limite ultimo



2 - Dall'equilibrio alla rotazione rispetto alla risultante delle trazioni

# Progetto (caso semplice armatura)

Stato limite ultimo



$$z = d - \kappa x = d(1 - \kappa \xi)$$

e

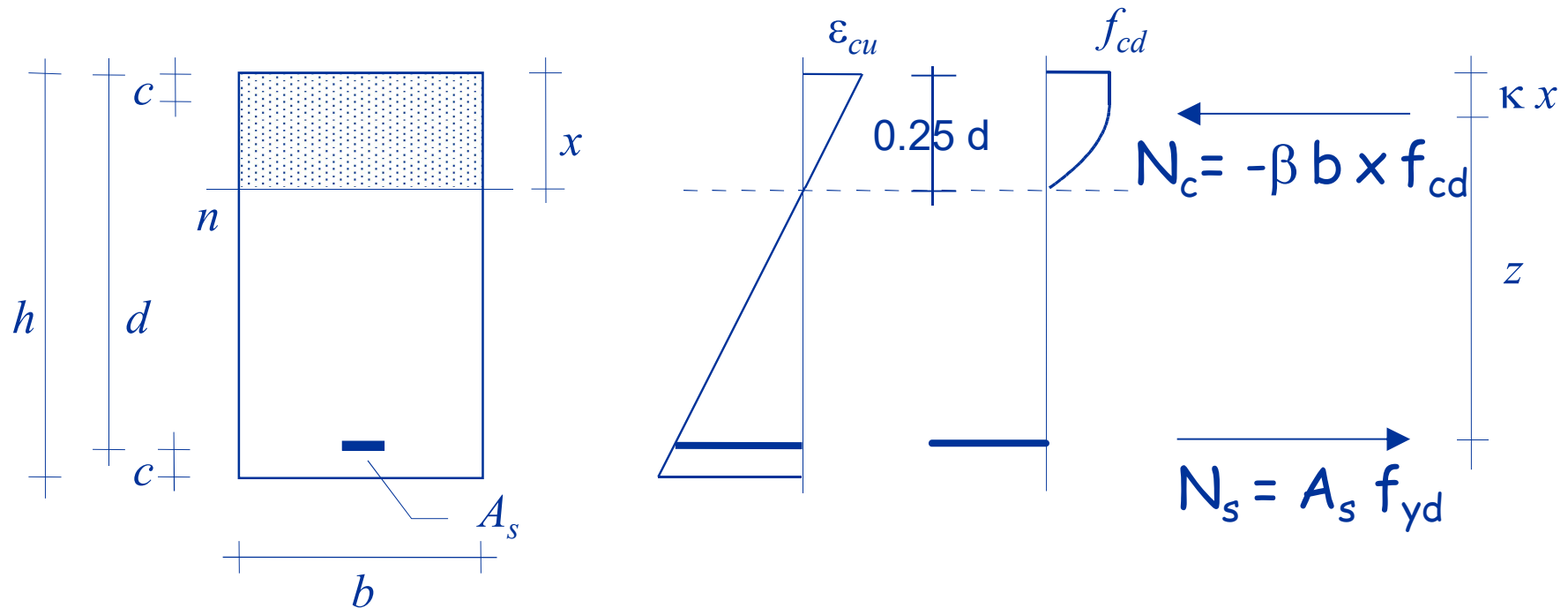
$$M_{Rd} = -N_c z = b d^2 \beta \xi (1 - \kappa \xi) f_{cd}$$

Nota

$$\xi = x/d$$

# Progetto (caso semplice armatura)

Stato limite ultimo



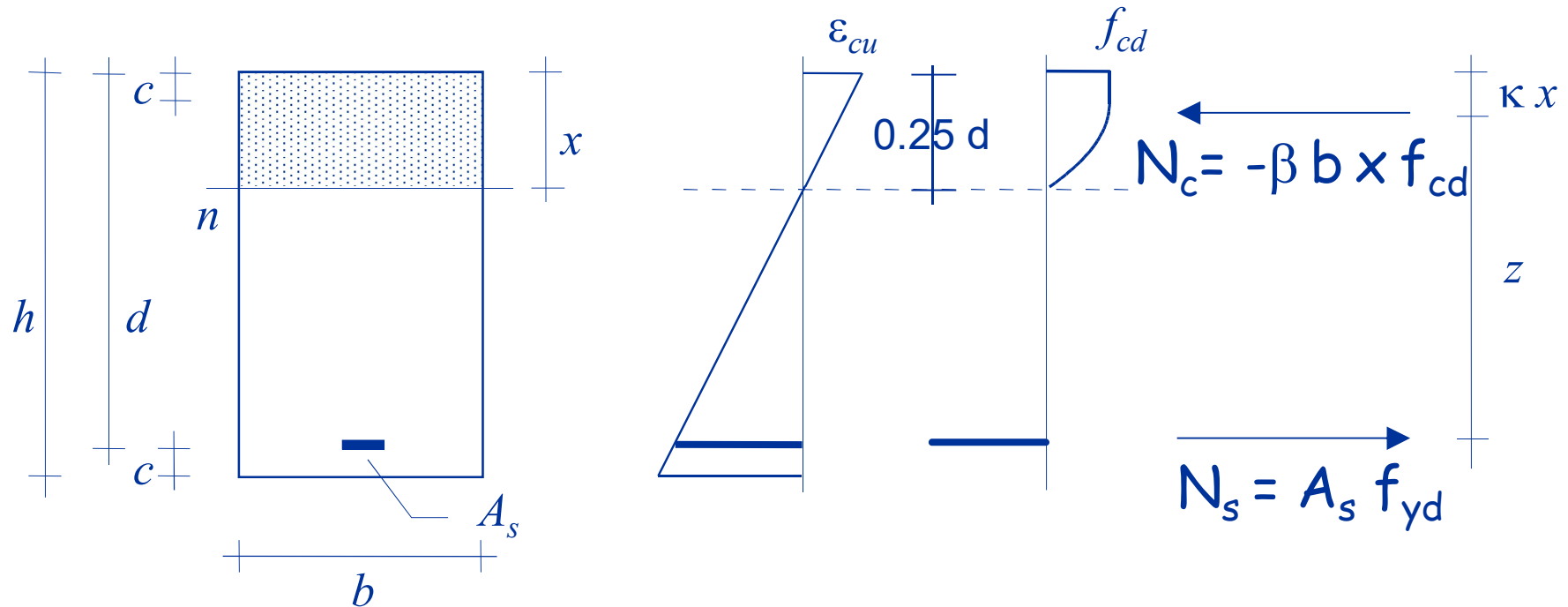
Se si pone:

$$r = \frac{1}{\sqrt{\beta \xi (1 - \kappa \xi) f_{cd}}}$$

La precedente  
relazione diventa:

$$d = r \sqrt{\frac{M}{b}}$$

## Stato limite ultimo

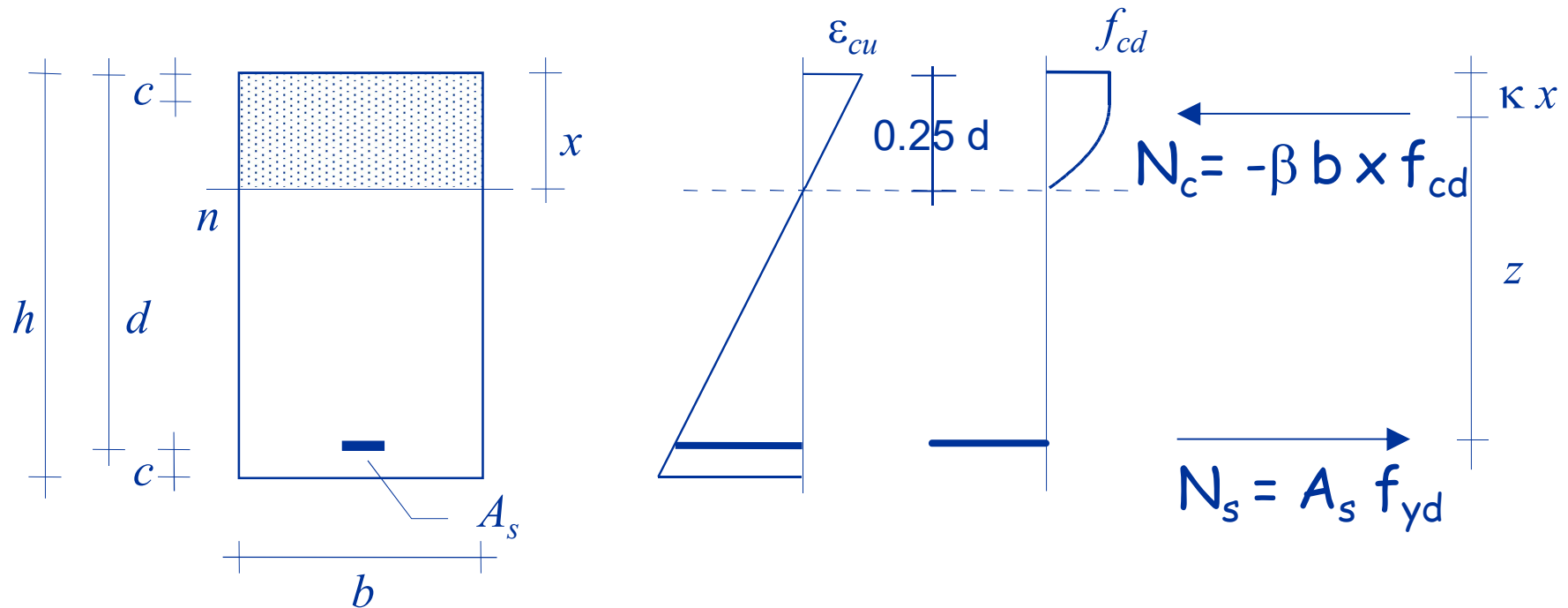


3 - Dall'equil. alla rotazione  
rispetto alla risultante  
di compressione si ha

$$M_{Rd} = N_s z = A_s d (1 - \kappa \xi) f_{yd}$$

# Progetto (caso semplice armatura)

Stato limite ultimo



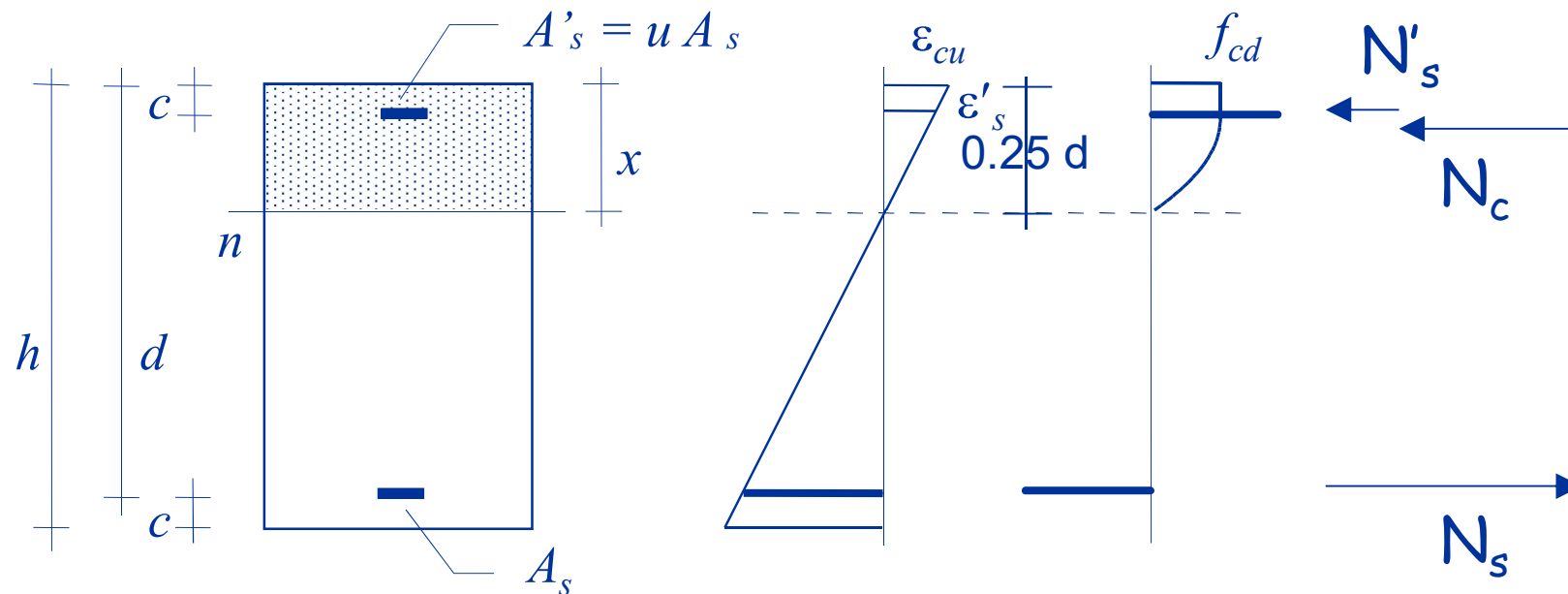
$$(1 - \kappa \xi) \cong 0.9$$

pertanto...

$$A_s = \frac{M}{0.9 d f_{yd}}$$

# Progetto (caso doppia armatura)

Stato limite ultimo



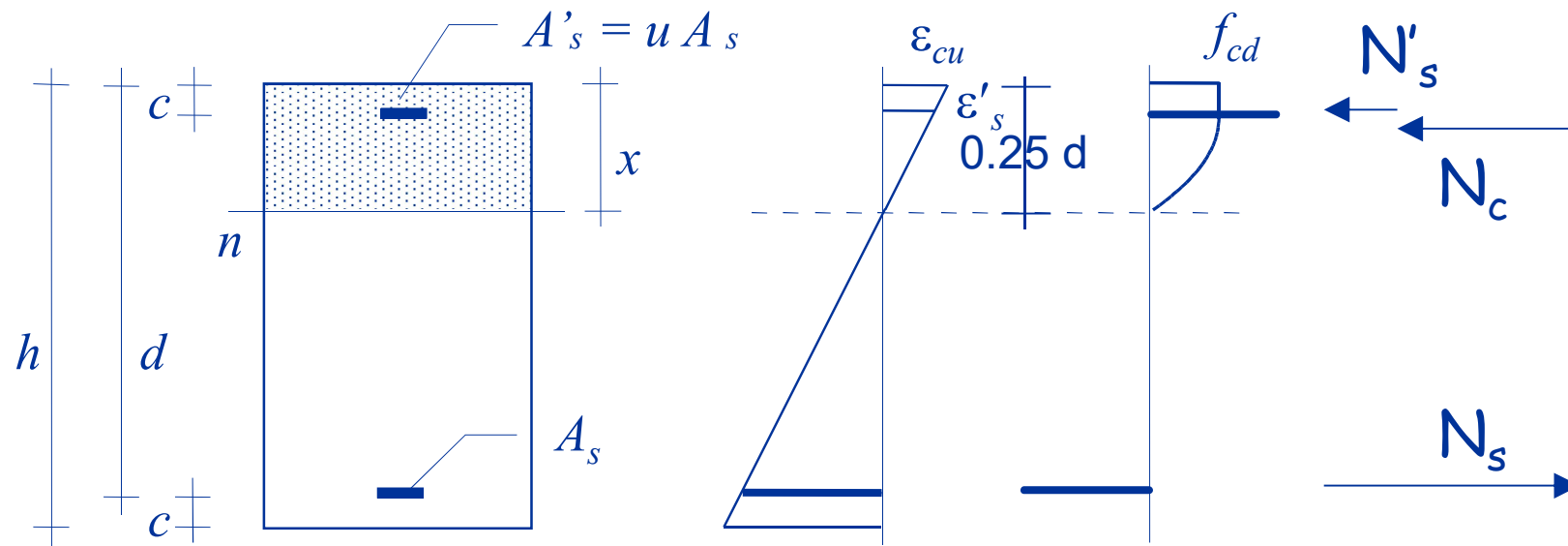
Se poniamo  $u = \frac{A'_s}{A_s}$  e  $s' = \frac{-\sigma'_s}{f_{yd}}$

$$N'_s = A'_s \sigma'_s = u A_s (-s' f_{yd}) = -s' u N_s$$



# Progetto (caso doppia armatura)

Stato limite ultimo



se l'arm. compressa è snervata

$$s' = \frac{-\sigma'_s}{f_{yd}} = 1$$

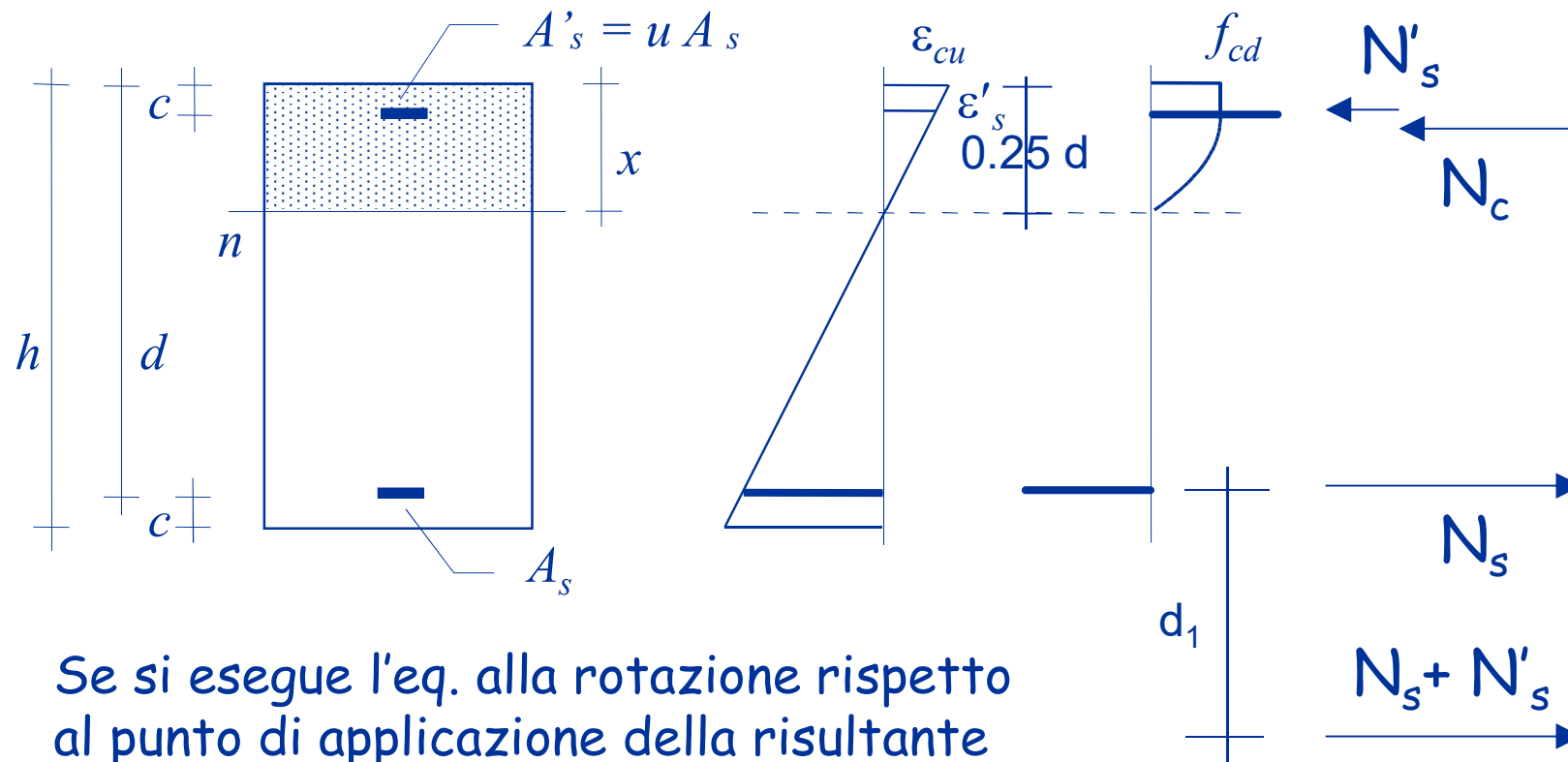
... in caso contrario

$$s' = \frac{-\sigma'_s}{f_{yd}} = \frac{x - c}{x} \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{yd}} = \frac{\xi - \gamma}{\xi} \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{yd}}$$

L'armatura compressa (acciaio B450C) è snervata se  $\gamma \leq 0.11$

# Progetto (caso doppia armatura)

Stato limite ultimo



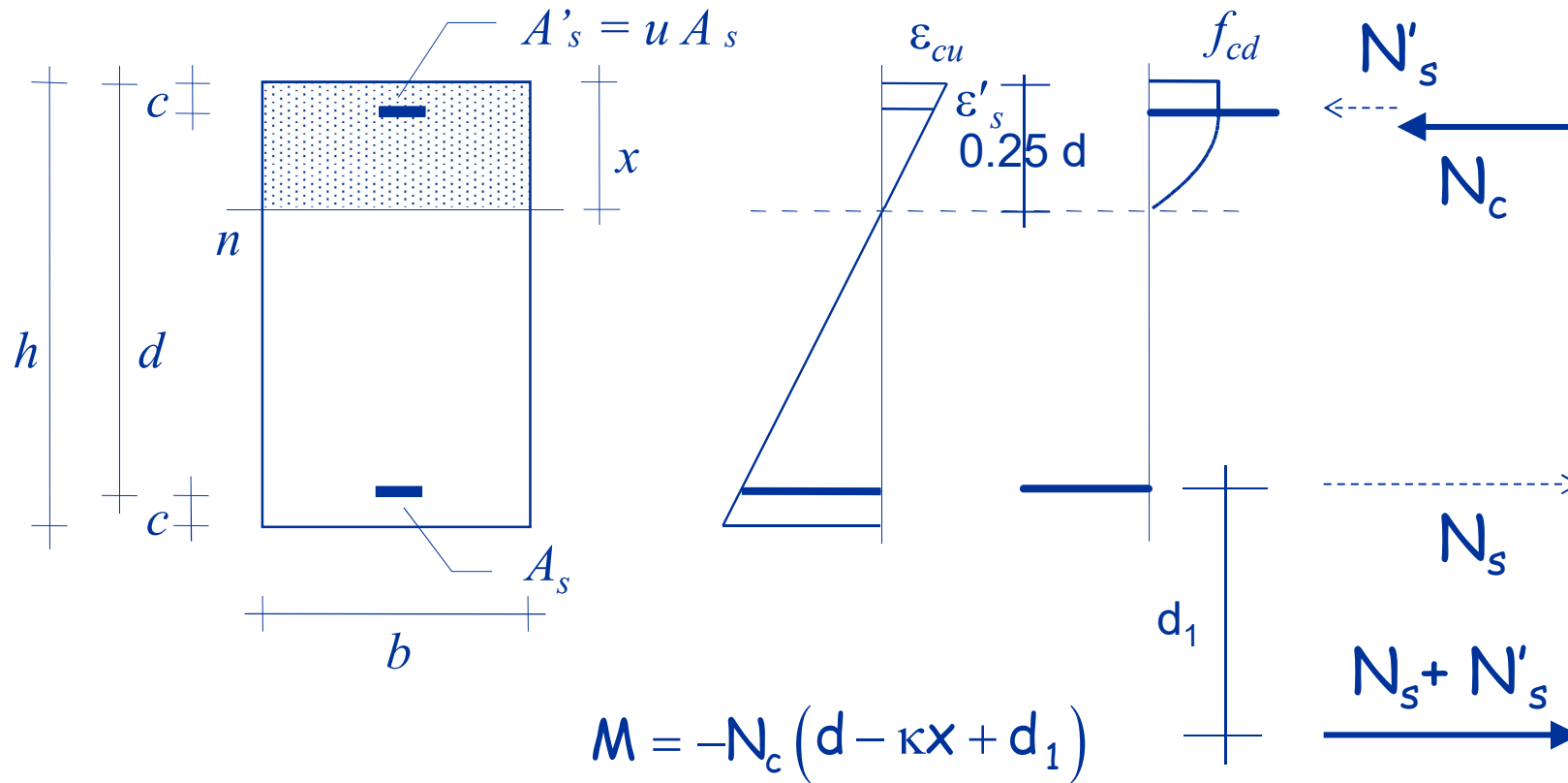
Se si esegue l'eq. alla rotazione rispetto al punto di applicazione della risultante delle tensioni delle armature, si ha:

$$-N'_s (d - c + d_1) = N_s d_1 \quad \text{ovvero}$$

$$d_1 = \frac{s'u(1-\gamma)}{1-s'u} d$$

# Progetto (caso doppia armatura)

Stato limite ultimo

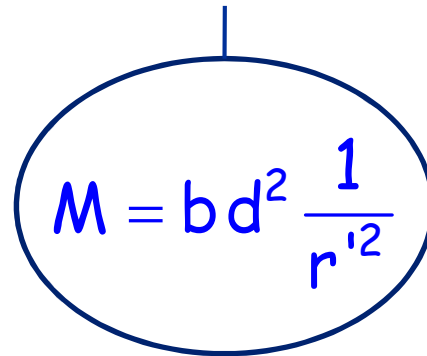


$$M = b d^2 \beta \xi (1 - \kappa \xi) f_{cd} \left[ 1 + \frac{s' u}{1 - s' u} \frac{1 - \gamma}{1 - \kappa \xi} \right]$$

# Progetto (caso doppia armatura)

Stato limite ultimo

$$M = b d^2 \beta \xi (1 - \kappa \xi) f_{cd} \left[ 1 + \frac{s' u}{1 - s' u} \frac{1 - \gamma}{1 - \kappa \xi} \right]$$


$$M = b d^2 \frac{1}{r'^2}$$

dove

$$\frac{1}{r^2} = \beta \xi (1 - \kappa \xi) f_{cd}$$

$$\frac{1}{k^2} = \left[ 1 + \frac{s' u}{1 - s' u} \frac{1 - \gamma}{1 - \kappa \xi} \right]$$

# Che relazione c'è tra $r$ ed $r'$ ?

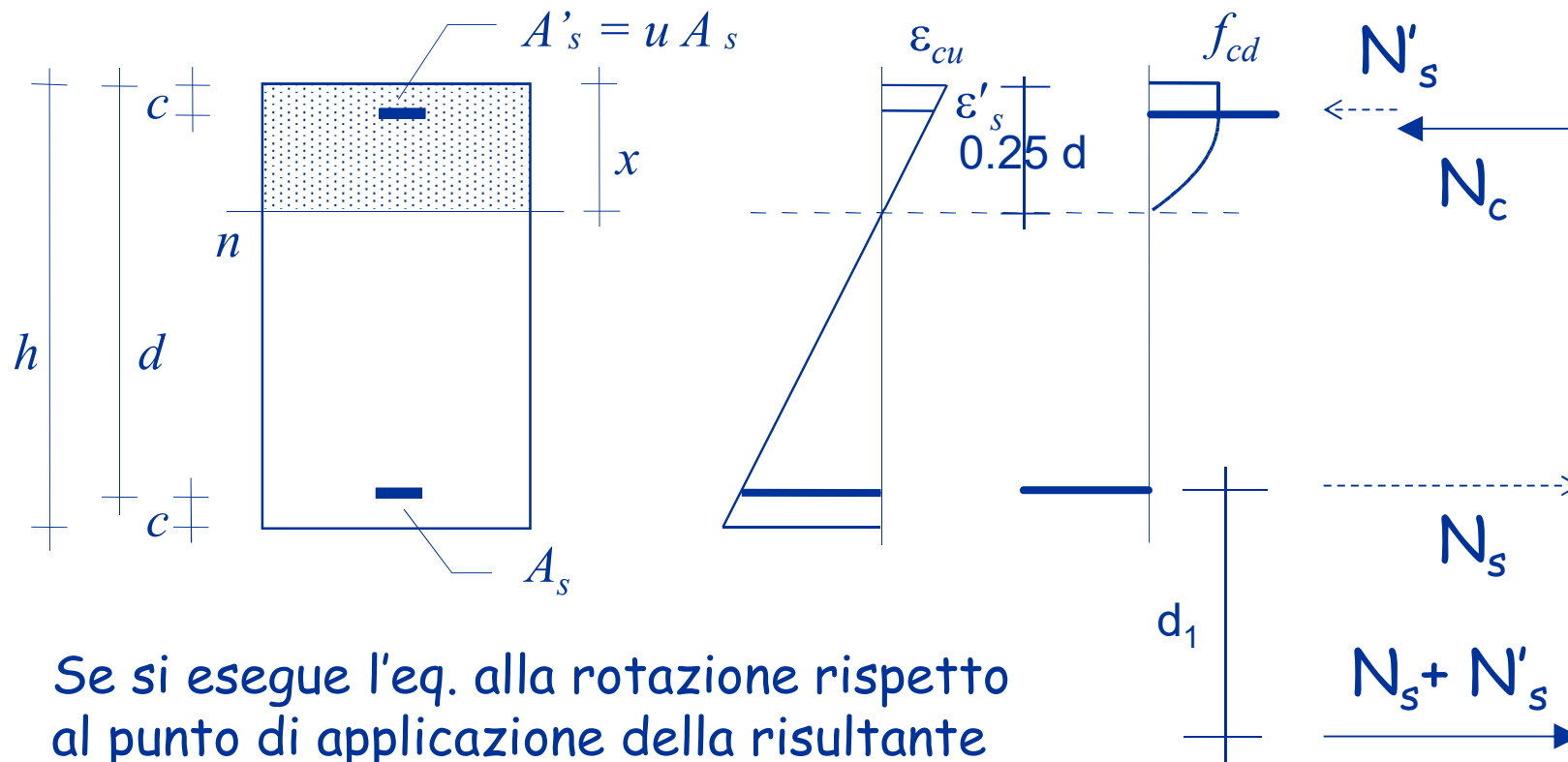
$$r' \cong r \sqrt{1 - s' u} \quad \text{con} \quad s' = \frac{\sigma'_s}{\sigma_{s,\max}} \quad u = \frac{A'_s}{A_s}$$

Si noti che  $s'$  dipende principalmente dal copriferro  $c$   
(o meglio, dal rapporto  $\gamma = c/d$ )

Nota: per SLU  $s'$  è molto spesso pari a 1  
(è minore solo per travi a spessore)

# Progetto $A_s$ (caso doppia armatura)

Stato limite ultimo

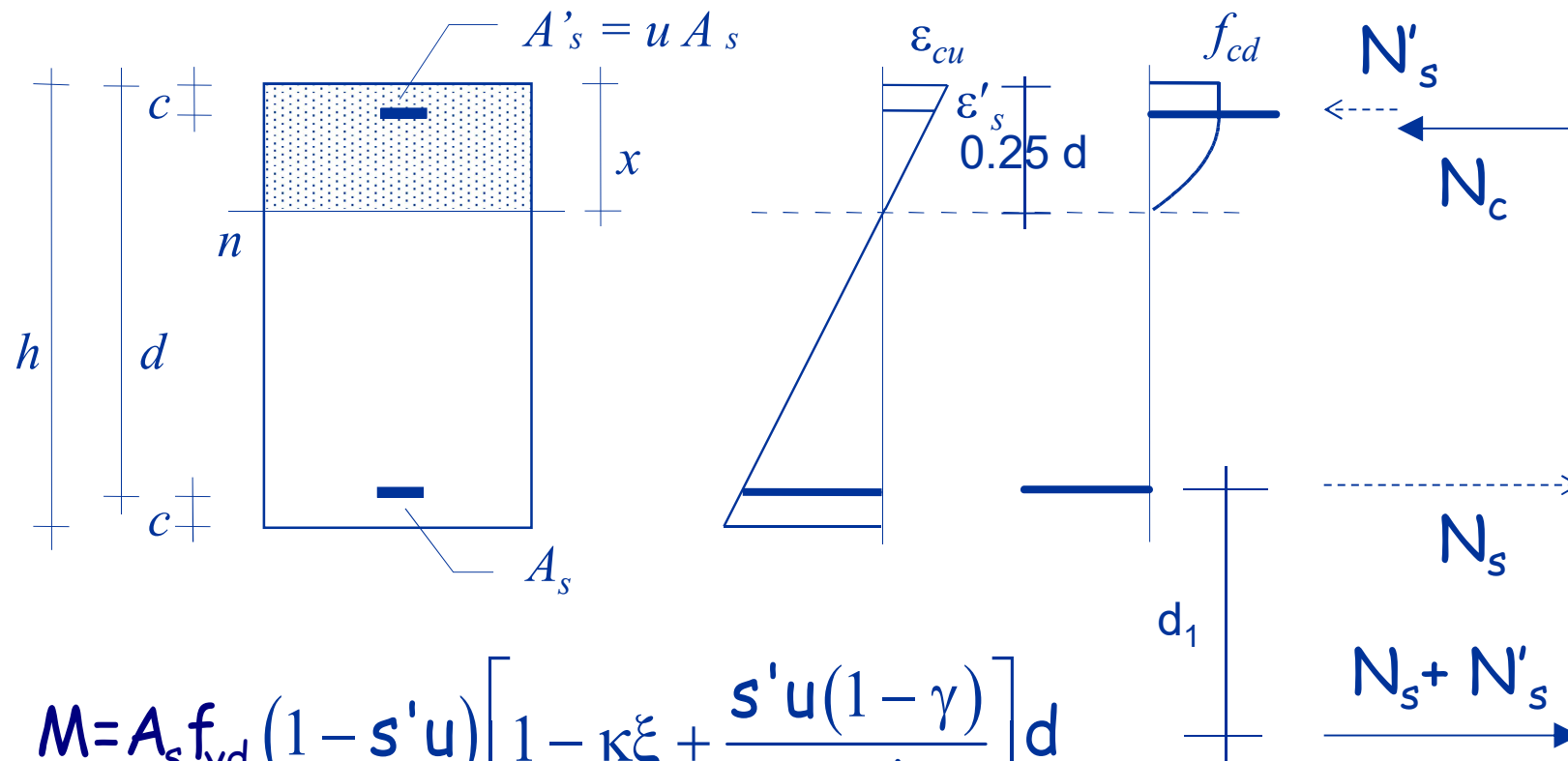


Se si esegue l'eq. alla rotazione rispetto al punto di applicazione della risultante delle tensioni del calcestruzzo, si ha:

$$M = (N_s + N'_s)(d - \kappa x + d_1)$$

# Progetto $A_s$ (caso doppia armatura)

Stato limite ultimo

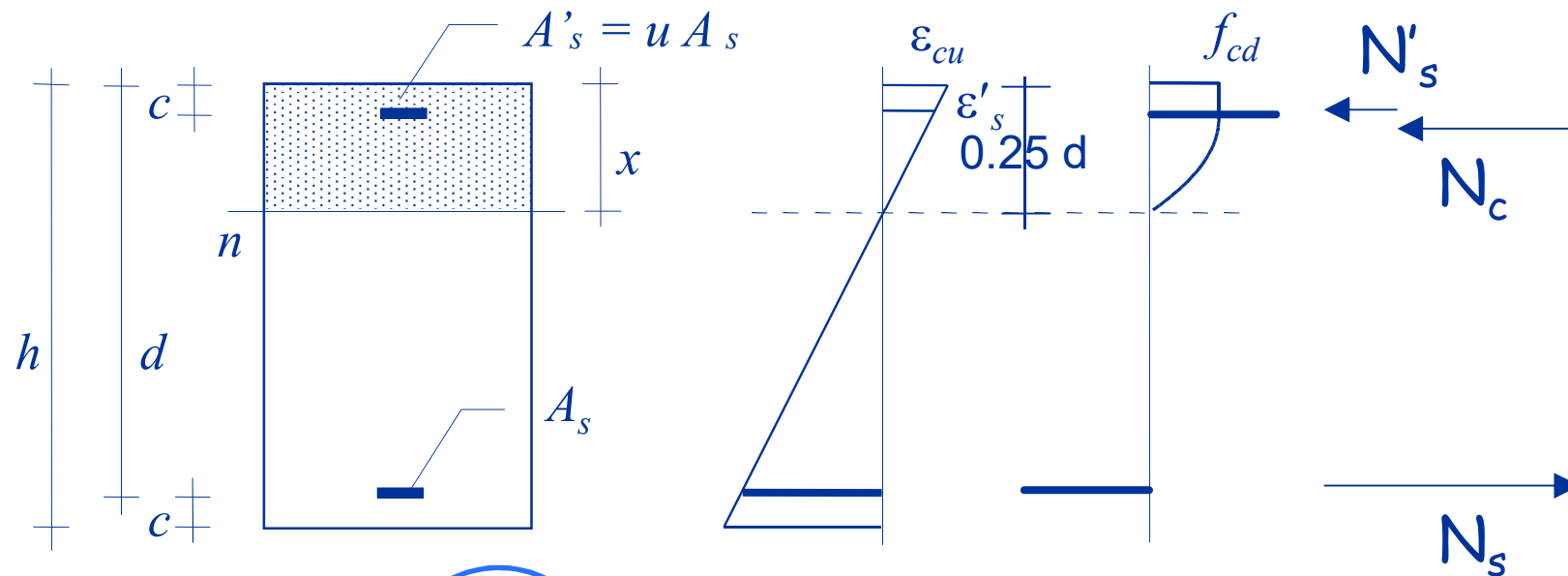


$$M = A_s f_{yd} (1 - s'u) \left[ 1 - \kappa \xi + \frac{s'u(1 - \gamma)}{1 - s'u} \right] d$$

$$M = A_s f_{yd} [1 - \kappa \xi + s'u(\kappa \xi - \gamma)] = A_s f_{yd} z \cong A_s f_{yd} 0.9 d$$

# Progetto $A'_s$ (caso doppia armatura)

Stato limite ultimo



$$\Delta M = M_{Ed} - M_{Rd, A'_s=0} \quad \Rightarrow \quad A'_s = \frac{\Delta M}{(d - c) s' f_{yd}}$$

The diagram shows the derivation of the required top reinforcement area  $A'_s$ . It starts with the moment difference  $\Delta M = M_{Ed} - M_{Rd, A'_s=0}$ , which is then used to calculate  $A'_s$  based on the section properties and material strengths.



# Valori di $z/d$ (C25/30, B450C)

Sezioni progettate con  $\varepsilon_c = \varepsilon_{cu}$  e  $\xi = 0.25$

	$\gamma = 0.10$	$\gamma = 0.15$	$\gamma = 0.20$
u	$s' = 1.00$	$s' = 0.72$	$s' = 0.36$
0	0.896		
0.25	0.897	0.888	0.887
0.50	0.898	0.880	0.879

Sempre molto prossimo a 0.9

# Quanto vale il coefficiente $r$ ?

$$r = \frac{1}{\sqrt{\beta \xi (1 - \kappa \xi) f_{cd}}}$$

Stato limite ultimo:  
dipende solo dal calcestruzzo

per C25/30:

$$r = 0.0197$$

## Valori di $r'$ (C25/30, B450C)

	$\gamma = 0.10$	$\gamma = 0.15$	$\gamma = 0.20$
u	$s' = 1.00$	$s' = 0.72$	$s' = 0.36$
0	0.0197		
0.25	0.0171	0.0180	0.0189
0.50	0.0139	0.0160	0.0181

Nota:  $\gamma = 0.10$  per travi emergenti  
 $\gamma = 0.20$  per travi a spessore

# Valori di $r'/r$ (C25/30, B450C)

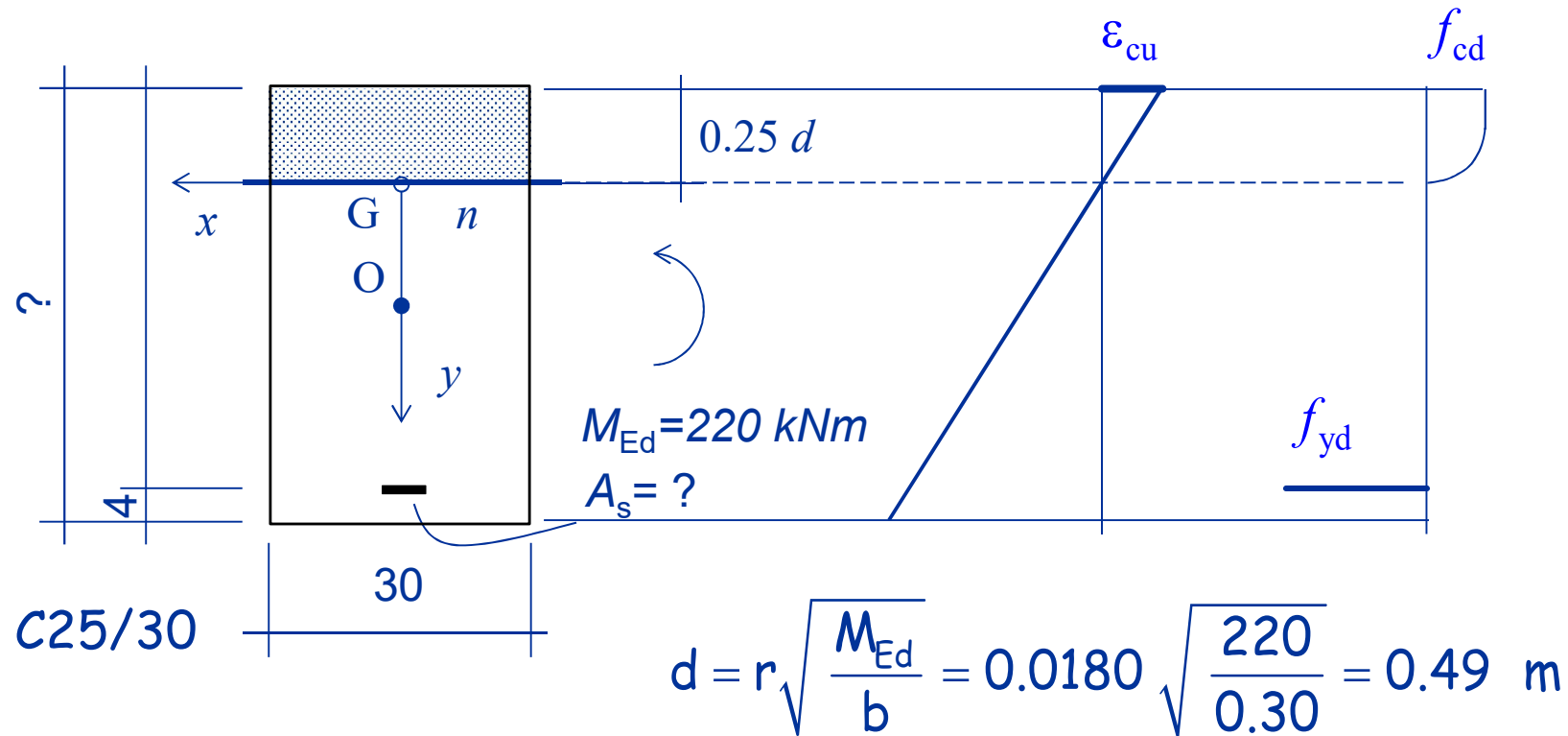
	$\gamma = 0.10$	$\gamma = 0.15$	$\gamma = 0.20$
u	$s' = 1.00$	$s' = 0.72$	$s' = 0.36$
0	1.000		
0.25	0.868	0.913	0.0959
0.50	0.706	0.812	0.919

Travi  
emergenti

Travi a  
spessore

# Esempio n. 1

## Progetto di sezione a semplice armatura

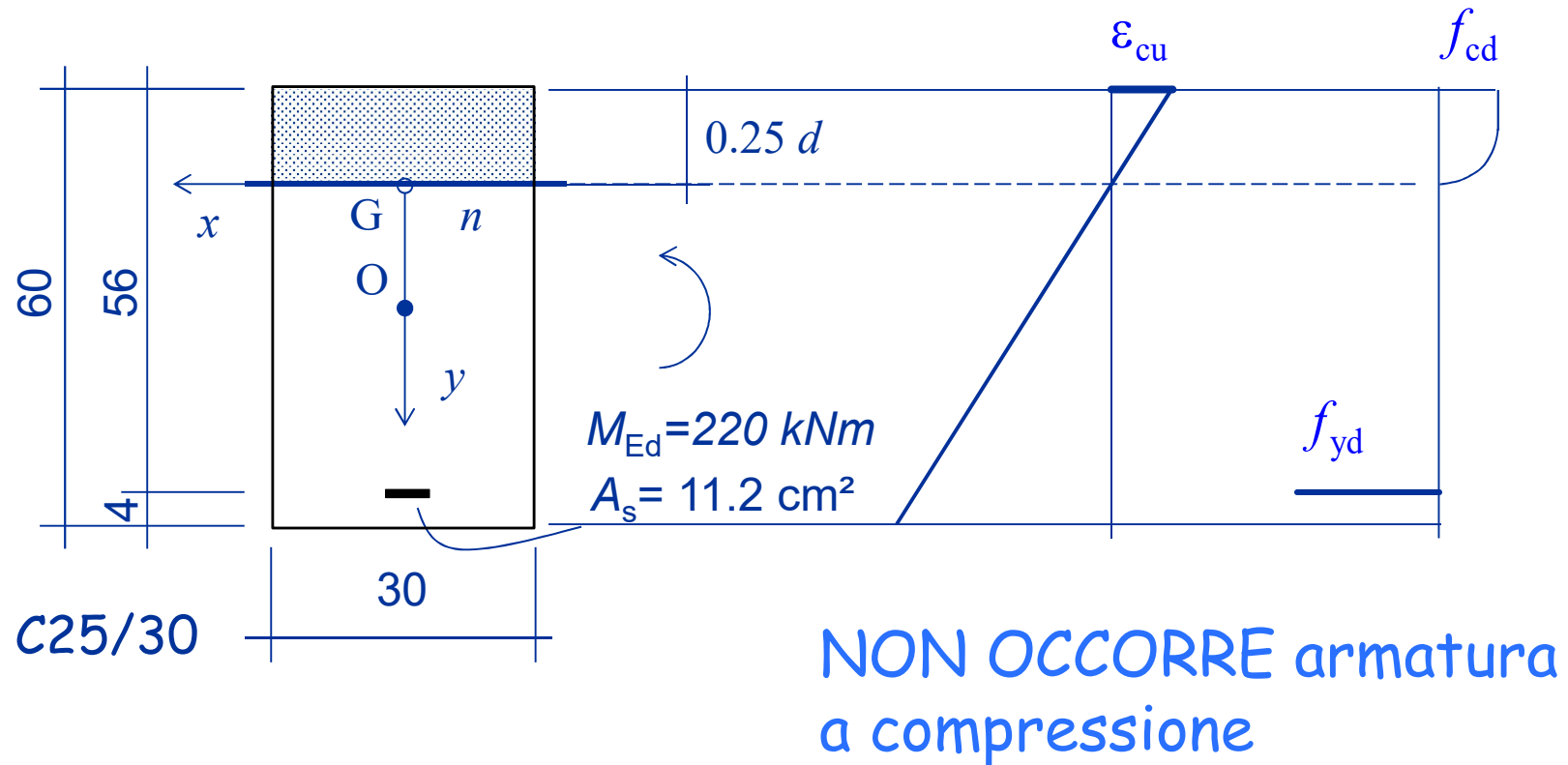


$$A_s = \frac{M}{0.9 d f_{yd}} = \frac{220 \times 10}{0.9 \times 0.56 \times 391.3} = 11.2 \text{ cm}^2$$

uso 30x60

# Esempio n. 1

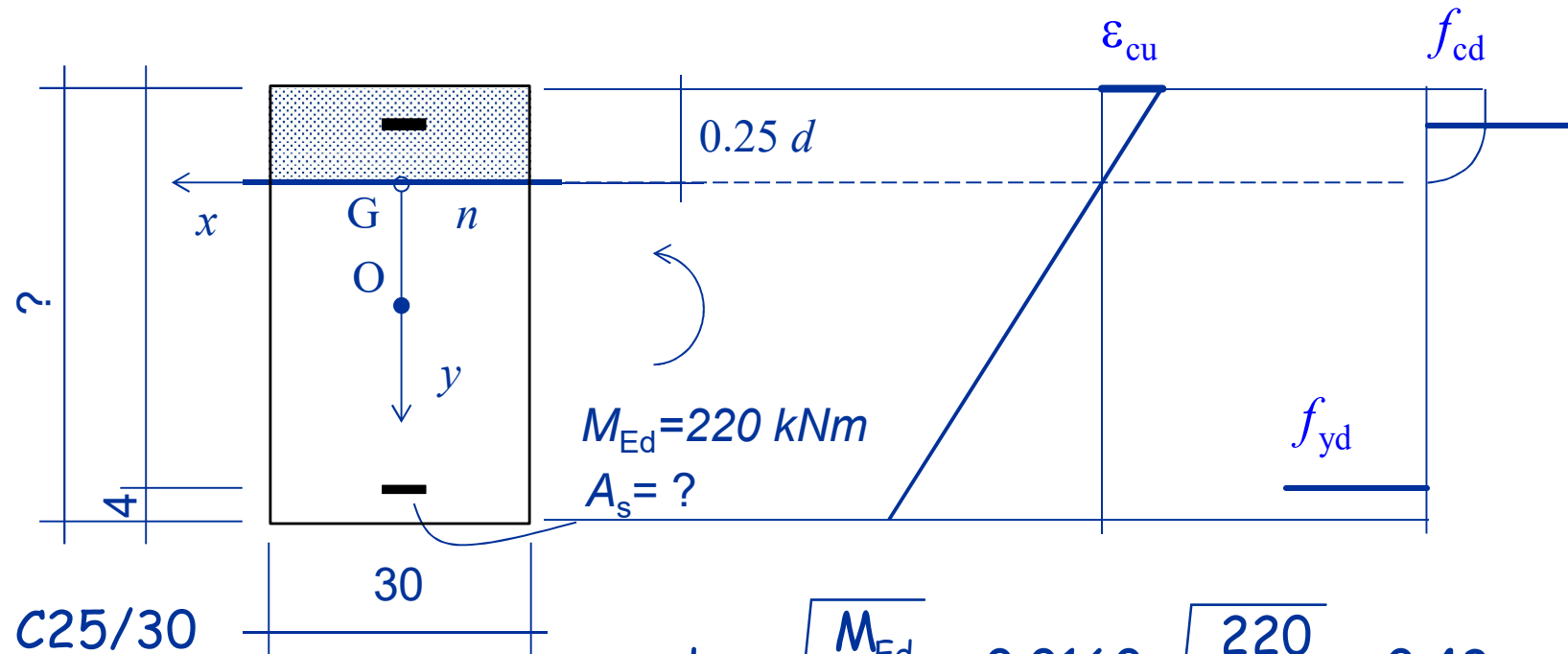
## Progetto di sezione a semplice armatura



$$M_{Rd, A'_s=0} = \frac{b d^2}{r^2} = \frac{0.30 \times 0.56^2}{0.0197^2} = 242.4 \text{ kNm}$$

# Esempio n. 2

## Progetto di sezione a doppia armatura



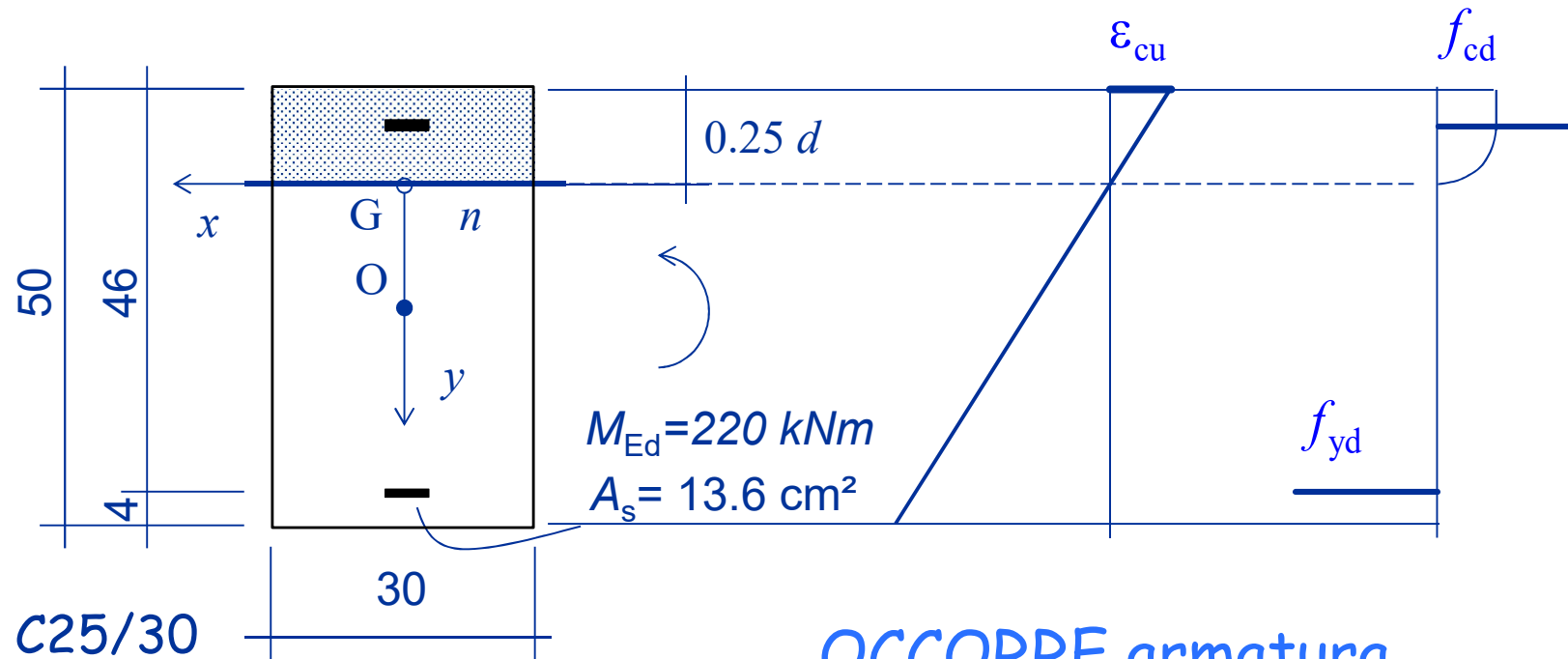
$$d = r \sqrt{\frac{M_{Ed}}{b}} = 0.0160 \sqrt{\frac{220}{0.30}} = 0.43 \text{ m}$$

$$A_s = \frac{M}{0.9 d f_{yd}} = \frac{220 \times 10}{0.9 \times 0.46 \times 391.3} = 13.6 \text{ cm}^2$$

uso 30x50

# Esempio n. 2

## Progetto di sezione a doppia armatura



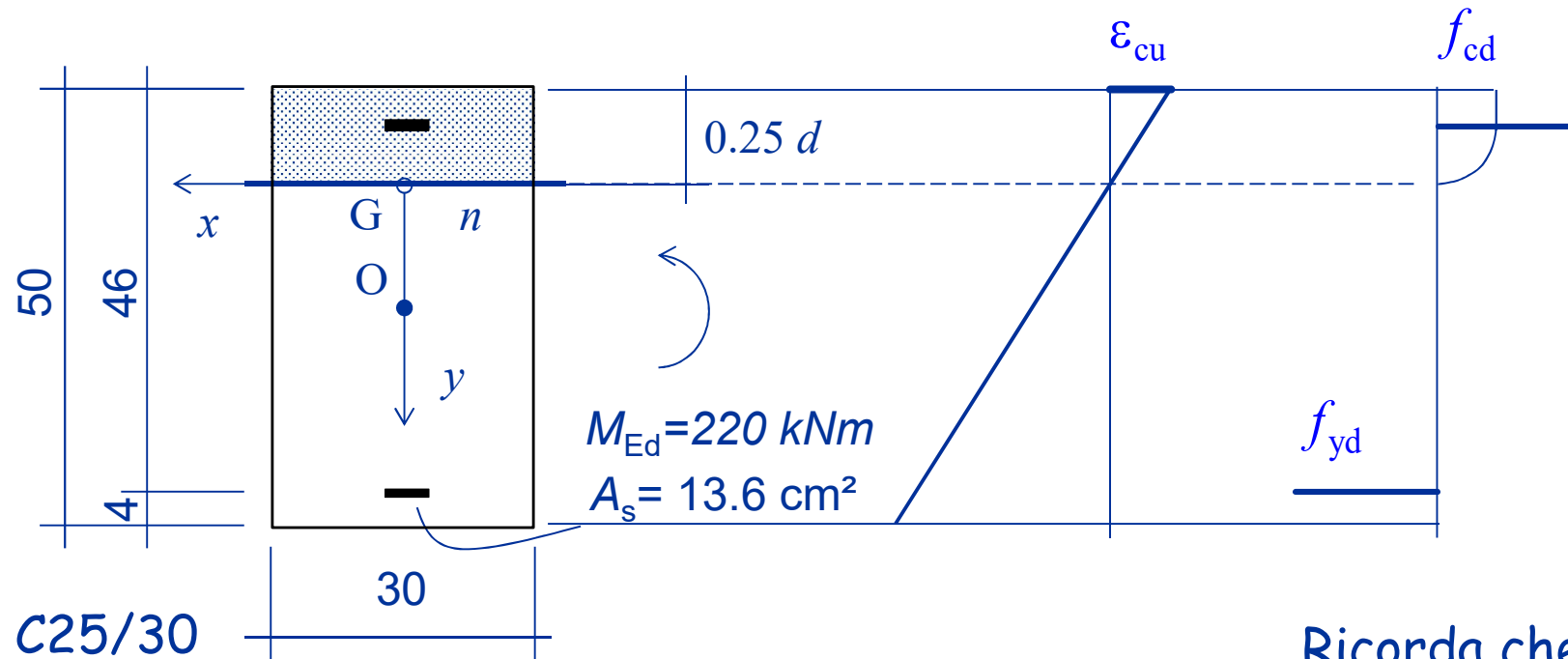
OCCORRE armatura  
a compressione

$$M_{Rd, A'_s=0} = \frac{b d^2}{r^2} = \frac{0.30 \times 0.46^2}{0.0197^2} = 163.6 \text{ kNm}$$



# Esempio n. 2

## Progetto di sezione a doppia armatura



Ricorda che:

$$A'_s = \frac{\Delta M}{(d - c) s' f_{yd}} = \frac{(220 - 163.6)}{0.42 \times 391.3} = 3.4 \text{ cm}^2$$

$$s' = \frac{-\sigma'_s}{f_{yd}} = \frac{\xi - \gamma}{\xi} \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{yd}} \leq 1$$

## Quanto è possibile ridurre la sezione grazie all'armatura compressa?

- Aumentando  $u = A'_s/A_s$  è possibile ridurre l'altezza della sezione
- Riducendo l'altezza aumenta l'armatura necessaria
- Necessità tecnologiche impongono limiti alla quantità di armatura (ribaditi dalla normativa)

Armatura minima:

$$A_s \geq 0.26 \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} b d \geq 0.13 \% b d$$

0.15% per C25/30 e B450C

Armatura massima:

$$A_s \leq 4 \% b h$$

$$A'_s \leq 4 \% b h$$

Percentuale massima consigliata: 1 ÷ 1.5%

# Limiti alle formule di progetto

per tener conto dei limiti all'armatura

Imponendo un limite all'armatura tesa:

$$A_s \leq \rho b d \quad \text{con } \rho = 0.010 \div 0.015$$

Si ha: 
$$A_s = \frac{M_{Ed}}{0.9 d f_{yd}} \leq \rho b d$$

E quindi:

$$d \geq r_s \sqrt{\frac{M_{Ed}}{b}} \quad \text{con} \quad r_s = \sqrt{\frac{1}{0.9 \rho f_{yd}}} \quad \begin{array}{l} = 0.0169 \\ \text{se } \rho=0.010 \\ = 0.0138 \\ \text{se } \rho=0.015 \end{array}$$

Non si può utilizzare un valore di  $r'$  inferiore a  $r_s$

Suggerisco per  $r'$  un limite tra 0.015 e 0.017

# Criteri di buona progettazione (SLU)

Per il progetto della sezione assumere un valore  
 $r' = 0.018$  o  $0.017$

(corrisponde a  $0 < u < 25\%$  per C25/30)

Per travi molto basse (a spessore) assumere valori  
un po' maggiori

$r' = 0.019$  (corrisponde a  $0 < u < 25\%$  per C25/30)

Se si ritiene accettabile una percentuale di armatura  
dell'1.5% si può scendere al valore

$r' = 0.015$  (ma non andare mai al di sotto di questi)

# Criteri di buona progettazione (SLU)

Per il progetto dell'armatura tesa considerare un braccio della coppia interna pari a  $0.9 d$

Nota:

Per sezioni a forte armatura (sconsigliate per la carenza di duttilità) il braccio della coppia interna dovrebbe essere minore ( $0.8 d$ )

FINE