

Lezione

Tecnica delle Costruzioni

La flessione composta

Verifica di sezioni soggette a flessione composta

Flessione composta

1° stadio (Formule di Scienza delle Costruzioni)

Con riferimento alla sezione omogeneizzata vale la formula di Scienza delle Costruzioni

$$\sigma = E \left(\varepsilon_G + \chi_x x + \chi_y y \right)$$

Pertanto:

$$N = E \varepsilon_G \int dA + E \chi_x \int x dA + E \chi_y \int y dA = E \varepsilon_G A \neq 0$$

$$M_x = E \varepsilon_G \int y dA + E \chi_x \int xy dA + E \chi_y \int y^2 dA = E \chi_y I_x \neq 0$$

$$M_y = E \varepsilon_G \int x dA + E \chi_x \int x^2 dA + E \chi_y \int xy dA = - E \chi_x I_y \neq 0$$

$$\text{essendo } \int x dA = \int y dA = 0 \quad \text{e} \quad \int xy dA = 0$$

Flessione composta

1° stadio (Formule di Scienza delle Costruzioni)

Con riferimento alla sezione omogeneizzata vale la formula di Scienza delle Costruzioni

$$\sigma = E \left(\varepsilon_G + \chi_x x + \chi_y y \right)$$

Curvatura nel piano x-z

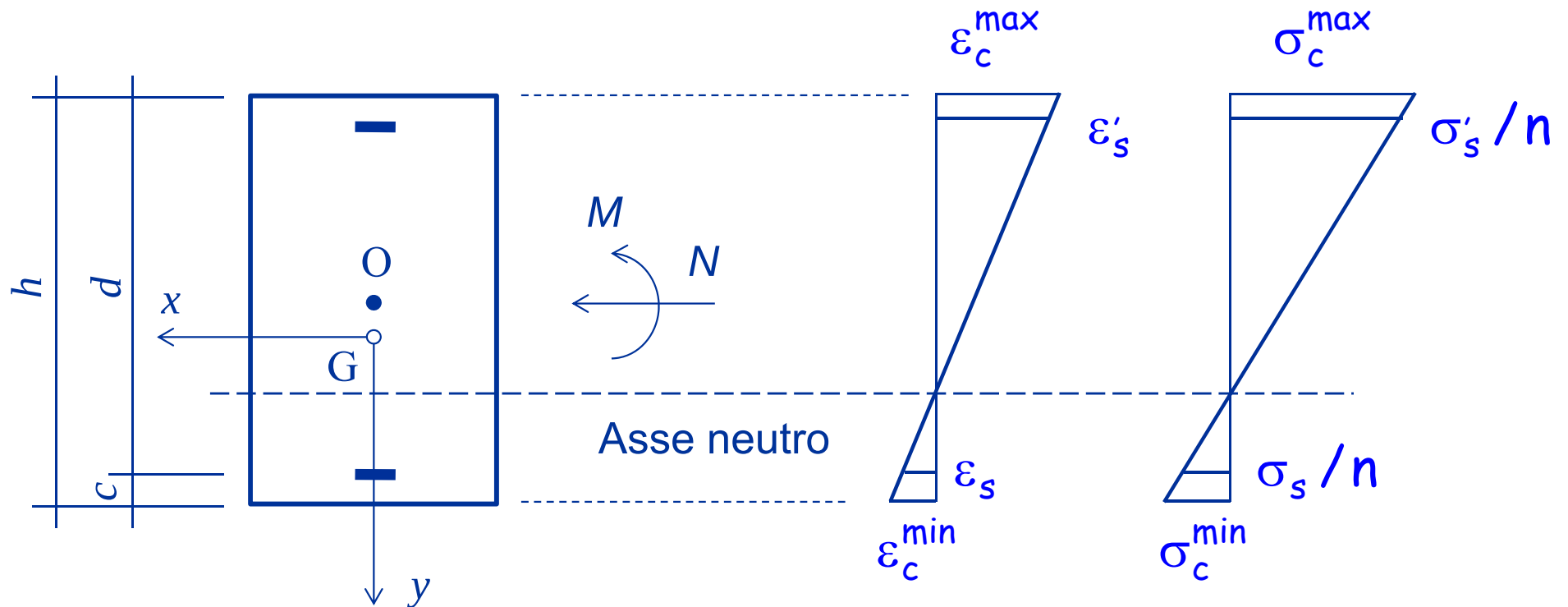
Curvatura nel piano y-z

ovvero

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_y}{I_y} x + \frac{M_x}{I_x} y$$

Flessione composta

1° stadio (Calcolo delle tensioni)



Nota 1: l'asse neutro non passa per il baricentro G della sezione omogen.

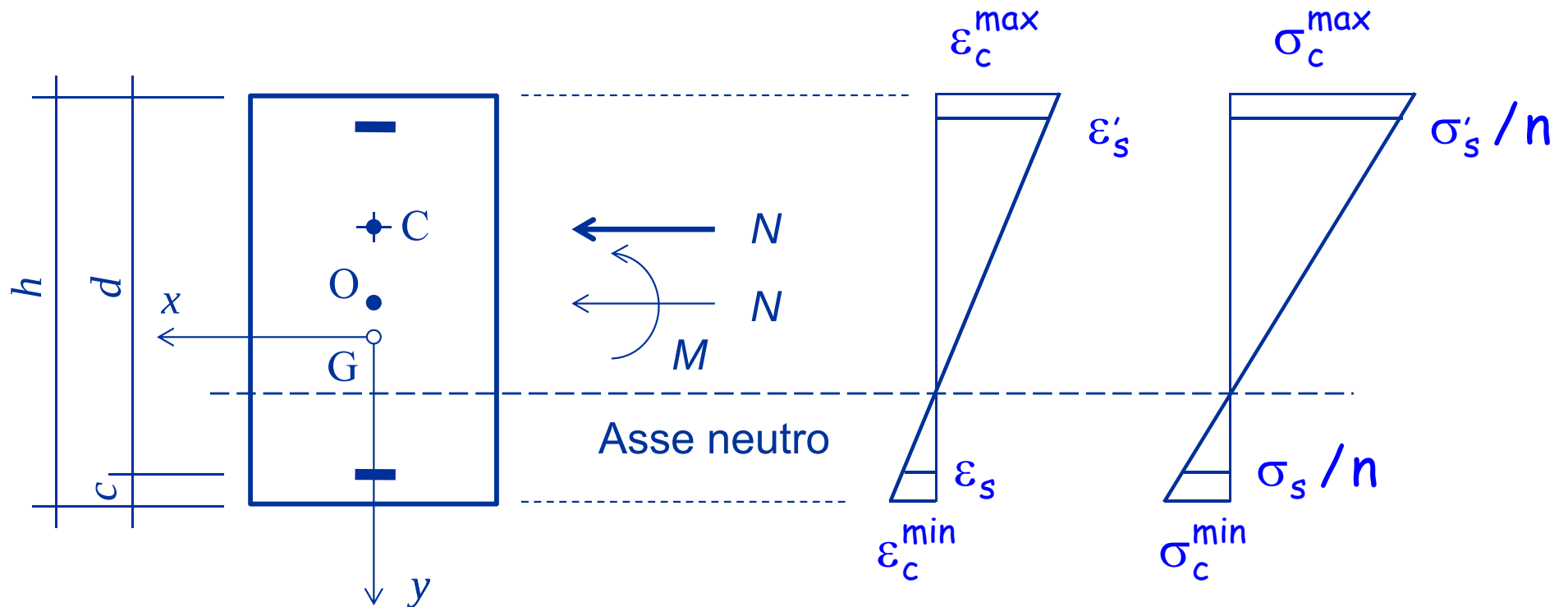
Nota 2: lo sforzo normale si intende applicato nel baricentro O della sezione in calcestruzzo

$$\sigma_c = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y$$

$$\sigma_s = n \left(\frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y \right)$$

Flessione composta

1° stadio (Calcolo delle tensioni)



Le azioni di sforzo normale e momento flett. equivalgono ad uno sforzo normale con eccentricità

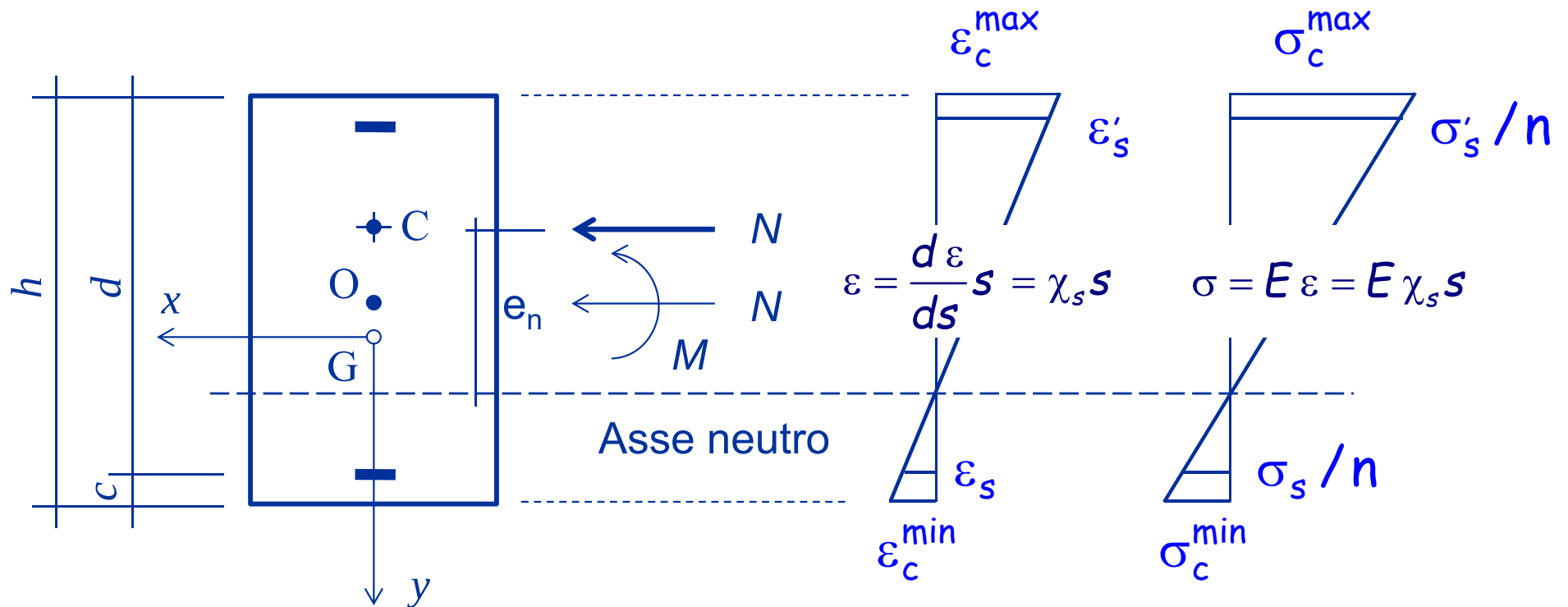
$$e_x = \frac{M_x}{N} \quad e_y = -\frac{M_y}{N}$$

Il punto di applicazione dello sforzo normale eccentrico è detto

CENTRO DI SOLLECITAZIONE

Flessione composta

1° stadio (Calcolo delle tensioni)



$$N = \int \sigma dA = E \chi_s \int s dA =$$

$$E \chi_s S_n$$

$$M_n = N e_n = \int \sigma s dA = E \chi_s \int s^2 dA =$$

$$E \chi_s I_n$$

$$M_s = \int \sigma n dA = E \chi_s \int s n dA =$$

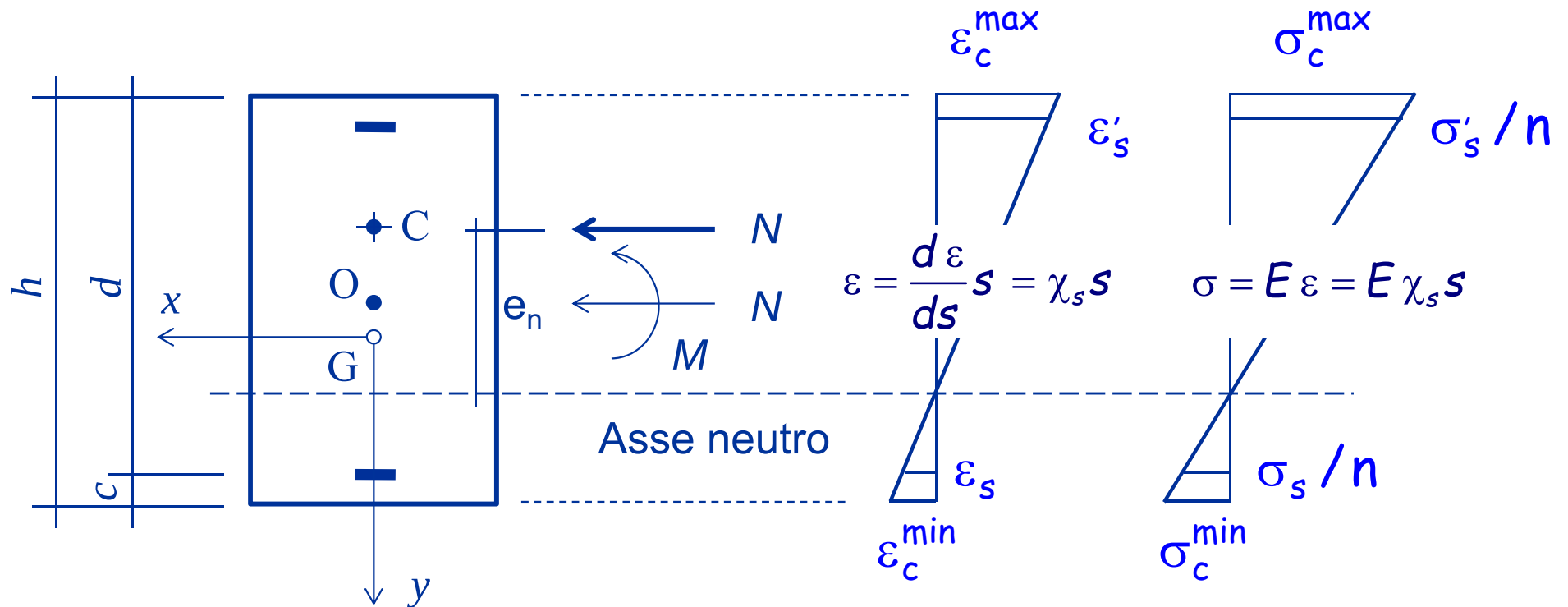
$$0$$



$$e_n = \frac{I_n}{S_n}$$

Flessione composta

1° stadio (Calcolo delle tensioni)



$$N = \int \sigma dA = E \chi_s \int s dA = E \chi_s S_n$$

$$M_n = N e_n = \int \sigma s dA = E \chi_s \int s^2 dA = E \chi_s I_n$$

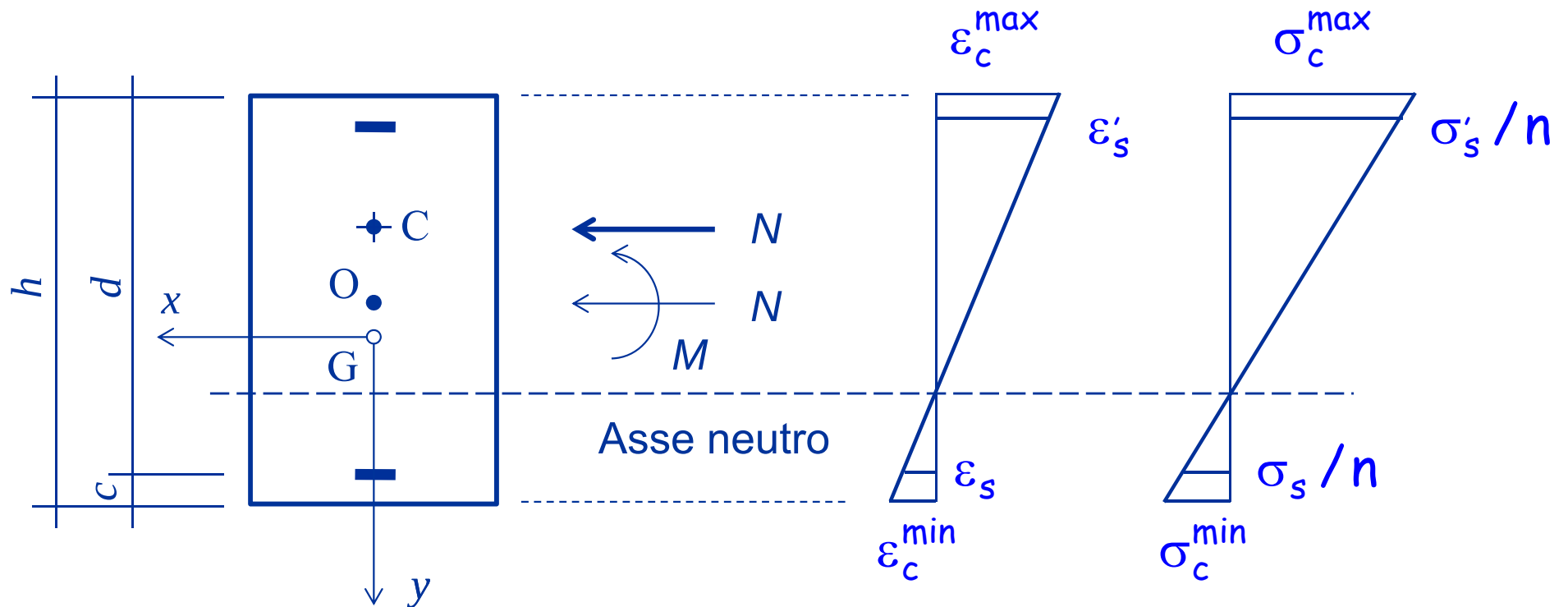
$$M_s = \int \sigma n dA = E \chi_s \int s n dA = 0$$



$$\sigma = \frac{N}{S_n} s$$

Flessione composta

1° stadio



Dati:

- Geometria della sezione
- Armature
- Coppia M - N

Incognite:

Tensioni massime

Flessione composta

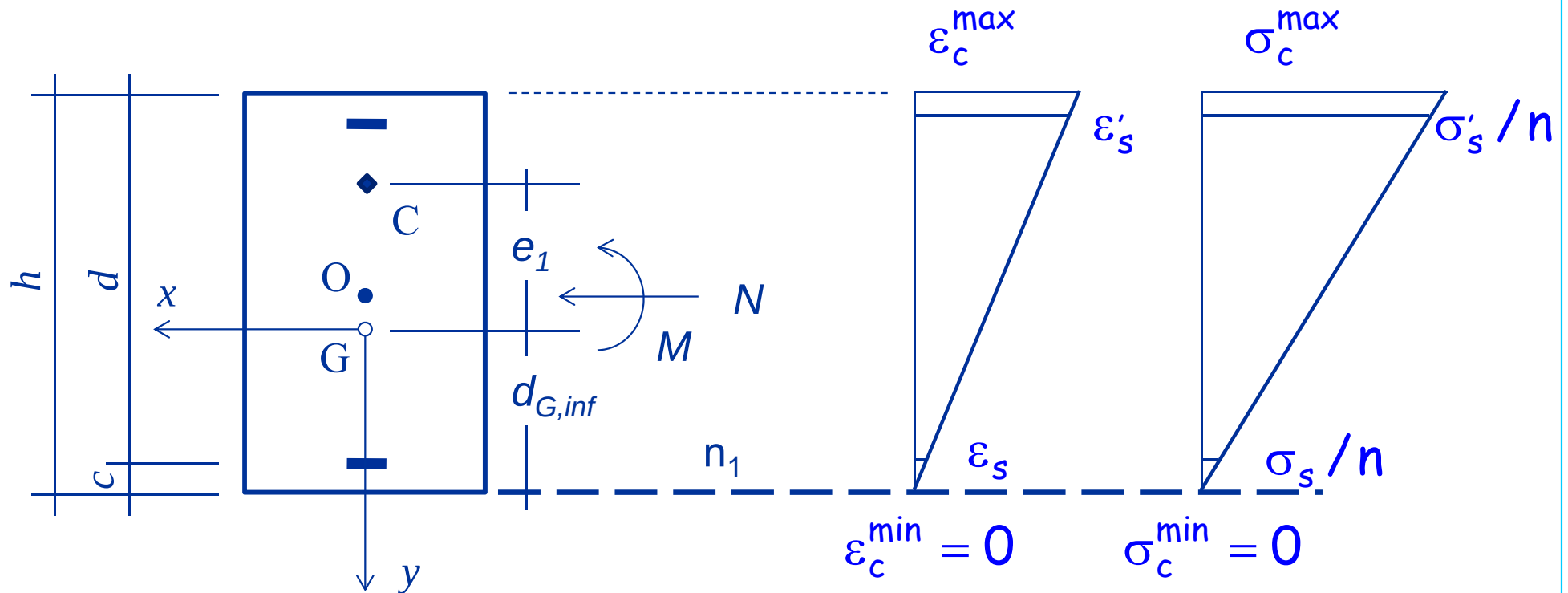
1° stadio

Se il centro di sollecitazione C è :

- | | | |
|---|---|--|
| 1. sul contorno
del nocciolo d'inerzia | ➡ | l'asse neutro
è tangente alla sezione |
| 2. interno
al nocciolo d'inerzia | ➡ | l'asse neutro
è esterno alla sezione |
| 3. esterno
al nocciolo d'inerzia | ➡ | l'asse neutro
è interno alla sezione |

Flessione composta

Estremi del nocciolo d'inerzia



$$\sigma_c^{\min} = \frac{N}{A} + \frac{-N e_1}{I_x} d_{G,inf} = 0$$

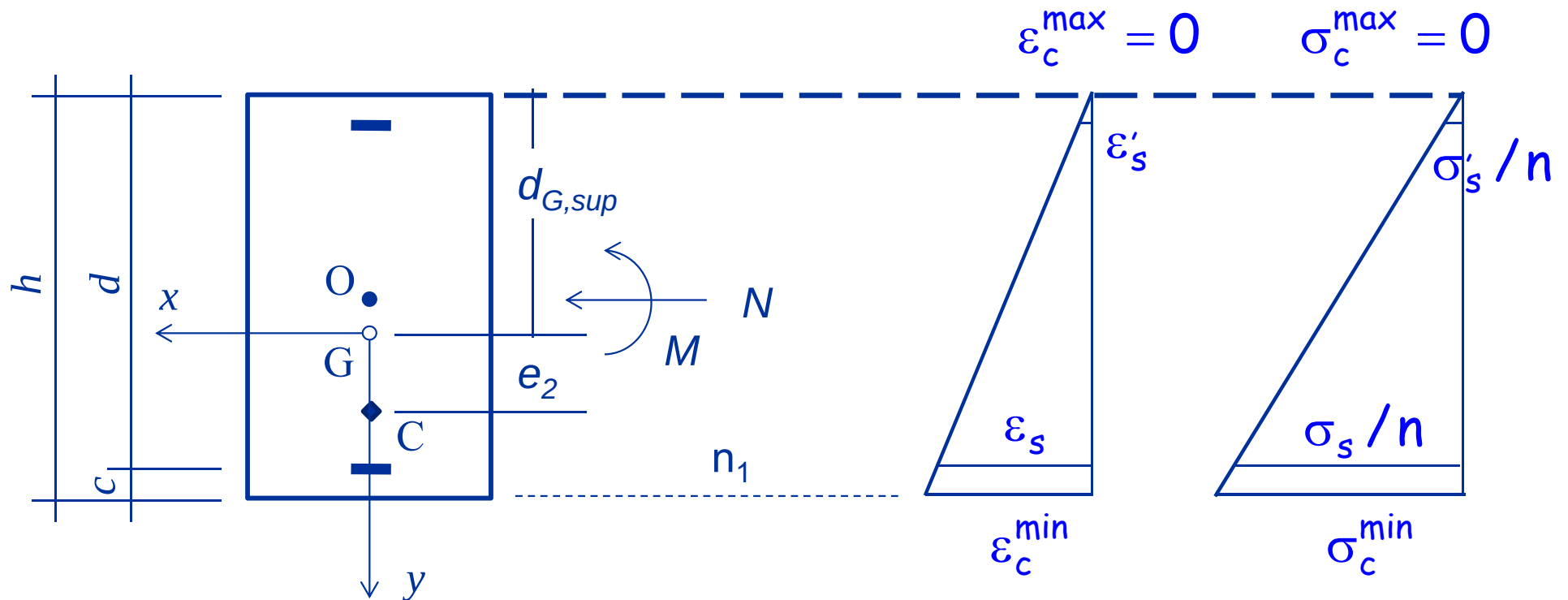


$$e_1 = \frac{I_x}{A d_{G,inf}}$$

(e_1 e $d_{G,inf}$ sono in valore assoluto)

Flessione composta

Estremi del nocciolo d'inerzia



$$\sigma_c^{max} = \frac{N}{A} + \frac{N e_2}{I_x} (-d_{G,sup}) = 0$$

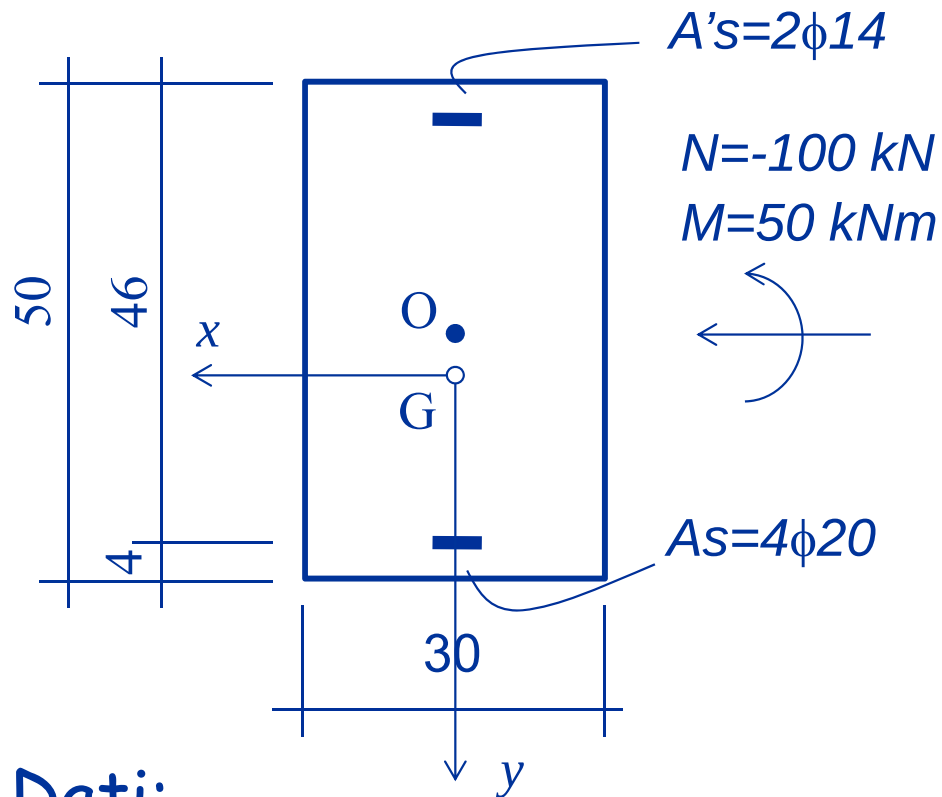


$$e_2 = \frac{I_x}{A d_{G,sup}}$$

(e_2 e $d_{G,sup}$ sono in valore assoluto)

Esempio n.1

1° stadio



Dati:

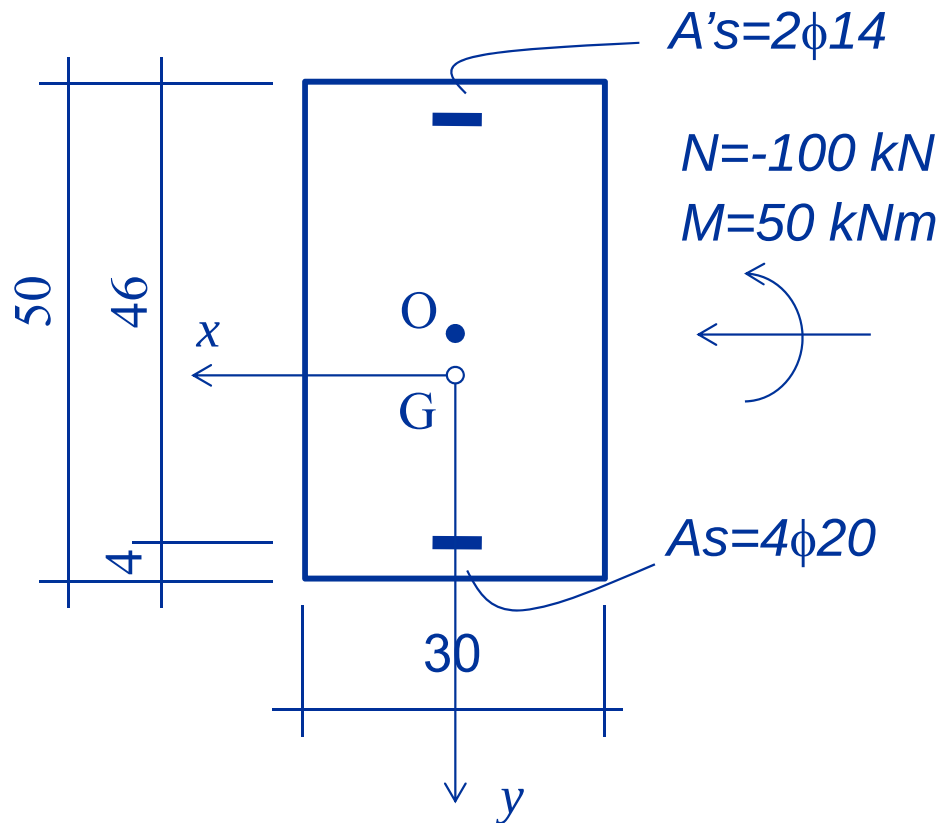
- Geometria della sezione
- Armature
- Coppia M-N

Incognite:

Tensioni massime

Esempio n.1

1° stadio

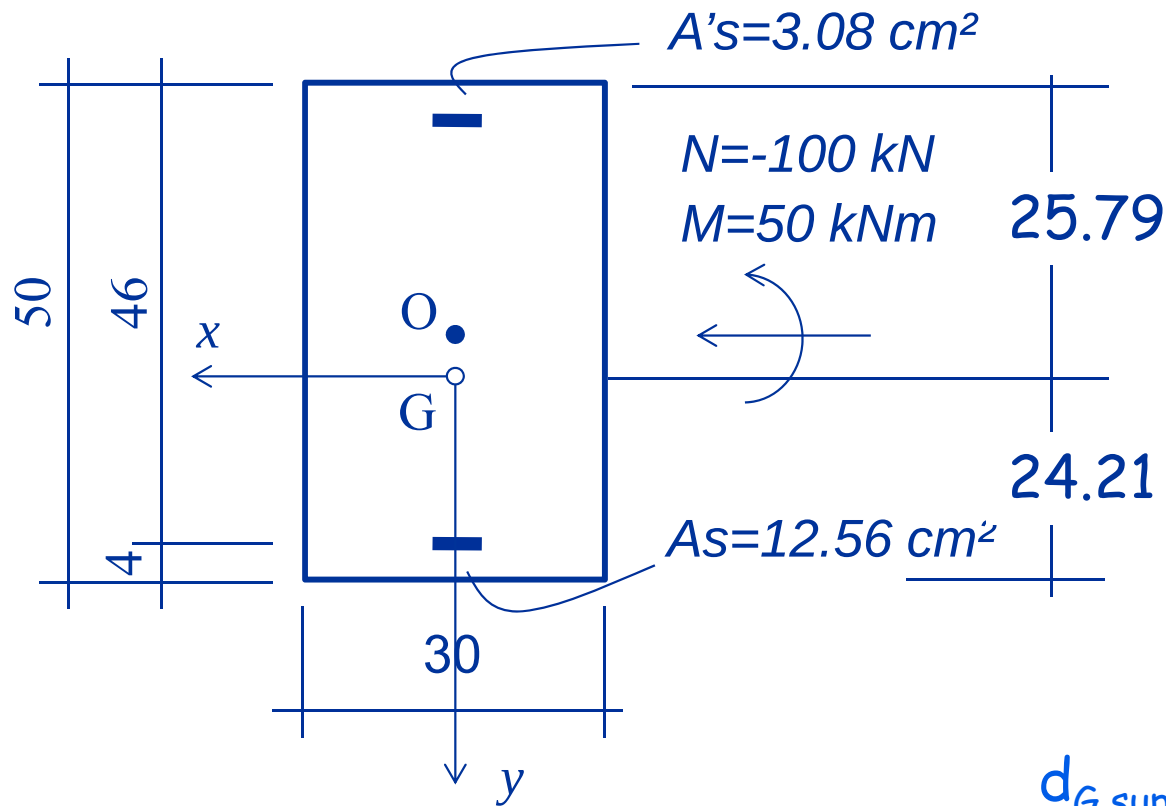


Procedura:

1. Individuazione dell'asse neutro
2. Determinazione del momento d'inerzia
3. Calcolo delle tensioni

Esempio n.1

1° stadio



Come già mostrato con riferimento alla flessione semplice:

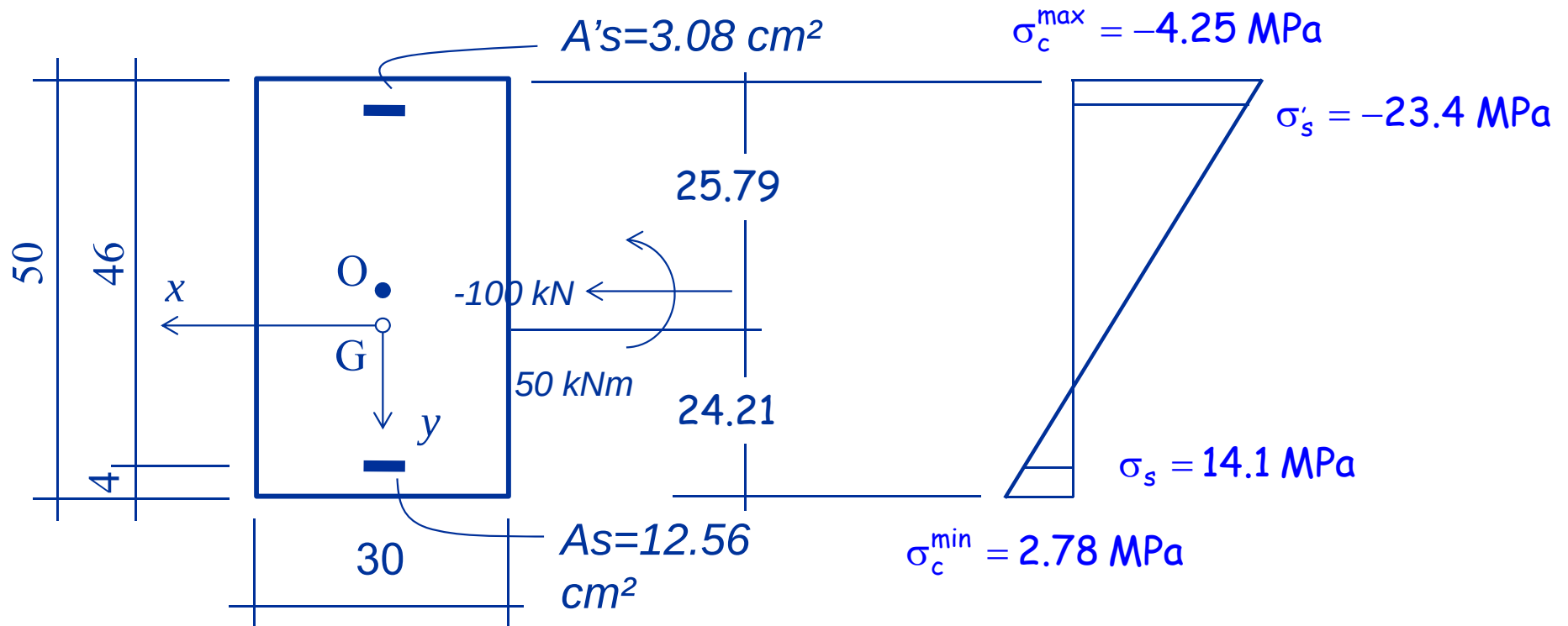
$$d_{G,\text{sup}} = S/A = 25.79 \text{ cm}$$

$$d_{G,\text{inf}} = h - d_{G,\text{sup}} = 24.21 \text{ cm}$$

$$I = 355298 \text{ cm}^4$$

Esempio n.1

1° stadio



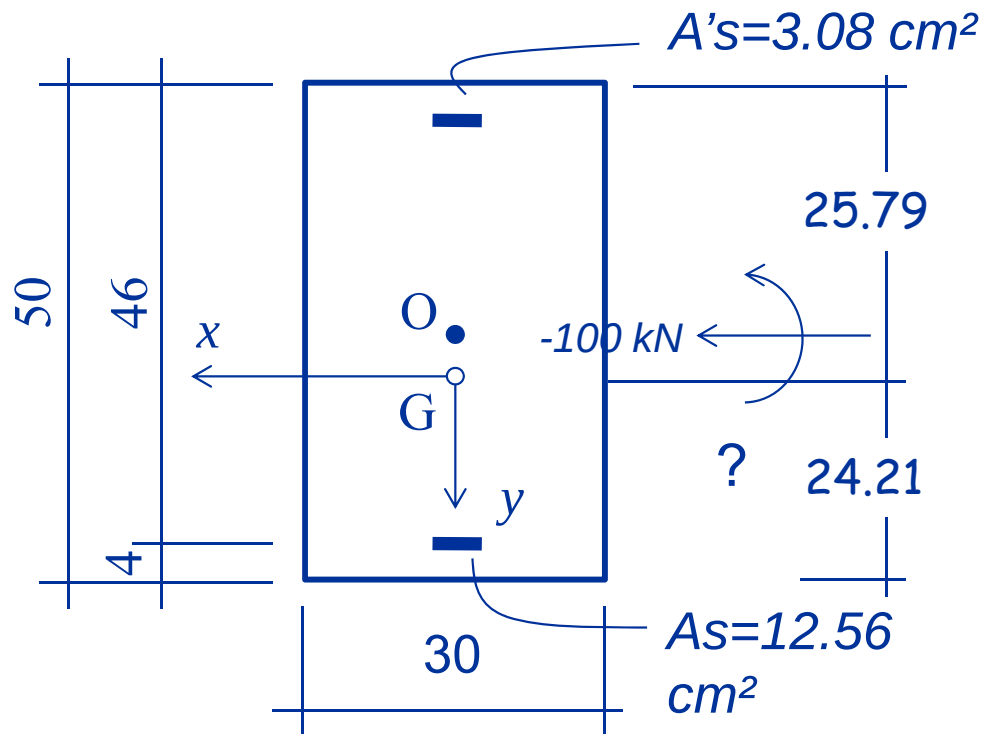
$$\sigma_{c,\text{inf}} = \frac{-100 \cdot 10^3}{1599.3 \cdot 10^2} + \frac{50 \cdot 10^6}{355298 \cdot 10^4} 24.21 \cdot 10 = 2.78 \text{ MPa} > f_{cfk} = 2.16 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{c,\text{sup}} = \frac{-100 \cdot 10^3}{1599.3 \cdot 10^2} + \frac{50 \cdot 10^6}{355298 \cdot 10^4} (-25.79 \cdot 10) = -4.25 \text{ MPa}$$

La sezione è
fessurata

Esempio n.2

1° stadio



Calcolo del momento di prima fessurazione

$$\sigma_c = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} d_{G,\text{inf}} = f_{\text{cfk}}$$

con

$$f_{\text{cfk}} = 2.16 \text{ MPa}$$

$$M_f = \left(f_{\text{cfk}} - \frac{N}{A} \right) \frac{I}{d_{G,\text{inf}}} = \left(2.16 - \frac{-100 \cdot 10^3}{1599.3 \cdot 10^2} \right) \frac{355298 \cdot 10^2}{24.21 \cdot 10} 10^{-6} = 40.9 \text{ kNm}$$

Flessione composta

2° stadio

Nel secondo stadio di comportamento
NON è nota la sezione reagente.

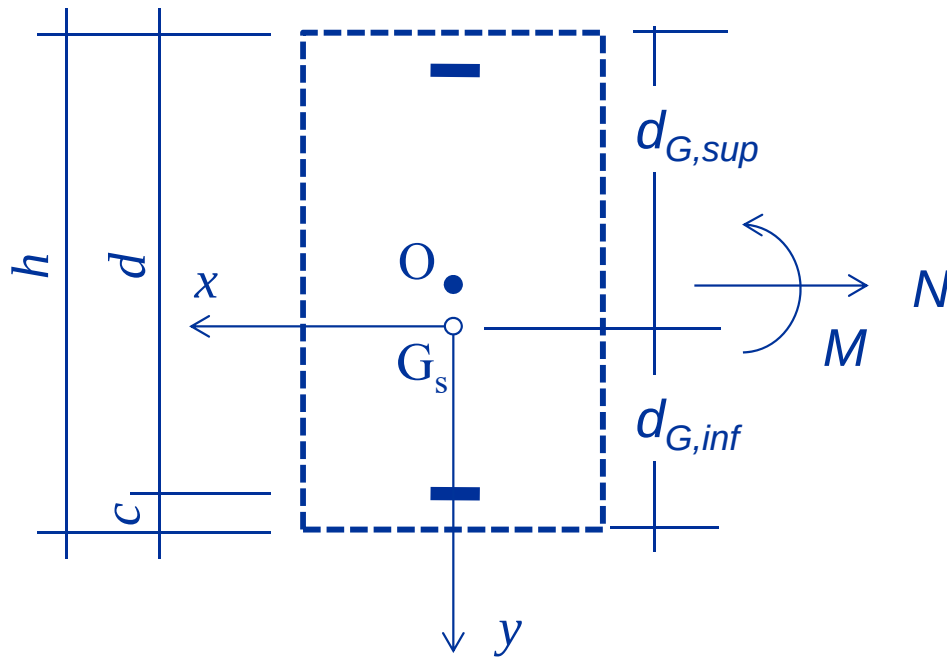
Le formule per il calcolo della coppia N-M resistente sono diverse a seconda che la sezione reagente sia costituita da sole armature, solo calcestruzzo oppure da armature e calcestruzzo.

Per tale motivo saranno separatamente considerati i casi :

1. Sforzo normale di trazione
interno al nocciolo centrale d'inerzia
2. Sforzo normale di compressione
interno al nocciolo centrale d'inerzia
3. Casi rimanenti

Flessione composta

2° stadio (Sforzo normale di trazione interno al nocciolo)



1° caso: sforzo normale di trazione interno al nocciolo centrale delle sole armature.

Nota ! In tale caso, solo le armature reagiscono.

$$d_{G,sup} = \frac{S}{A} = \frac{A_s d + A'_s c}{A_s + A'_s}$$

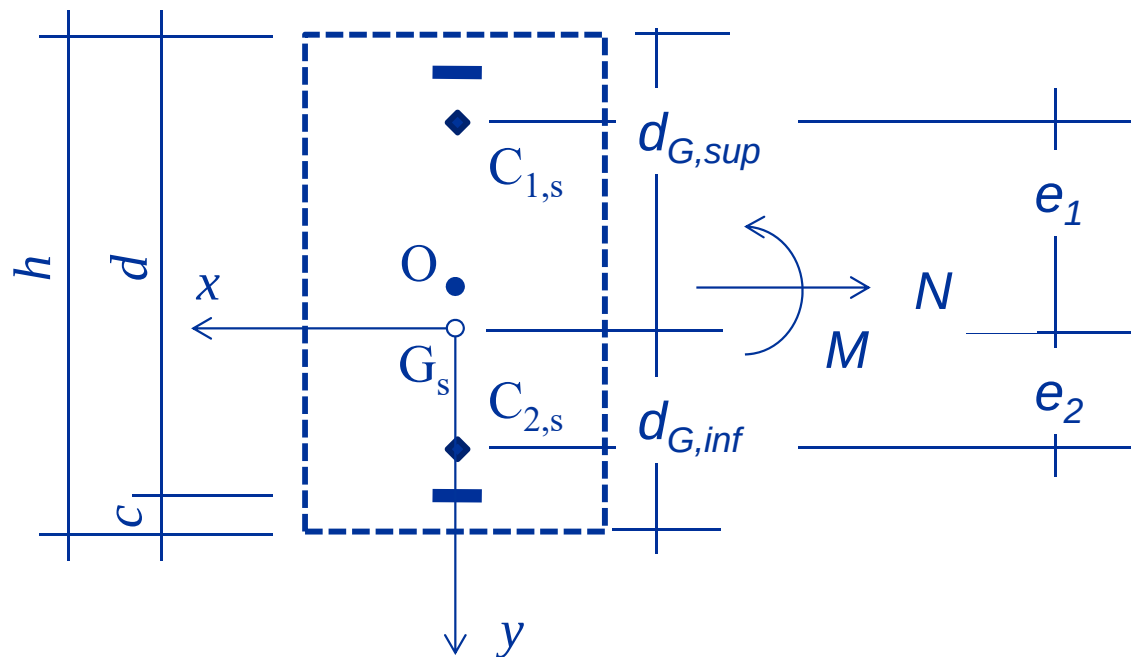
$$d_{G,inf} = h - d_{G,sup}$$

e

$$I_x = \frac{A_s A'_s}{A_s + A'_s} (d - c)^2$$

Flessione composta

2° stadio (Sforzo normale di trazione interno al nocciolo)



Nota: gli estremi del nocciolo centrale d'inerzia delle sole armature non coincidono con le posizioni delle armature

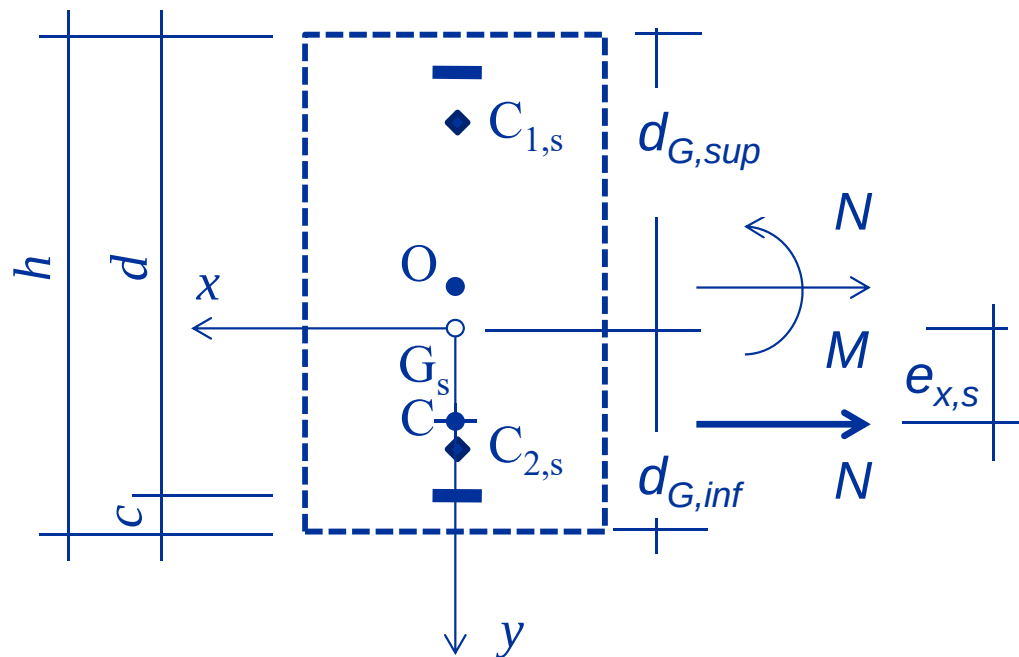
$$e_1 = \frac{I_x}{A d_{G,inf}} = \frac{A_s A'_s}{A_s + A'_s} \frac{(d-c)^2}{A_s c + A'_s d}$$

$$e_2 = \frac{I_x}{A d_{G,sup}} = \frac{A_s A'_s}{A_s + A'_s} \frac{(d-c)^2}{A_s d + A'_s c}$$

$$\text{se } A_s = A'_s \dots \quad e_1 = e_2 = \frac{(d-c)^2}{2h}$$

Flessione composta

2° stadio (Sforzo normale di trazione interno al nocciolo)



$$\sigma_s = \frac{N}{A} + \frac{N e_{x,s}}{I_x} y$$

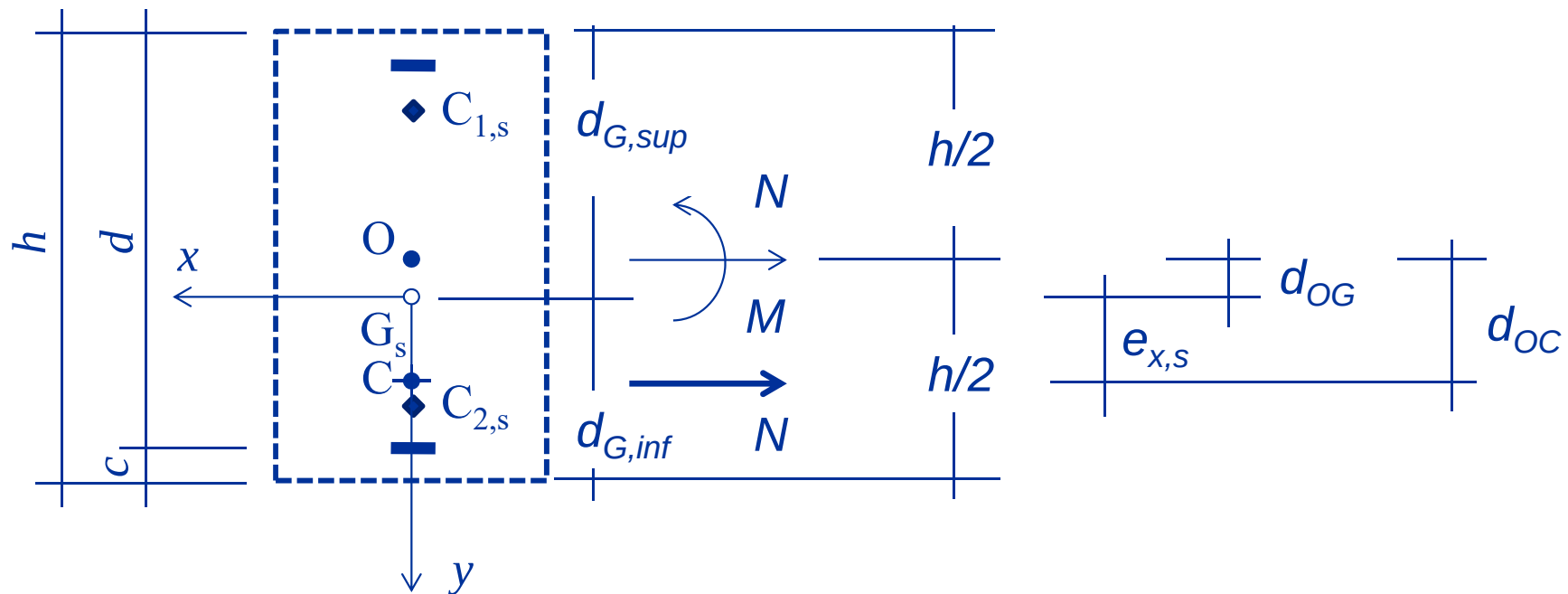
Attenzione !

Quando si applica il principio di sovrapposizione degli effetti, questi devono essere calcolati con riferimento ad una stessa sezione resistente.

Nel caso in esame, sia le tensioni provocate dallo sforzo normale che quelle causate dal momento flettente devono essere calcolate sulla sezione costituita dalle sole armature !!

Flessione composta

2° stadio (Sforzo normale di trazione interno al nocciolo)



$$\sigma_s = \frac{N}{A} + \frac{N e_{x,s}}{I_x} y$$

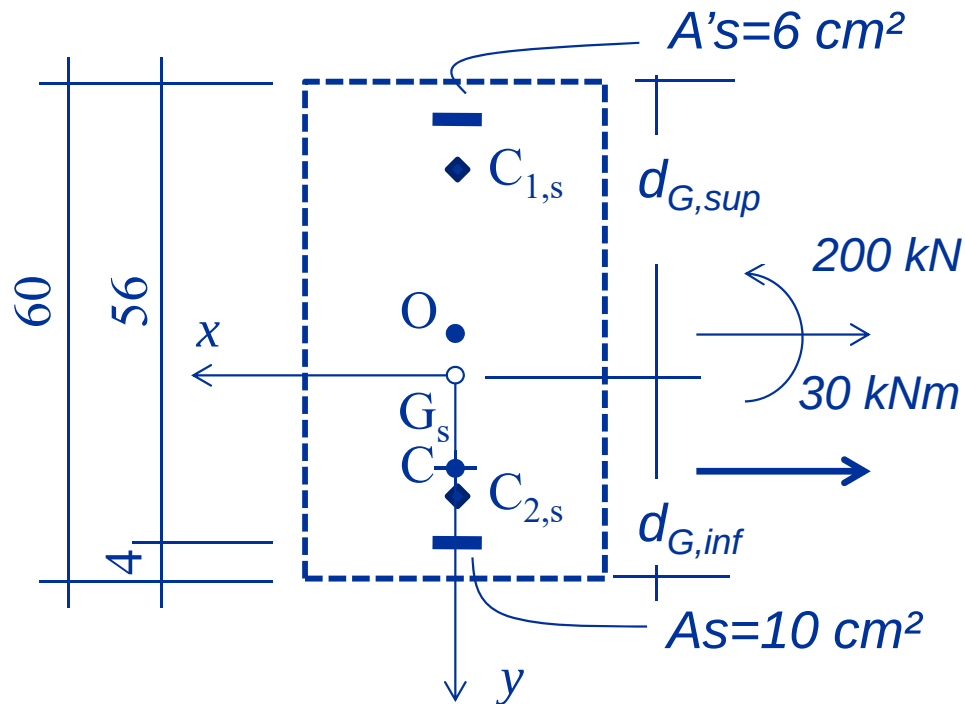
dove

$$e_{x,s} = \frac{M_x}{N} - \left(\frac{h}{2} - d_{G,inf} \right)$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 d_{OC} d_{OG}

Nota ! Il momento flettente va calcolato rispetto al baricentro della sezione resistente !!

2° stadio (Sforzo normale di trazione interno al nocciolo)



$$A = (10+6) 10^{-4} = 0.0016 \text{ m}^2$$

$$S = 10 \cdot 10^{-4} \cdot 0.56 + 6 \cdot 10^{-4} \cdot 0.04$$
$$= 0.000584 \text{ m}^3$$

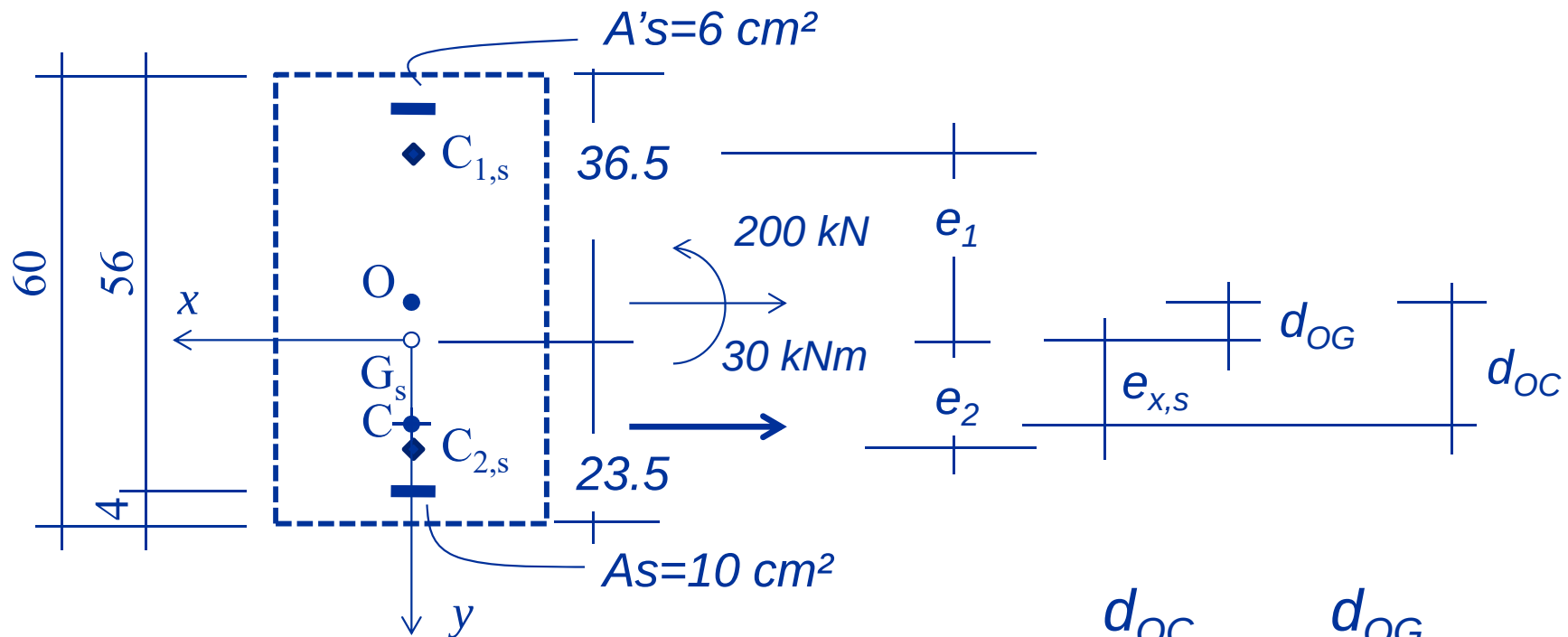
$$d_{G,\text{sup}} = \frac{0.000584}{0.0016} = 0.365 \text{ m}$$

$$d_{G.inf} = 0.6 - 0.365 = 0.235m$$

$$I = 10 \cdot 10^{-4} (0.235 - 0.04)^2 + 6 \cdot 10^{-4} (0.365 - 0.04)^2 = 0.0001014 \text{ m}^4$$

Esempio n.3

2° stadio (Sforzo normale di trazione interno al nocciolo)



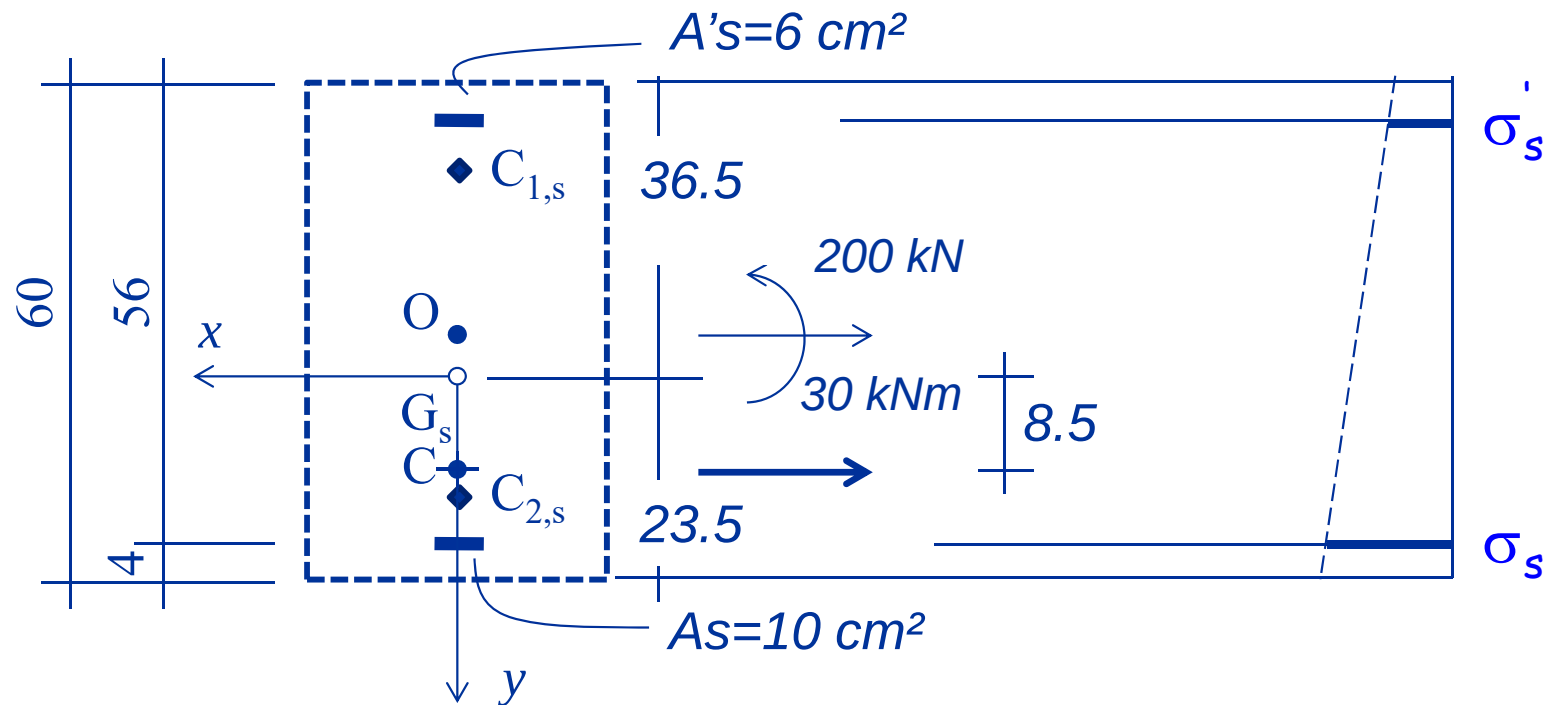
$$e_1 = \frac{I_x}{A d_{G,inf}} = \frac{0.0001014}{0.0016 \cdot 0.235} = 0.2697 \text{ m}$$

$$e_2 = \frac{I_x}{A d_{G,sup}} = \frac{0.0001014}{0.0016 \cdot 0.365} = 0.1736 \text{ m}$$

$$e_{x,s} = \frac{M_x}{N} - (h/2 - d_{G,inf}) = 30/200 - (0.30 - 0.235) = 0.085 \text{ m}$$

Esempio n.3

2° stadio (Sforzo normale di trazione interno al nocciolo)

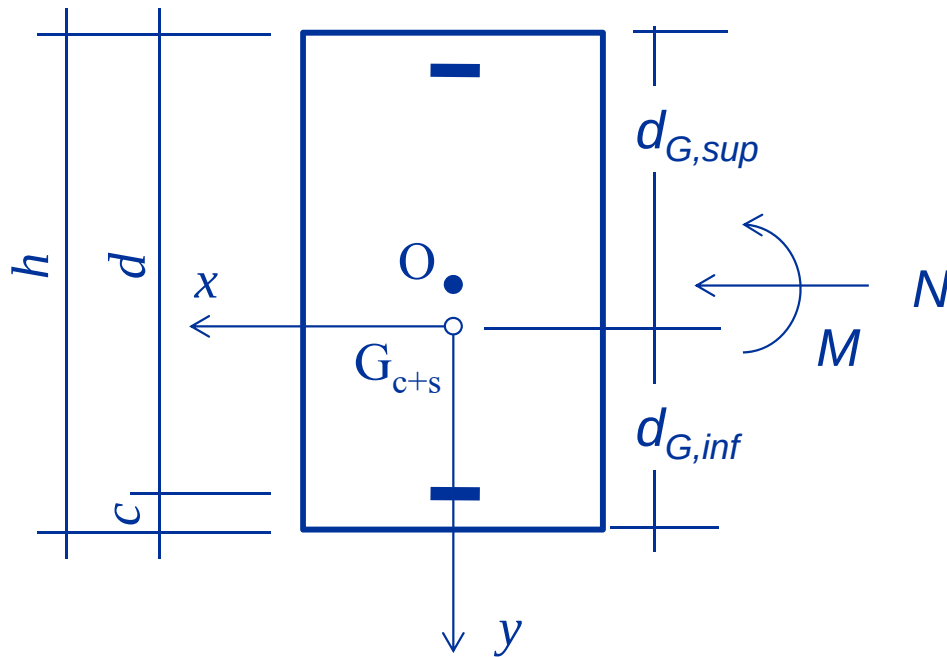


$$\sigma_s = \frac{200 \cdot 10^3}{0.0016 \cdot 10^6} + \frac{200 \cdot 10^3 \cdot 0.0085 \cdot 10^3}{0.0001014 \cdot 10^{12}} (0.235 - 0.04) 10^3 = 157.7 \text{ MPa}$$

$$\sigma'_s = \frac{200 \cdot 10^3}{0.0016 \cdot 10^6} + \frac{200 \cdot 10^3 \cdot 0.0085 \cdot 10^3}{0.0001014 \cdot 10^{12}} (0.365 - 0.04) 10^3 = 70.5 \text{ MPa}$$

Flessione composta

2° stadio (Sforzo normale di compress. interno al nocciolo)



2° caso: sforzo normale di compressione interno al nocciolo centrale del calcestruzzo più armature.

Nota ! In tale caso, reagiscono sia le armature che il calcestruzzo (tutto).

$$A = b \cdot h + n(A_s + A'_s)$$

$$S = \frac{b \cdot h^2}{2} + n(A_s d + A'_s c)$$

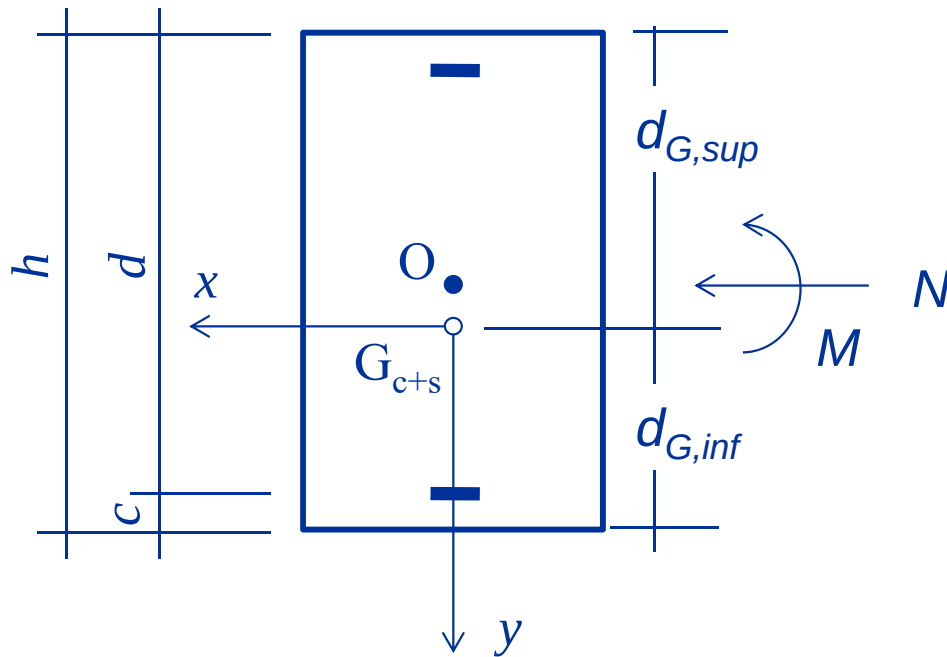
quindi

$$d_{G,sup} = S/A$$

$$d_{G,inf} = h - d_{G,sup}$$

Flessione composta

2° stadio (Sforzo normale di compress. interno al nocciolo)

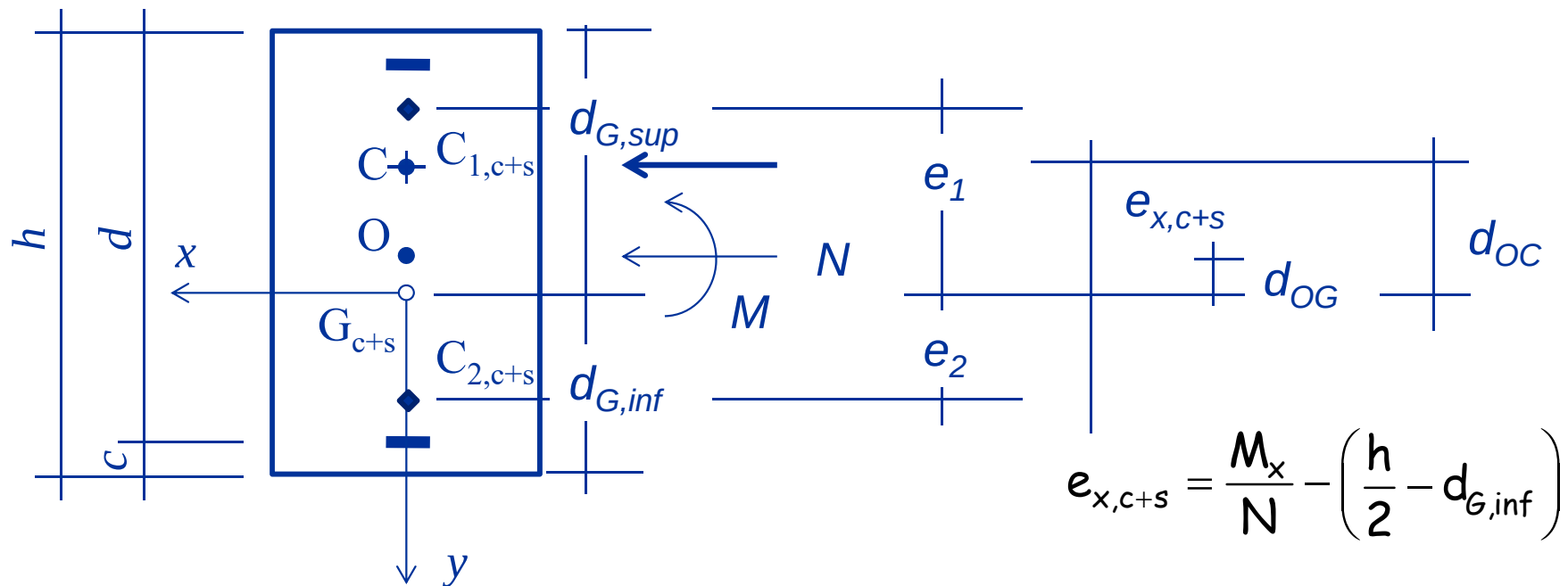


2° caso: sforzo normale di compressione interno al nocciolo centrale del calcestruzzo più armature.

$$I_x = b \cdot h \left(d_{G,sup} - \frac{h}{2} \right)^2 + \frac{bh^3}{12} + nA_s (d_{G,inf} - c)^2 + nA'_s (d_{G,sup} - c)^2$$

Flessione composta

2° stadio (Sforzo normale di compress. interno al nocciolo)



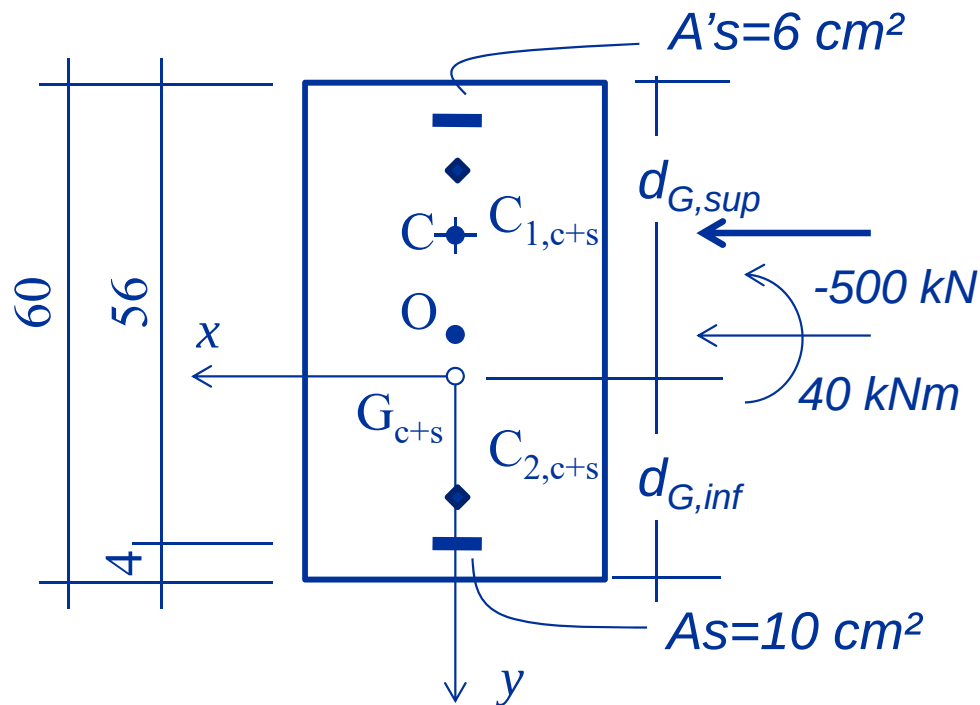
$$e_1 = \frac{I_x}{A d_{G,\text{inf}}} \quad e_2 = \frac{I_x}{A d_{G,\text{sup}}} \quad e \dots$$

$$\sigma_c = \frac{N}{A} + \frac{N e_{x,c+s}}{I_x} y$$

$$\sigma_s = n \sigma_c$$

Esempio n.4

2° stadio (Sforzo normale di compress. interno al nocciolo)



$$A = 0.3 \cdot 0.6 + 15 \cdot (10+6) 10^{-4} = 0.204 \text{ m}^2$$

$$S = \frac{0.30 \cdot 0.60^2}{2} + 15(10 \cdot 10^{-4} 0.56 + 6 \cdot 10^{-4} 0.04) = 0.06276 \text{ m}^3$$

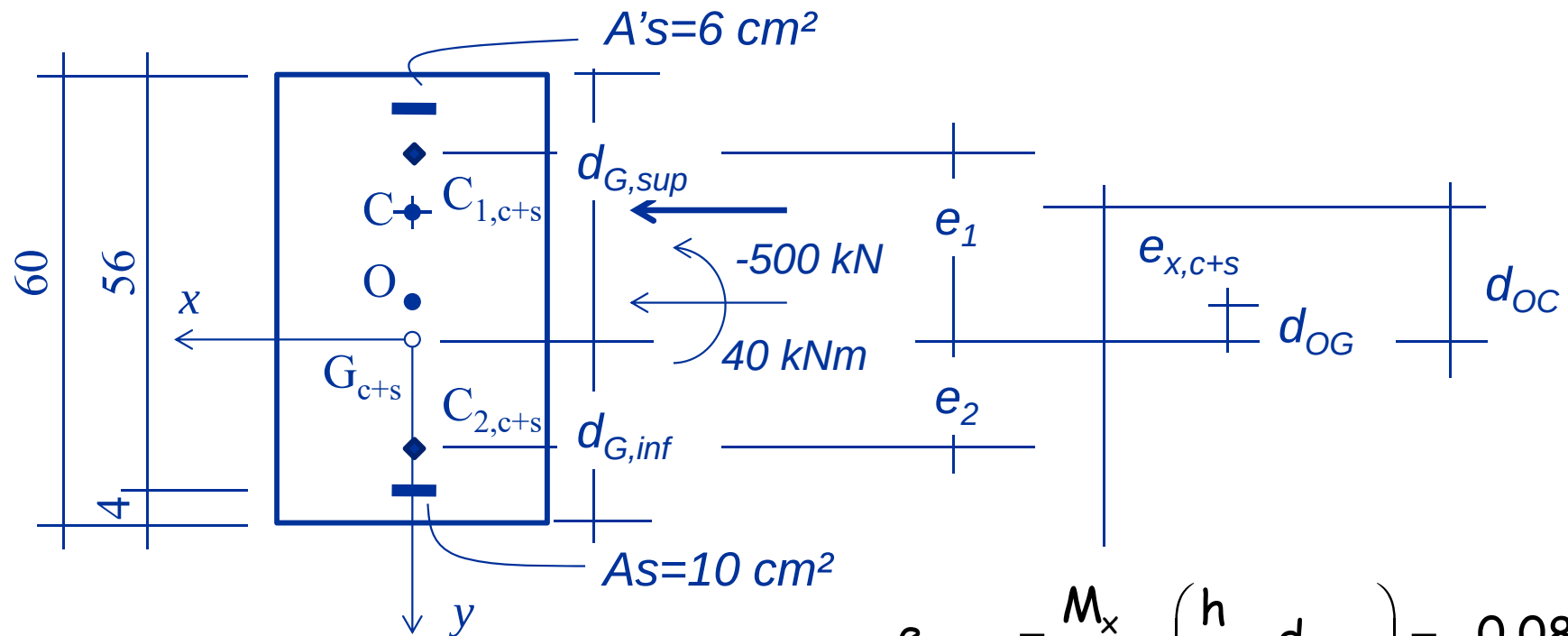
$$d_{G,sup} = \frac{0.06276}{0.204} = 0.3076 \text{ m}$$

$$d_{G,inf} = 0.6 - 0.3076 = 0.2924 \text{ m}$$

$$I = 0.30 \cdot 0.60 \cdot (0.3076 - 0.30)^2 + \frac{0.30 \cdot 0.60^3}{12} + 15(\dots) = 0.007010 \text{ m}^4$$

Esempio n.4

2° stadio (Sforzo normale di compress. interno al nocciolo)

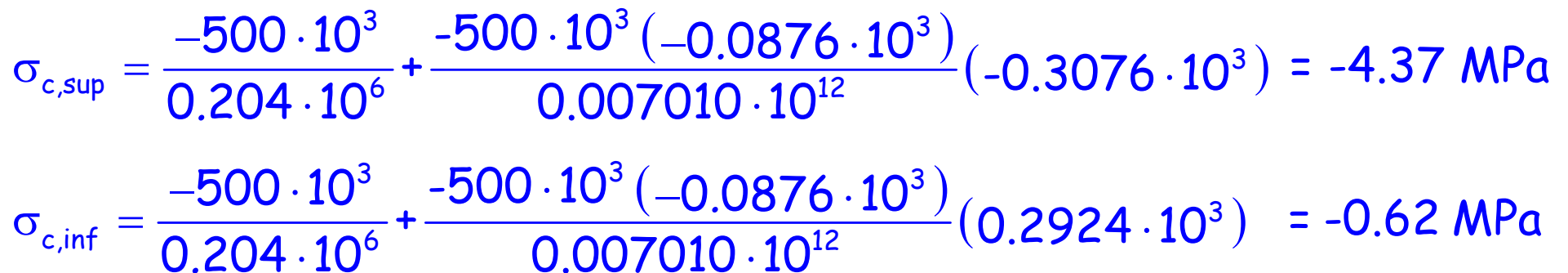


$$e_{x,c+s} = \frac{M_x}{N} - \left(\frac{h}{2} - d_{G,inf} \right) = -0.0876 \text{ m}$$

$$e_1 = \frac{0.007010}{0.204 \cdot 0.2924} = 0.1175 \text{ m}$$

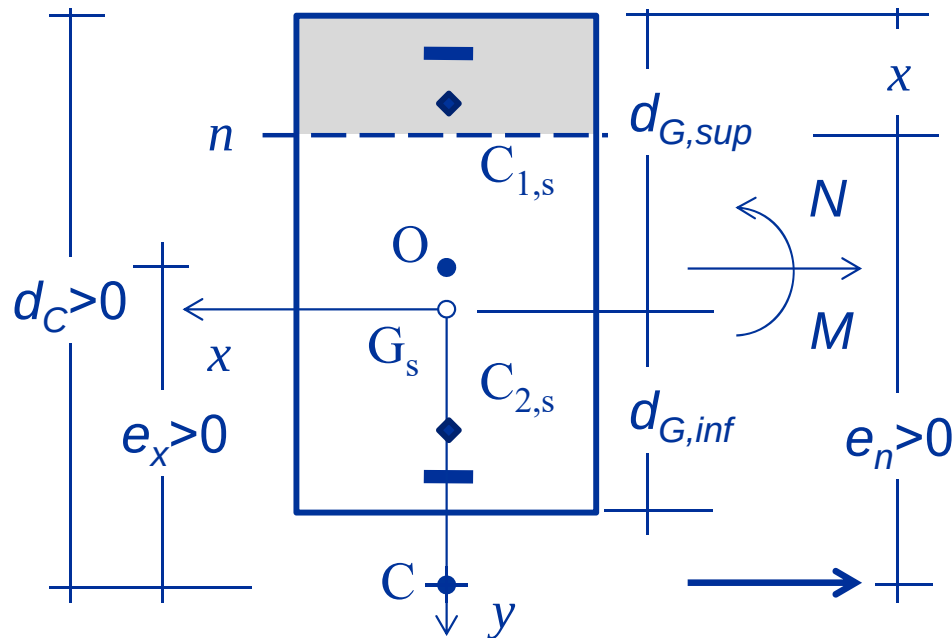
$$e_2 = \frac{0.007010}{0.204 \cdot 0.3076} = 0.1117 \text{ m}$$

2° stadio (Sforzo normale di compress. interno al nocciolo)

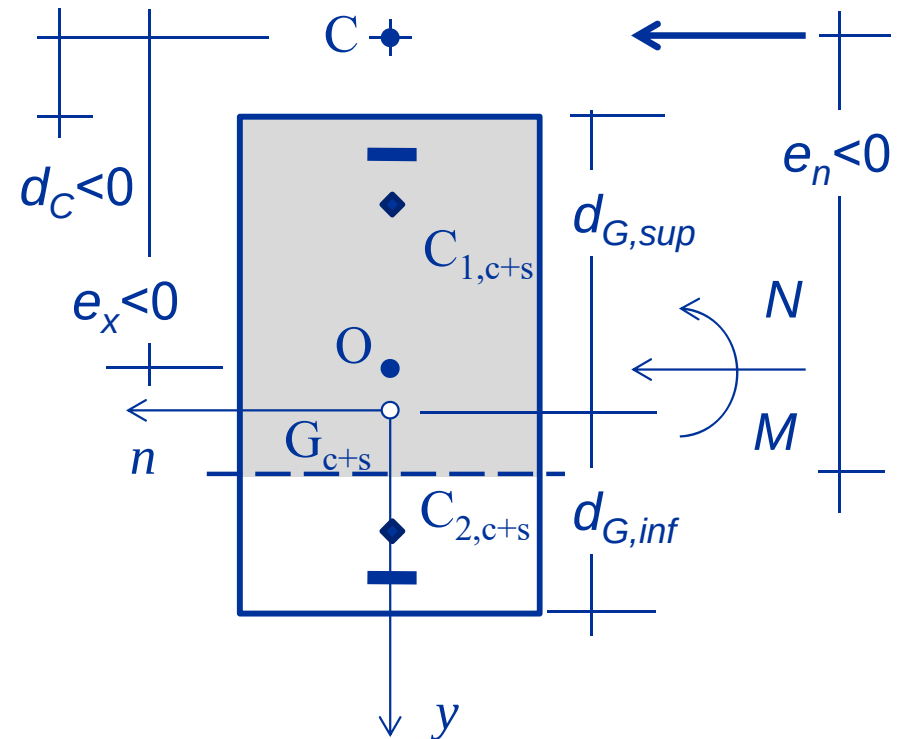


Flessione composta

2° stadio (Sforzo normale esterno al nocciolo)



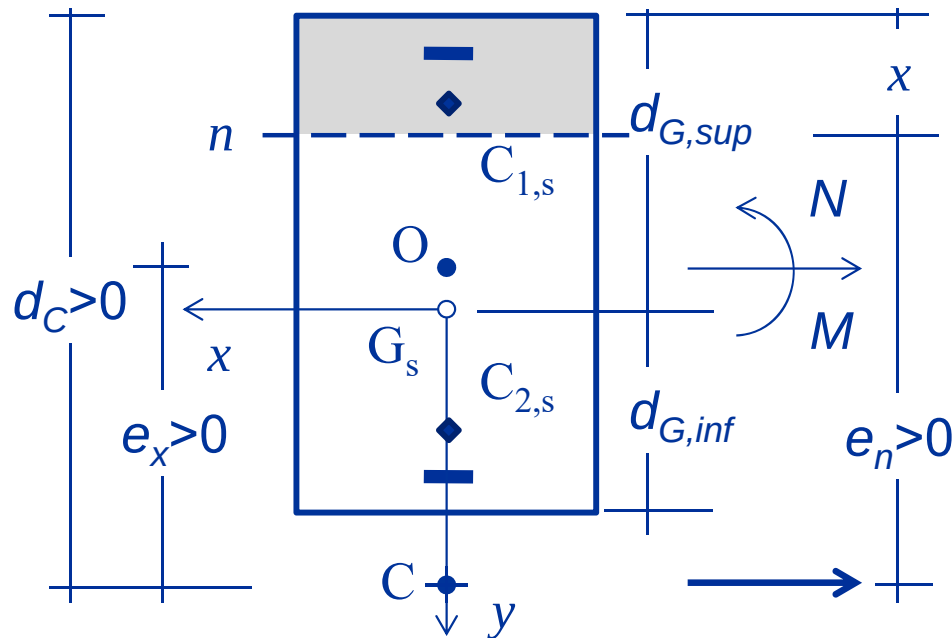
3° caso: sforzo normale di trazione esterno al nocciolo centrale delle sole armature.



4° caso: sforzo normale di compressione esterno al nocciolo centrale del calcestruzzo più armature.

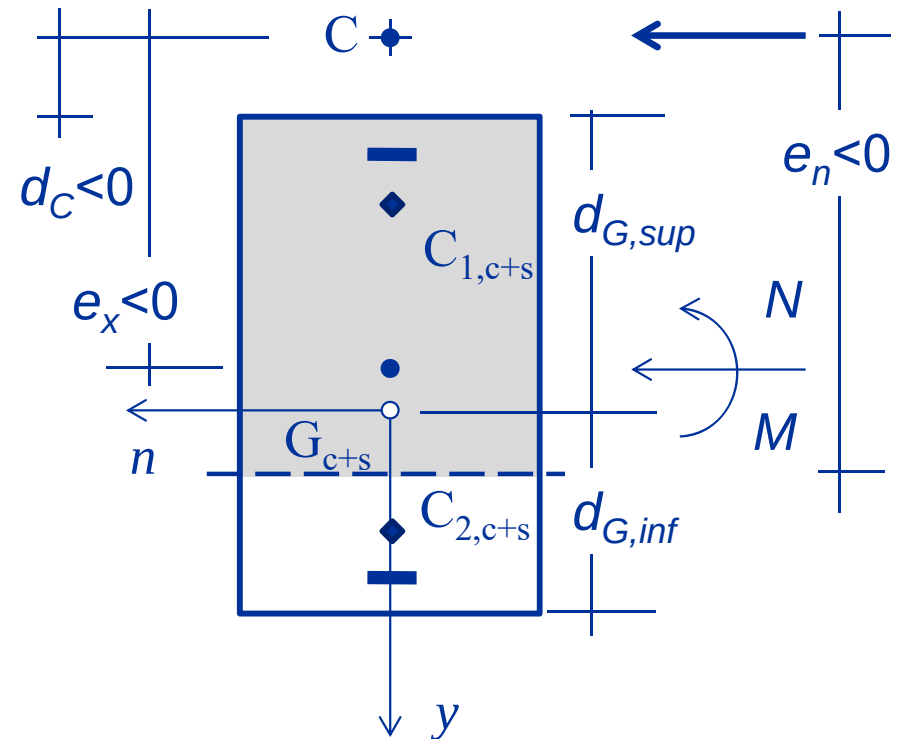
Flessione composta

2° stadio (Sforzo normale esterno al nocciolo)



distanza del centro di sollecitazione C dall'asse neutro

$$e_n = d_c - x$$

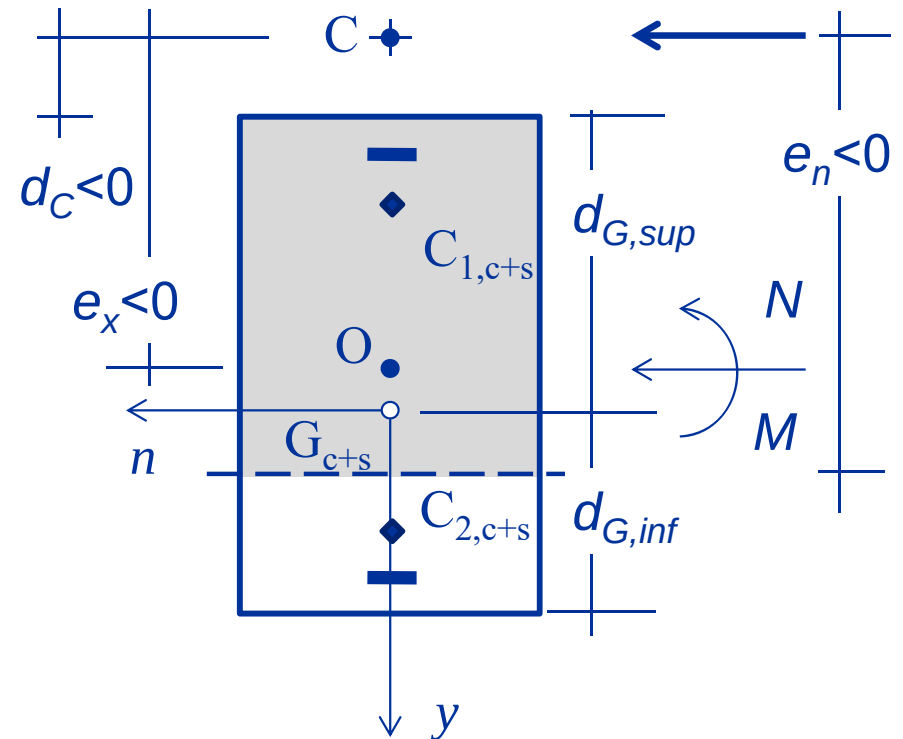
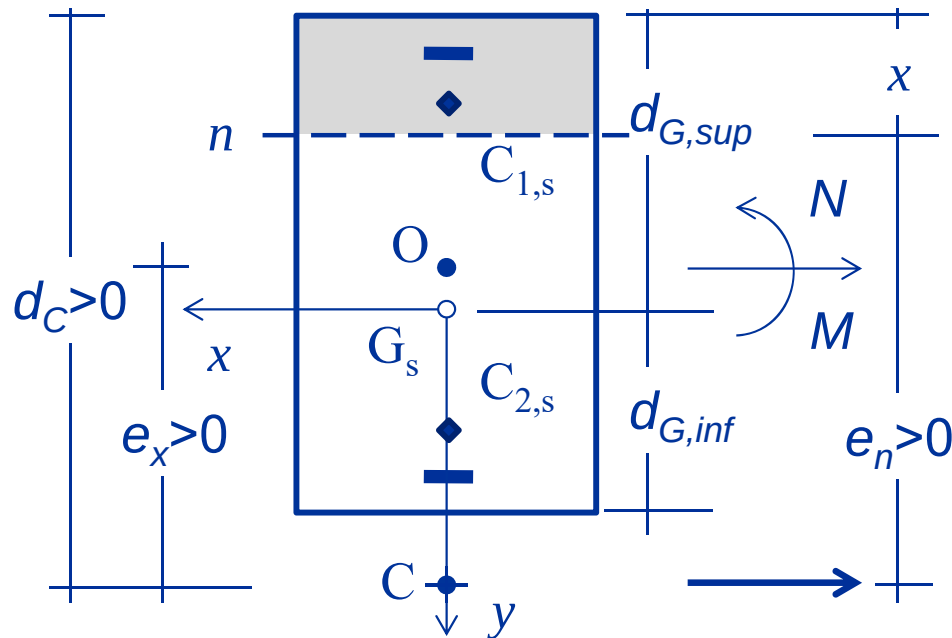


distanza del centro di sollecitazione C dal bordo superiore

$$d_c = e_x + \frac{h}{2}$$

Flessione composta

2° stadio (Sforzo normale esterno al nocciolo)



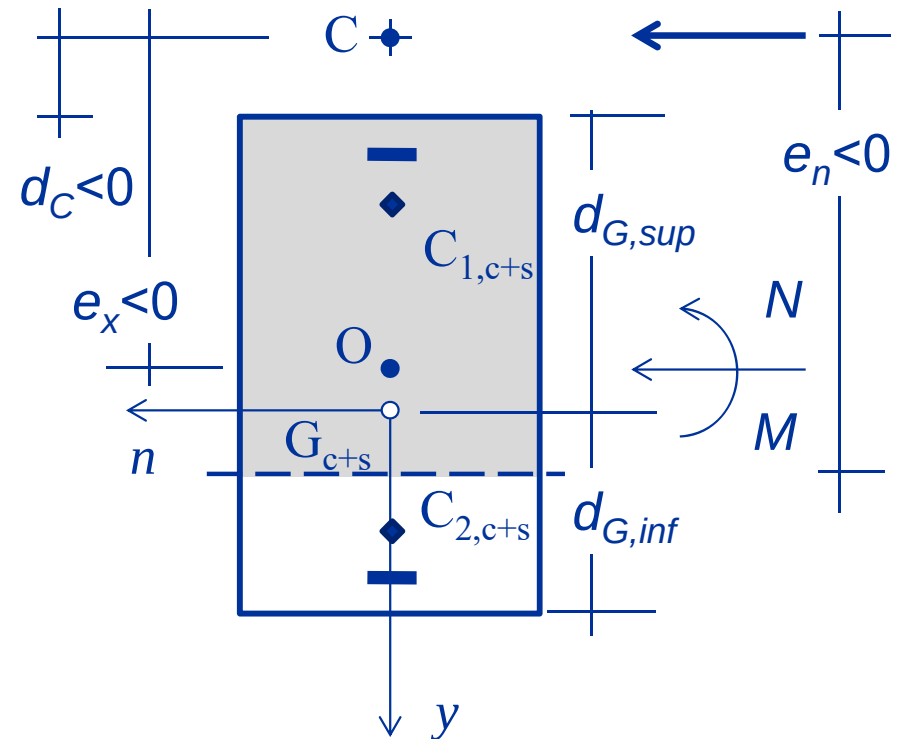
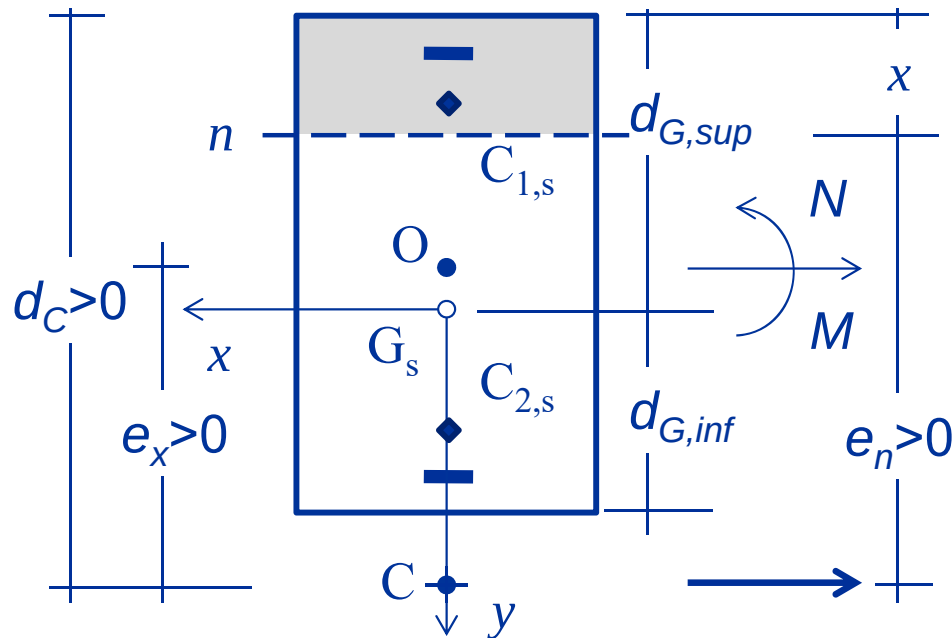
1. Determinazione dell'asse neutro

$$S_n e_n = I_n$$

oppure

$$S_n (d_c - x) = I_n$$

2° stadio (Sforzo normale esterno al nocciolo)



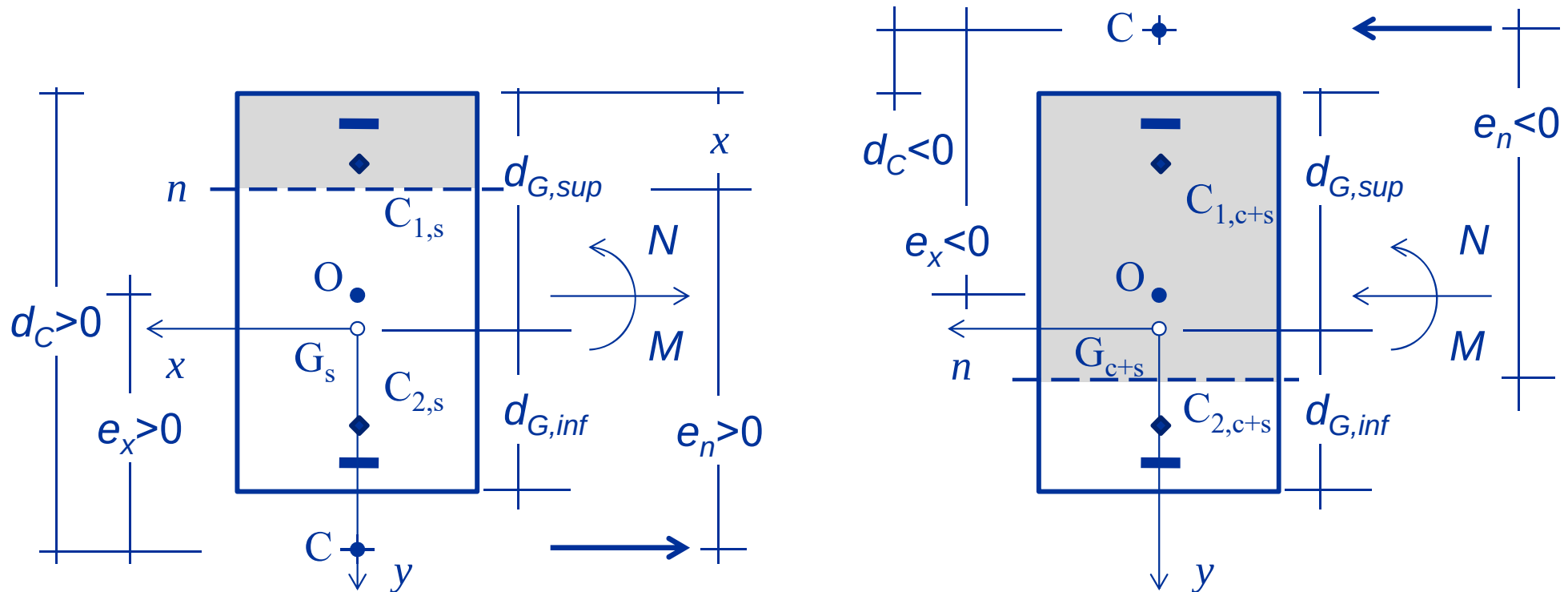
$$S_n = -\frac{bx^2}{2} - nA'_s(x-c) + nA_s(d-x)$$

$$I_n = \frac{bx^3}{3} + nA'_s(x-c)^2 + nA_s(d-x)^2$$

da cui ...

Flessione composta

2° stadio (Sforzo normale esterno al nocciolo)

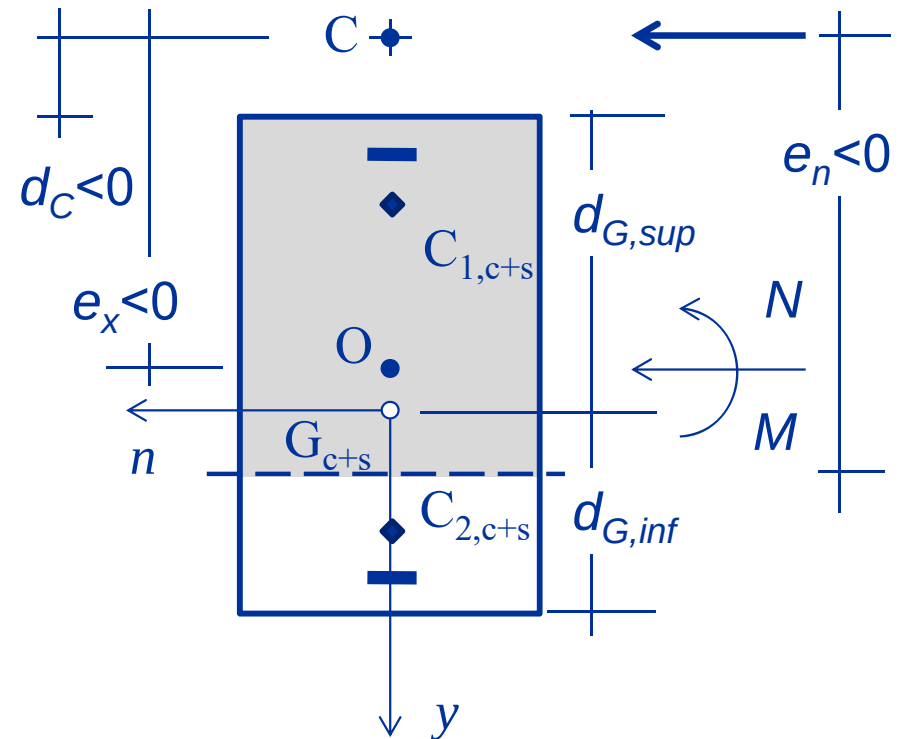
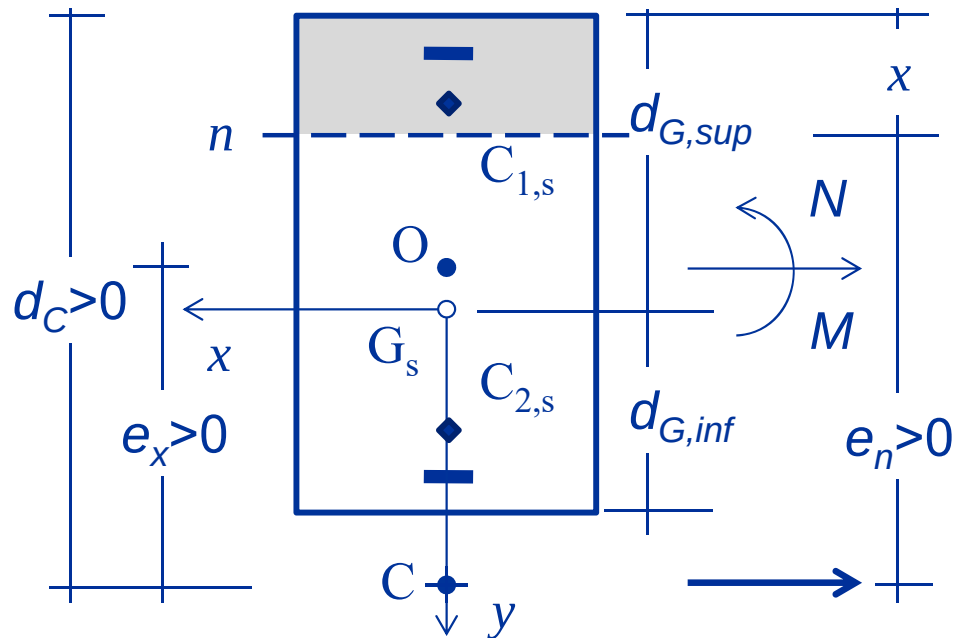


La posizione dell'asse neutro si ottiene dalla risoluzione della seguente equazione di terzo grado

$$x^3 - 3d_c x^2 + \frac{6n}{b} [A_s (d - d_c) + A'_s (c - d_c)] x - \frac{6n}{b} [A_s d (d - d_c) + A'_s c (c - d_c)] = 0$$

Flessione composta

2° stadio (Sforzo normale esterno al nocciolo)

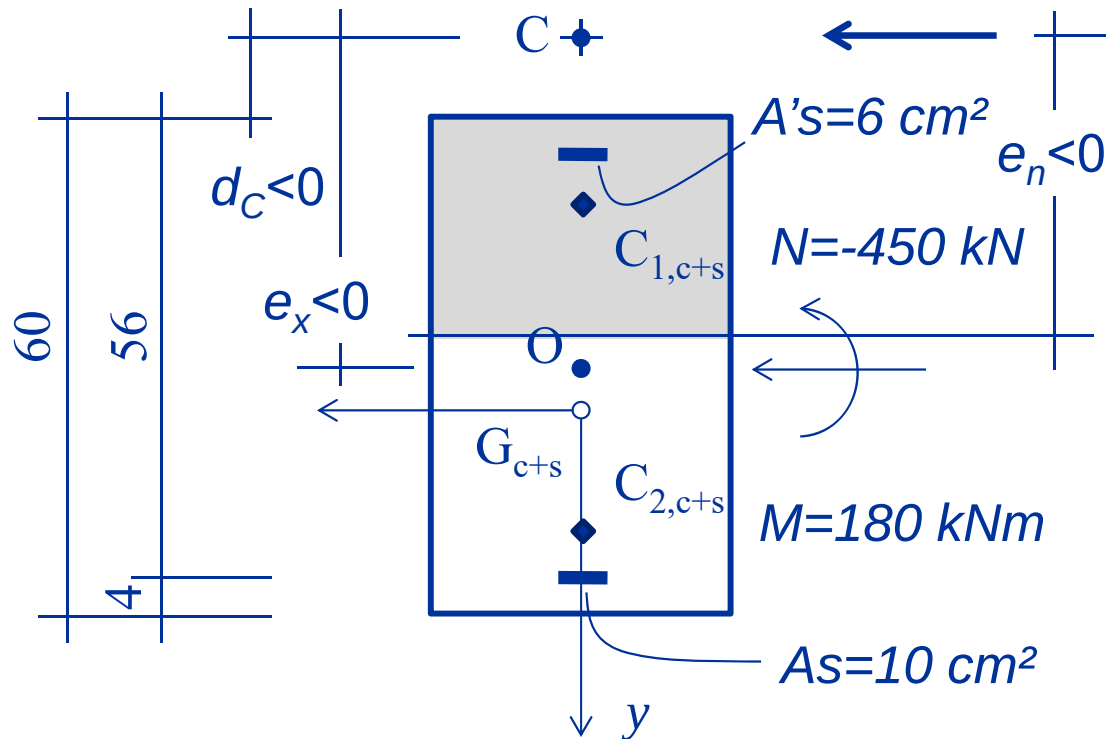


2. Calcolo delle tensioni

$$\sigma_c = \frac{N}{S_n} s \quad \text{e} \quad \sigma_s = n \frac{N}{S_n} s$$

Esempio n.5

2° stadio (Sforzo normale esterno al nocciolo)



$$d_c = e_x + \frac{h}{2} = \frac{180}{-450} + \frac{0.60}{2} = -0.10 \text{ m}$$

Dalla risoluzione dell'equazione di terzo grado si ha:

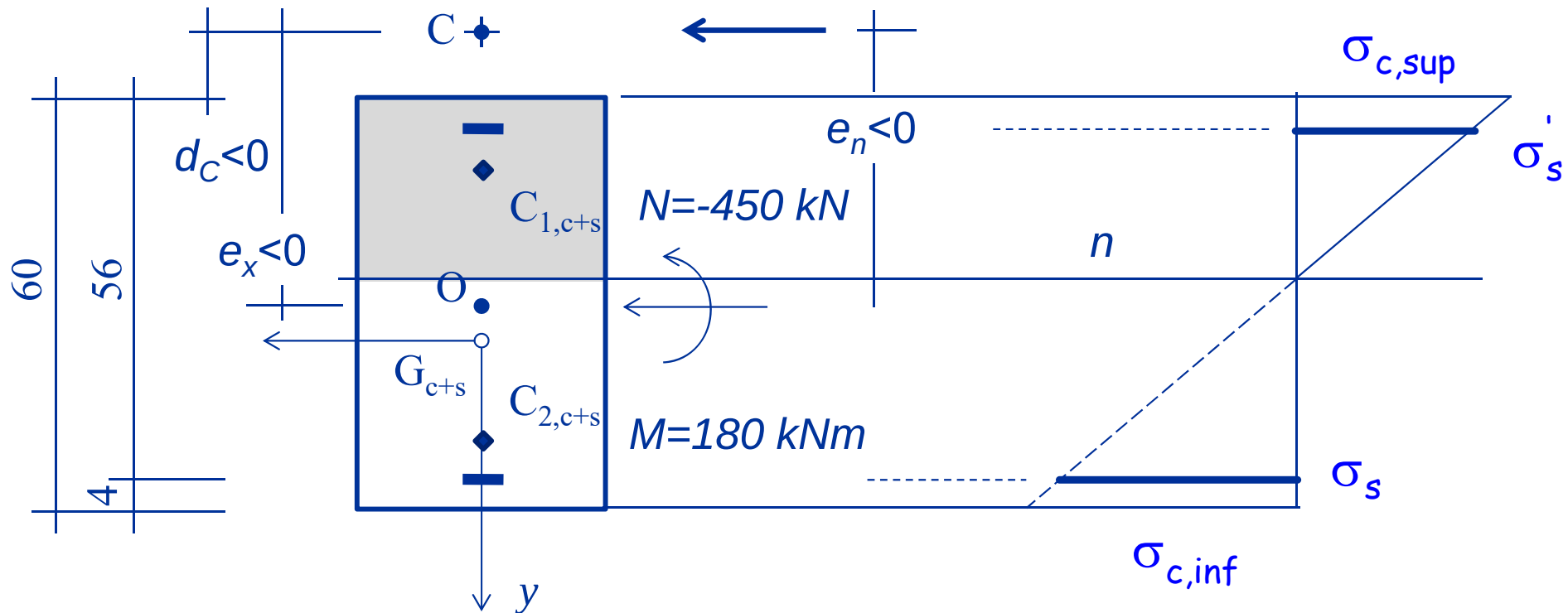
$$x = 0.2862 \text{ m}$$

$$S_n = -\frac{bx^2}{2} - nA'_s(x-c) + nA_s(d-x)$$

$$S_n = \frac{0.30 \cdot 0.2862^2}{2} - 15 \cdot 6 \cdot 10^{-4} \cdot (0.2862 - 0.04) + 15 \cdot 10 \cdot 10^{-4} \cdot (0.56 - 0.2862) = -0.010395 \text{ m}^3$$

Esempio n.5

2° stadio (Sforzo normale esterno al nocciolo)

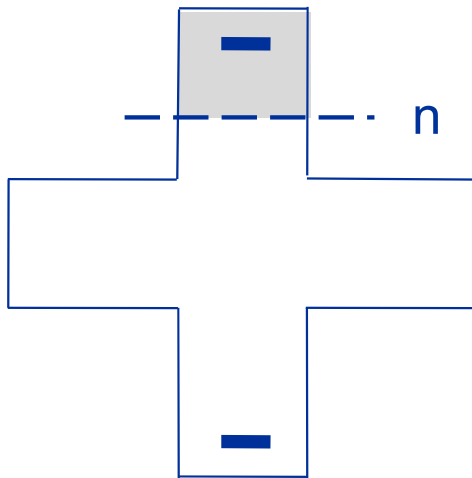


$$\sigma_{c,sup} = \frac{-450 \cdot 10^3}{-0.01039 \cdot 10^9} (-0.2862 \cdot 10^3) = -12.39 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{s,inf} = 15 \frac{-450 \cdot 10^3}{-0.01039 \cdot 10^9} (0.56 - 0.2862) \cdot 10^3 = 177.8 \text{ MPa}$$

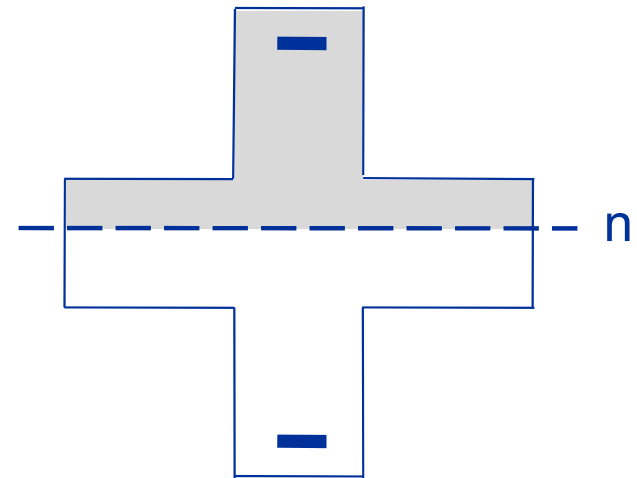
Sezioni non rettangolari

2° stadio



Se la parte compressa
è rettangolare

la sezione può essere trattata come
rettangolare

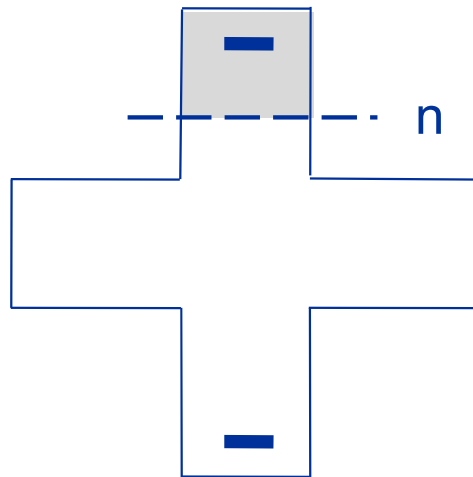


Se la parte compressa
non è rettangolare

la sezione NON può essere trattata
come rettangolare

Sezioni non rettangolari

2° stadio



In presenza di una sezione rettangolare a tratti si può fare inizialmente l'ipotesi che la parte compressa sia rettangolare (nel caso in figura, che l'asse neutro tagli l'anima superiore).

Si determina la posizione dell'asse neutro con la formula:

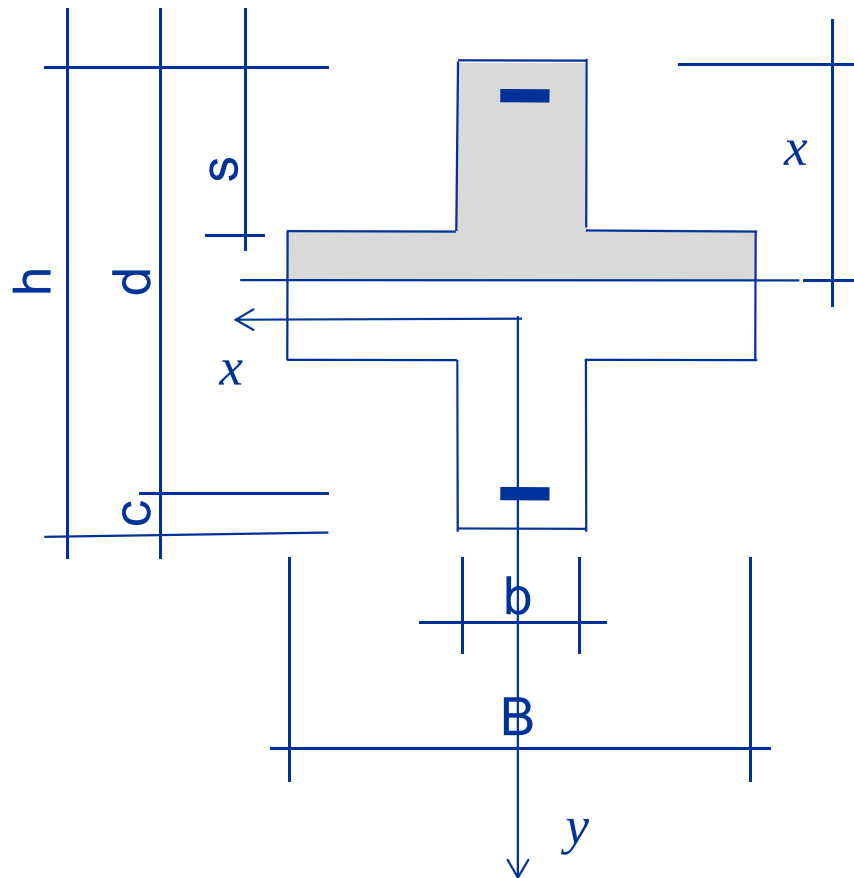
$$S_n e_n = I_n$$

Se l'asse neutro taglia l'anima superiore

la posizione dell'asse neutro è corretta e il momento d'inerzia della sezione reagente omogeneizzata può essere calcolato con le formule della sezione rettangolare.

Sezioni non rettangolari

2° stadio



Se l'asse neutro non taglia l'anima superiore

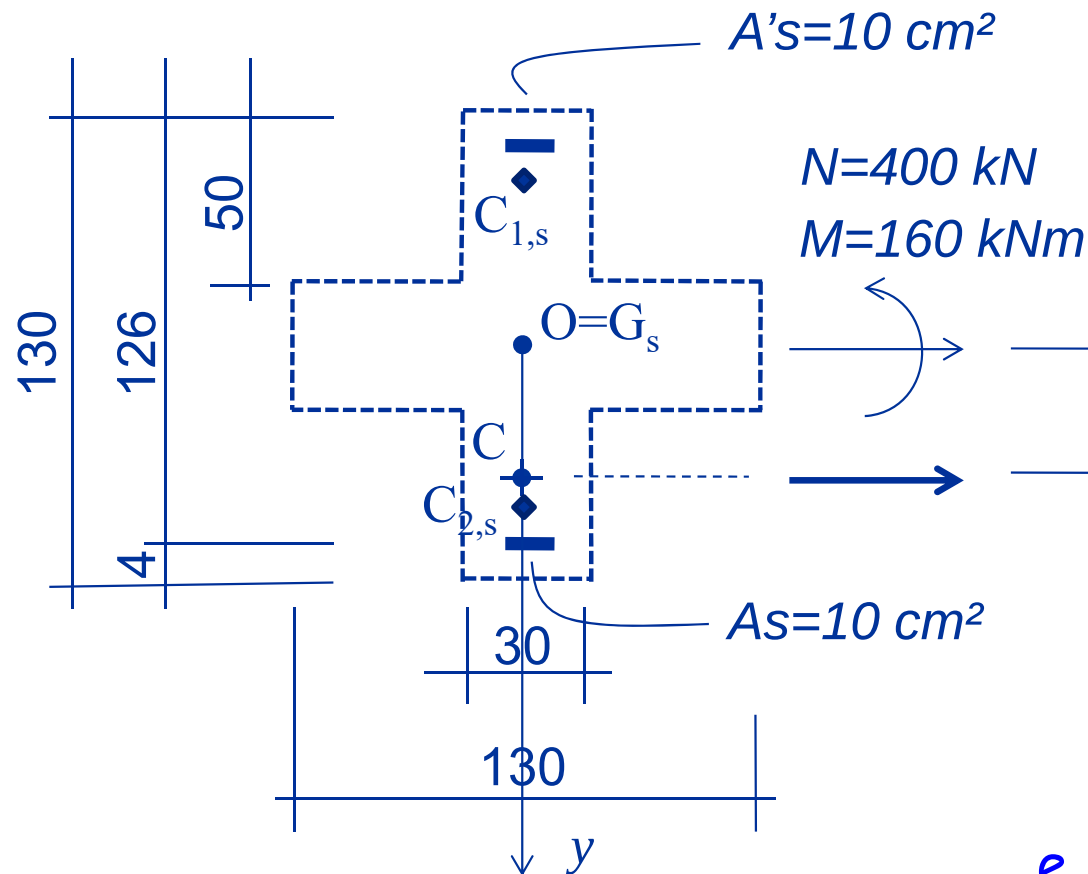
la posizione calcolata dell'asse neutro è errata. La posizione dell'asse neutro deve essere rivalutata ipotizzando che l'asse neutro tagli l'ala. La nuova posizione dell'asse neutro può essere calcolata imponendo

$$S_n e_n = I_n$$

dove S_n e I_n sono definiti in funzione della forma non rettangolare della parte compressa.

Esempio n. 8

2° stadio



Centro di sollecitazione
interno al nocciolo delle
sole armature:

SEZIONE TUTTA TESA

$e_x = 0.40 \text{ m}$

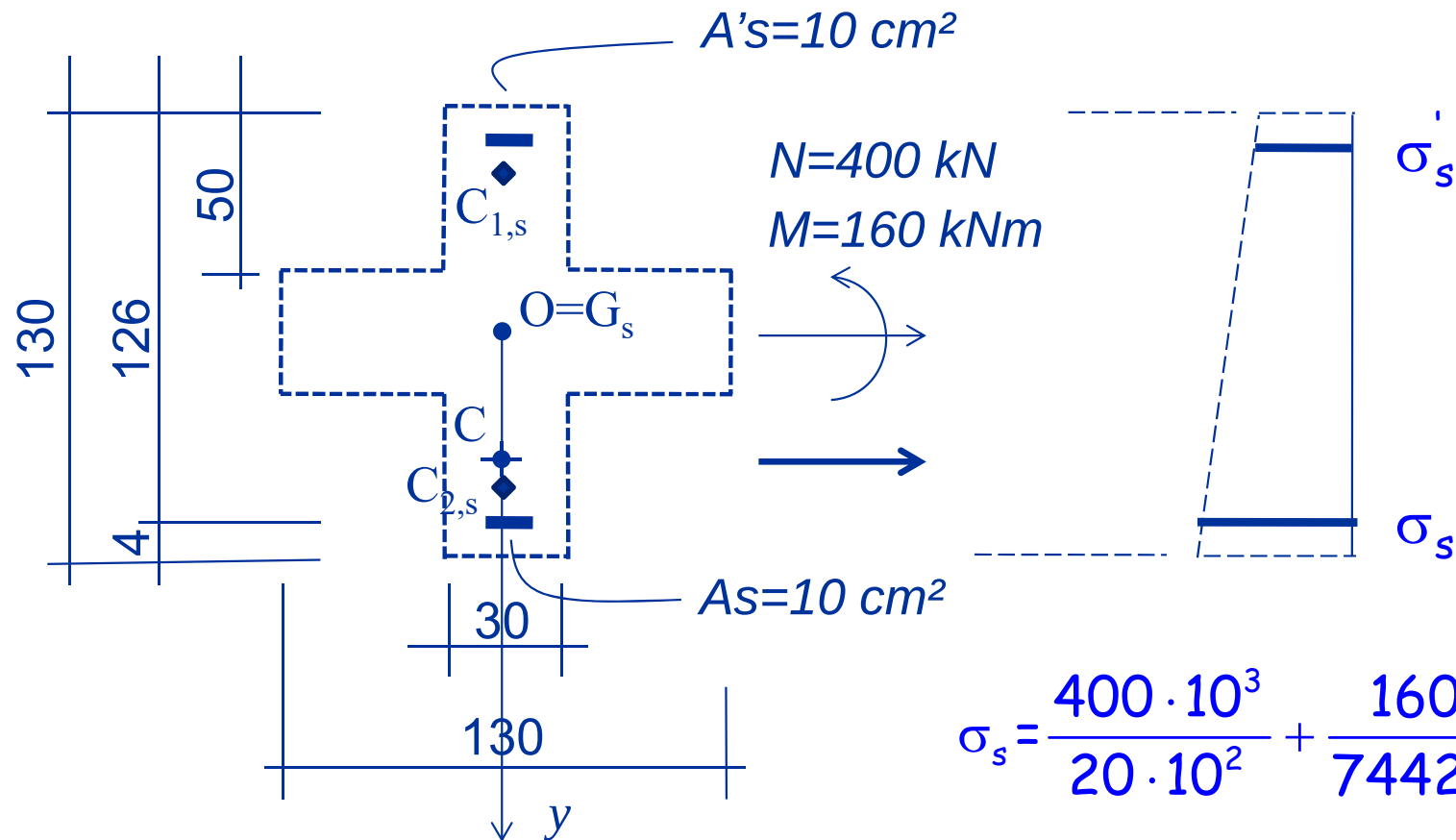
$$e_x = \frac{M_x}{N} = \frac{160}{400} = 0.40 \text{ m}$$

$$e_1 = \frac{I_x}{A d_{G,\text{inf}}} = \frac{74420}{20 \cdot 65} = 57.25 \text{ cm}$$

$$e_2 = e_1$$

Esempio n. 8

2° stadio



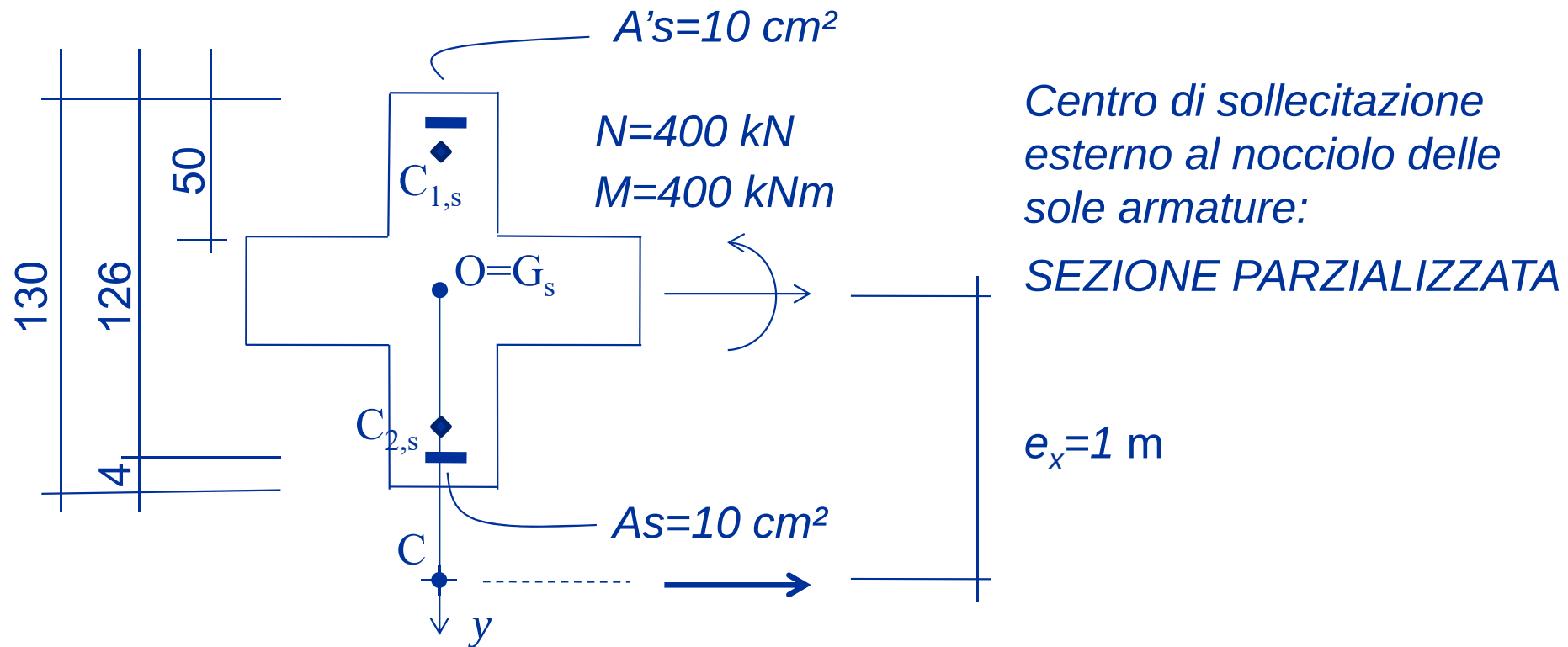
$$\sigma_s = \frac{400 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^2} + \frac{160 \cdot 10^6}{74420 \cdot 10^4} (61 \cdot 10)$$

$$= 331.1\text{ MPa}$$

$$\sigma_s' = 200 + 0.215(-610) = 68.9\text{ MPa}$$

Esempio n. 9

2° stadio



$$e_x = \frac{M_x}{N} = \frac{400}{400} = 1 \text{ m}$$

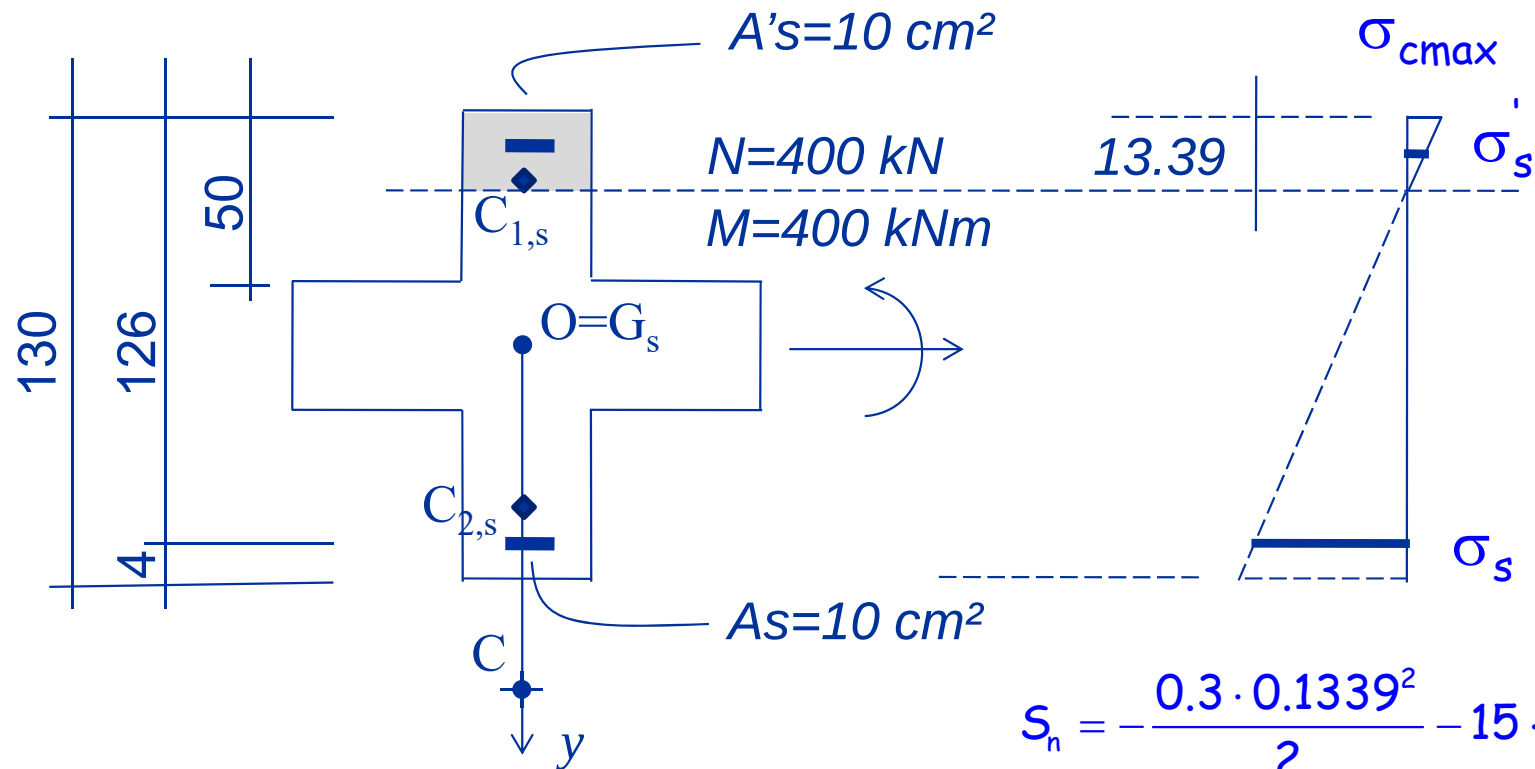
$$x^3 - 4.95x^2 - 0.60x - 0.16674 = 0$$



$$x=13.39 \text{ cm}$$

Esempio n. 9

2° stadio



$$\sigma_{cmax} = \frac{400 \cdot 10^3}{0.01279 \cdot 10^9} (-0.01339 \cdot 10^3)$$

$$= -4.19 \text{ MPa}$$

$$S_n = -\frac{0.3 \cdot 0.1339^2}{2} - 15 \cdot 10 \cdot 10^{-4} \cdot 0.0939 +$$

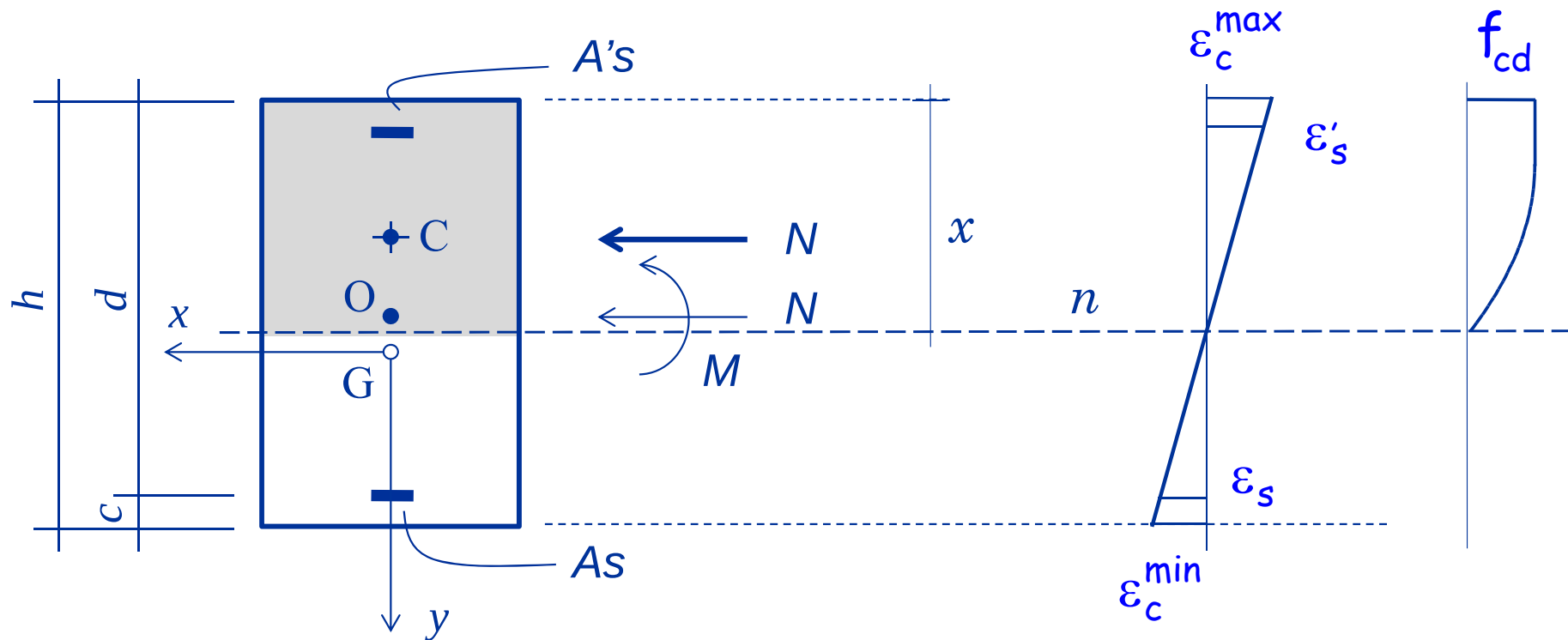
$$15 \cdot 10 \cdot 10^{-4} \cdot (1.26 - 0.1339) = 0.01279 \text{ m}^3$$

$$\sigma_s = 15 \cdot 0.03127 (1260 - 133.9)$$

$$= 528.2 \text{ MPa}$$

Flessione composta

3° stadio



Dati:

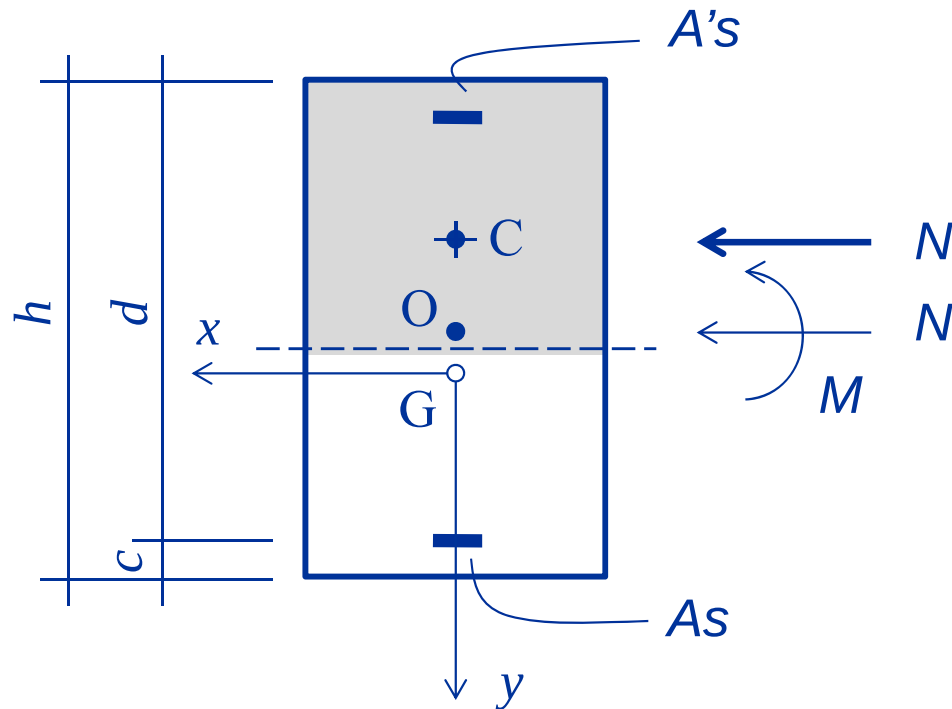
- Geometria della sezione
- Armature
- Coppia $M_{Ed}-N_{Ed}$

Incognite:

Momento resistente M_{Rd}
corrispondente a N_{Ed}

Flessione composta

3° stadio

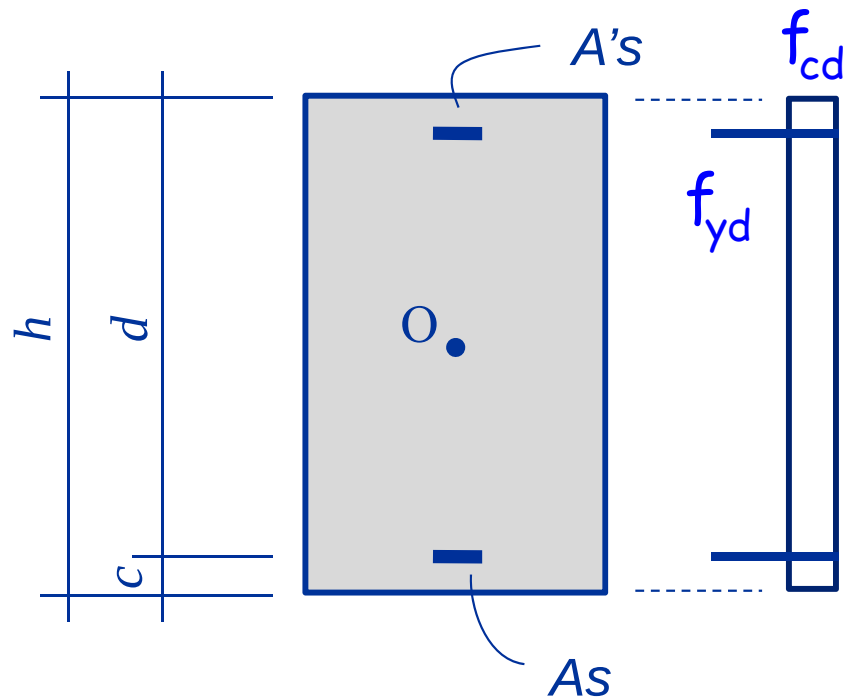


Procedura:

1. Individuazione dell'asse neutro
2. Calcolo delle tensioni
3. Calcolo del momento resistente

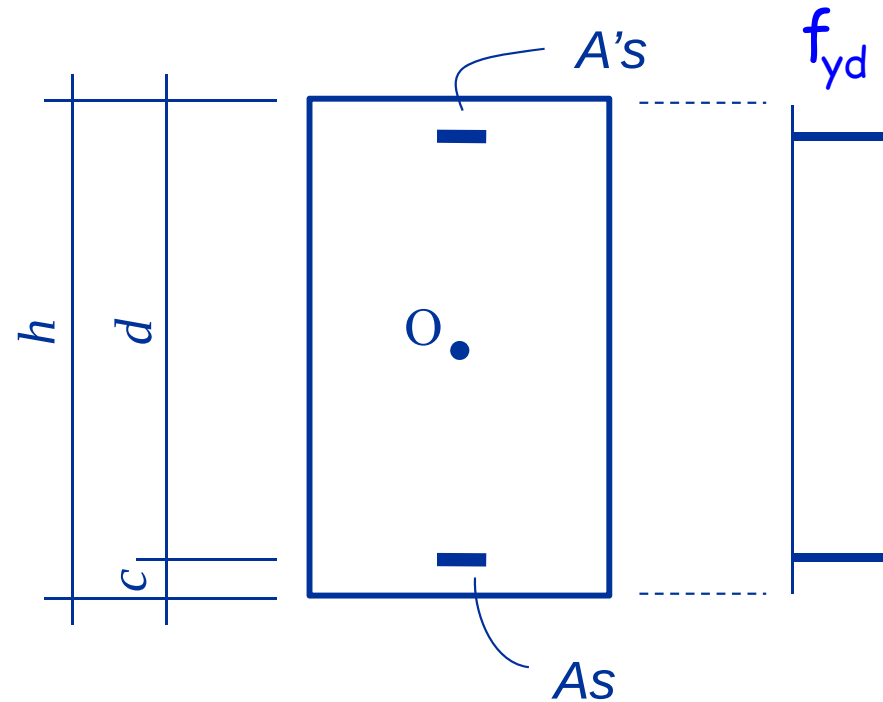
Massimo sforzo normale

3° stadio



Massimo sforzo di compressione

$$N_{Rd} = - (A_c f_{cd} + A_{s,tot} f_{yd})$$



Massimo sforzo di trazione

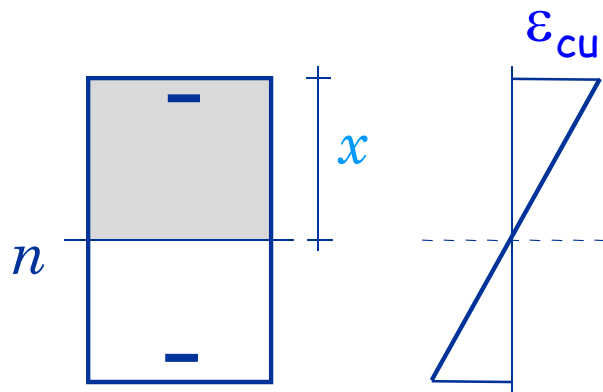
$$N_{Rd} = A_{s,tot} f_{yd}$$

Individuazione asse neutro

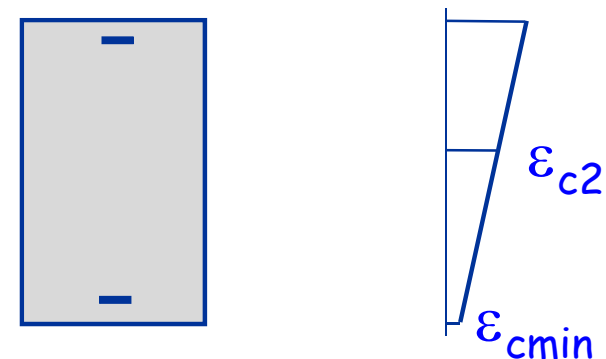
3° stadio

Avendo posto solo un limite alla deformazione massima del calcestruzzo, esistono due possibilità relativamente ai diagrammi di deformazione :

Sezione parzializzata

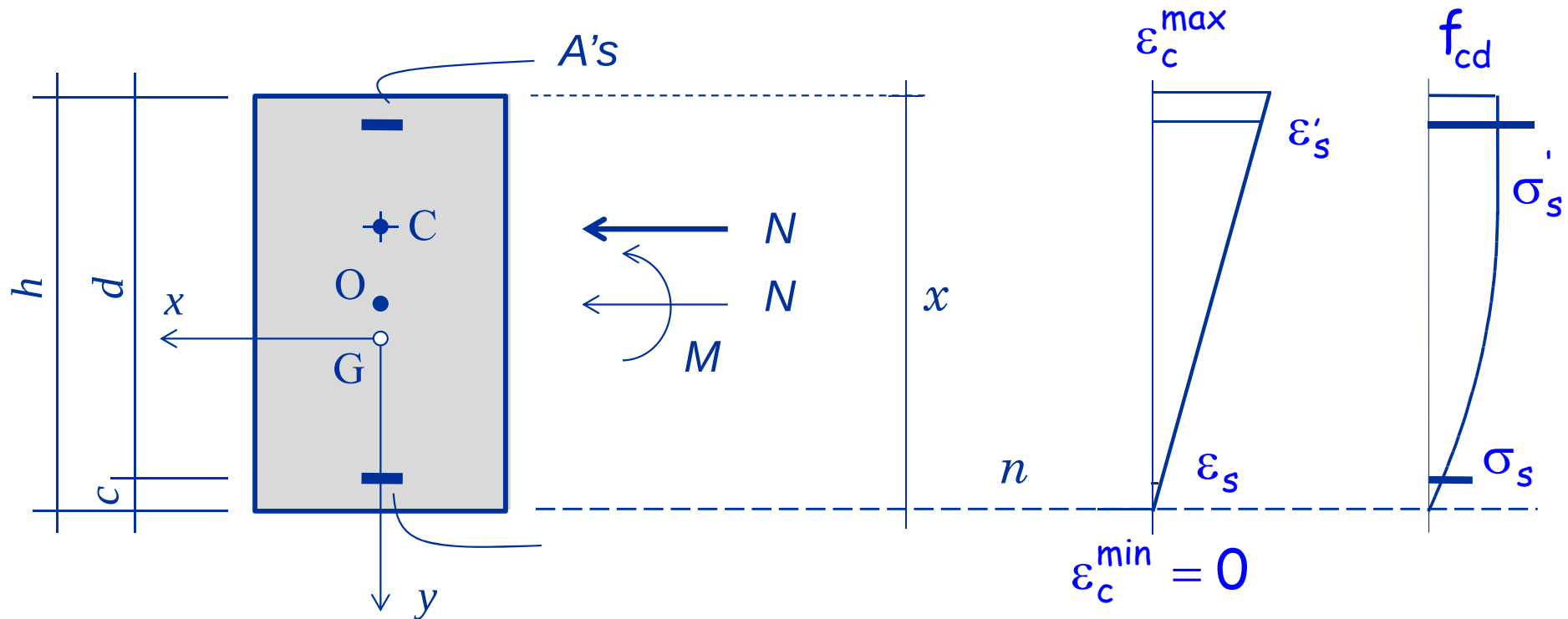


Sezione tutta compressa



Individuazione asse neutro

3° stadio

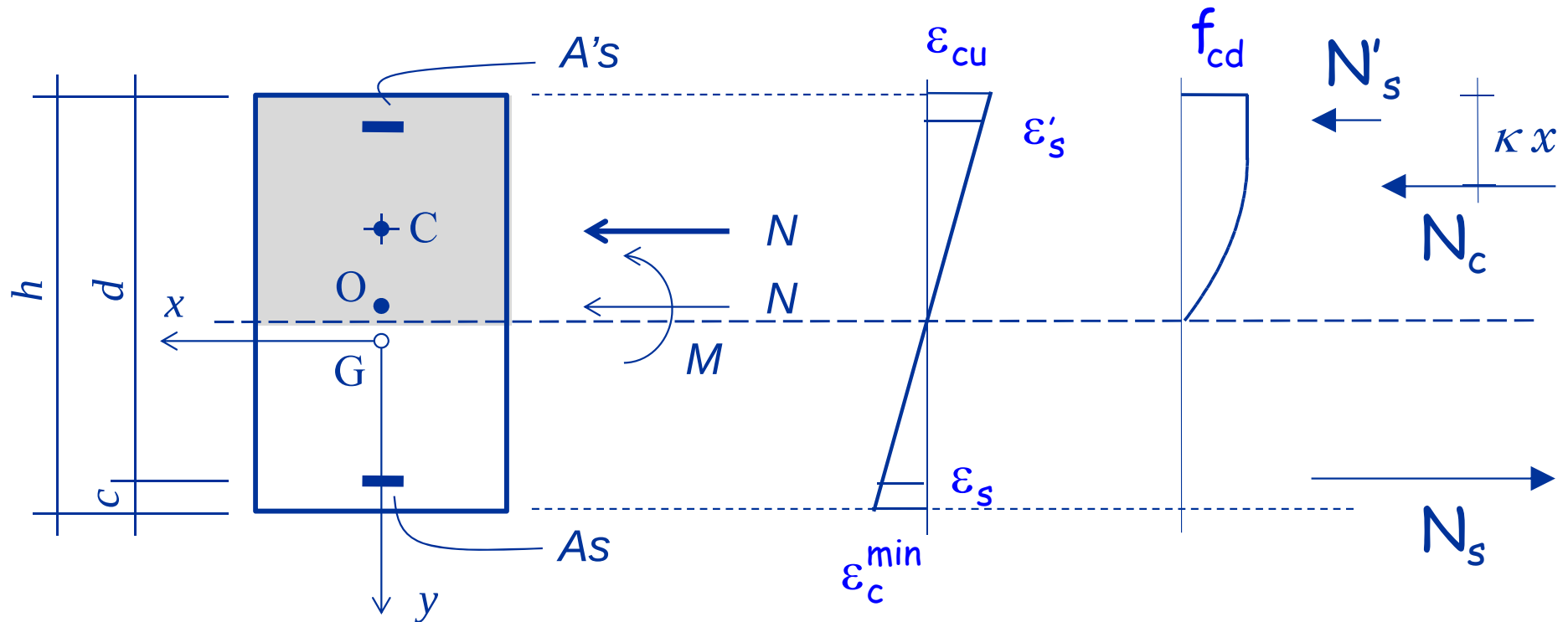


Lo sforzo normale corrispondente al diagramma di passaggio tra sezioni parzializzate e tutte compresse è:

$$N_{Rd} = -\beta A_c f_{cd} + \sum A_{s,i} \sigma_{s,i}$$

Individuazione asse neutro

3° stadio (sezione parzializzata)



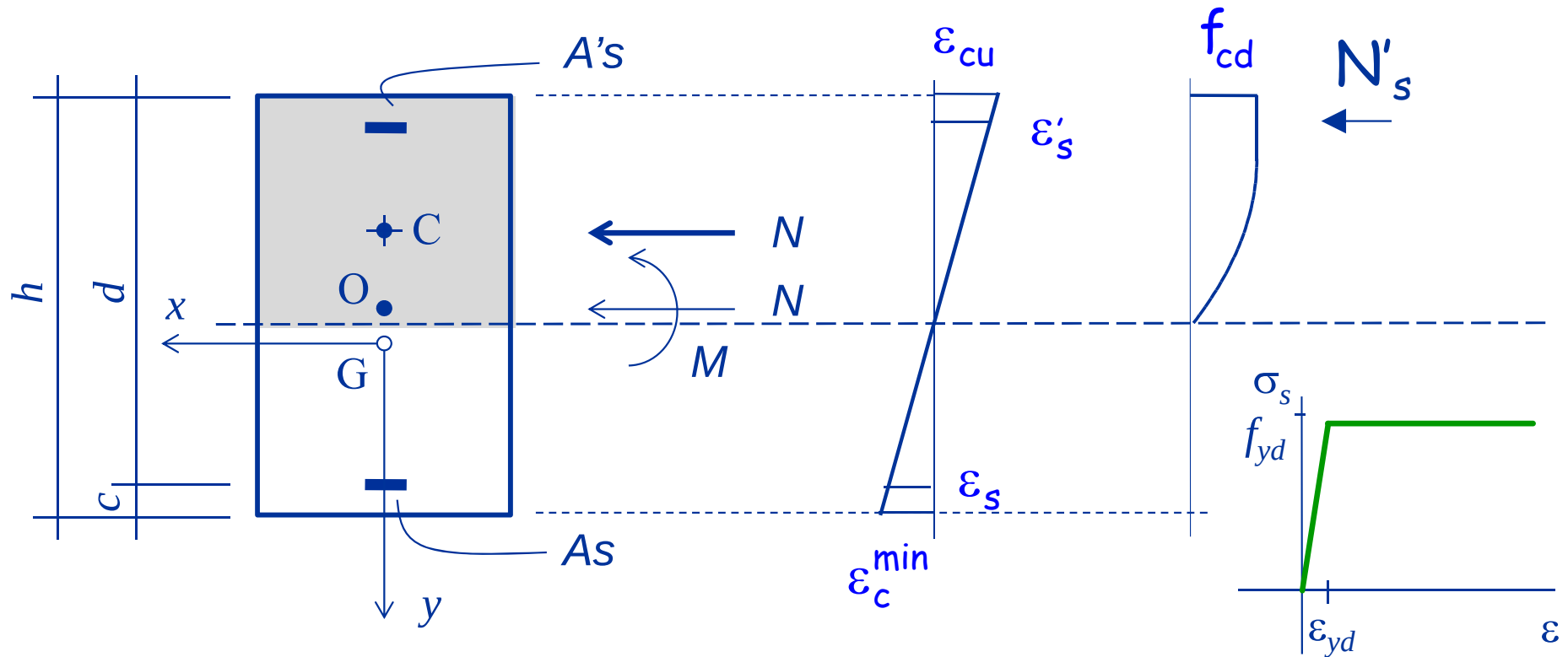
1. Individuazione dell'asse neutro:

$$N_c + N'_s + N_s = N_{Ed}$$

(equilibrio alla traslazione)

Risultante delle tensioni

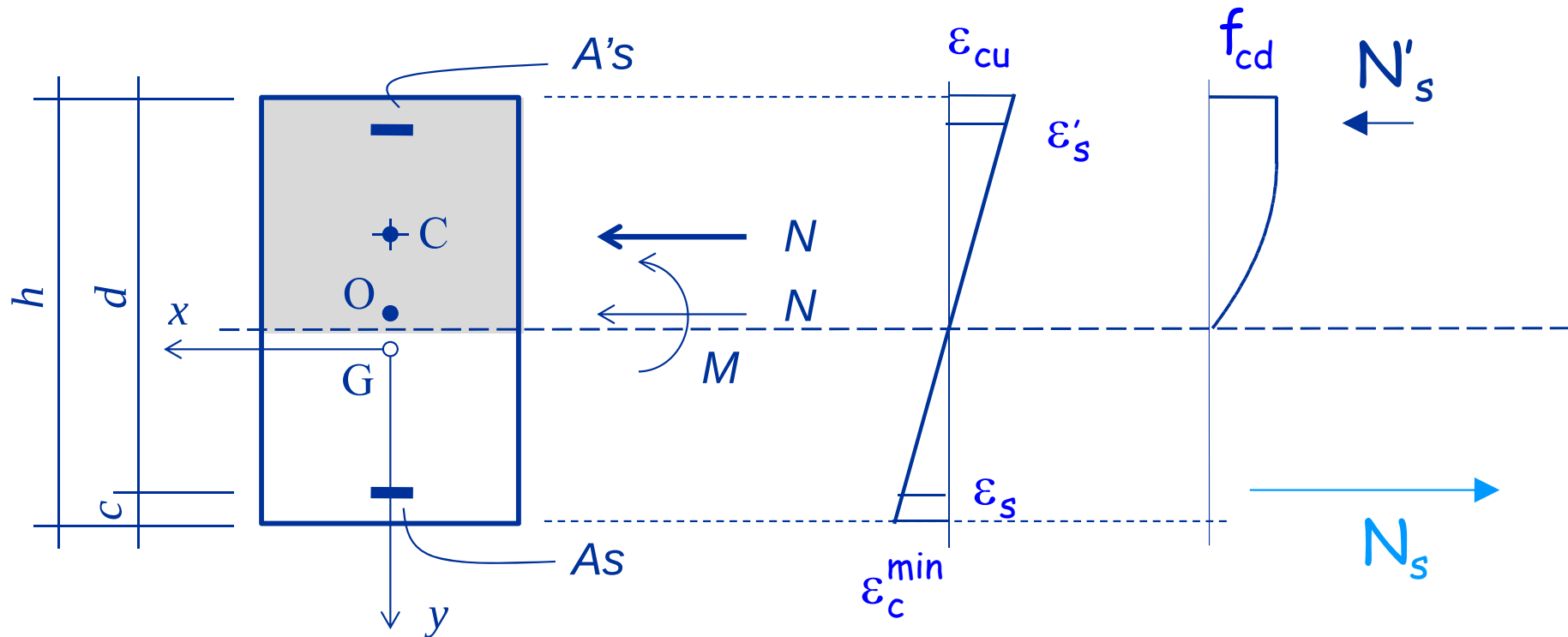
armatura compressa (sezione parzializzata)



$$\epsilon'_s = \frac{x - c}{x} \epsilon_{cu} \left\{ \begin{array}{ll} \text{se } \epsilon'_s > \epsilon_{yd} & \Rightarrow \sigma'_s = f_{yd} \Rightarrow N'_s = A'_s f_{yd} \\ \text{se } \epsilon'_s \leq \epsilon_{yd} & \Rightarrow \sigma'_s = \frac{\epsilon'_s}{\epsilon_{yd}} f_{yd} \Rightarrow N'_s = A'_s \sigma'_s \end{array} \right.$$

Risultante delle tensioni

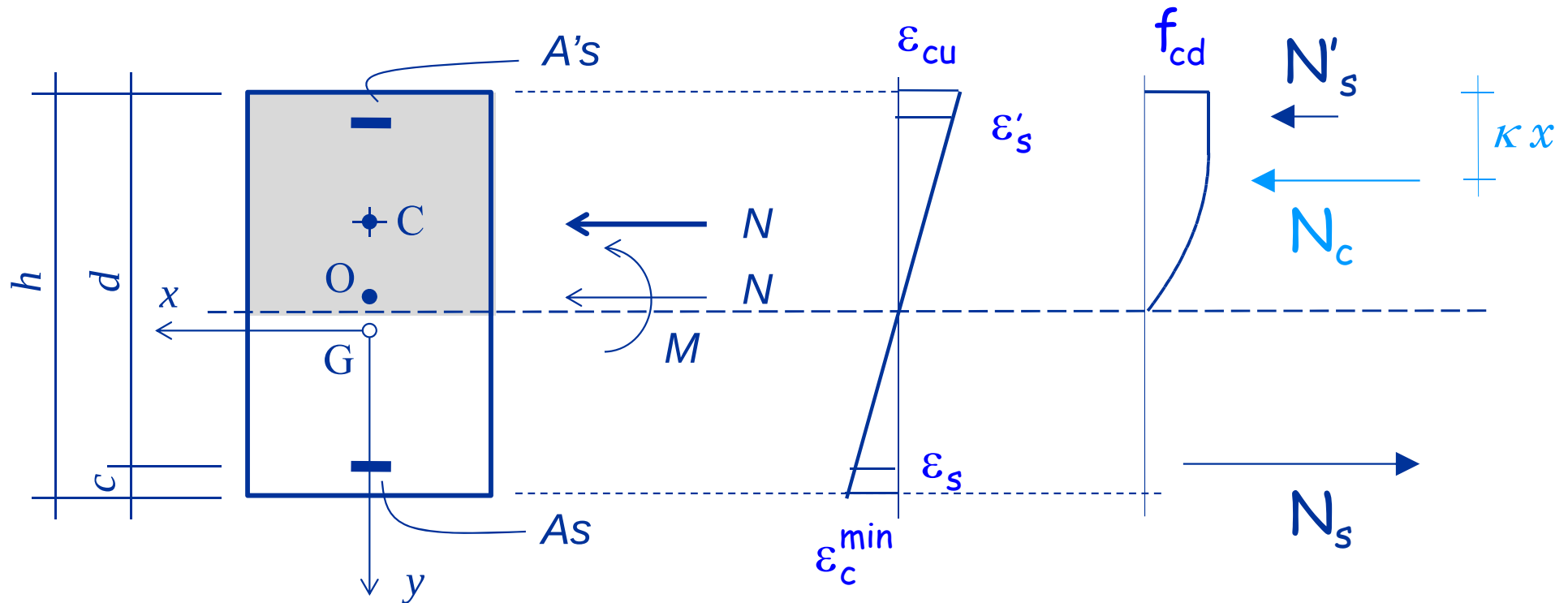
armatura compressa (sezione parzializzata)



$$\epsilon_s = \frac{d-x}{x} \epsilon_{cu} \begin{cases} \text{se } \epsilon_s > \epsilon_{yd} & \Rightarrow \sigma_s = f_{yd} & \Rightarrow N_s = A_s f_{yd} \\ \text{se } \epsilon_s \leq \epsilon_{yd} & \Rightarrow \sigma_s = \frac{\epsilon_s}{\epsilon_{yd}} f_{yd} & \Rightarrow N_s = A_s \sigma_s \end{cases}$$

Risultante delle tensioni

armatura compressa (sezione parzializzata)



$$N_c = \beta \ b \ x \ f_{cd}$$

per sezione rettangolare, $\beta = 0.810$

Calcolo dell'asse neutro

Stato limite ultimo

Per sezione rettangolare, parzializzata e con armature snervate, si ottiene un'equazione di primo grado che ha come soluzione

$$x = \frac{(A_s - A'_s) f_{yd} - N_{Ed}}{\beta b f_{cd}}$$

N_{Ed} positivo se trazione

Una volta trovata la profondità dell'asse neutro occorre verificare che le armature siano snervate. Se ciò accade la soluzione trovata è corretta.

Calcolo dell'asse neutro

Stato limite ultimo

Se almeno una delle armature non è snervata, la soluzione dell'equazione va ricercata per tentativi, ossia fissando valori della profondità dell'asse neutro e verificando il soddisfacimento dell'equilibrio alla traslazione longitudinale:

$$N_c + N'_s + N_s = N_{Ed}$$

Calcolo dell'asse neutro

Stato limite ultimo

Se la sezione è tutta compressa il valore della profondità dell'asse neutro va ricercato ancora tramite la relazione:

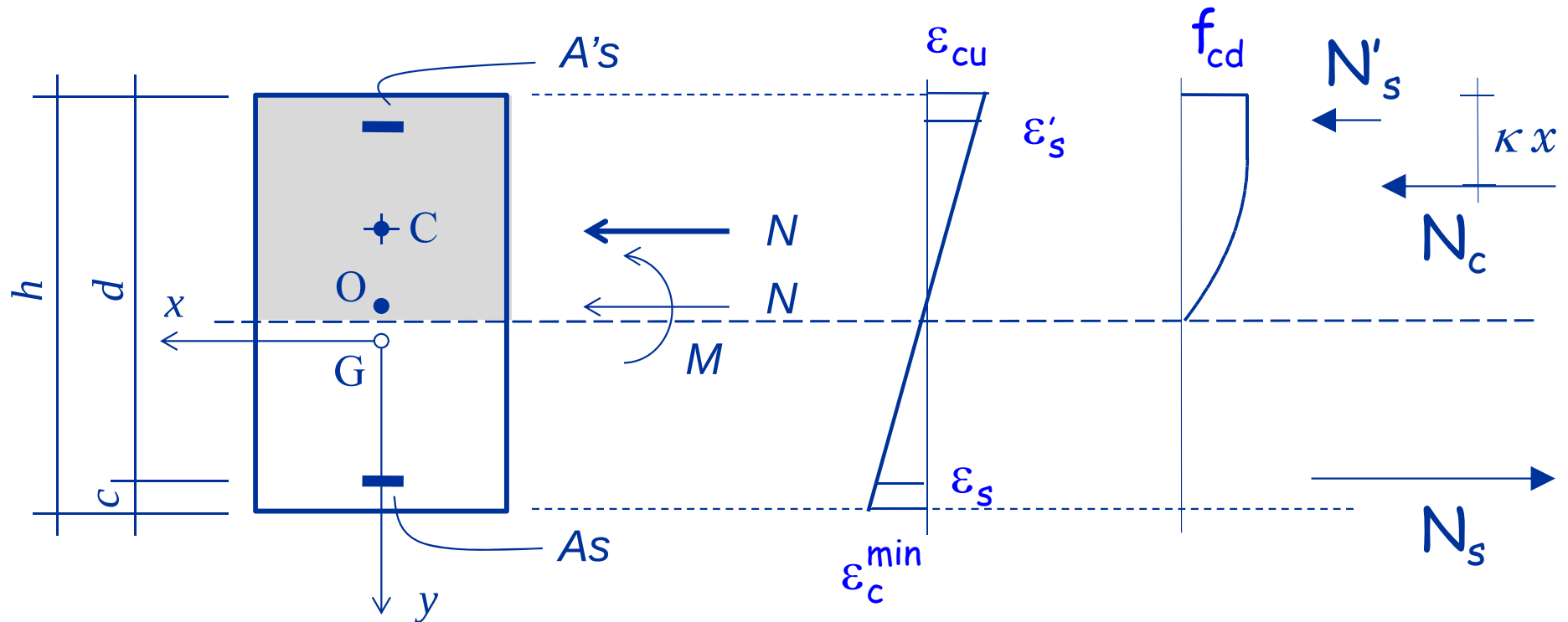
$$N_c + N'_s + N_s = N_{Ed}$$

La risultante delle tensioni di compressione è sempre calcolata come $N_c = \beta \cdot b \times f_{cd}$.

In tal caso i valori di β e κ valgono:

$$\beta = 1 - \frac{4}{21} (1 - \eta_{min})^2 \quad \kappa = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - 16/49 (1 - \eta_{min})^2}{1 - 4/21 (1 - \eta_{min})^2}$$

Momento resistente



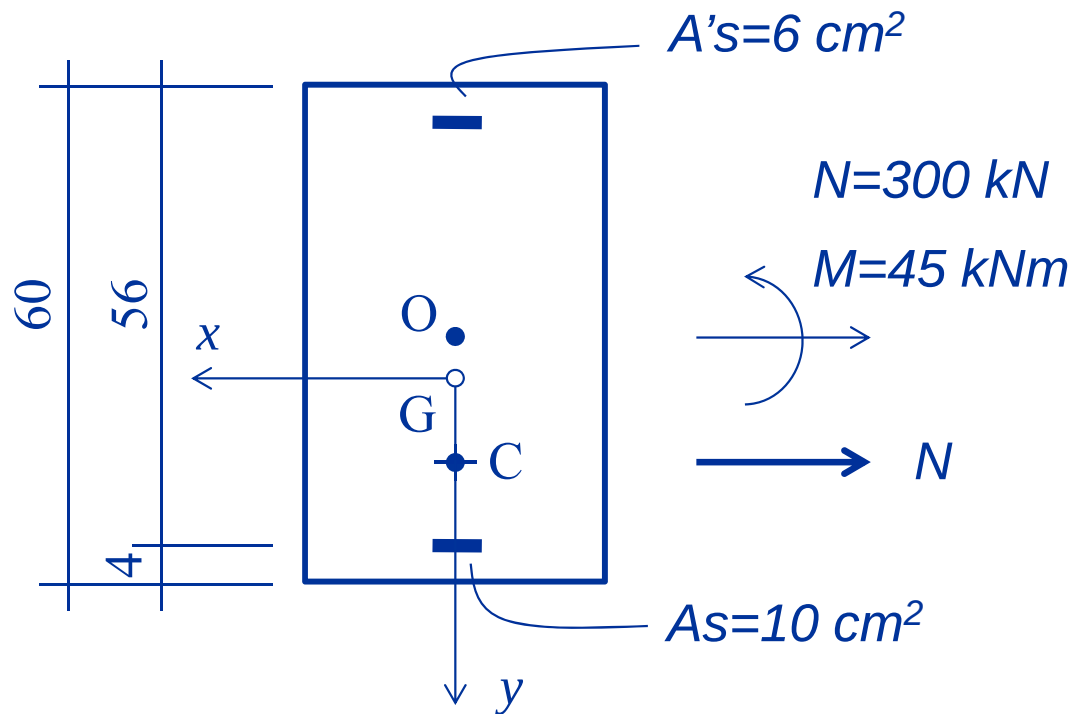
2. Calcolo del momento resistente
(rispetto al baricentro della sezione)

$$M_{Rd} = (N_s - N'_s) (h/2 - c) - N_c (h/2 - \kappa x)$$

per sezione rettangolare, $\kappa = 0.416$

Esempio N.16

Sezione rettangolare tensoinflessa



Poiché N è di trazione la sezione è parzializzata

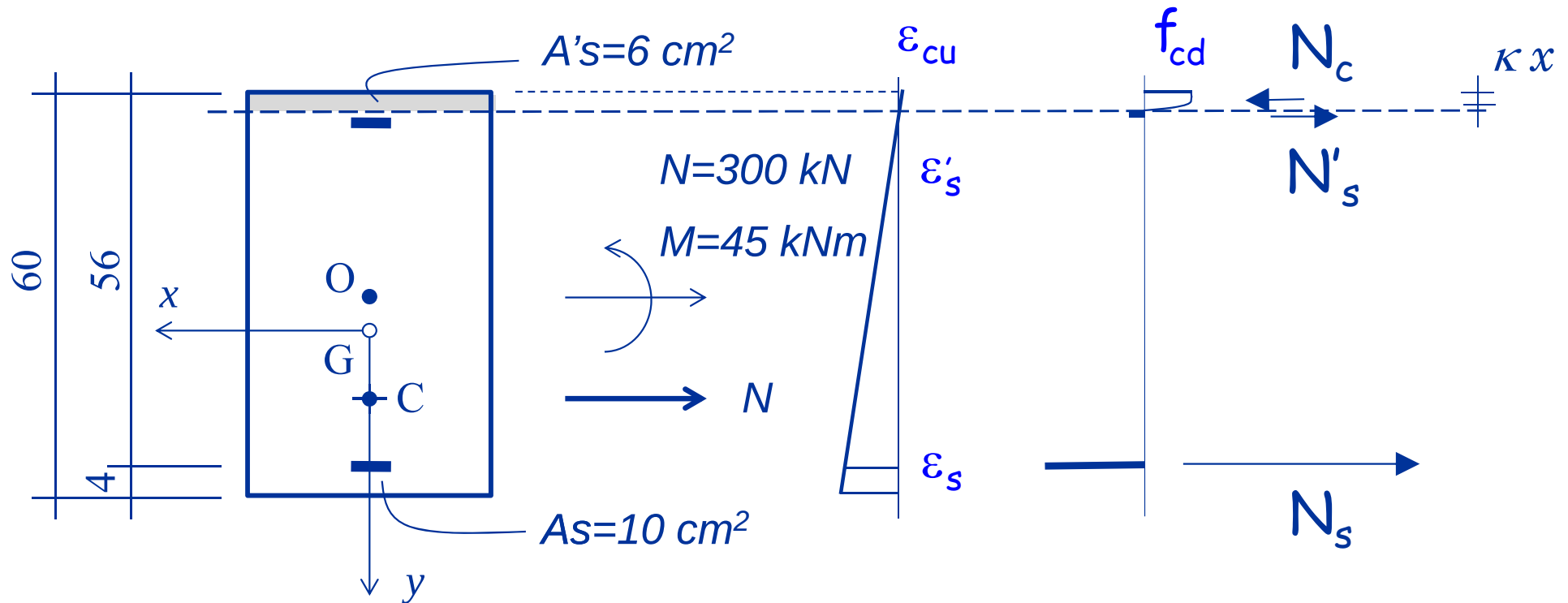
Se entrambe le armature fossero snervate sarebbe

$$x = \frac{(A_s - A'_s) f_{yd} - N_{Ed}}{\beta b f_{cd}} = -4.18 \text{ cm}$$

ma questo valore non è accettabile (è negativo)

Esempio N.16

Sezione rettangolare tensoinflessa



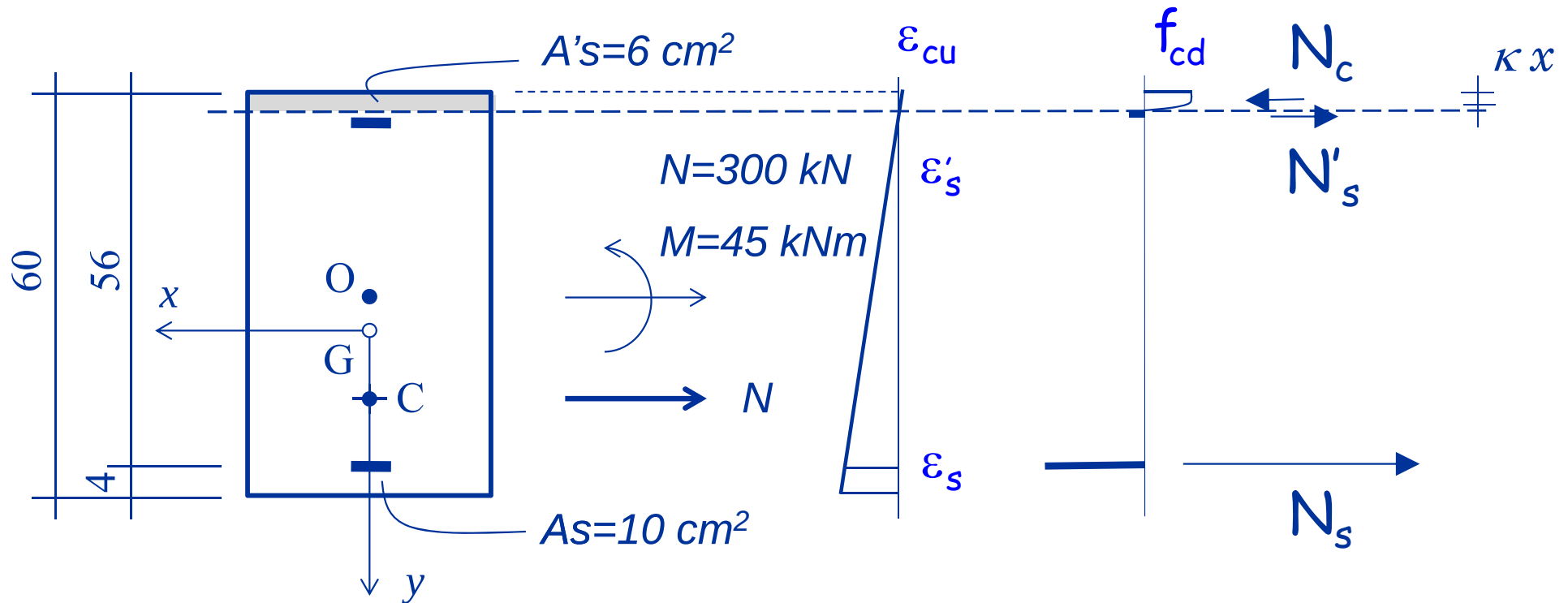
L'equilibrio alla traslazione longitudinale è rispettato
se $x = 3.69 \text{ cm}$

$$\epsilon_s = 0.04966 \quad \epsilon'_s = 0.00030$$

$$\sigma_s = 391.3 \text{ MPa} \quad \sigma'_s = 59.4 \text{ MPa} \quad N = 391.3 + 35.7 - 127.0 = -300 \text{ kN}$$

Esempio N.16

Sezione rettangolare tensoinflessa



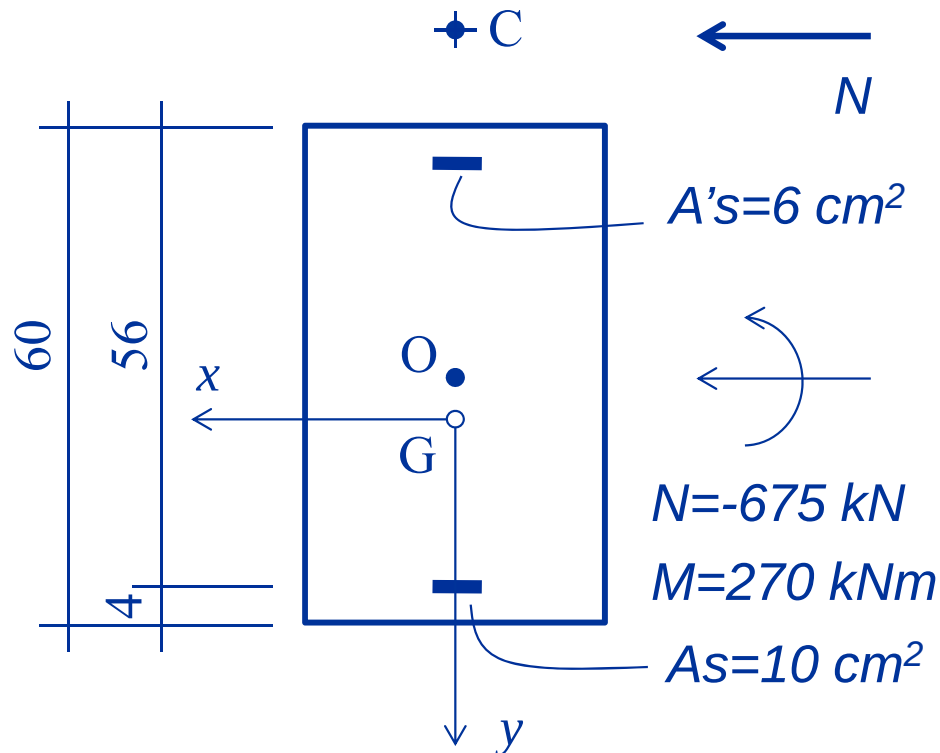
L'equilibrio alla rotazione intorno ad O
fornisce il momento resistente

$$M_{Rd} = (N_s - N'_s) (h/2 - c) - N_c (h/2 - \kappa x)$$

$$M_{Rd} = [(391.3 - 35.7) \cdot 26 - (-127) \cdot (30 - 0.416 \cdot 3.69)] 10^{-2} = 128.6 \text{ kNm}$$

Esempio N.17

Sezione rettangolare pressoinflessa



Se si immagina $x=h$ si ha:

$$\varepsilon_s = -0.00023$$

$$\varepsilon'_s = -0.00327$$

$$\sigma_s = -46.7 \text{ MPa}$$

$$\sigma'_s = -391.3 \text{ MPa}$$

$$N = -46.7 - 234.8 - 2066.0 = -2347.5 \text{ kN}$$

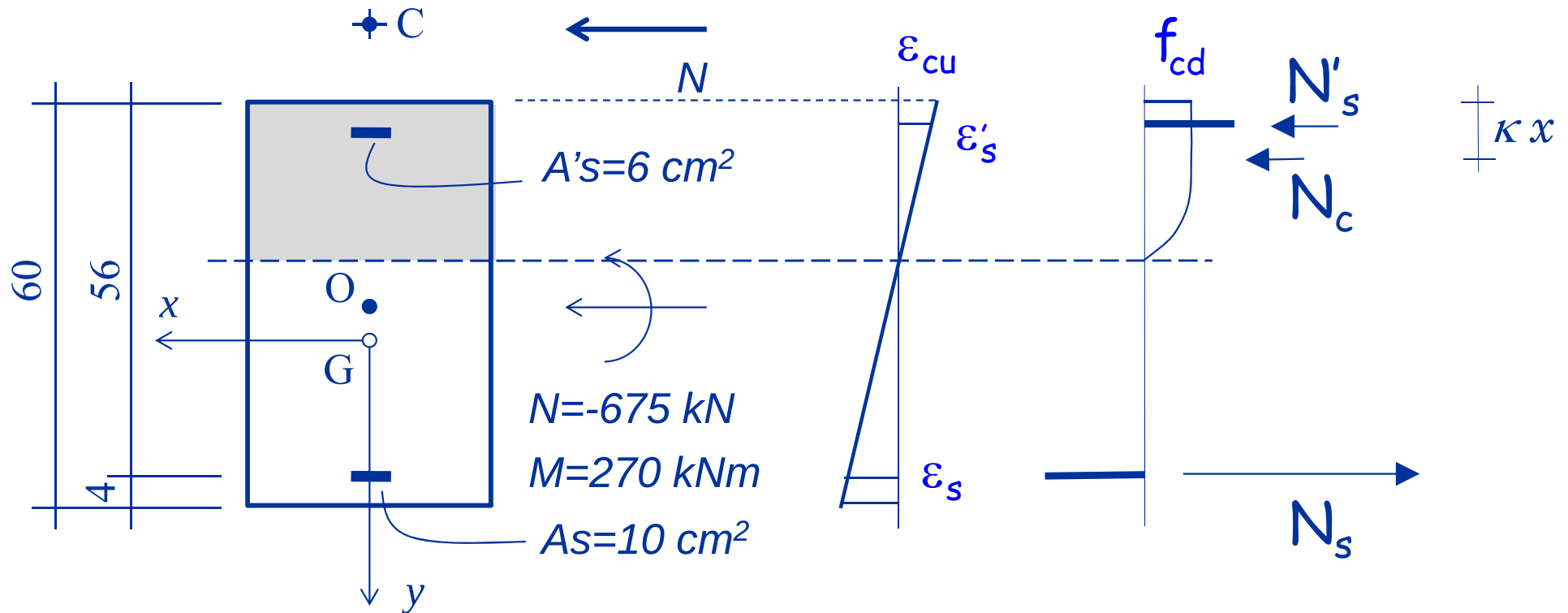
$$\begin{array}{c} | \\ N_s \end{array} \quad \begin{array}{c} | \\ N'_s \end{array} \quad \begin{array}{c} | \\ N_c \end{array}$$

Lo sforzo normale di compressione è inferiore.

Pertanto, la sezione è parzializzata

Esempio N.17

Sezione rettangolare pressoinflessa



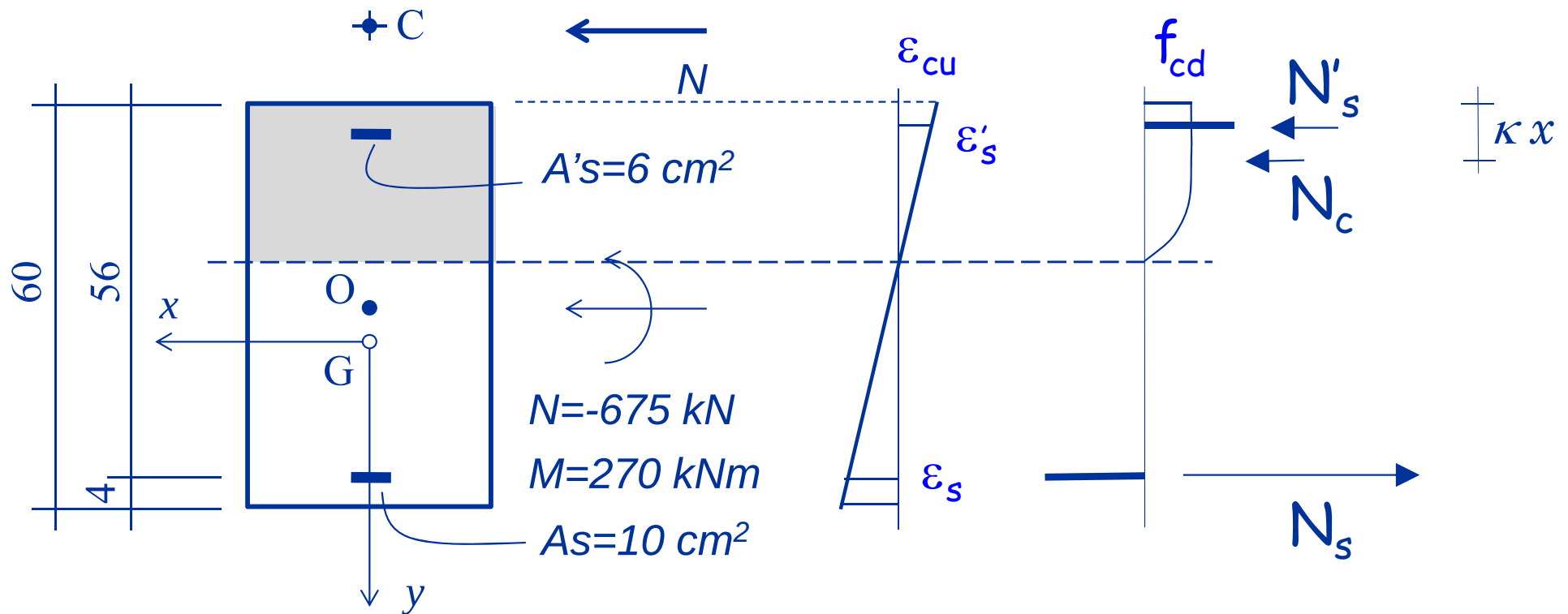
L'equilibrio alla traslazione longitudinale è rispettato se $x = 24.15 \text{ cm}$

$$N = N_s - N'_s - N_c$$

$$N = 391.3 - 234.8 - 831.5 = -675.0 \text{ kN}$$

Esempio N.17

Sezione rettangolare pressoinflessa



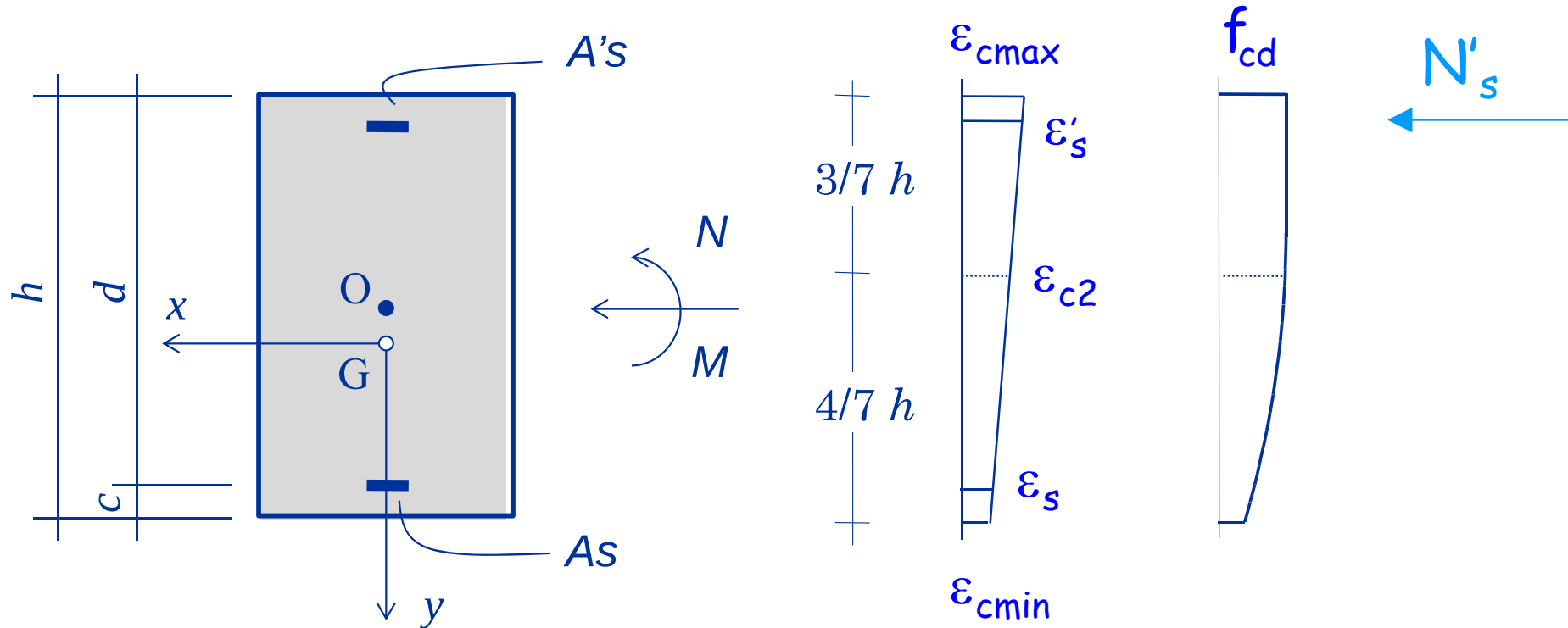
L'equilibrio alla rotazione intorno ad O
fornisce il momento resistente

$$M_{Rd} = (N_s - N'_s) (h/2 - c) - N_c (h/2 - \kappa x)$$

$$M_{Rd} = [(391.3 + 234.8) \cdot 26 - (-831.5) \cdot (30 - 0.416 \cdot 24.15)] 10^{-2} = 328.7 \text{ kNm}$$

Risultante delle tensioni

armatura superiore (sezione tutta compressa)

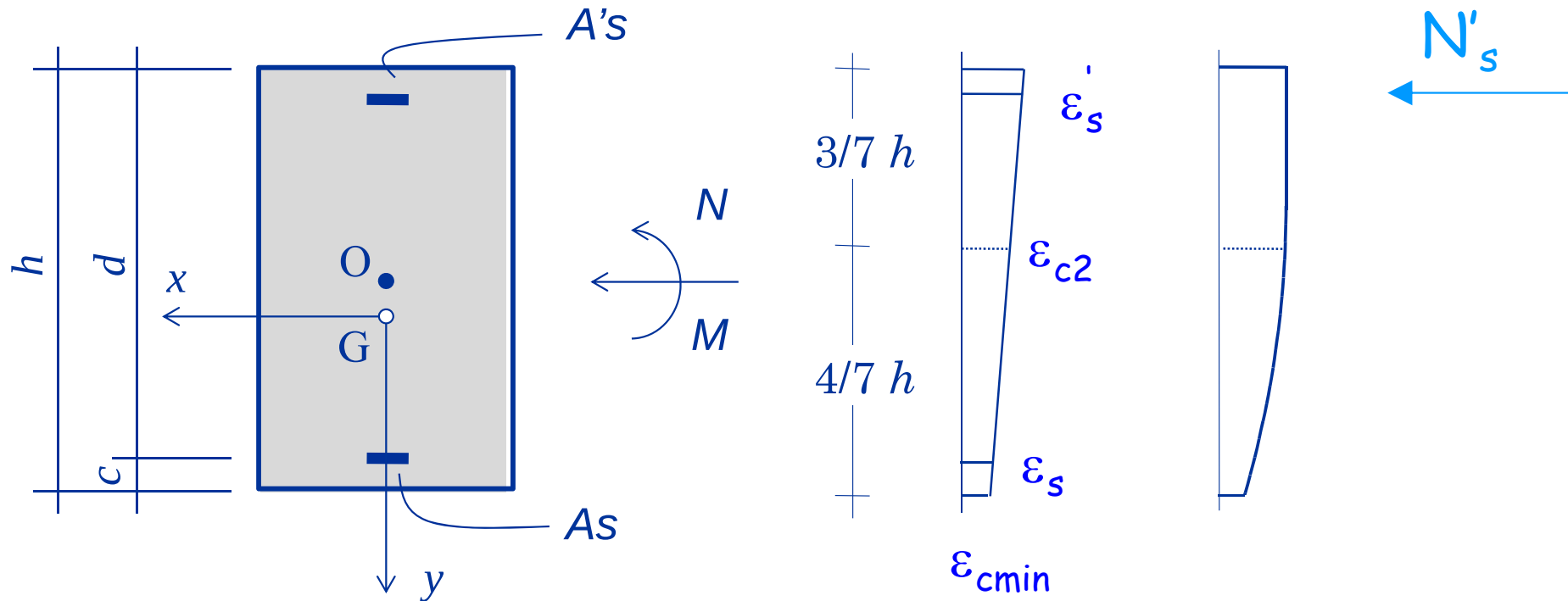


$$\epsilon'_s = \epsilon_{c2} \left[\frac{d}{4/7 h} (1 - \eta_{min}) + \eta_{min} \right]$$

dove $\eta_{min} = \frac{\epsilon_{c,min}}{\epsilon_{c2}}$

Risultante delle tensioni

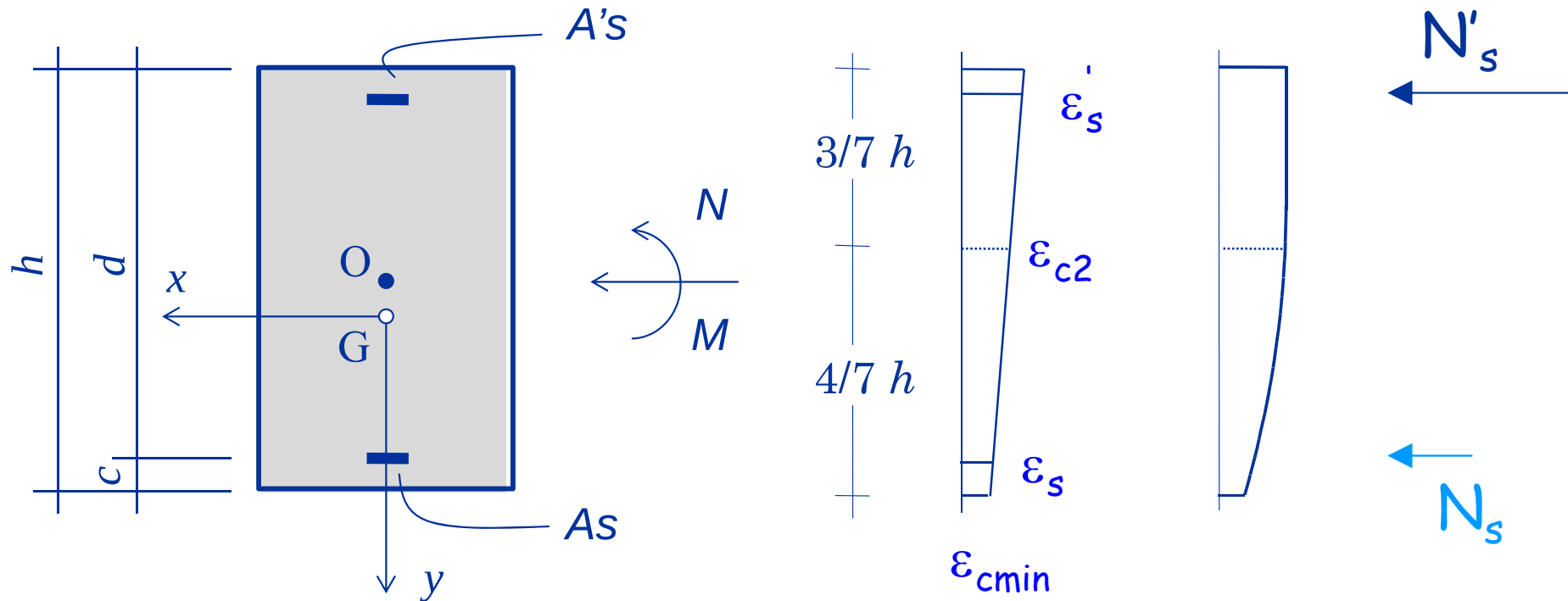
armatura superiore (sezione tutta compressa)



$$\begin{aligned} \text{noto } \epsilon'_s &\Rightarrow \begin{aligned} &\text{se } \epsilon'_s < \epsilon_{yd} \Rightarrow \sigma'_s = \frac{\epsilon'_s}{\epsilon_{yd}} f_{yd} \\ &\text{se } \epsilon'_s \geq \epsilon_{yd} \Rightarrow \sigma'_s = f_{yd} \end{aligned} \Rightarrow N'_s = A'_s \sigma'_s \end{aligned}$$

Risultante delle tensioni

armatura inferiore (sezione tutta compressa)

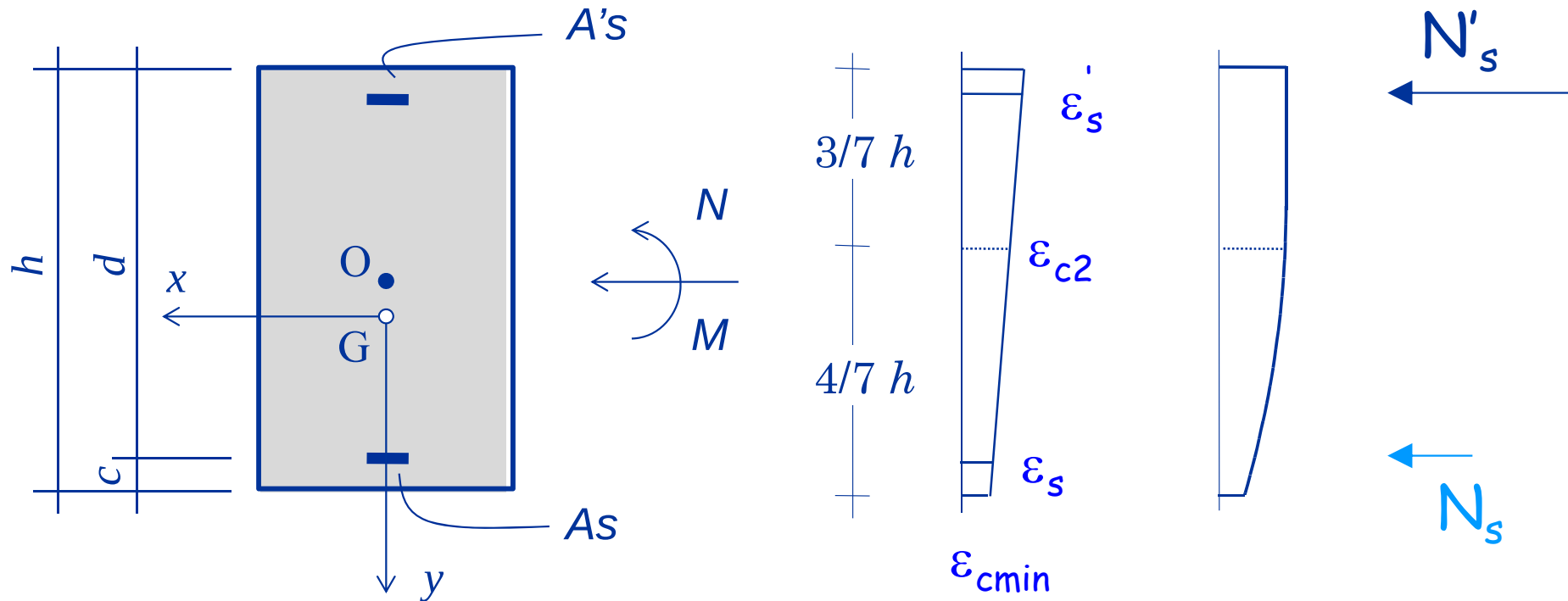


$$\epsilon_s = \epsilon_{c2} \left[\frac{c}{4/7 h} (1 - \eta_{\min}) + \eta_{\min} \right]$$

dove $\eta_{\min} = \frac{\epsilon_{c,\min}}{\epsilon_{c2}}$

Risultante delle tensioni

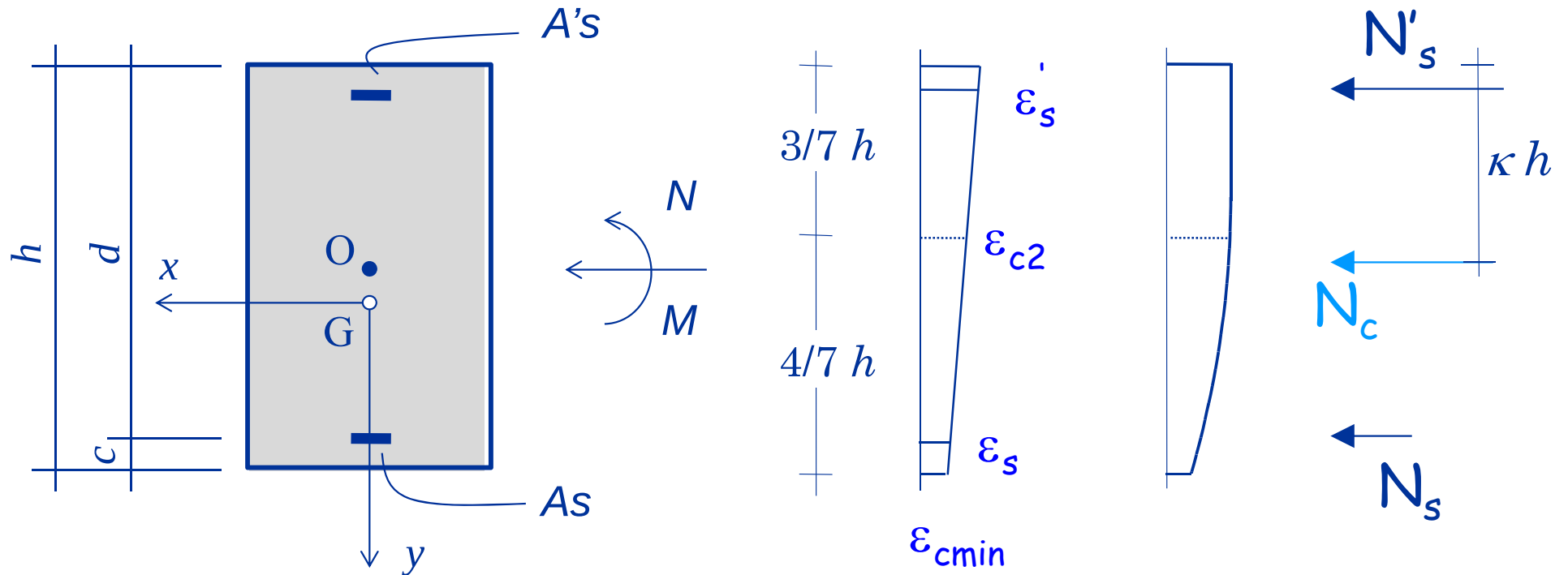
armatura inferiore (sezione tutta compressa)



$$\begin{aligned}
 \text{noto } \varepsilon_s &\Rightarrow \begin{cases} \text{se } \varepsilon_s < \varepsilon_{yd} & \Rightarrow \sigma_s = \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_{yd}} f_{yd} \\ \text{se } \varepsilon_s \geq \varepsilon_{yd} & \Rightarrow \sigma_s = f_{yd} \end{cases} \Rightarrow N_s = A_s \sigma_s
 \end{aligned}$$

Risultante delle tensioni

calcestruzzo (sezione tutta compressa)



$$N_c = \beta \ b \ h \ f_{cd}$$

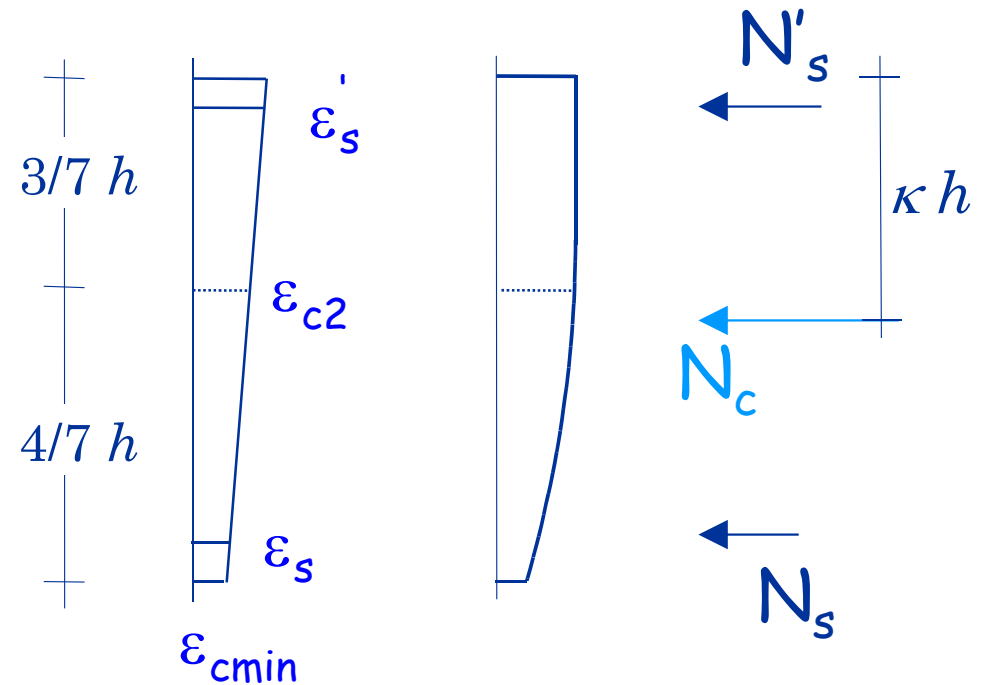
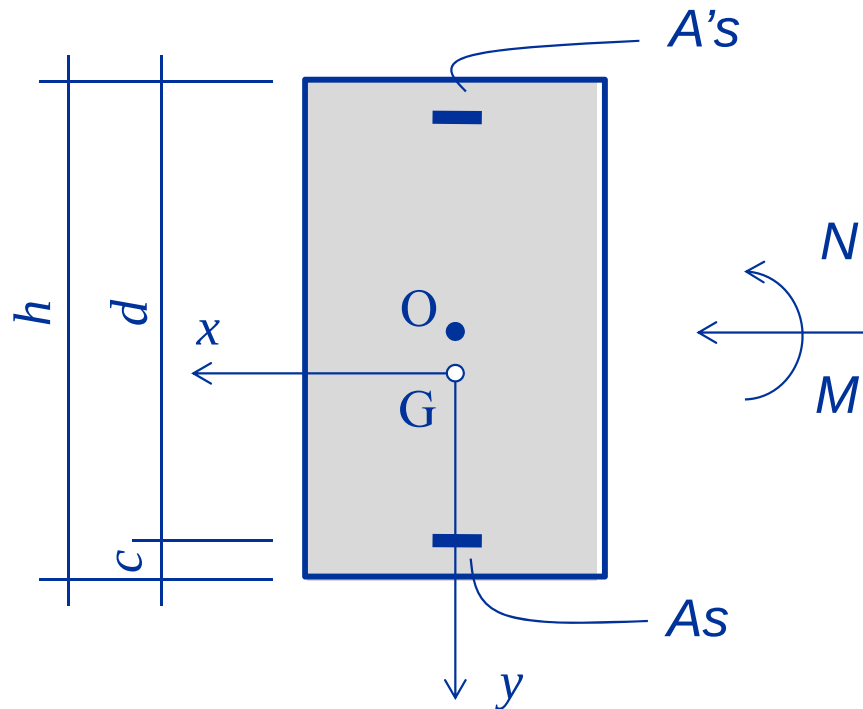
In questo caso β dipende da η_{min}

per sezione rettangolare:
$$\beta = 1 - \frac{4}{21} (1 - \eta_{min})^2$$

Valori di β per sezione rettangolare

$\eta_{\min}$	β
0.0	0.810
0.1	0.846
0.2	0.878
0.3	0.907
0.4	0.931
0.5	0.952
0.6	0.970
0.7	0.983
0.8	0.992
0.9	0.998
1.0	1.000

Momento resistente



$$M_{Rd} = (N_s - N'_s) (h/2 - c) - N_c (h/2 - \kappa h)$$

per sezione rettangolare:

$$\kappa = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - 16/49 (1 - \eta_{min})^2}{1 - 4/21 (1 - \eta_{min})^2}$$

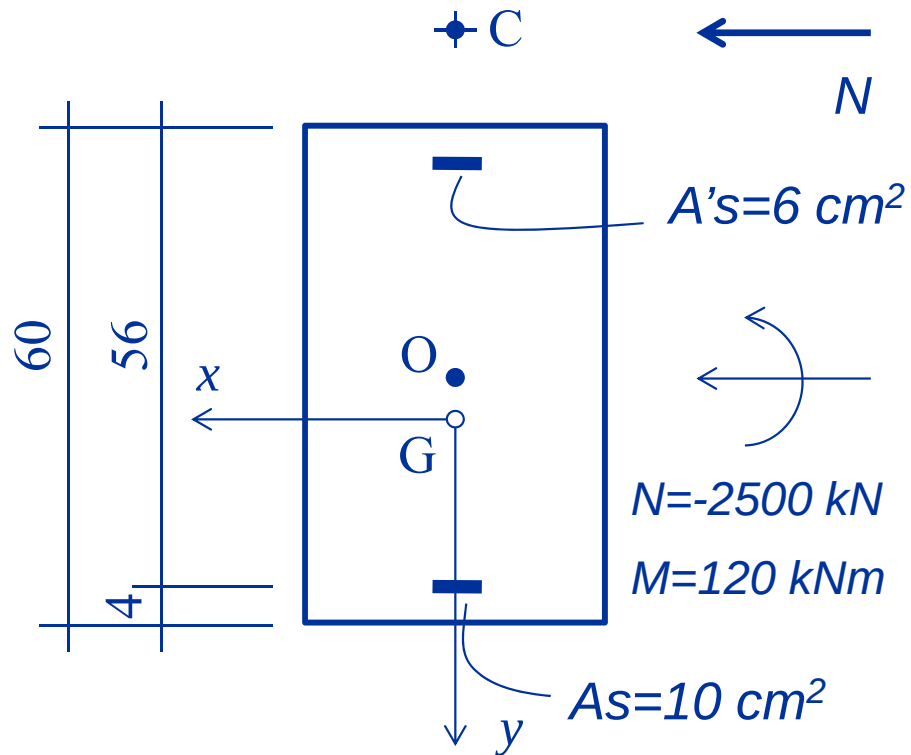
2. Calcolo del momento resistente
(rispetto al baricentro O della sezione)

Valori di β e κ per sezione rettangolare

$\eta_{\min}$	β	κ
0.0	0.810	0.416
0.1	0.846	0.435
0.2	0.878	0.450
0.3	0.907	0.463
0.4	0.931	0.474
0.5	0.952	0.482
0.6	0.970	0.489
0.7	0.983	0.494
0.8	0.992	0.497
0.9	0.998	0.499
1.0	1.000	0.500

Esempio N.18

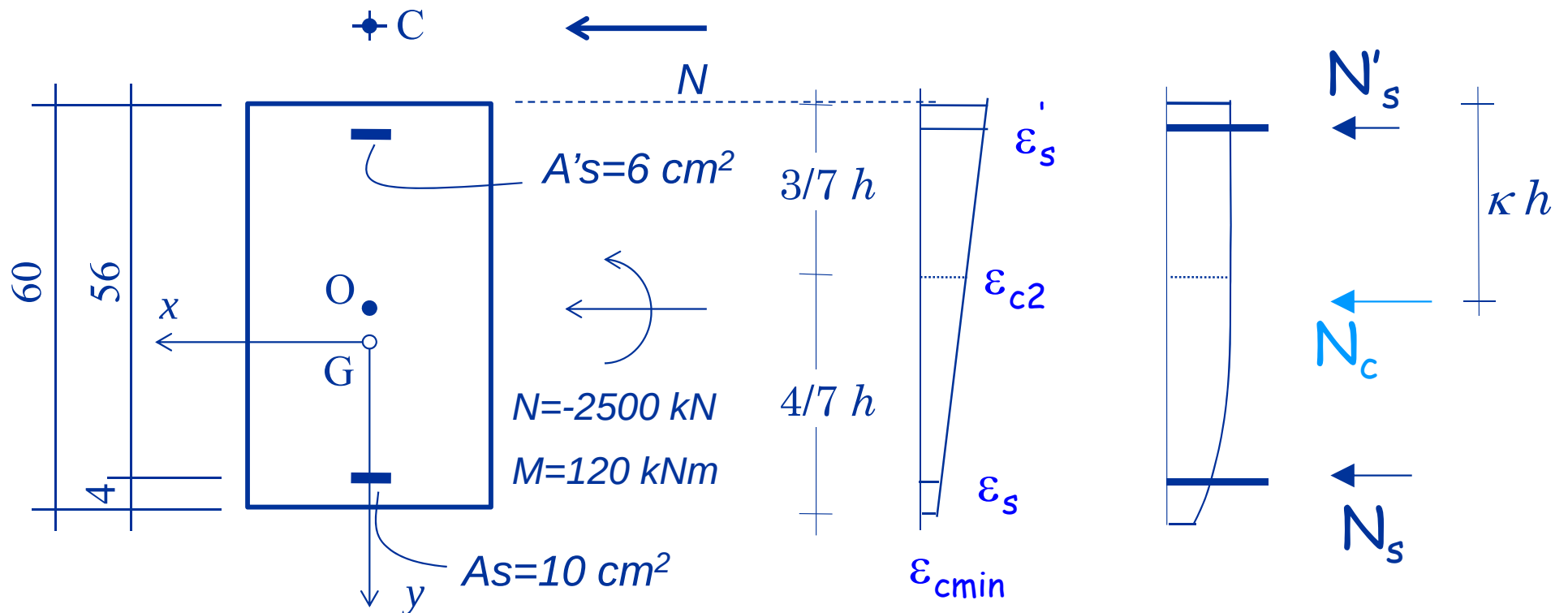
Sezione rettangolare pressoinflessa



Lo sforzo normale di compressione (-2500 kN) è superiore a quello relativo a $x=h$ (-2347.5 kN). Pertanto, la sezione è completamente compressa

Esempio N.18

Sezione rettangolare pressoinflessa



Se si immagina $\eta = 0.1215$

$$\epsilon_s = -\epsilon_{c2} \left[\frac{c}{4/7 h} (1 - \eta_{min}) + \eta_{min} \right]$$

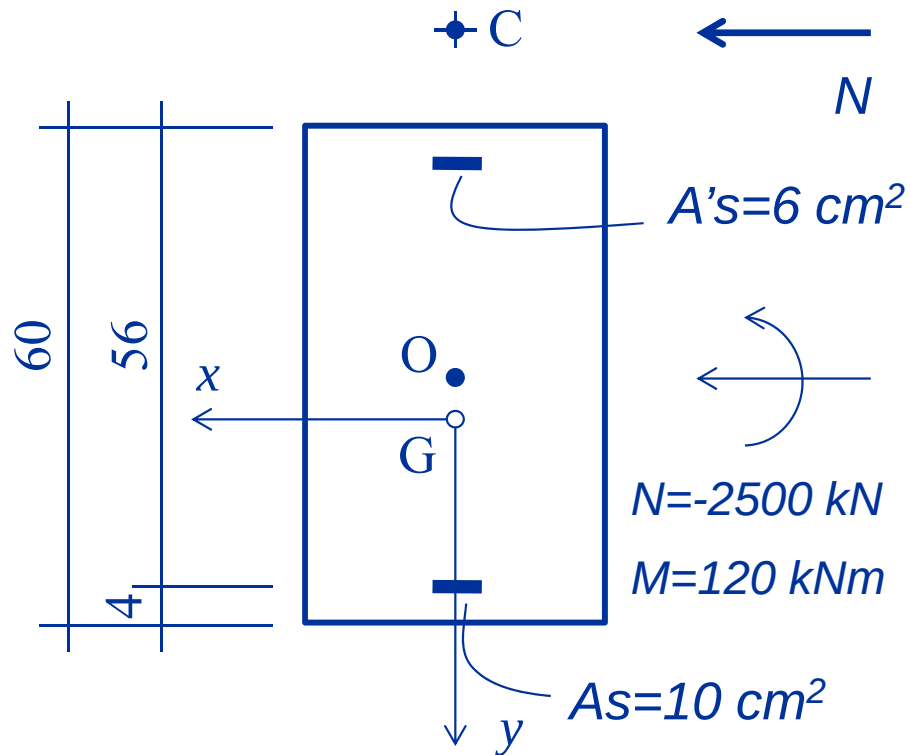
$$= -0.0004479$$

$$\epsilon_s = -\epsilon_{c2} \left[\frac{d}{4/7 h} (1 - \eta_{min}) + \eta_{min} \right] =$$

$$-0.00311$$

Esempio N.18

Sezione rettangolare pressoinflessa



Se si immagina $\eta = 0.1215$

$$N_c = -0.853 \cdot 30 \cdot 60 \cdot 14.17 \cdot 10^{-3} \\ = -2175.6 \text{ kN}$$

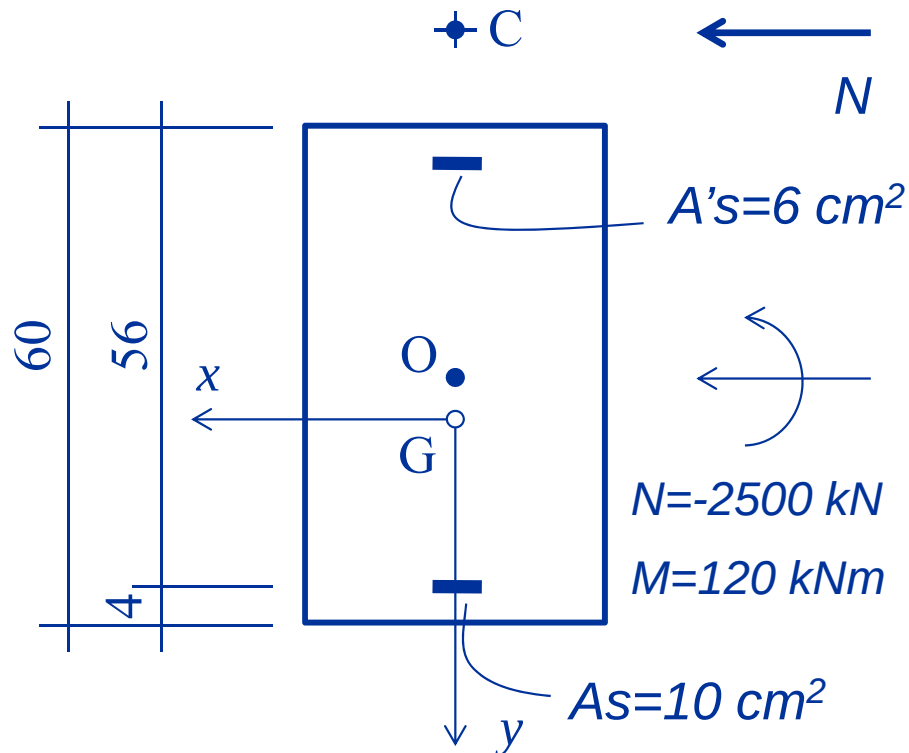
$$N_s = 200000 \cdot 10 \cdot 0.0004479 \cdot 10^{-1} \\ = -89.6 \text{ kN}$$

$$N'_s = 391.3 \cdot 6 \cdot 10^{-1} = -234.8 \text{ kN}$$

$$N = -89.6 - 234.8 - 2175.6 \\ = -2500 \text{ kN}$$

Esempio N.18

Sezione rettangolare pressoinflessa



Attenzione: la sezione non è verificata perché il momento resistente (118.8 kNm) è inferiore al momento agente (120 kNm)

$$\kappa = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - 16/49(1 - \eta_{\min})^2}{1 - 4/21(1 - \eta_{\min})^2} = 0.4384$$

L'equilibrio alla rotazione intorno ad O fornisce il momento resistente

$$M_{Rd} = (N_s - N'_s) (h/2 - c) - N_c (h/2 - \kappa x)$$

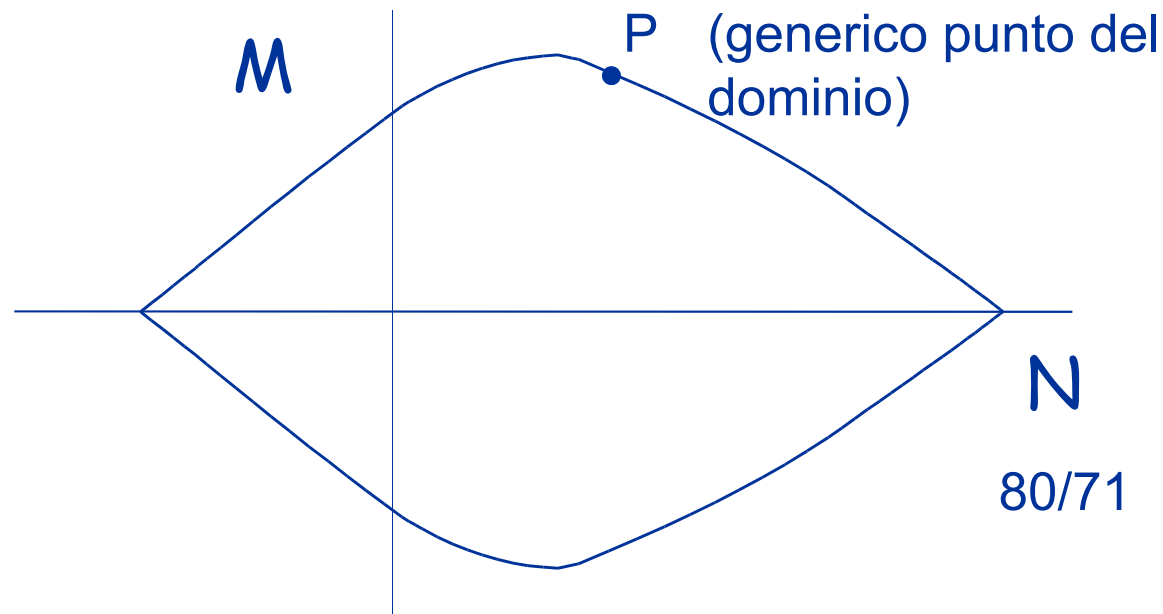
$$M_{Rd} = [(-89.6 + 234.8) \cdot 26 - (-2175.6) \cdot (30 - 0.4384 \cdot 60)] 10^{-2} = 118.1 \text{ kNm}$$

Domini M-N
per flessione composta retta

Domini di resistenza

Stato limite ultimo

Dominio di resistenza,
o curva di interazione = insieme delle coppie $M-N$
per cui $\varepsilon_{\max}$ è uguale a ε_{cu}



Domini di resistenza

Stato limite ultimo

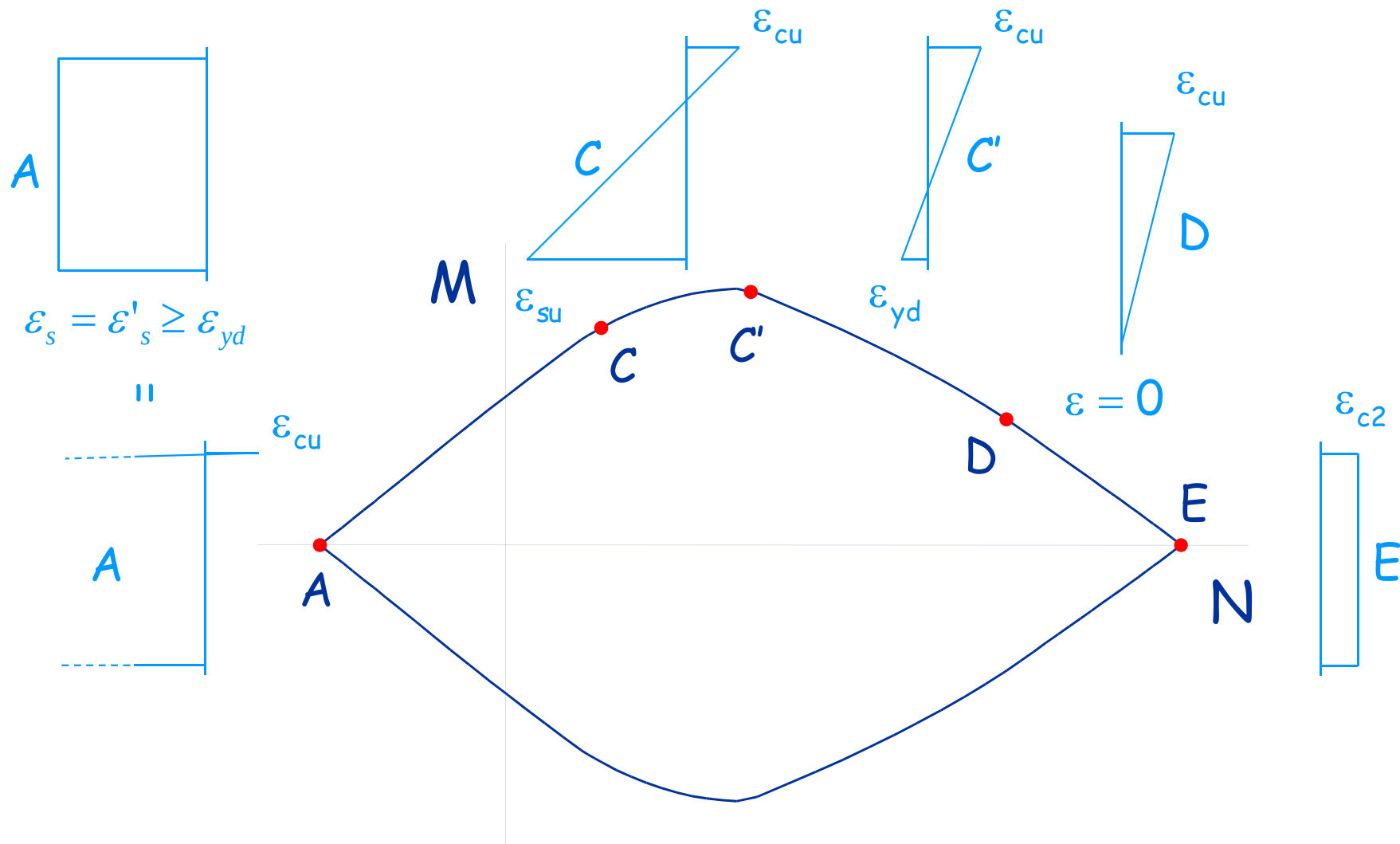
Per ricavare una coppia M-N del dominio

1. Si definisce la retta limite di deformazione
2. Si calcolano le tensioni
3. Si calcolano le caratteristiche N ed M tramite equilibrio alla traslazione ed alla rotazione

$$N = \int \sigma dA$$
$$M = \int \sigma y dA$$

Domini di resistenza

Stato limite ultimo



Domini di resistenza

Stato limite ultimo

Cambiando l'armatura, si ottengono tanti diagrammi

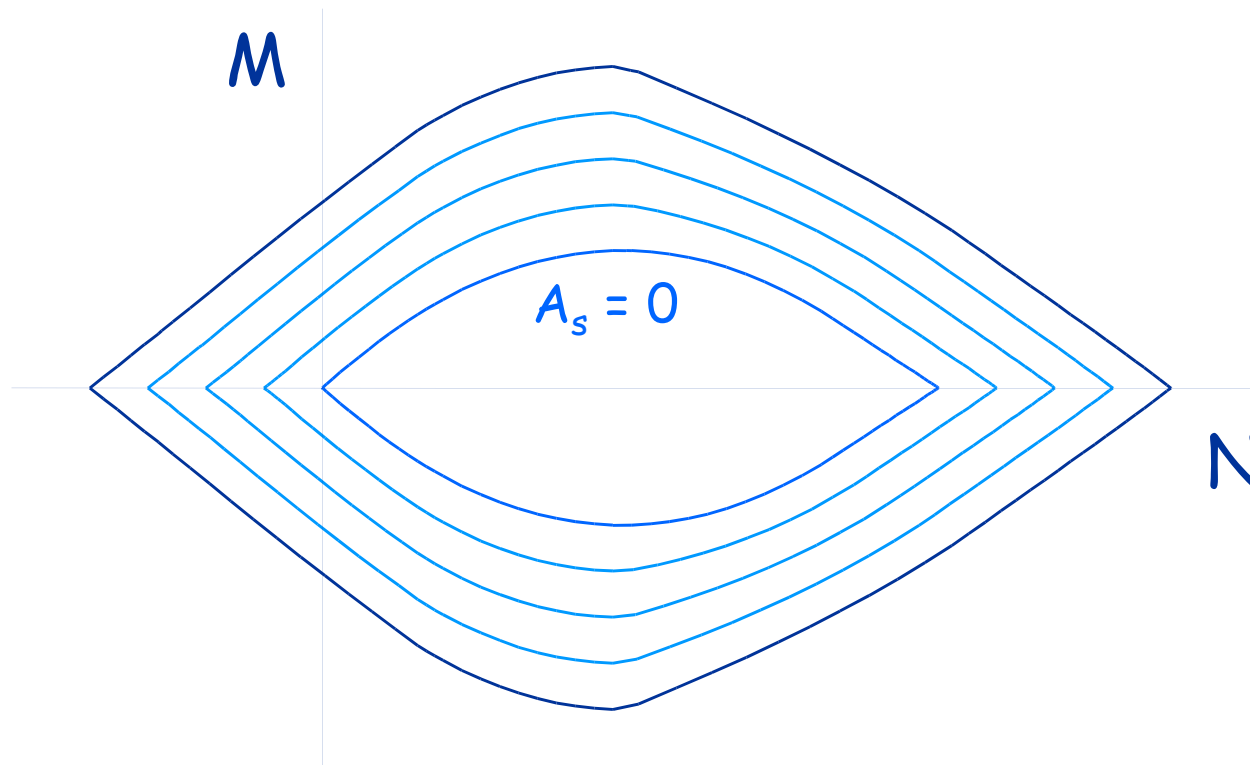
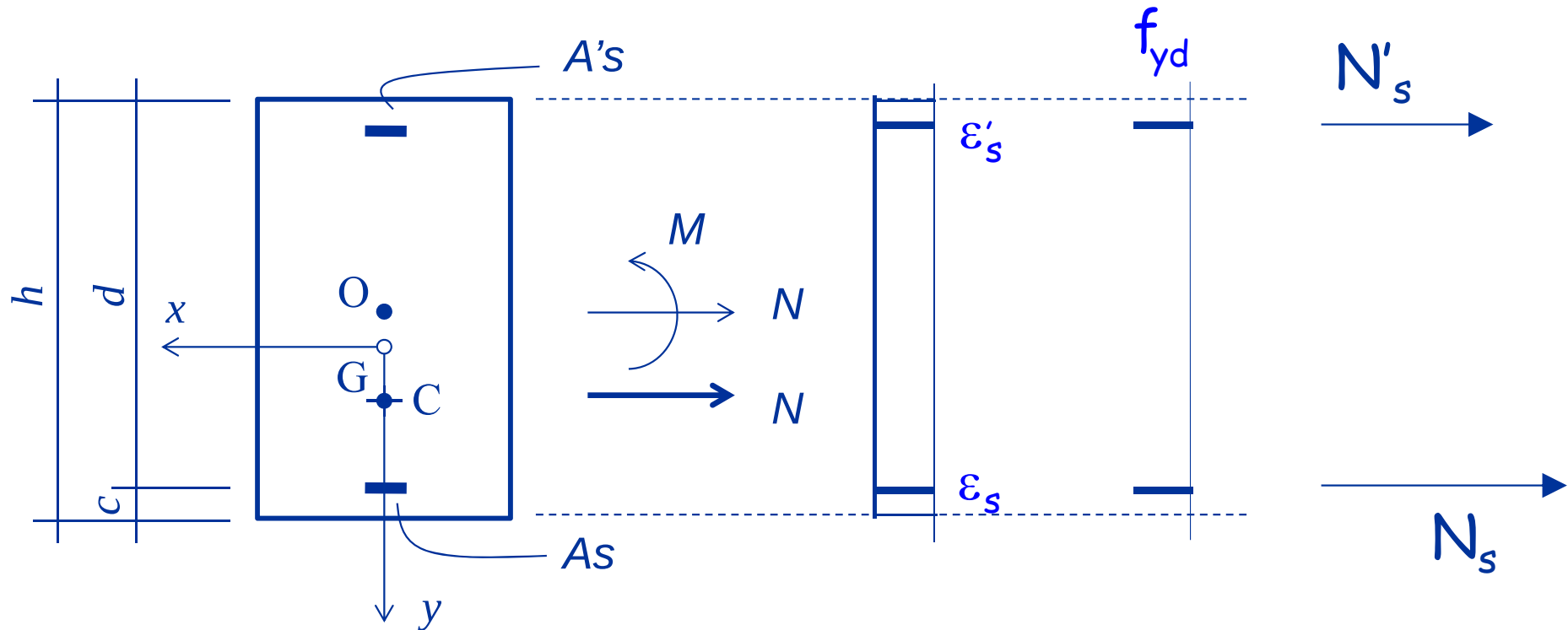


Diagramma A



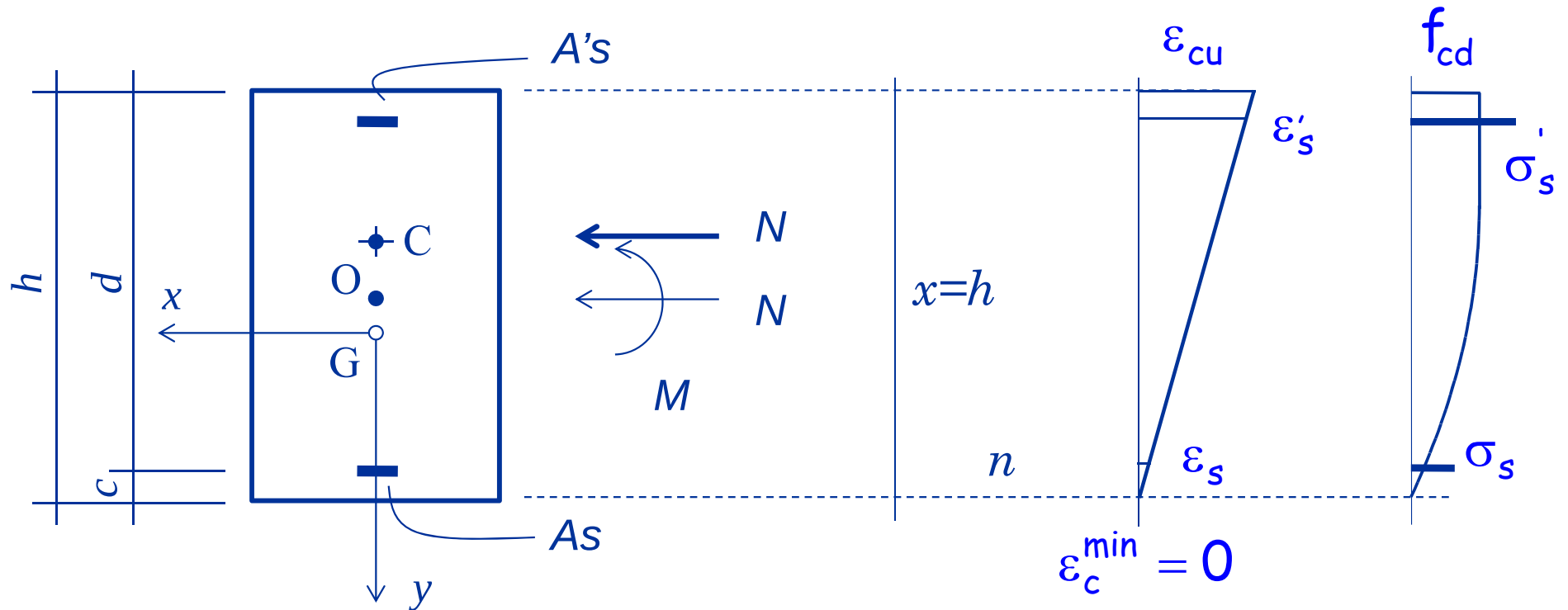
$$N = (A_s + A'_s) f_{yd}$$

$$M = (A_s - A'_s) \left(\frac{h}{2} - c \right) f_{yd}$$

Nota:

Se le armature sono eguali il momento flettente è nullo. Il punto di coordinate N-M giace sull'asse N.

Diagramma D

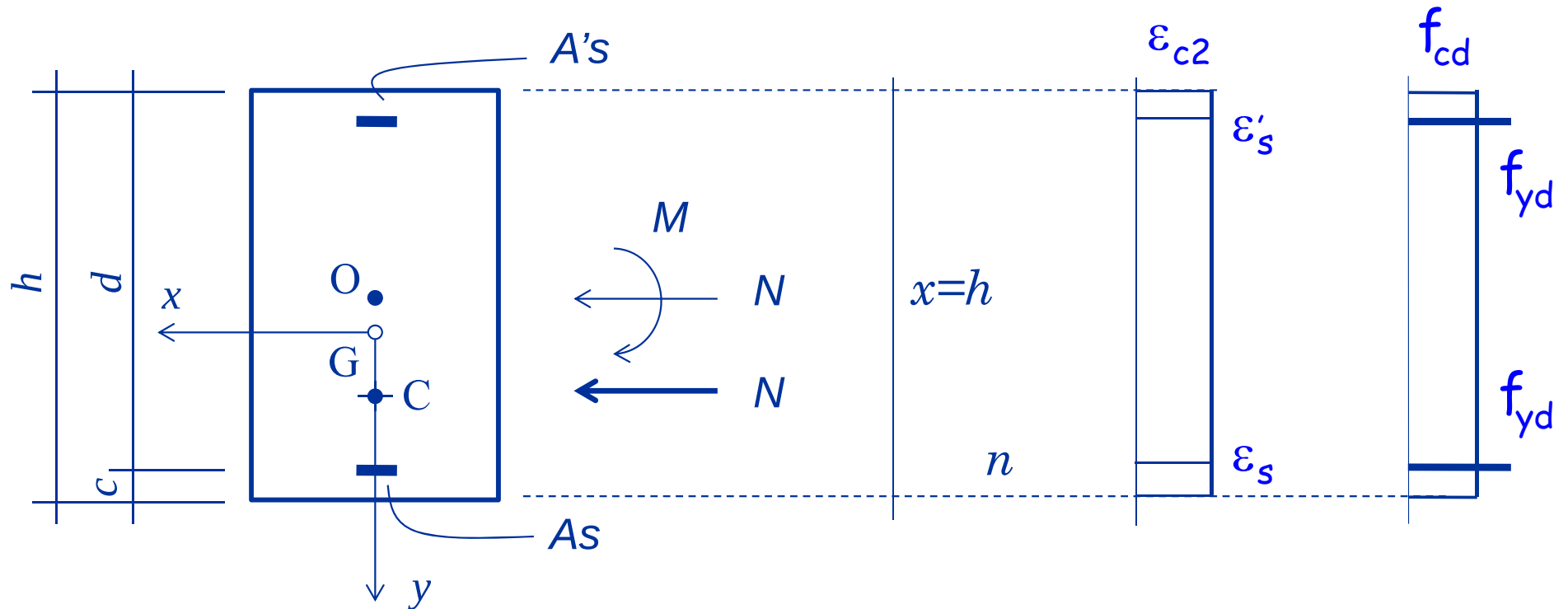


Per gli usuali valori di copriferro, l'armatura sup. è snervata mentre quella inf. è elastica.

$$N = 0.810 b h f_{cd} - \left(A_s \frac{c}{h} \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{yd}} + A'_s \right) f_{yd}$$

$$M = 0.0680 b h^2 f_{cd} + \left(-A_s \frac{c}{d} \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{yd}} + A'_s \right) \left(\frac{h}{2} - c \right) f_{yd}$$

Diagramma E



$$N = -bh f_{cd} - (A_s + A'_s) f_{yd}$$

$$M = -(A_s - A'_s) \left(\frac{h}{2} - c \right) f_{yd}$$

Nota:

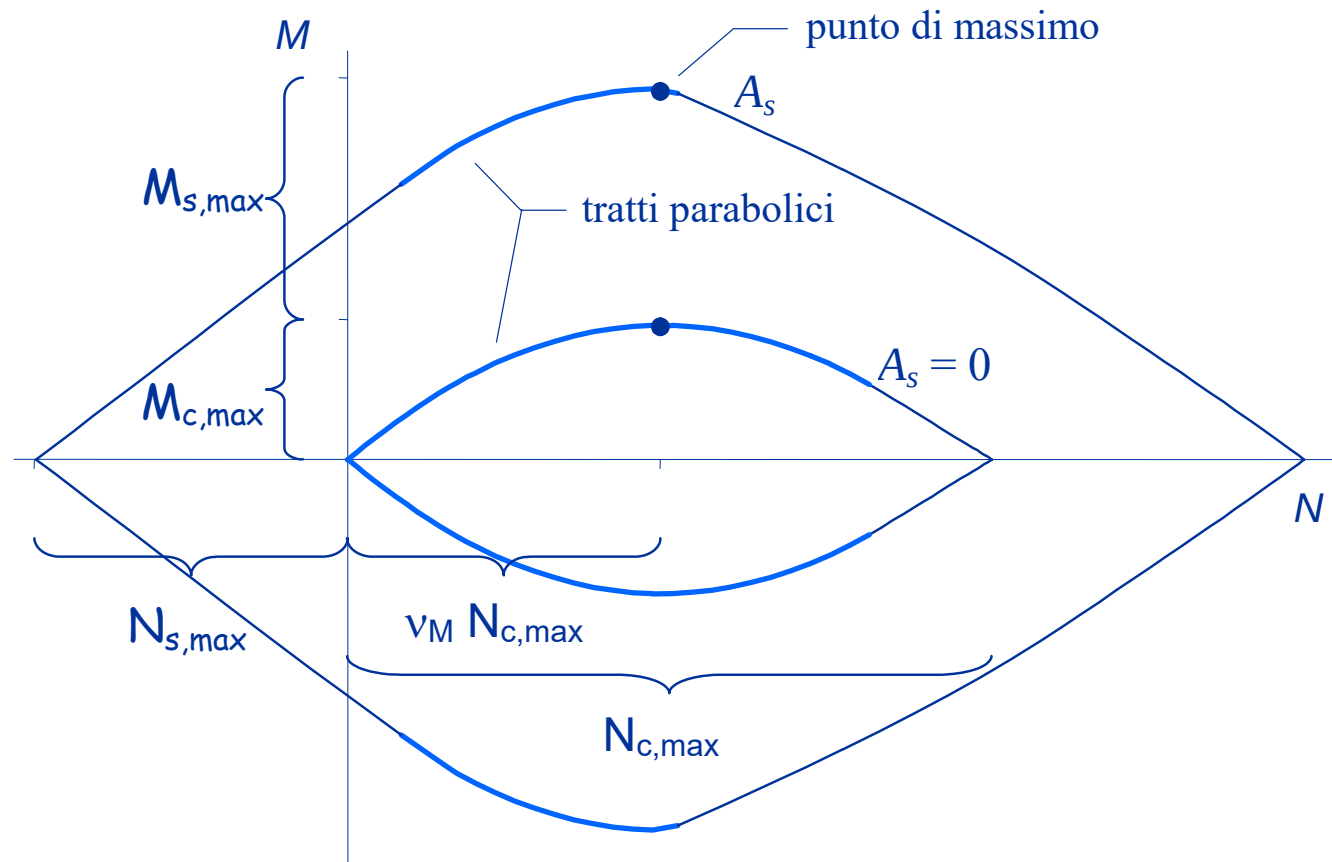
Se le armature sono eguali il momento flettente è nullo.
Il punto di coordinate N-M giace sull'asse N.

Progetto e verifica allo SLU con i domini M-N

sezioni rettangolari, $A_s = A'_s$

Dominio M-N allo SLU

L'andamento delle curve è in più tratti parabolico



Dominio M-N allo SLU

Quando entrambe le armature sono snervate

$$N = \beta b x f_{cd}$$

$$M = \beta b x f_{cd} \left(\frac{h}{2} - \kappa x \right) + 2 A_s f_{yd} \left(\frac{h}{2} - c \right)$$

Il punto di massimo momento si ottiene derivando M

$$\frac{dM}{dx} = 0 \Rightarrow \beta b f_{cd} \left(\frac{h}{2} - 2 \kappa x \right) = 0$$

$$x = \frac{h}{4 \kappa} = \frac{119}{198} h \cong 0.60 h$$

Dominio M-N allo SLU

Quando entrambe le armature sono snervate

$$N = \beta b x f_{cd}$$

$$N = \frac{289}{584} b h f_{cd} \cong 0.48$$

$$M = \beta b x f_{cd} \left(\frac{h}{2} - \kappa x \right) + 2 A_s f_{yd} \left(\frac{h}{2} - c \right)$$

$$M = \frac{289}{2376} b h^2 f_{cd} + A_s f_{yd} (h - 2c) \cong 0.12$$

Il punto di massimo momento si ottiene derivando M

$$\frac{dM}{dx} = 0 \Rightarrow \beta b f_{cd} \left(\frac{h}{2} - 2 \kappa x \right) = 0$$

$$x = \frac{h}{4 \kappa} = \frac{119}{198} h \cong 0.60 h$$

Per questo valore di x si ha

Dominio M-N allo SLU

Nel punto di massimo

$$N = v_M N_{c,max}$$

$$N_{c,max} = b h f_{cd}$$

$$v_M \cong 0.48$$

$$M_{c,max} \cong 0.12 b h^2 f_{cd}$$

Inoltre:
contributo
dell'armatura

$$M = M_{c,max} + M_{s,max}$$

$$M_{s,max} = A_s (h - 2 c) f_{yd}$$

Infine:
massimo sforzo
normale di trazione

$$N_{s,max} = 2 A_s f_{yd}$$

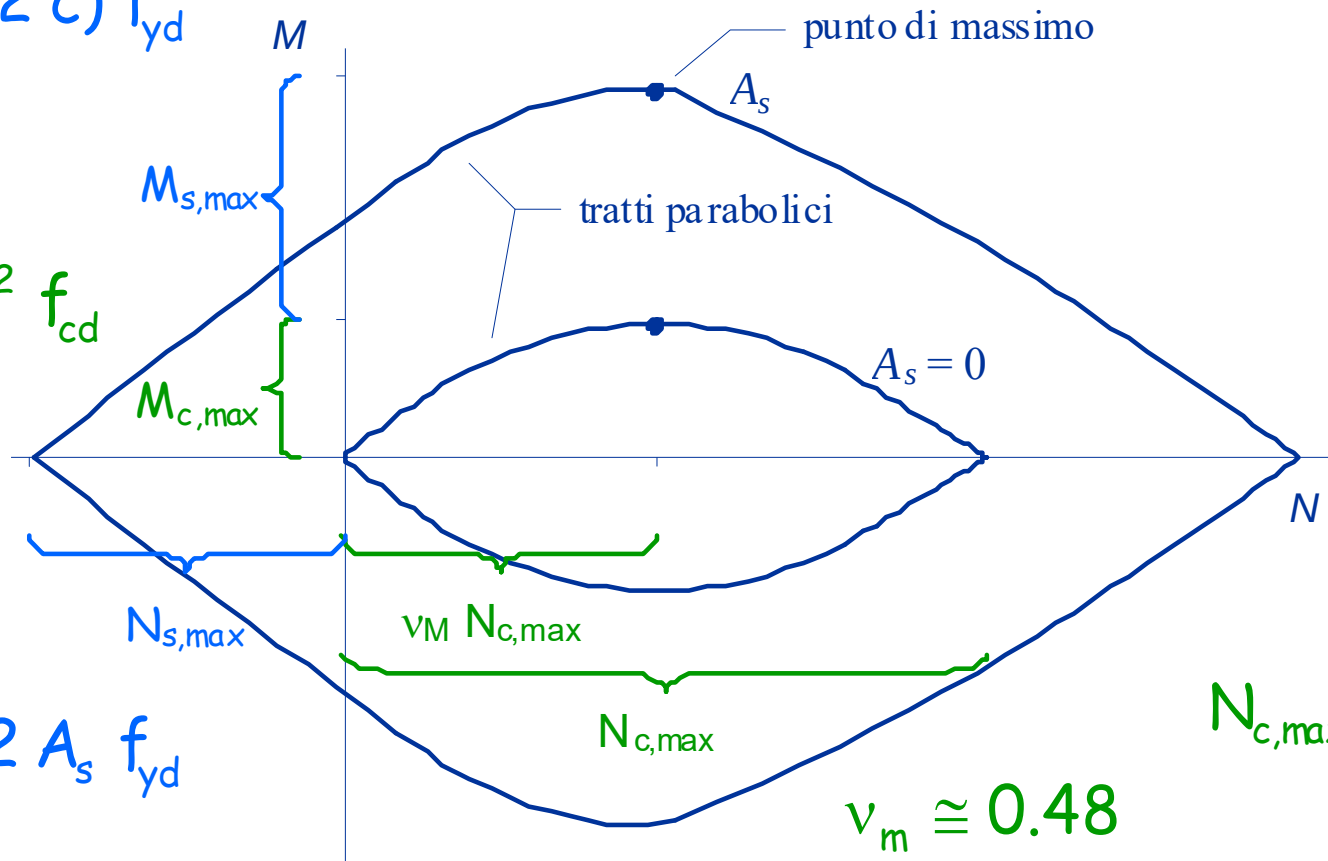
Dominio M-N allo SLU

$$M_{s,max} =$$

$$= A_s (h - 2c) f_{yd}$$

$$M_{c,max} =$$

$$\cong 0.12 b h^2 f_{cd}$$



$$N_{s,max} = 2 A_s f_{yd}$$

$$N_{c,max} = b h f_{cd}$$

Valori base per dominio M-N

	Calcestruzzo	Acciaio
N	$N_{c,max} = b h f_{cd}$	$N_{s,max} = 2 A_s f_{yd}$
M	$M_{c,max} \cong 0.12 b h^2 f_{cd}$	$M_{s,max} = A_s (h - 2 c) f_{yd}$

Formulazione analitica

Momento resistente M_{Rd} in funzione di N_{Rd} :

$$M_{Rd} = (M_{c,max} + M_{s,max}) \left[1 - \left| \frac{N_{Rd} - 0.48 N_{c,max}}{0.48 N_{c,max} + N_{s,max}} \right|^m \right]$$

con
$$m = 1 + \frac{0.48 N_{c,max}}{0.48 N_{c,max} + N_{s,Rd}}$$

Formulazione analitica

Verifica di resistenza:

$$\frac{M_{Ed}}{M_{c,max} + M_{s,max}} + \left| \frac{N_{Ed} - 0.48 N_{c,max}}{0.48 N_{c,max} + N_{s,max}} \right|^m \leq 1$$

con $m = 1 + \frac{0.48 N_{c,max}}{0.48 N_{c,max} + N_{s,Rd}}$

Formule alternative

– per $N_{Ed} < 0$ (tensoflessione) $M_{Rd} = M_{s,max} \left(1 + \frac{N_{Ed}}{N_{s,max}} \right)$

– per $0 < N_{Ed} < 0.48 N_{c,Rd}$

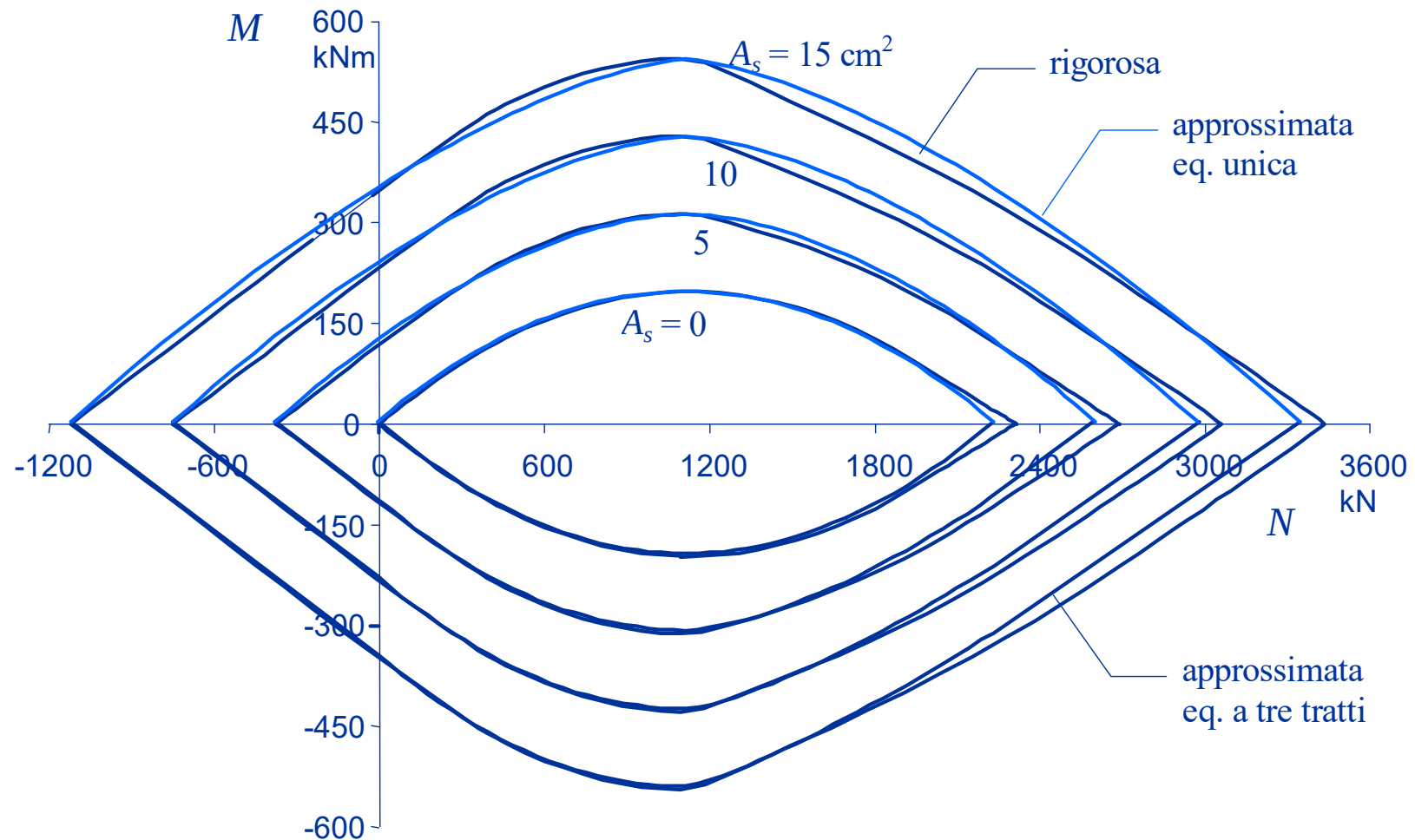
$$M_{Rd} = M_{c,max} \left[1 - \left(\frac{N_{Ed} - 0.48 N_{c,max}}{0.48 N_{c,max}} \right)^2 \right] + M_{s,max}$$

– per $N_{Ed} > 0.48 N_{c,Rd}$

$$M_{Rd} = (M_{c,max} + M_{s,max}) \left[1 - \left(\frac{|N_{Ed} - 0.48 N_{c,max}|}{0.52 N_{c,max} + N_{s,max}} \right)^n \right]$$

con $n = 1 + \left(\frac{0.48 N_{c,max}}{0.52 N_{c,max} + N_{s,max}} \right)^2$

Confronto



Esempio

Verifica a pressoflessione

Dati geometrici

Sezione 40x70

$$A_s = A'_s = 3 \text{ } \varnothing 14$$

Materiale

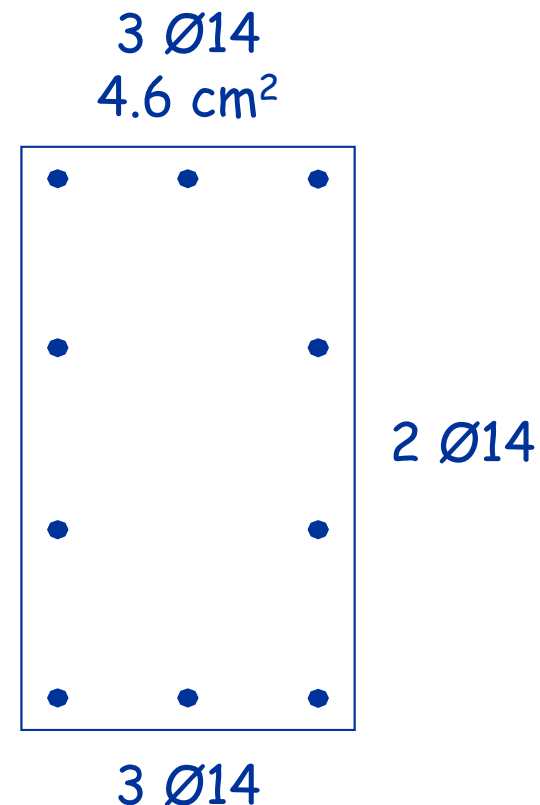
Calcestruzzo C25/30

Acciaio B450C

Sollecitazioni

$$N_{Ed} = 1300 \text{ kN}$$

$$M_{Ed} = 400 \text{ kNm}$$



Esempio

Verifica a pressoflessione

Valori resistenti del calcestruzzo:

$$N_{c,max} = b h f_{cd} = 0.40 \times 0.70 \times 14.2 \times 10^3 = 3976 \text{ kN}$$

$$V_M N_{c,Rd} = 0.486 \times 3976 = 1932 \text{ kN}$$

$$M_{c,max} = \frac{289}{2376} b h^2 f_{cd} = 0.1216 \times 0.40 \times 0.70^2 \times 14.2 \times 10^3$$

$$M_{c,max} = 338.4 \text{ kNm}$$

Esempio

Verifica a pressoflessione

Valori resistenti dell'acciaio:

$$N_{s,max} = 2 A_s f_{yd} = 2 \times 4.62 \times 391 \times 10^{-1}$$

$$N_{s,max} = 361.2 \text{ kN}$$

$$M_{s,max} = A_s (h - 2c) f_{yd} = 4.62 \times (0.70 - 2 \times 0.04) \times 391 \times 10^{-1}$$

$$M_{s,max} = 112.0 \text{ kNm}$$

Esempio

Verifica a pressoflessione

Momento resistente:

$$m = 1 + \frac{v_M N_{c,max}}{v_M N_{c,max} + N_{s,max}} = 1 + \frac{1932}{1932 + 361.2} = 1.842$$

$$\begin{aligned} M_{Rd} &= (M_{c,max} + M_{s,max}) \left[1 - \left| \frac{N_{Rd} - v_M N_{c,max}}{v_M N_{c,max} + N_{s,max}} \right|^m \right] = \\ &= (338.4 + 112.0) \left[1 - \left| \frac{1300 - 1932}{1932 + 361.2} \right|^{1.842} \right] = \\ &= 408.5 \text{ kNm} \end{aligned}$$

$$M_{Ed} < M_{Rd}$$

Sezione
verificata

Esempio

Verifica a pressoflessione

Oppure:

$$m = 1.842$$

$$\frac{M_{Ed}}{M_{c,max} + M_{s,max}} + \left| \frac{N_{Ed} - v_M N_{c,max}}{v_M N_{c,max} + N_{s,max}} \right|^m \leq 1$$

$$\frac{400}{338.4 + 112.0} + \left| \frac{1300 - 1932}{1932 + 361.2} \right|^{1.842} =$$
$$= 0.888 + 0.093 = 0.981 \leq 1$$

Sezione
verificata

Progetto dell'armatura

Il momento affidato alle armature è

$$M_{Ed,red} = M_{Ed} - M_{c,max} \left[1 - \left(\frac{N_{Ed} - v_M N_{c,max}}{v_M N_{c,max}} \right)^2 \right]$$

L'armatura necessaria è quindi

$$A_s = \frac{M_{Ed,red}}{z f_{yd}}$$

z è il braccio della coppia interna
costituita dalle armature

$$z = h - 2c \cong 0.9d$$

Nota: la formula vale rigorosamente solo per $0 \leq N_{Ed} \leq v_M N_{c,max}$

Esempio

Progetto dell'armatura

Dati geometrici

Sezione 40x70

Sollecitazioni

$$N_{Ed} = 1300 \text{ kN}$$

$$M_{Ed} = 400 \text{ kNm}$$

$$M_{Ed,red} = 400 - 338.4 \left[1 - \left(\frac{1300 - 1932}{1932} \right)^2 \right] = 97.8 \text{ kNm}$$

Armatura necessaria:

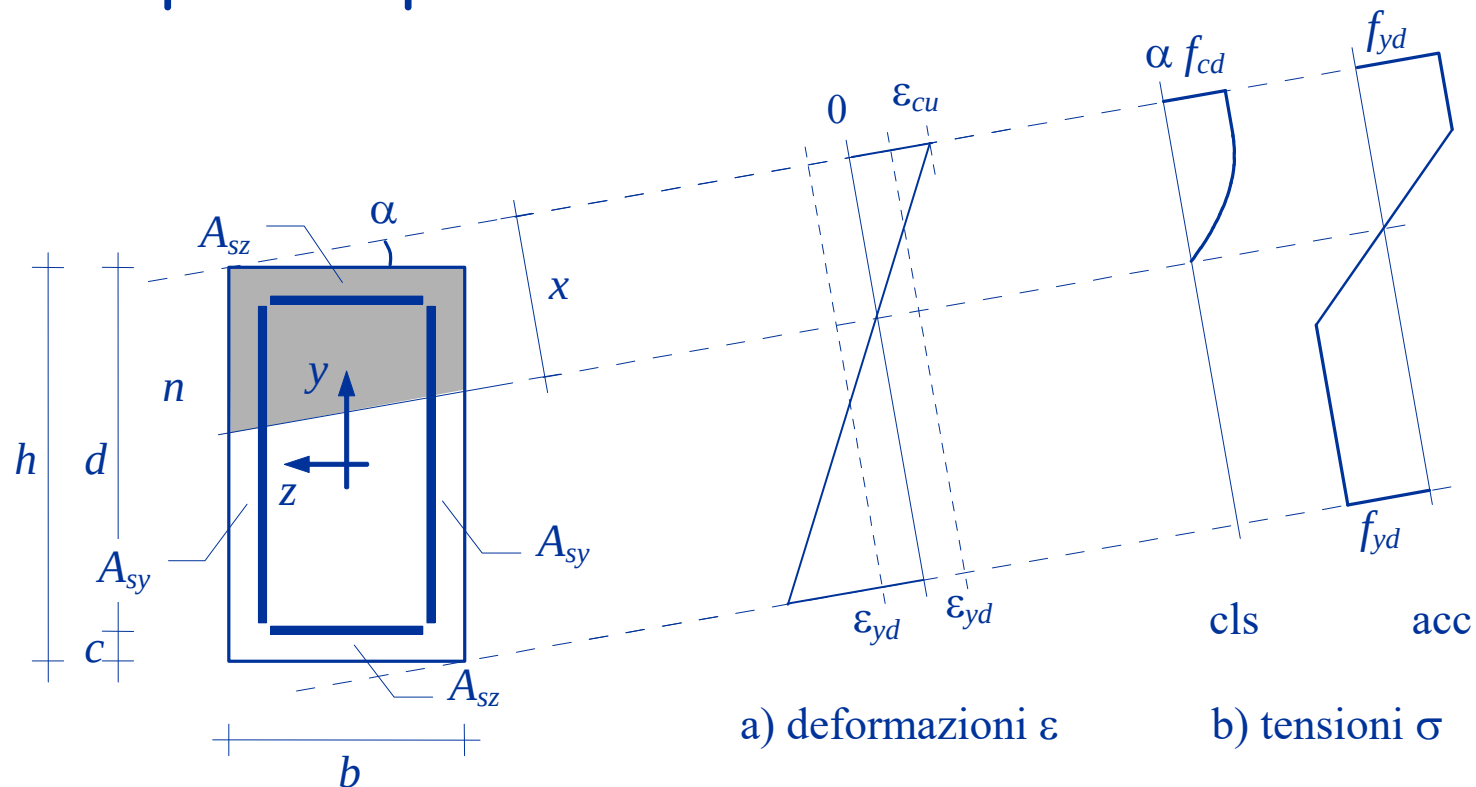
$$A_s = \frac{97.8}{0.9 \times 0.66 \times 391} \times 10 = 4.2 \text{ cm}^2$$

Domini M-N
per flessione composta deviata

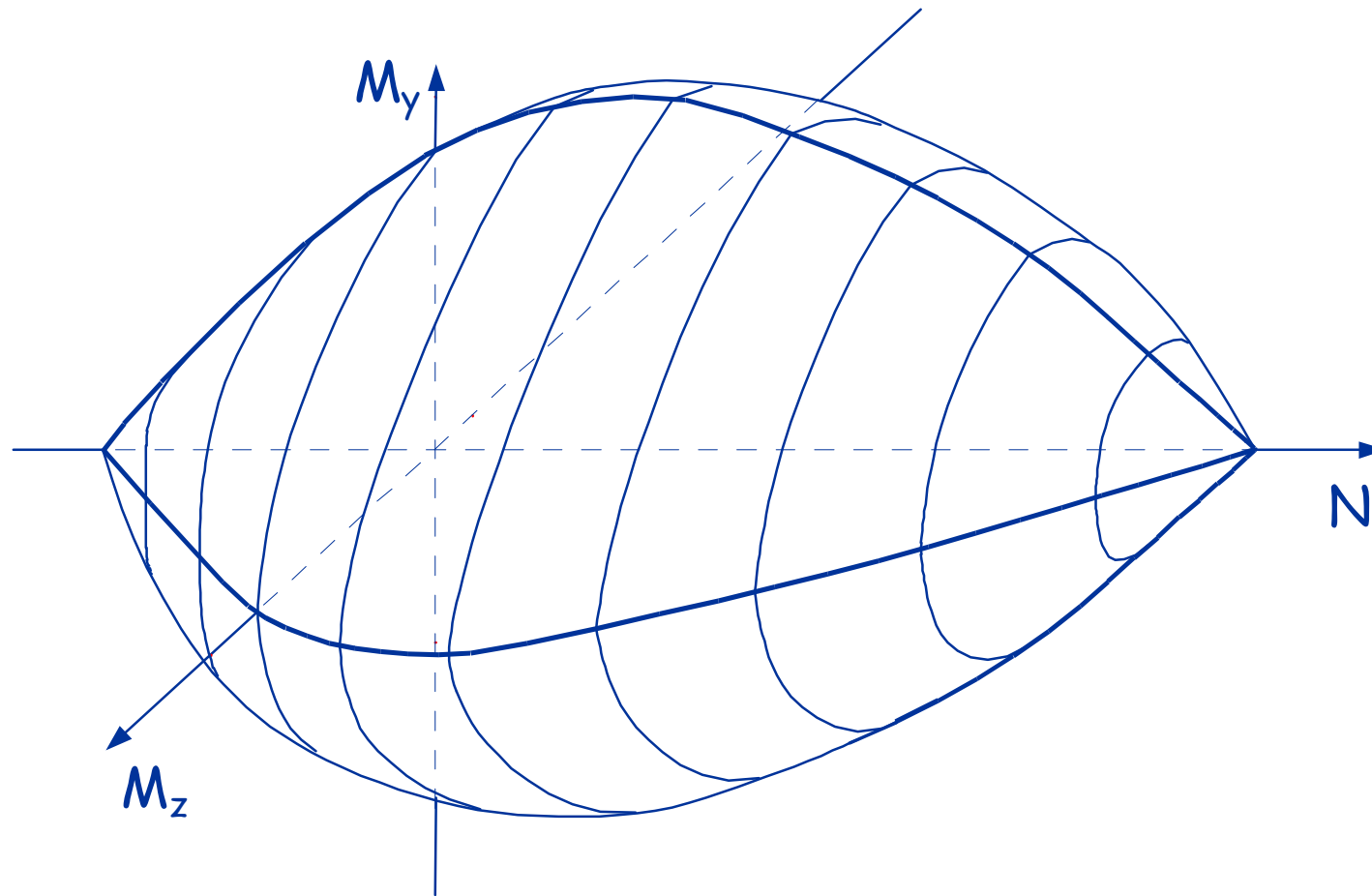
Pressoflessione deviata

Procedimento per la costruzione del dominio M_y-M_z-N

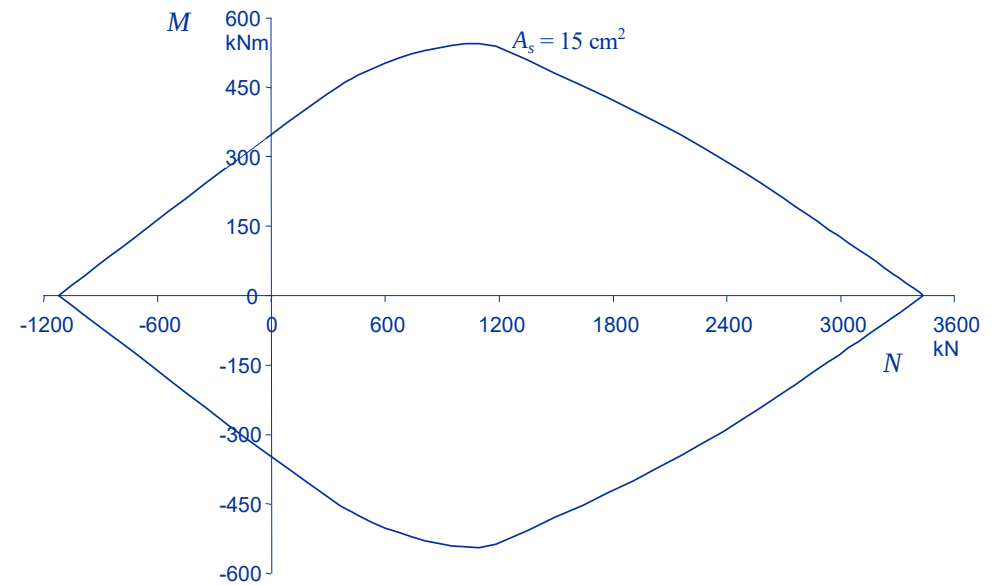
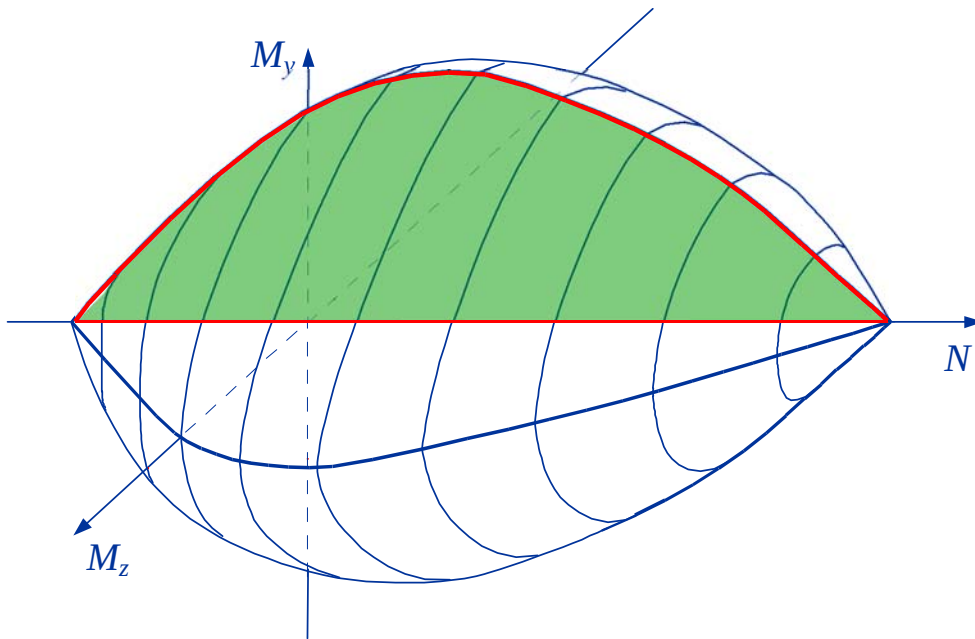
- analogo a quello descritto per pressoflessione retta
- più complicato per l'inclinazione dell'asse neutro



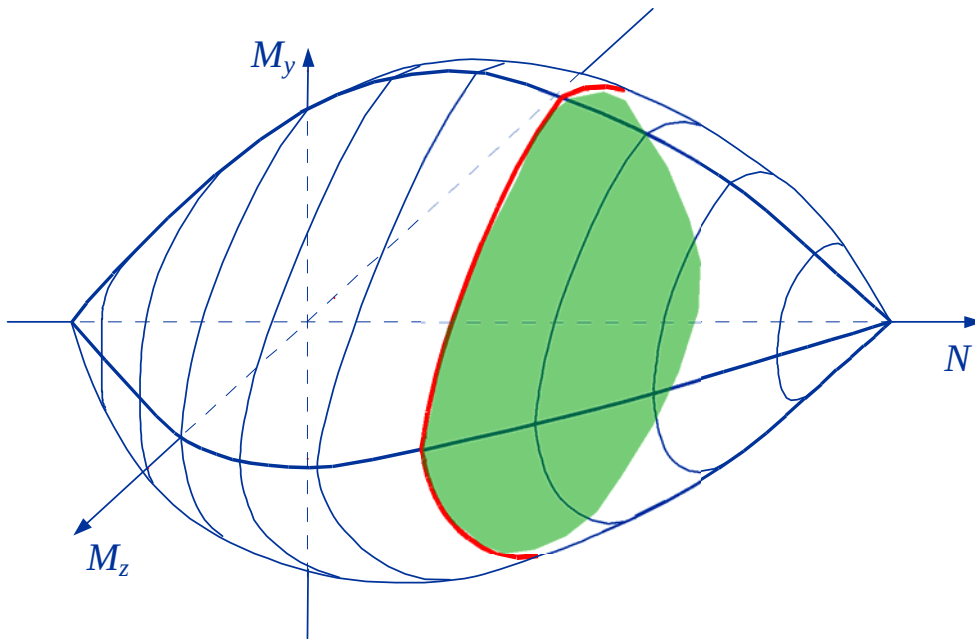
Dominio allo SLU



Dominio allo SLU



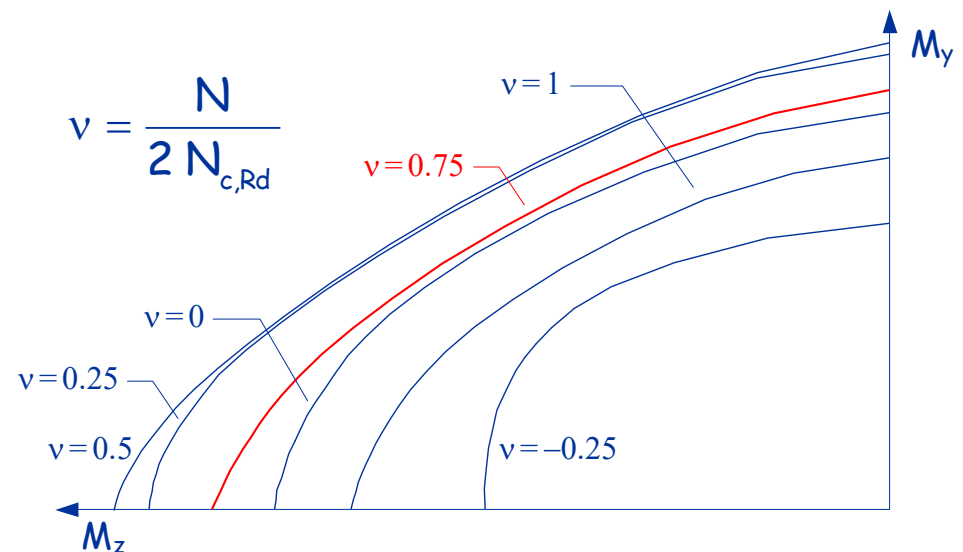
Dominio allo SLU



Nota: per $N \geq 0$ si può usare un esponente maggiore, fino a 2

$$\left(\frac{M_z}{M_{z,Rd}} \right)^p + \left(\frac{M_y}{M_{y,Rd}} \right)^q = 1$$

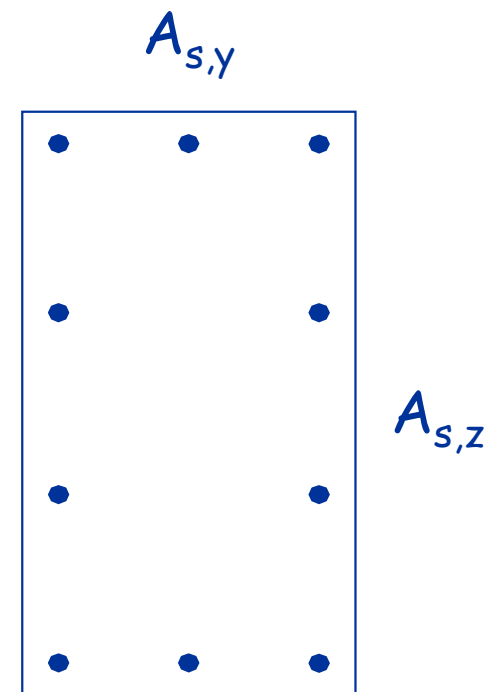
Consiglio:
usare $p = q = 1.5$



Considerazioni

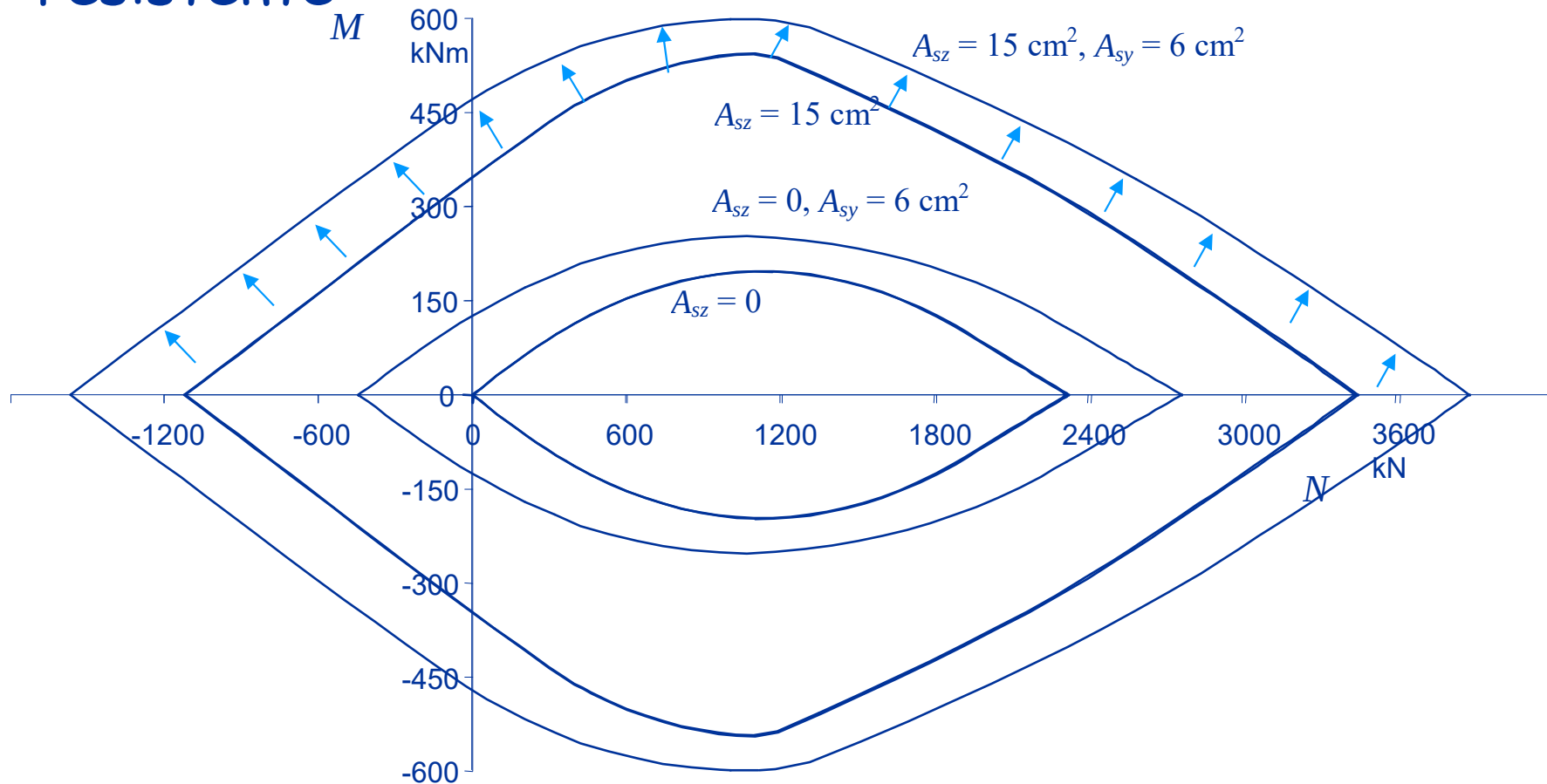
Nel calcolare il momento resistente $M_{Rd,y}$ si dovrebbe prendere in considerazione anche l'armatura sul lato verticale

e viceversa



Considerazioni

Ciò porterebbe ad un incremento del momento resistente



Considerazioni

Ciò porterebbe ad un incremento del momento resistente

$$M_{Rd} = (M_{c,max} + M_{sz,max} + M_{sy,max}) \left[1 - \left(\frac{N_{Rd} - v_M N_{c,max}}{v_M N_{c,max} + N_{sz,max} + N_{sy,max}} \right)^m \right]$$

con
$$m = 1 + \left(\frac{v_M N_{c,max} + N_{sy,max}}{v_M N_{c,max} + N_{sz,max} + N_{sy,max}} \right)$$

Valori base per dominio M-N

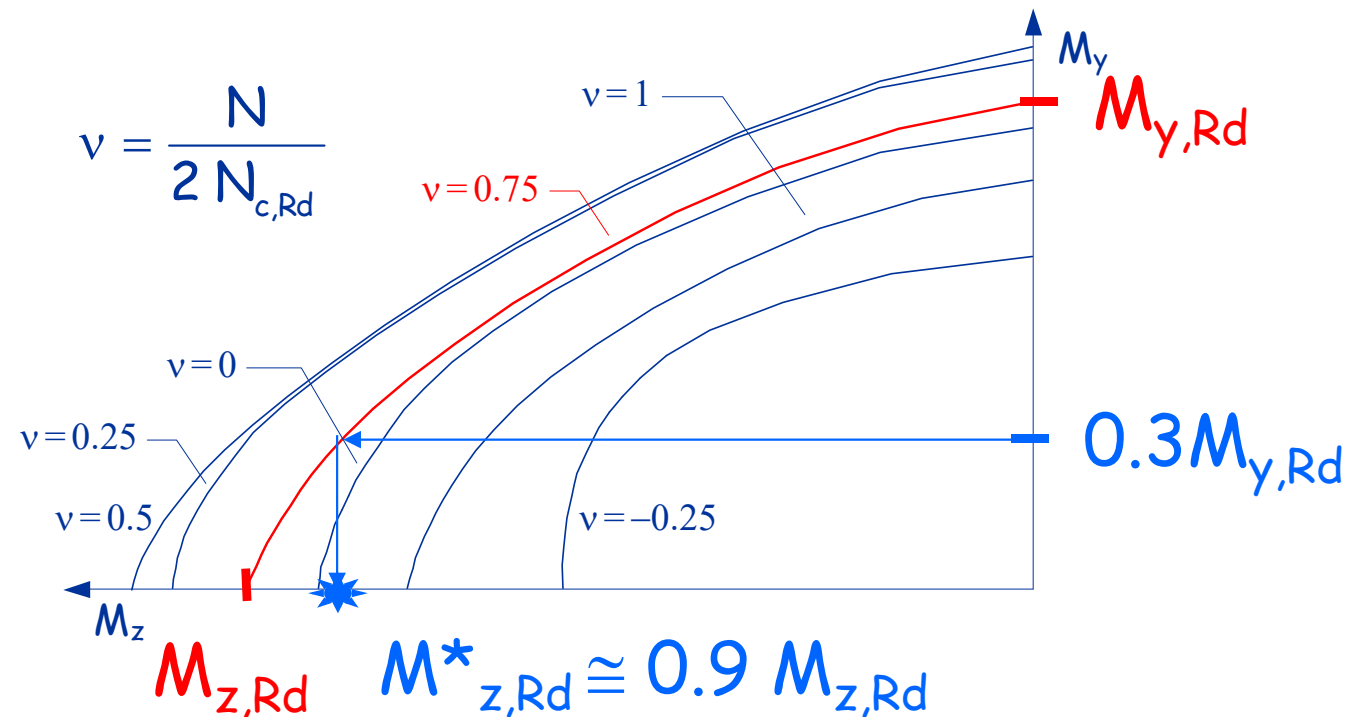
inclusendo l'armatura "di parete"

	Calcestruzzo	Acciaio
N	$N_{c,max} = \frac{289}{594} b h f_{cd}$	$N_{s,max} = 2 A_s f_{yd}$ $N_{s,max} = 2 (A_s + A_{s,p}) f_{yd}$
M	$M_{c,max} = \frac{289}{2376} b h^2 f_{cd}$	$M_{s,max} = A_s (h - 2 c) f_{yd}$ $M_{s,max} = (A_s + 0.4 A_{s,p}) (h - 2 c) f_{yd}$

E' possibile usare le stesse formule modificando $N_{s,max}$ e $M_{s,max}$

Considerazioni

Contemporaneamente, la presenza di momento nella direzione trasversale riduce il momento resistente



Indicazioni operative

Finché il momento trasversale non è eccessivo, i due effetti si compensano

E' possibile progettare a pressoflessione retta, separatamente per le due direzioni,

e poi effettuare un controllo a pressoflessione deviata

FINE