

Lezione

Tecnica delle Costruzioni

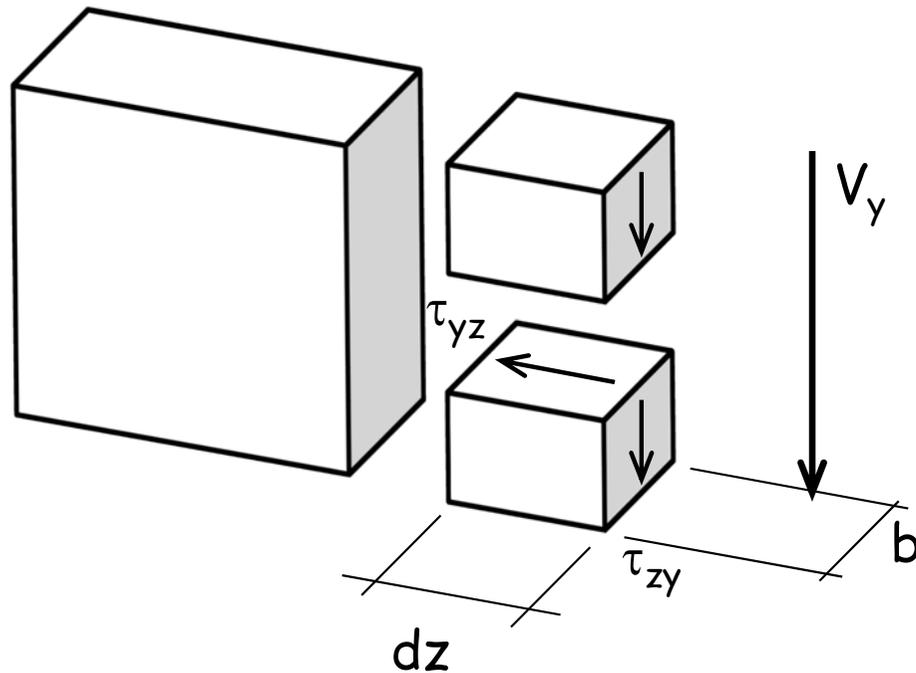
La sollecitazione di taglio

Interazione taglio-momento flettente

- La sollecitazione di taglio è provocata da una variazione del momento flettente lungo l'asse dell'elemento in esame. A meno di sezioni particolari (ad es. estremità di trave semplicemente appoggiata caricata da forze trasversali) la sollecitazione di taglio è accompagnata sempre da momento flettente.
- Il comportamento degli elementi strutturali soggetti a taglio e momento flettente dipende in generale dall'accoppiamento taglio-momento flettente.
- Solo in casi particolari il comportamento può essere interpretato attraverso l'analisi delle caratteristiche di sollecitazione singolarmente considerate.

Calcolo delle tensioni

Sezione di materiale elastico e omogeneo



Dall'equazione di equilibrio
alla traslazione verticale

$$V_y = \int \tau_{yz} dA$$

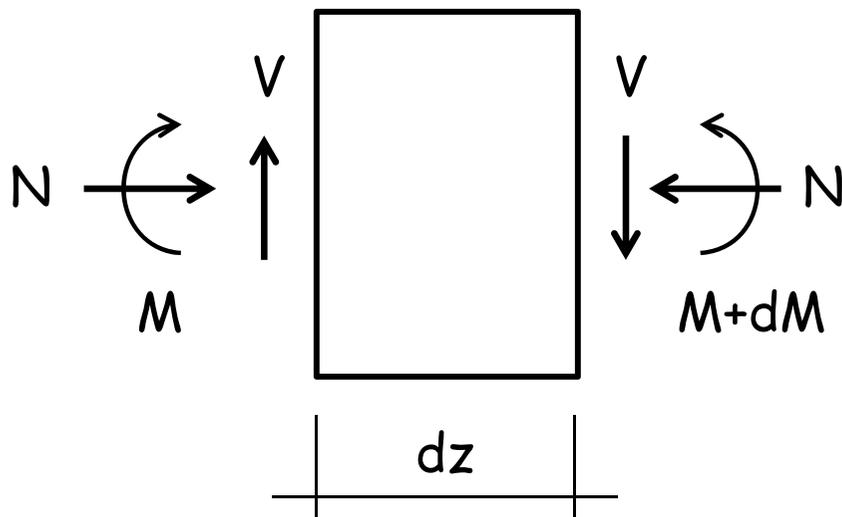
$$\tau_{zy} = \tau_{yz}$$

Calcolo delle tensioni

Sezione di materiale elastico e omogeneo

Dall'equazione di equilibrio alla rotazione

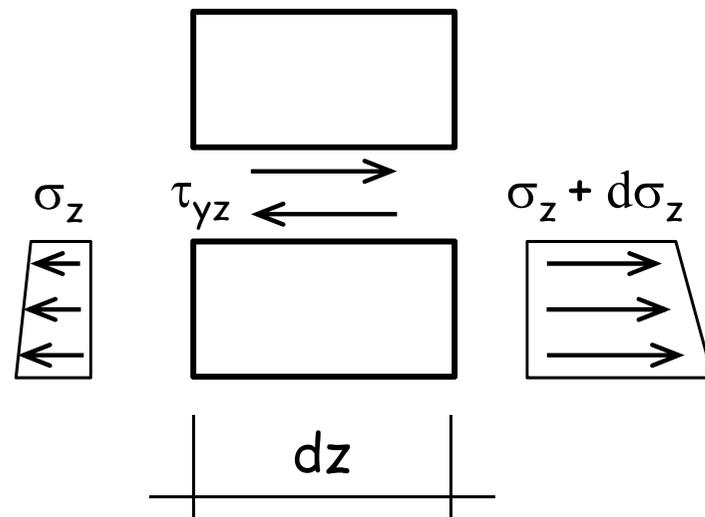
$$V_y dz = dM$$



Inoltre ...

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y$$

$$\sigma_z + d\sigma_z = \frac{M_x + dM_x}{I_x} y$$

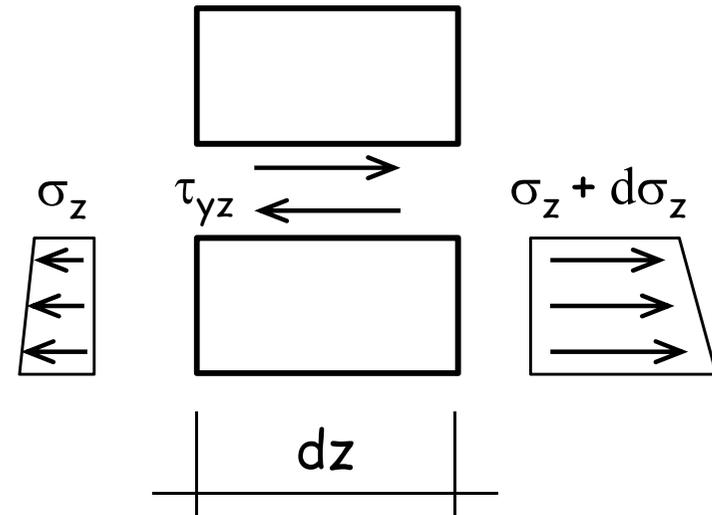


Calcolo delle tensioni

Sezione di materiale elastico e omogeneo

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y$$

$$\sigma_z + d\sigma_z = \frac{M_x + dM_x}{I_x} y$$



Dall'equazione di equilibrio
alla traslazione longitudinale

$$\int d\sigma_z b dy - \tau_{yz} b dz = 0 \quad \longleftarrow$$

Se si suppone che la τ_{yz}
sia costante lungo la corda

$$\tau_{yz} b dz = \int d\sigma_z b dy = \int \frac{V_y dz}{I_x} b y dy = \frac{V_y dz}{I_x} \int b y dy = \frac{V_y dz}{I_x} S_x$$

Calcolo delle tensioni

Sezione di materiale elastico e omogeneo

Quindi ...

$$\tau_{yz} = \frac{V_y S_x}{I_x b}$$

**Formula di
Jourawski**

dove

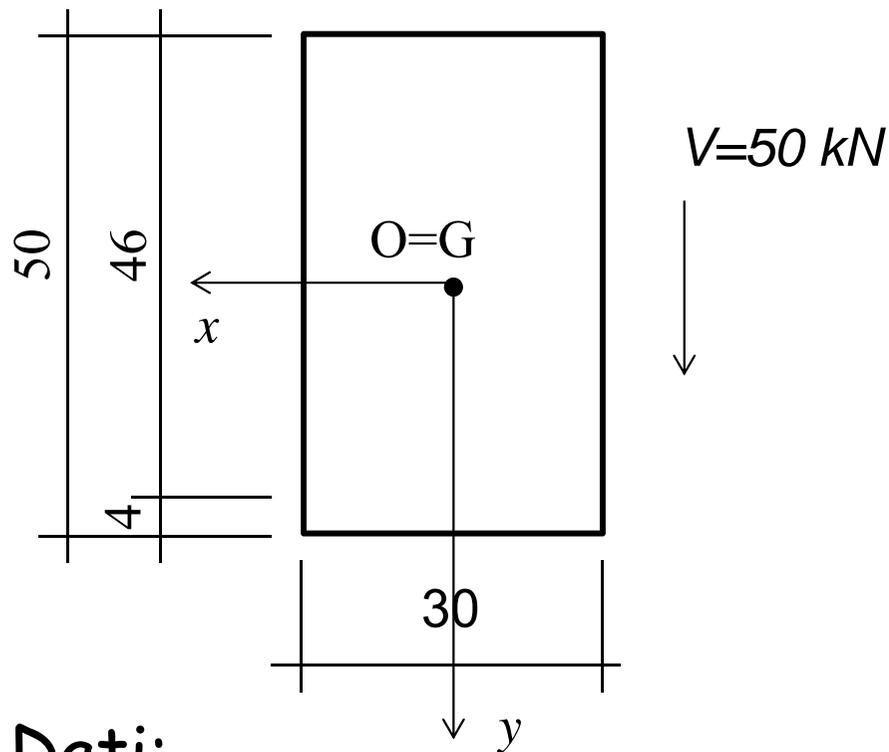
b è la larghezza della corda

S_x è il momento statico della sezione sovrastante o sottostante la corda in esame, rispetto all'asse baricentrico

I_x è il momento d'inerzia dell'intera sezione rispetto all'asse baricentrico

Esempio n.1

Sezione di materiale elastico e omogeneo



Dati:

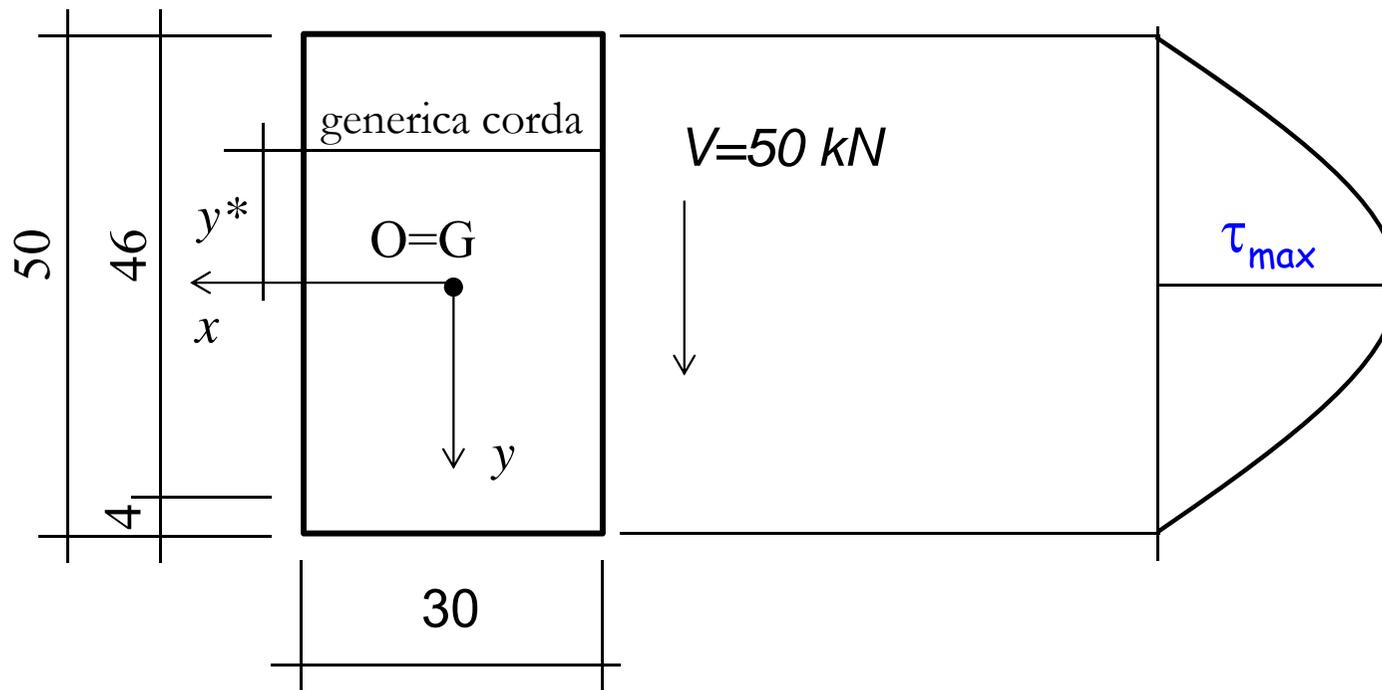
- Geometria della sezione
- Taglio sollecitante V

Incognite:

Tensioni

Esempio n.1

Sezione di materiale elastico e omogeneo



$$S = b \left(\frac{h}{2} + y \right) \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - y \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) b$$

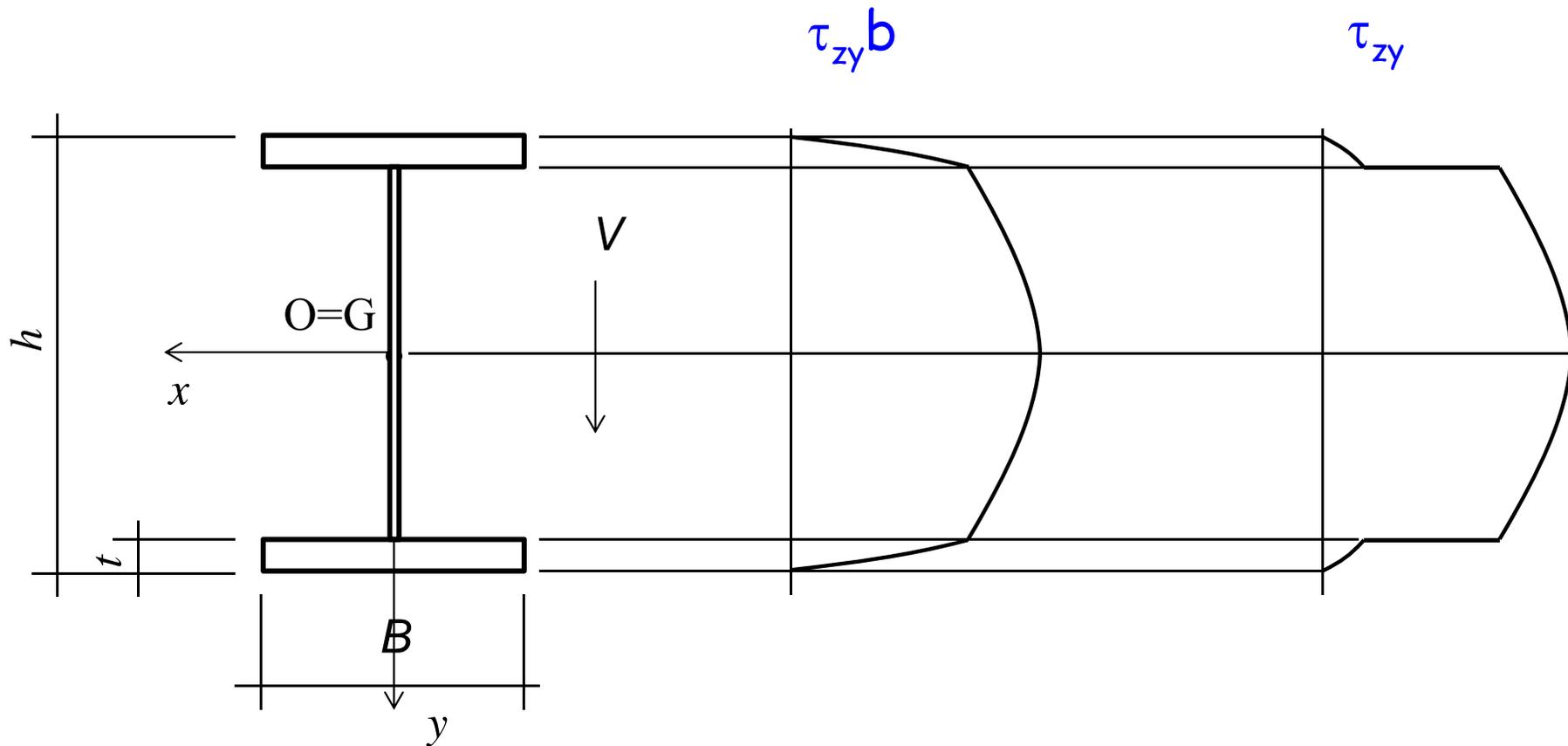
$$\tau = \frac{6V_y}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

$$I = \frac{bh^3}{12}$$

$$\tau_{\text{max}} = 1.5 \frac{V_y}{bh} = 1.5 \frac{50 \cdot 10^3}{30 \cdot 50 \cdot 10^2} = 0.50 \text{ MPa}$$

Esempio n.1

Sezione di materiale elastico e omogeneo



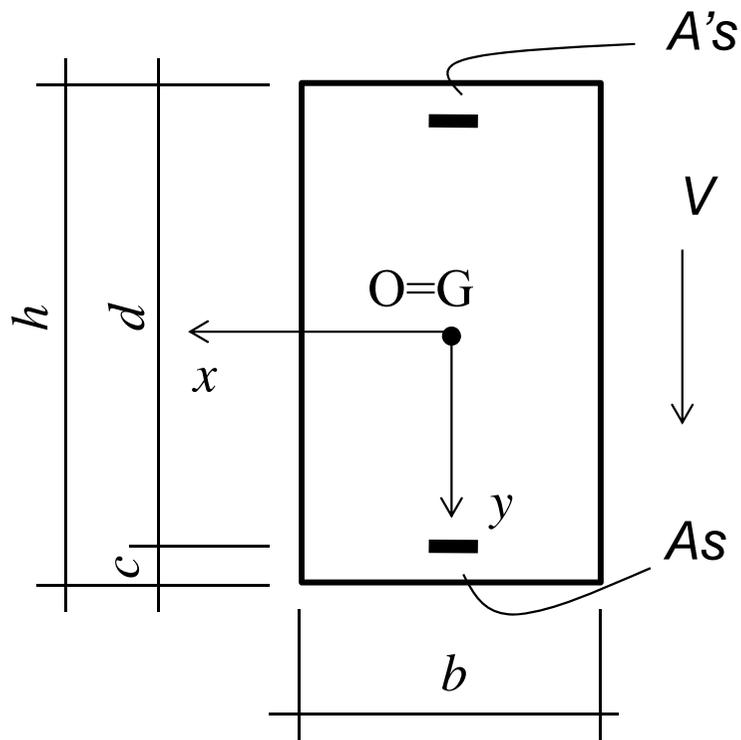
$$S = \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) B$$

$$S = \frac{1}{2} B t (h - t) + \frac{1}{2} \left[\frac{(h - 2t)^2}{4} - y^2 \right] b$$

$$I = \frac{B h^3 - (B - b)(h - 2t)^3}{12}$$

Calcolo delle tensioni

I° stadio di comportamento



Ricorda:
le armature devono essere
omogeneizzate

$$I = \frac{bh^3}{12} + n(A_s + A'_s) \left(\frac{h}{2} - c \right)^2$$

$$S = \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) b$$

se ...

$$y > \frac{h}{2} - c \quad \text{e} \quad y < -\frac{h}{2} + c$$

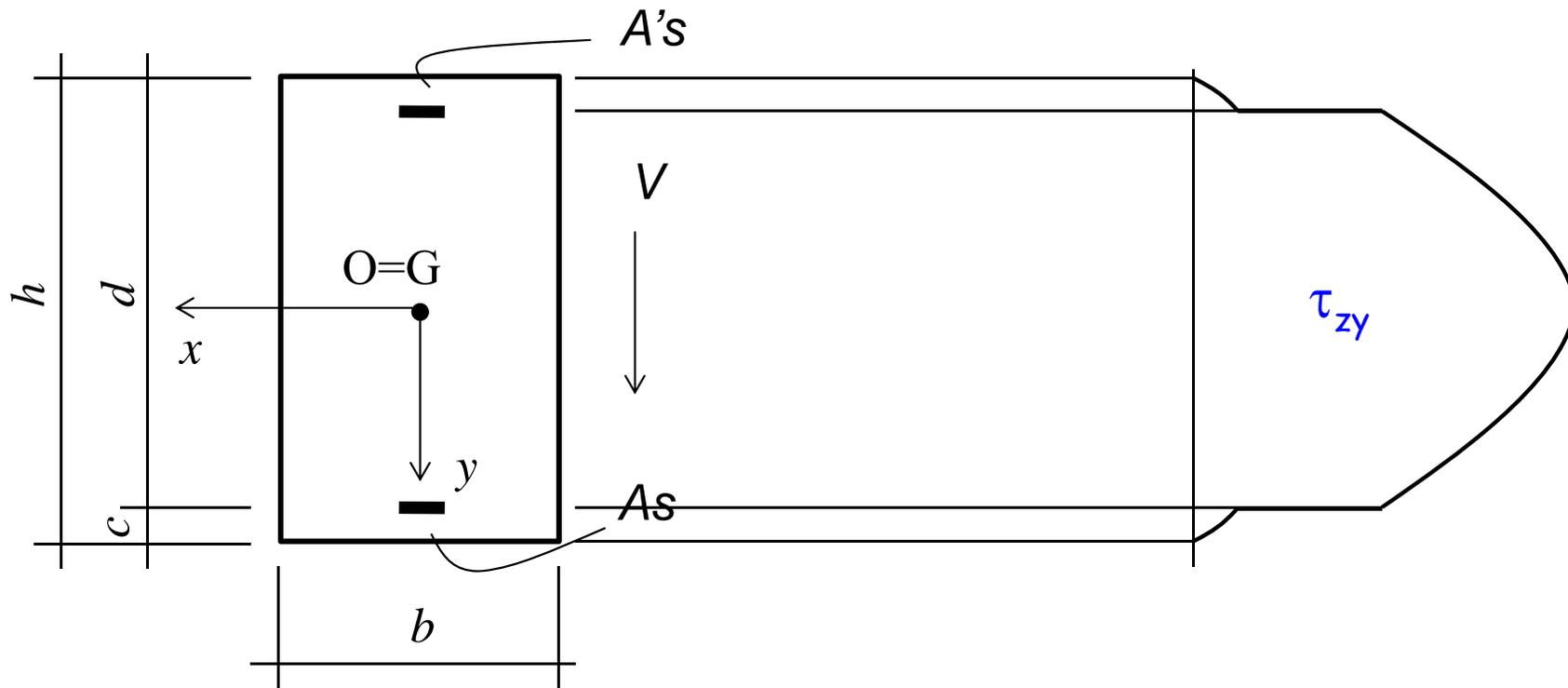
$$S = \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) b + nA'_s \left(\frac{h}{2} - c \right)$$

se ...

$$-\frac{h}{2} + c < y < \frac{h}{2} - c$$

Calcolo delle tensioni

I° stadio di comportamento

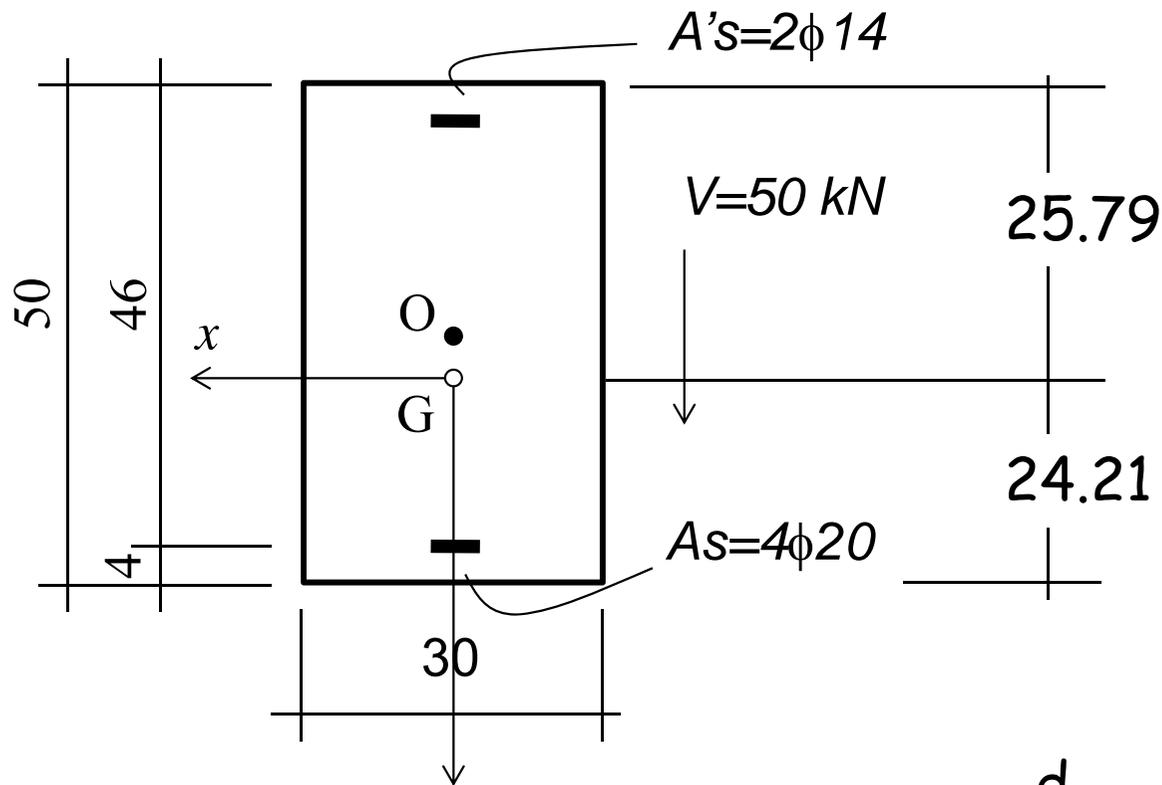


Nota: se le armature non sono uguali, il baricentro è spostato rispetto al centro O e le due discontinuità non sono uguali.

$$\tau_{yz} = \frac{V_y S_x}{I_x b}$$

Esempio n. 5

1° stadio di comportamento



Come già mostrato con riferimento alla flessione semplice:

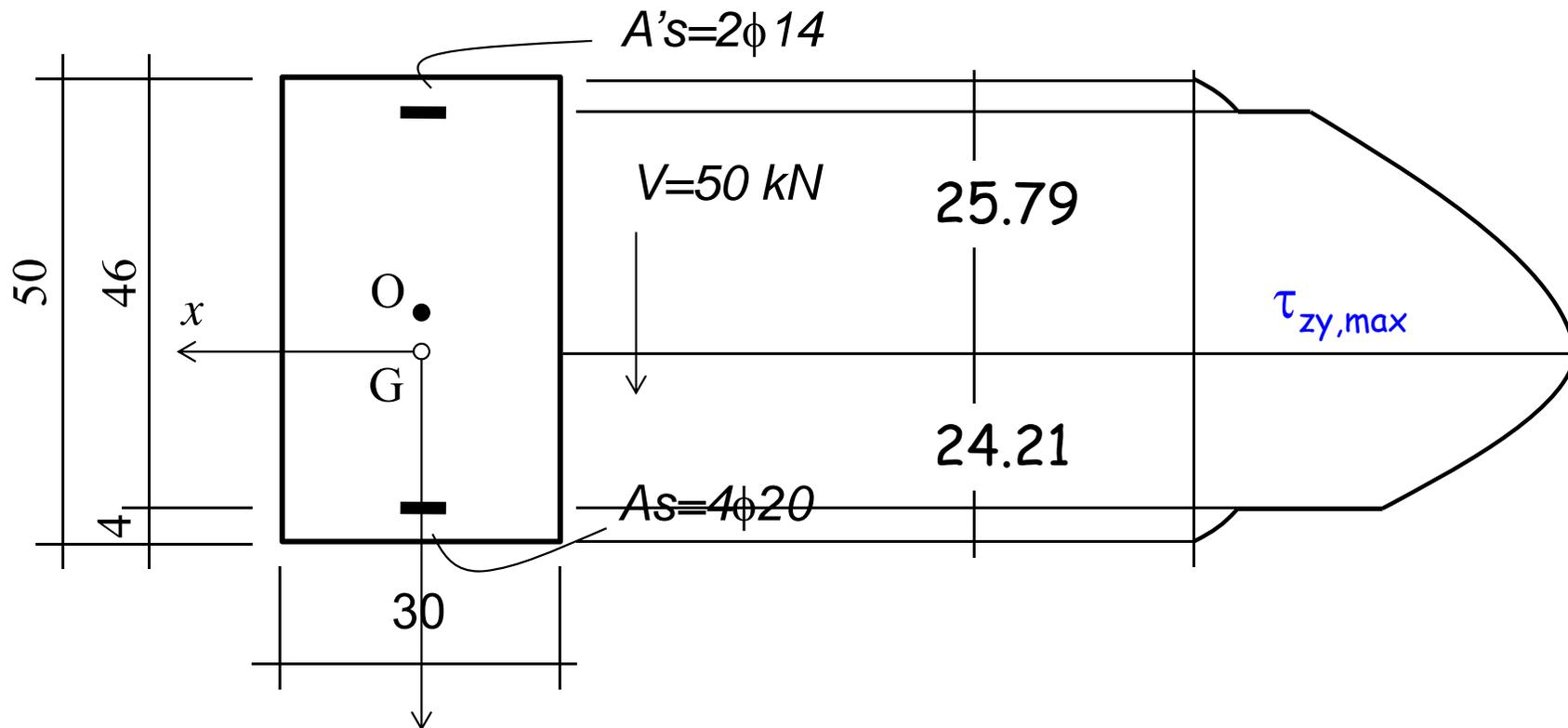
$$d_{G,\text{sup}} = S/A = 25.79 \text{ cm}$$

$$d_{G,\text{inf}} = h - d_{G,\text{sup}} = 24.21 \text{ cm}$$

$$I = 355298 \text{ cm}^4$$

Esempio n. 5

1° stadio di comportamento

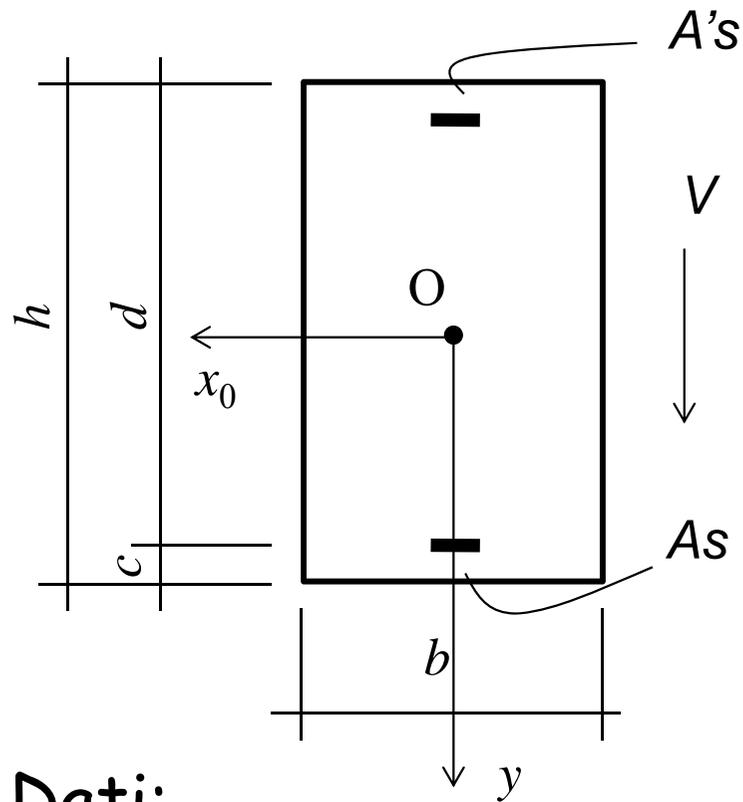


$$S_{x,G} = \frac{bd_{G,inf}^2}{2} + nA_s(d_{G,inf} - c) = 10404 \text{ cm}^3$$
$$= \frac{30 \times 24.21^2}{2} + 6.35 \times 12.56 \times 20.21$$

$$\tau_{zy,max} = \frac{V_y S_{x,G}}{I_x b}$$
$$= \frac{50 \times 10404}{355298 \times 30} = 0.488 \text{ MPa}$$

Taglio

2° stadio



Dati:

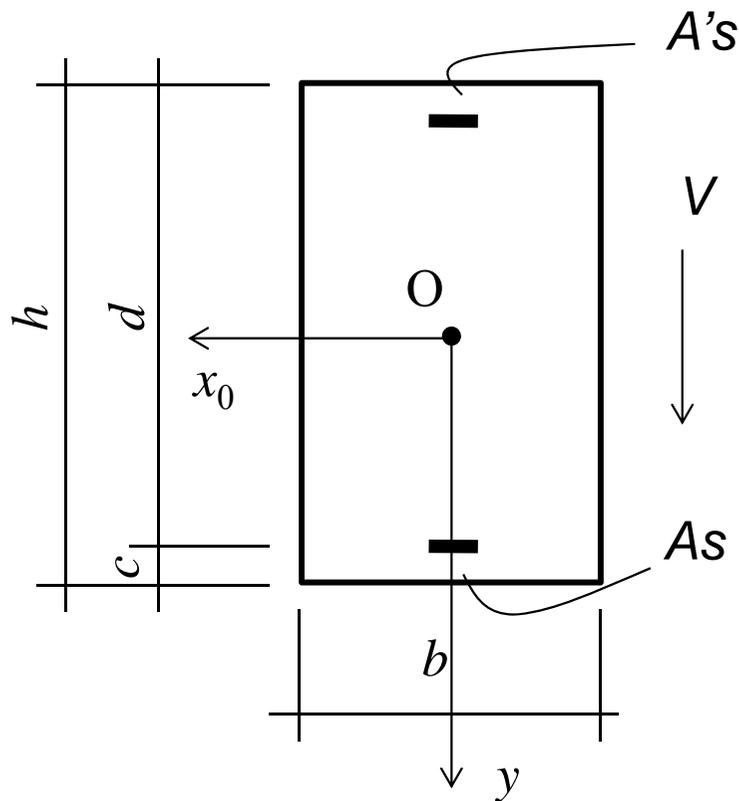
- Geometria della sezione
- Taglio sollecitante V

Incognite:

Tensioni

Taglio

2° stadio



Caso ... flessione semplice

Calcolo del baricentro
della sezione reagente
omogeneizzata

$$A = b \cdot x + n(A_s + A'_s)$$

$$S = \frac{bx^2}{2} + n(A_s d + A'_s c)$$

(rispetto al bordo superiore)

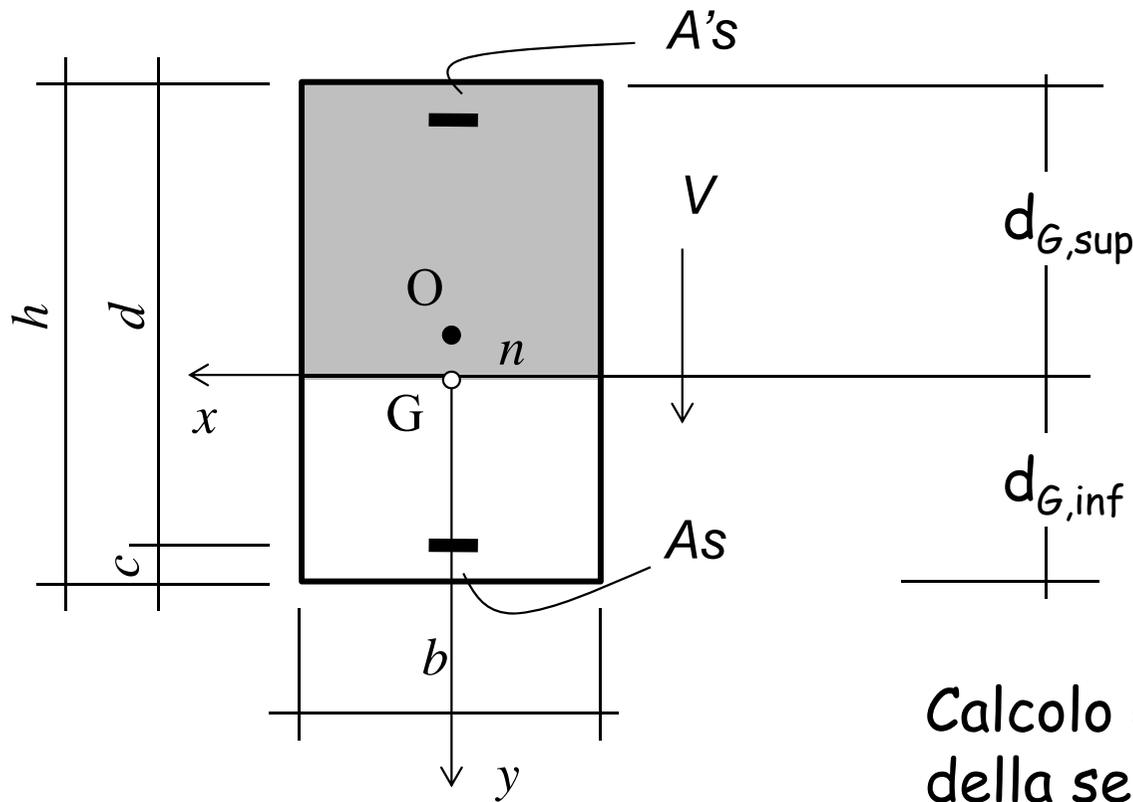
$$d_{G,\text{sup}} = S/A$$

$$d_{G,\text{inf}} = h - d_{G,\text{sup}}$$

Taglio

2° stadio

Caso ... flessione semplice



Calcolo del momento d'inerzia della sezione

$$I = \frac{bx^3}{3} + n(A_s d^2 + A'_s c^2)$$

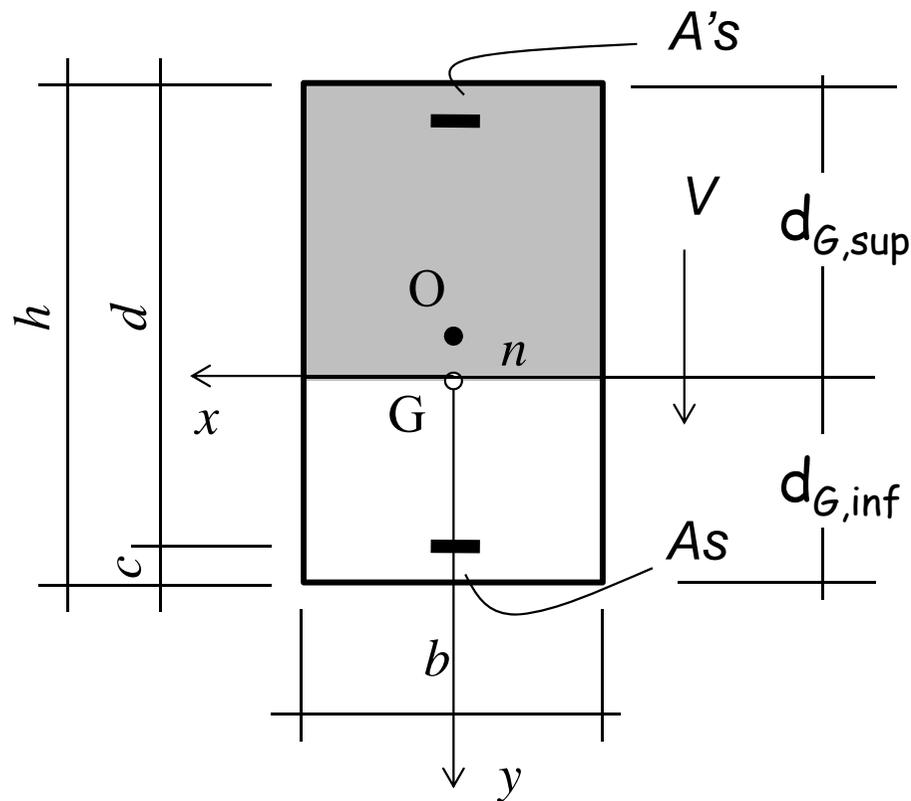
(rispetto al bordo superiore)

$$I_x = I - A d_{G,sup}$$

(rispetto a G)

Taglio

2° stadio



Caso ... flessione semplice

1. Se la corda taglia la parte compressa della sezione

$$S_{x,c} = \frac{(d_{G,sup}^2 - y^2)}{2} b$$

$$S_{x,s} = nA'_s (d_{G,sup} - c)$$

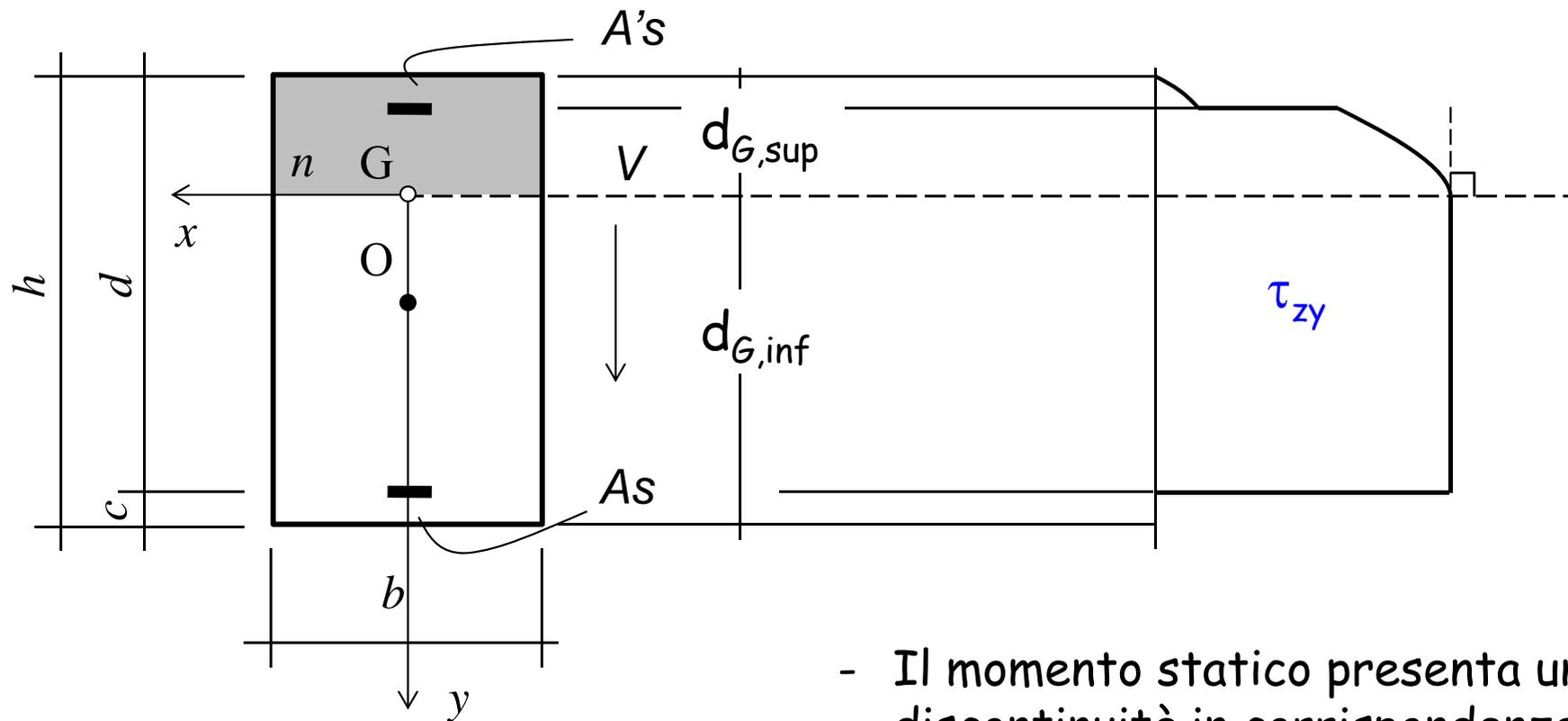
2. Se la corda è al di sotto dell'asse neutro il valore non muta rispetto a quello in corrispondenza dell'asse neutro

3. Se la corda è al di sotto dell'armature tesa il valore del momento statico si annulla

Taglio

2° stadio

Caso ... flessione semplice



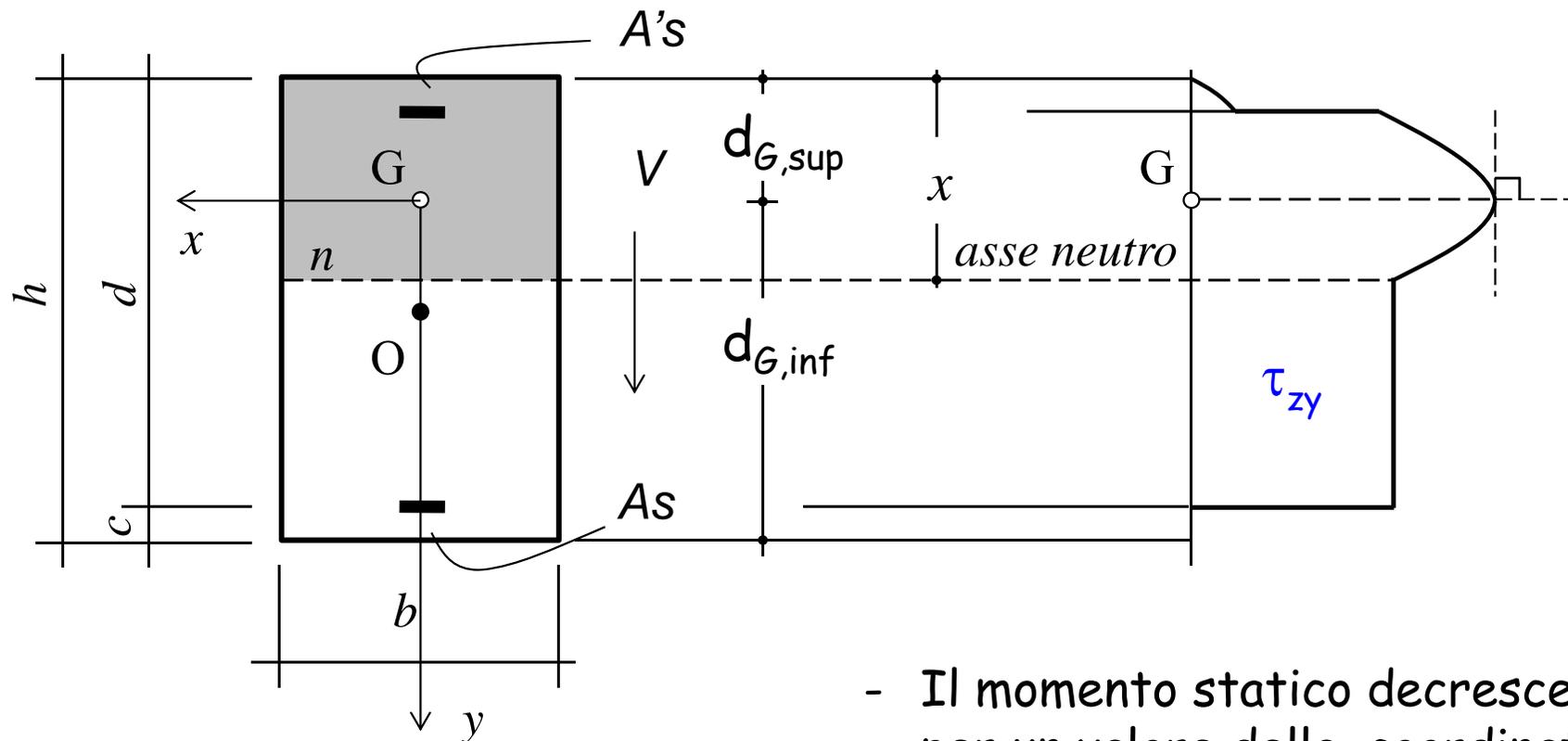
- Il momento statico cresce all'aumentare della coordinata y se la corda taglia la parte compressa.

- Il momento statico presenta una discontinuità in corrispondenza delle armature.
- Al di sotto dell'asse neutro il momento statico è costante.

Taglio

2° stadio

Caso ... pressoflessione



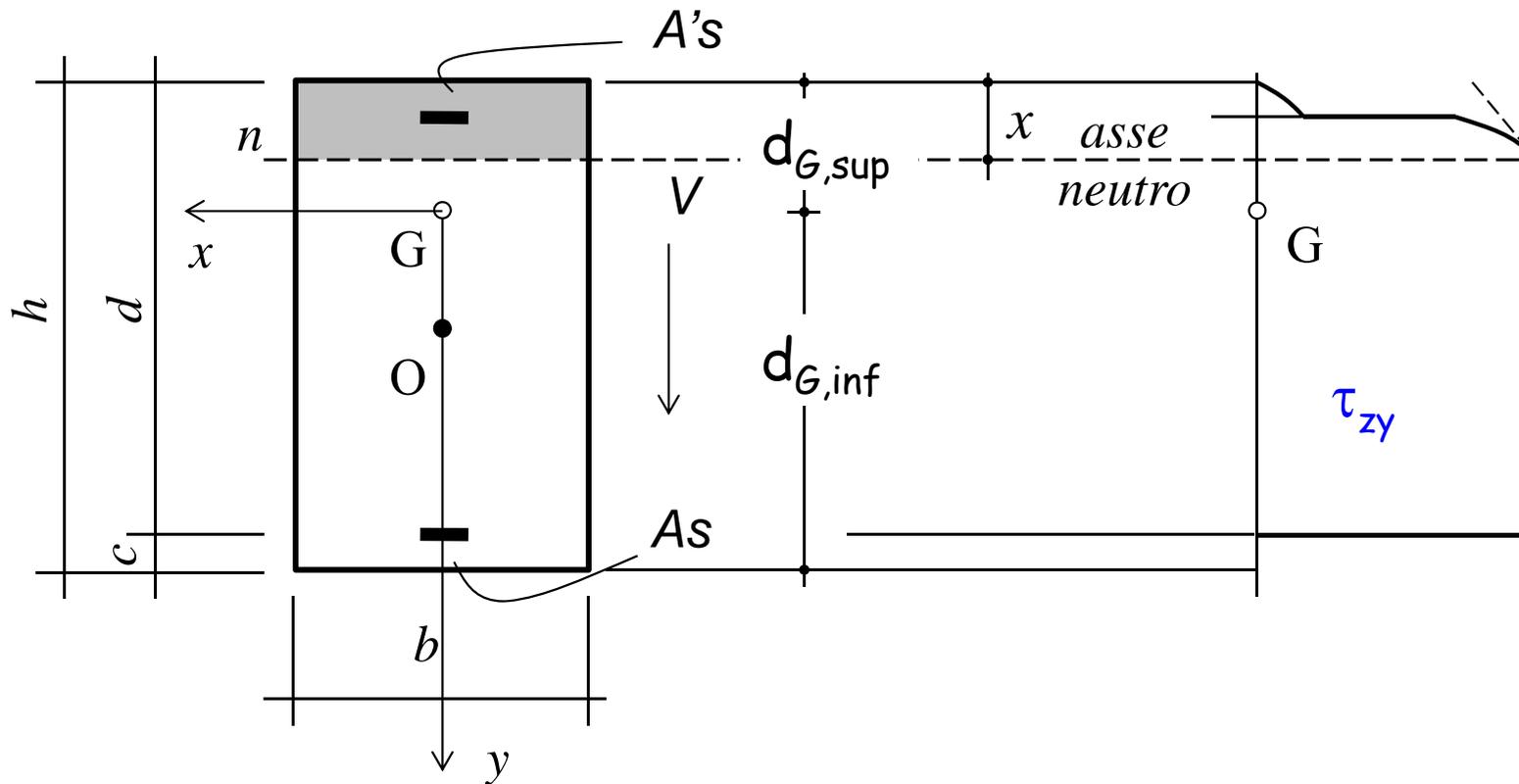
- Il momento statico cresce all' aumentare della coordinata y da $-d_{G,sup}$ fino a 0.

- Il momento statico decresce per un valore della coordinata y tra 0 e $x-d_{G,sup}$
- Al di sotto dell'asse neutro il momento statico è costante.

Taglio

2° stadio

Caso ... tensoflessione

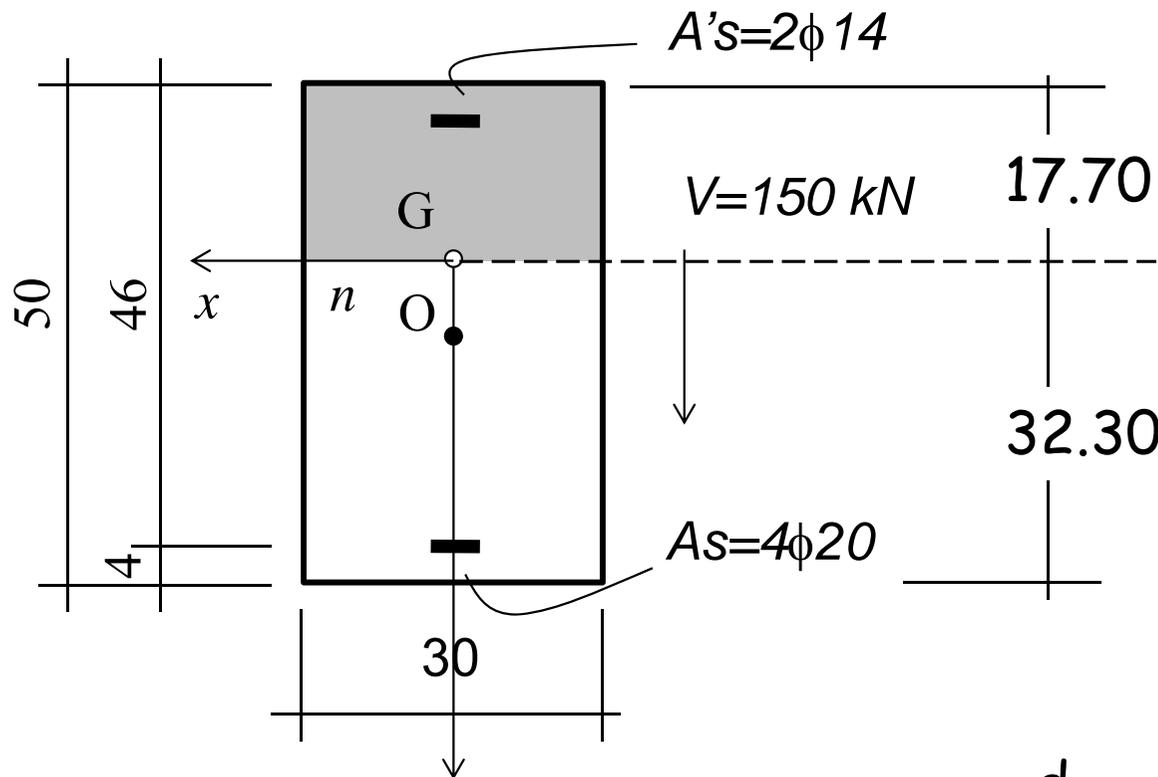


- Il momento statico cresce all'aumentare della coordinata y da $-d_{G,sup}$ fino a $-d_{G,su}+x$

- Al di sotto dell'asse neutro il momento statico è costante.

Esempio n. 6

2° stadio di comportamento



Carichi di lunga
durata
($n=15$)

Come già mostrato con
riferimento alla flessione
semplice:

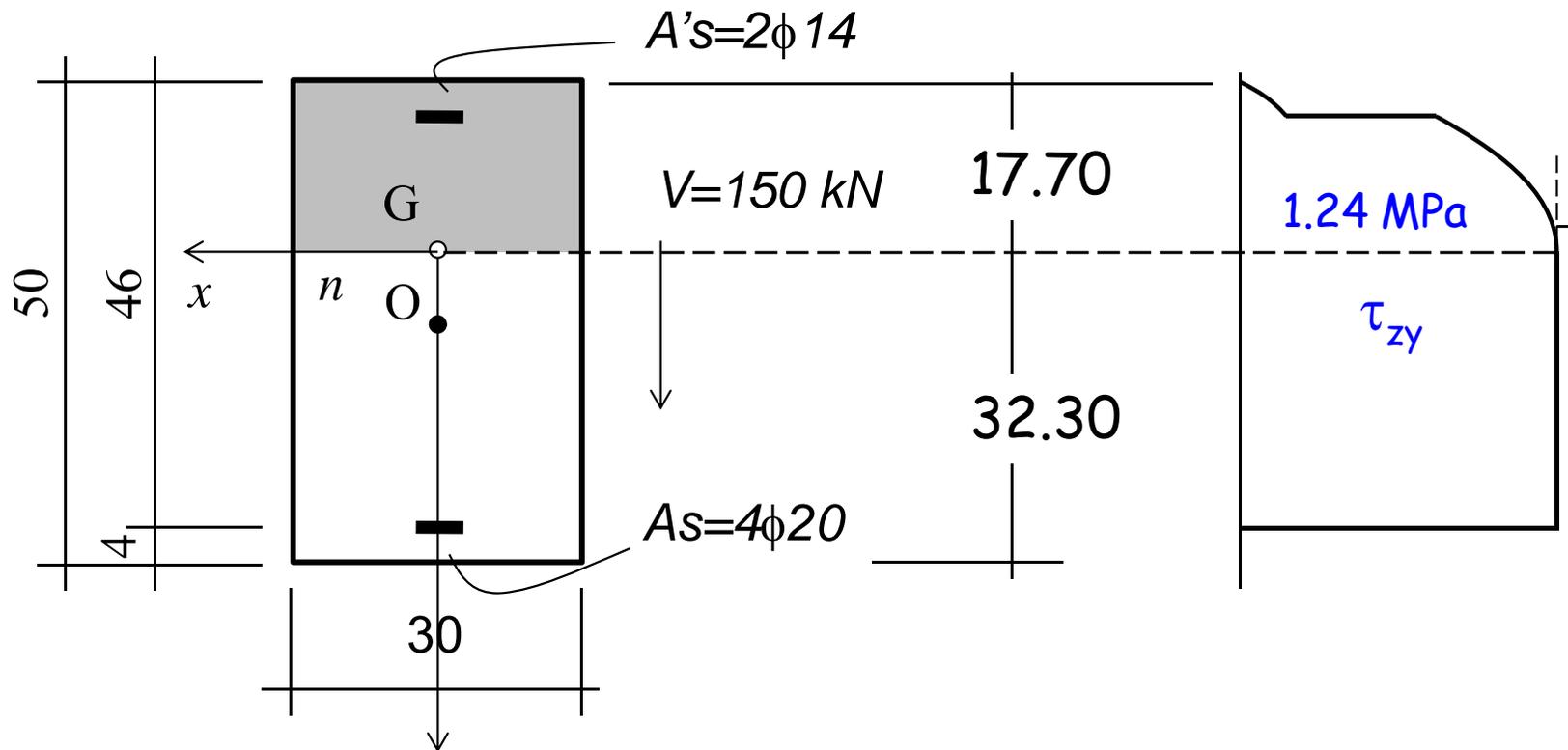
$$d_{G,\text{sup}} = S/A = 17.70 \text{ cm}$$

$$d_{G,\text{inf}} = h - d_{G,\text{sup}} = 32.30 \text{ cm}$$

$$I = 215011 \text{ cm}^4$$

Esempio n. 6

2° stadio di comportamento



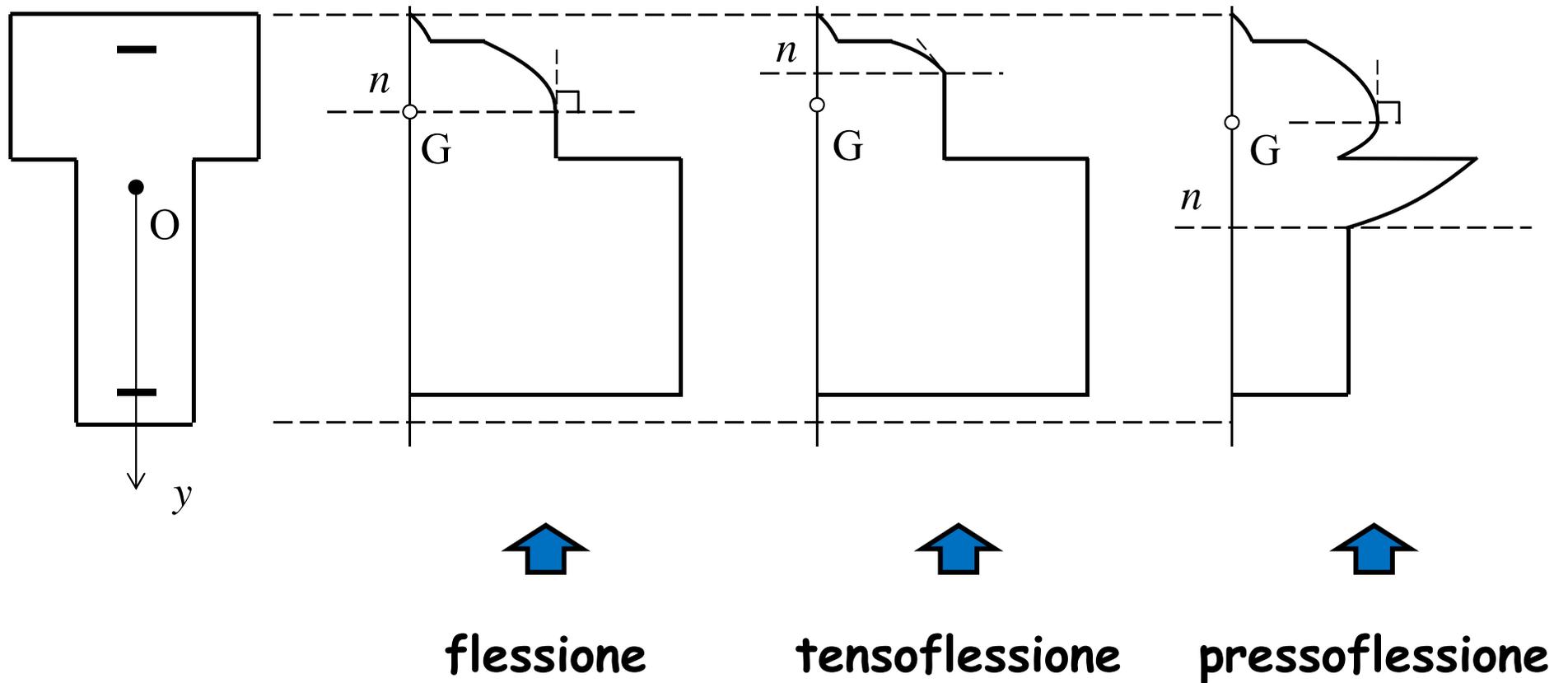
$$S_{x,G} = \frac{bx^2}{2} + nA'_s(x - c) =$$

$$\frac{30 \cdot 17.70^2}{2} + 15 \cdot 3.08 \cdot (17.70 - 4) = 5332 \text{ cm}^3$$

$$\tau_{zy \text{ max}} = \frac{V_y S_{x,G}}{I_x b} = \frac{150 \cdot 5332}{215011 \cdot 30} = 1.24 \text{ MPa}$$

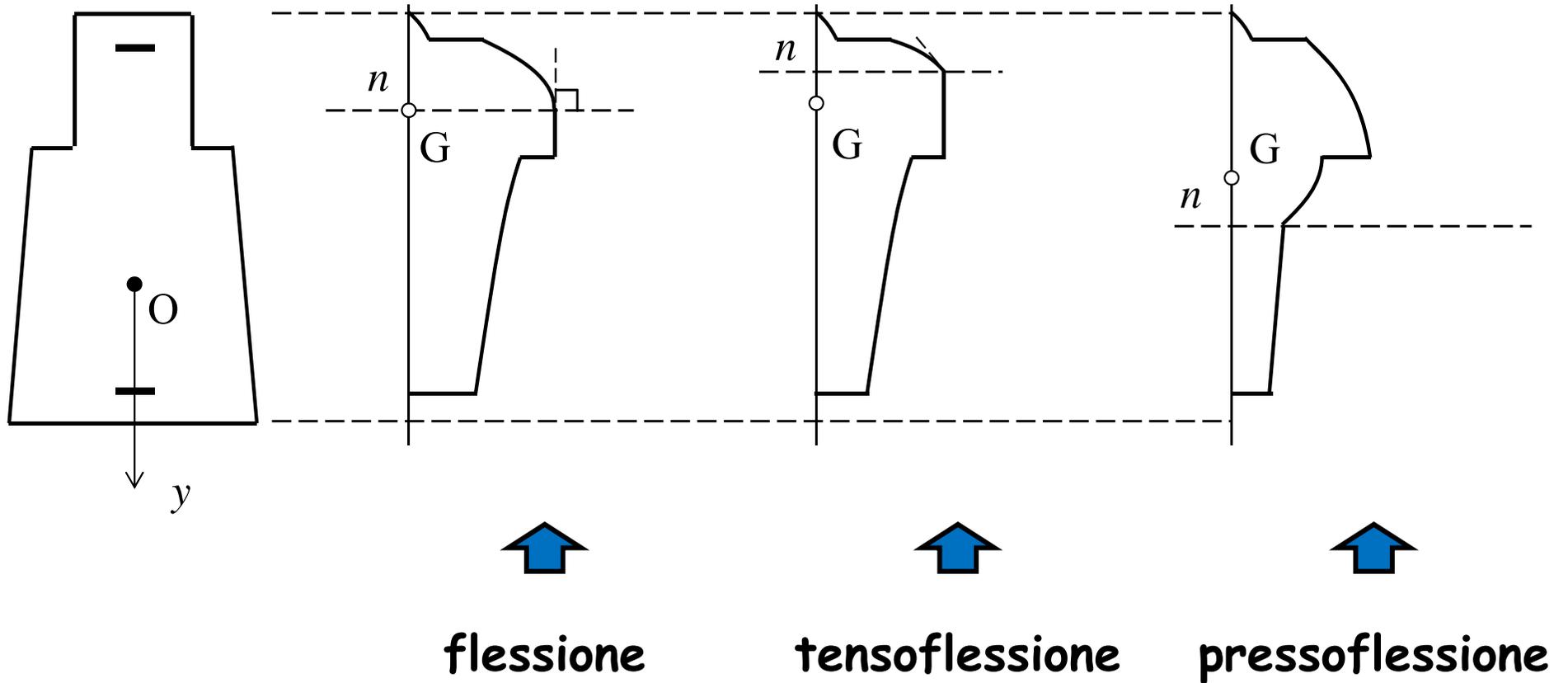
Taglio

Sezione diversa dalla rettangolare



Taglio

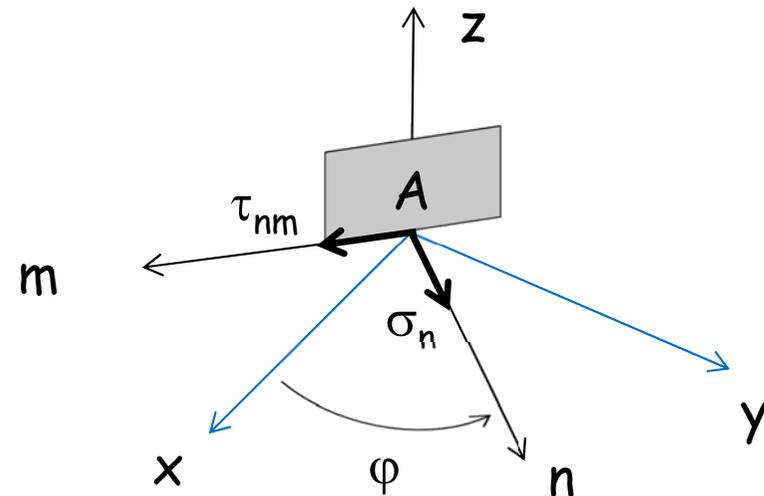
Sezione diversa dalla rettangolare



Direzioni principali di tensione

Materiale elastico e omogeneo

Se si prendono in esame gli elementi piani passanti per A che si appoggiano sull'asse z , si dimostra che l'estremo del vettore di componenti $\sigma_n \tau_{nm}$ descrive nel piano σ - τ un cerchio al ruotare dell'elemento piano attorno all'asse z (cerchio di Mohr)

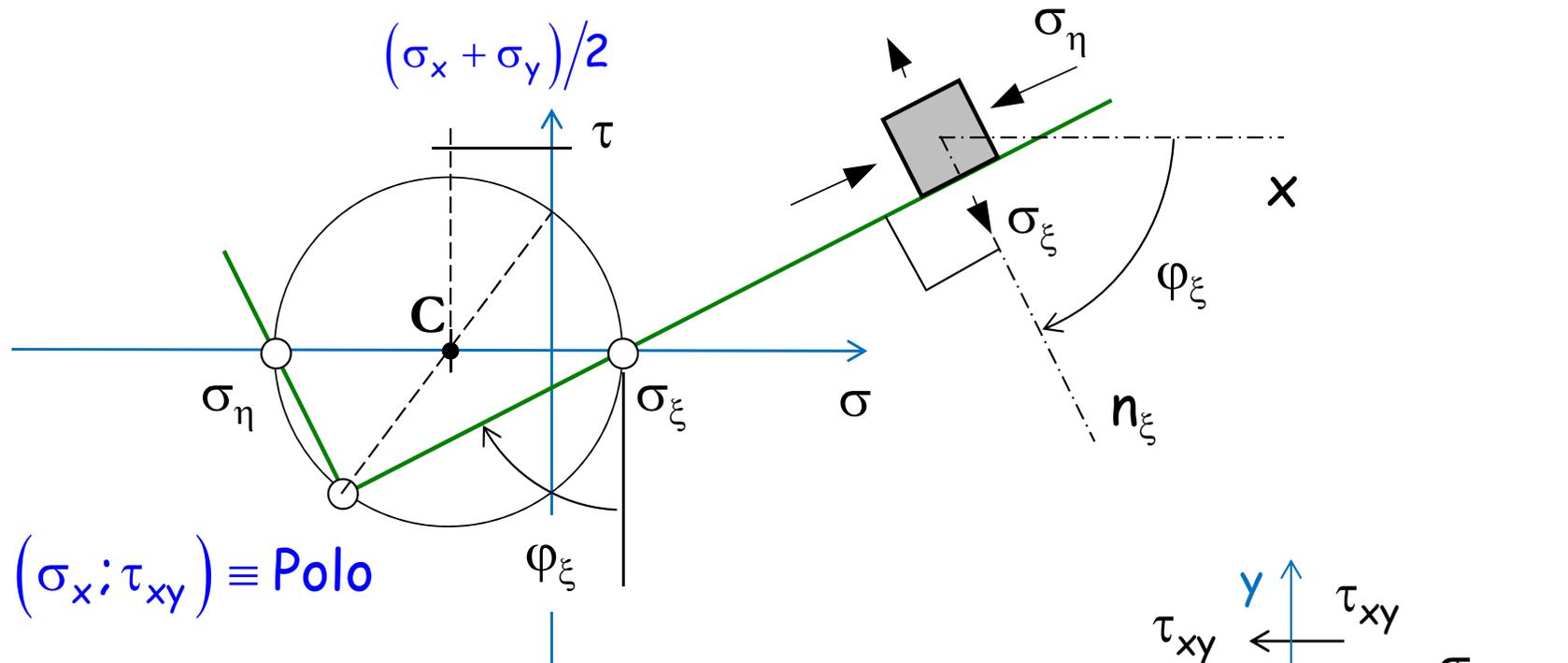


Equazione del cerchio di Mohr

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{nm}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2$$

Direzioni principali di tensione

Materiale elastico e omogeneo

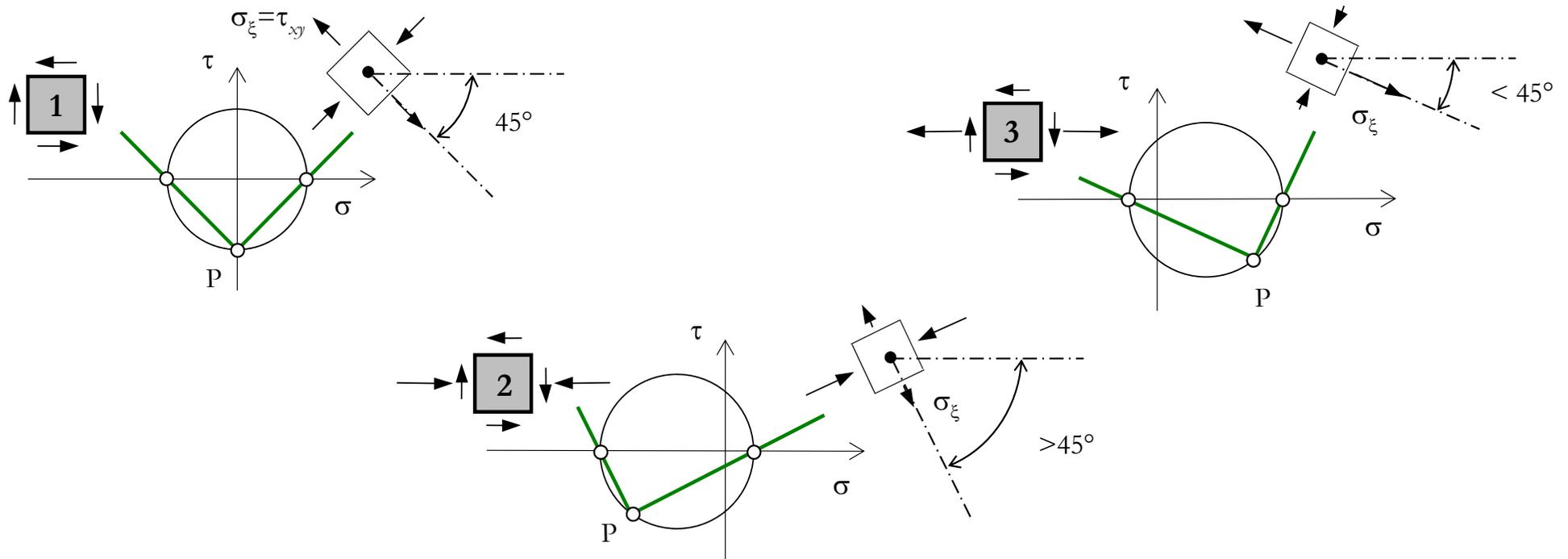
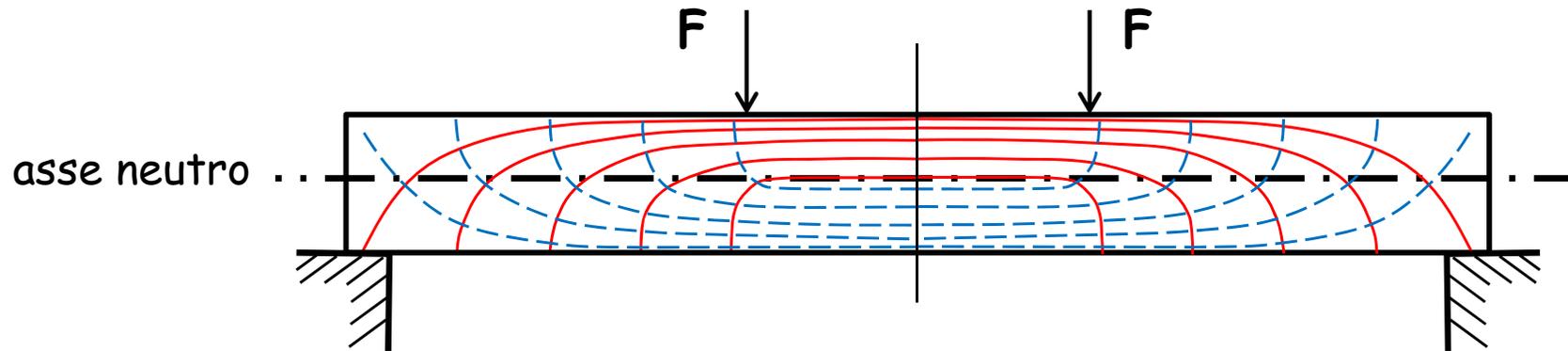


dove

$$\sigma_\xi = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

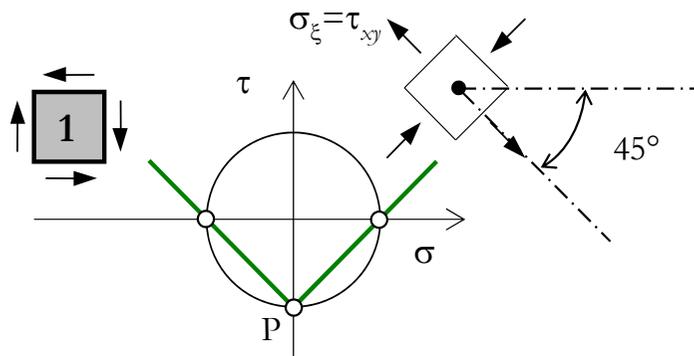
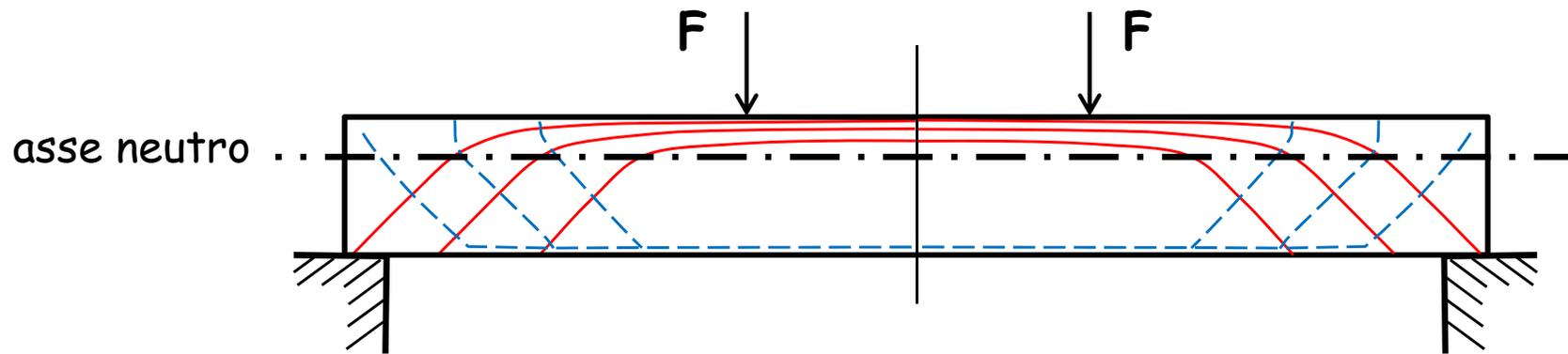
Direzioni principali di tensione

1° stadio di comportamento

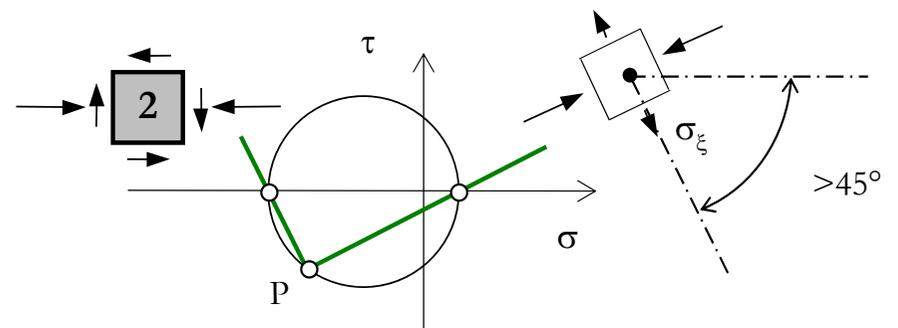


Direzioni principali di tensione

2° stadio di comportamento



?



**Incongruenze con le ipotesi classiche
della teoria tecnica della trave**

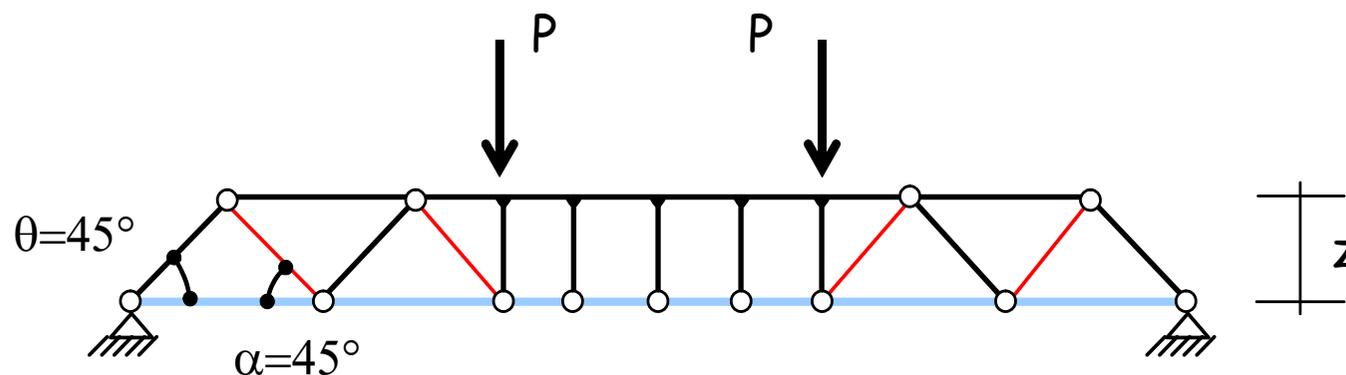
Modello resistente

Travi con armatura trasversale

Il comportamento a taglio-flessione degli elementi con armatura al taglio risulta individuato dal modello reticolare.

Esso è costituito da:

- un corrente superiore (calcestruzzo);
- elementi diagonali compressi (calcestruzzo);
- elementi diagonali tesi (armatura trasversale);
- un corrente inferiore (armatura flessionale);

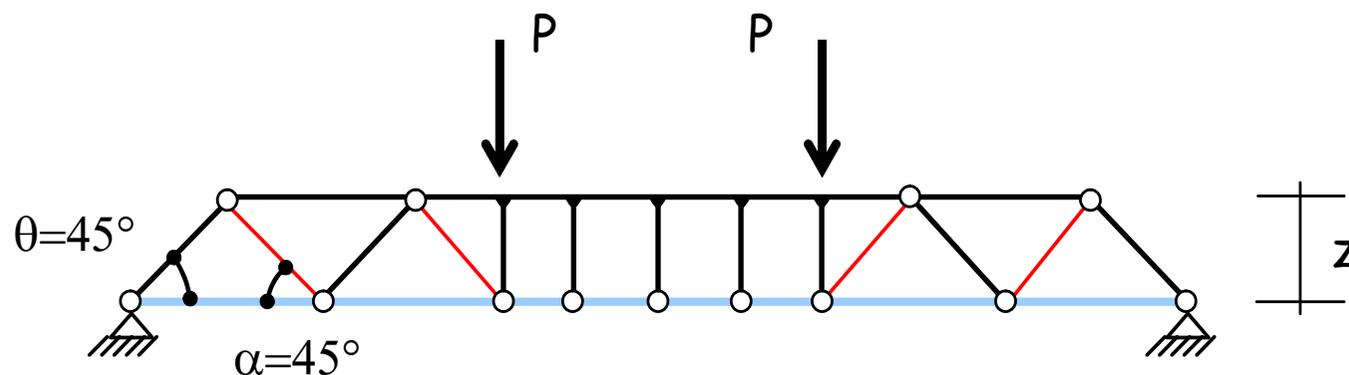


Traliccio di Morsch

Ipotesi

- Traliccio isostatico
- Diagonali in calcestruzzo incastrate nel corrente compresso ed inclinate a 45° .

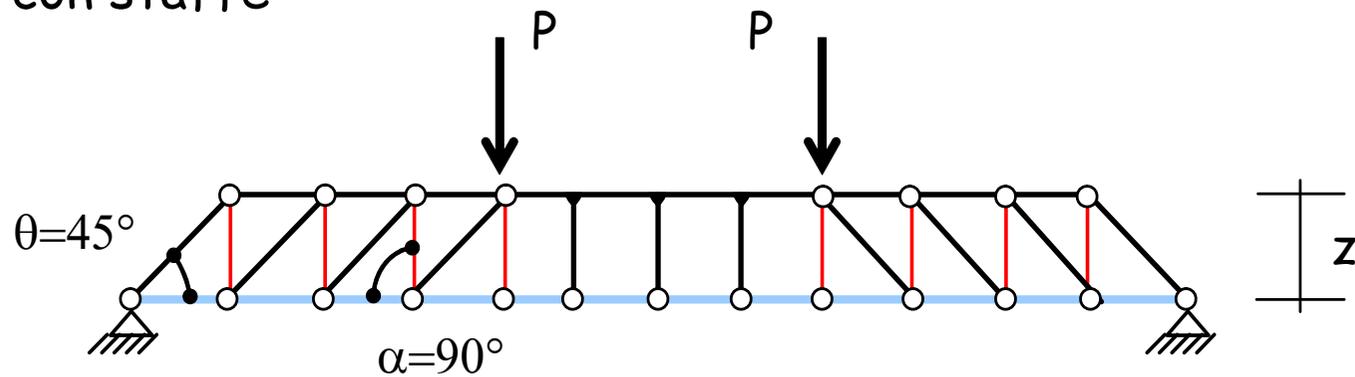
N.B. nella trattazione si indicherà genericamente con α l'inclinazione di tali elementi rispetto all'orizzontale, essendo quindi $\alpha=45^\circ$ per i sagomati e $\alpha=90^\circ$ per le staffe



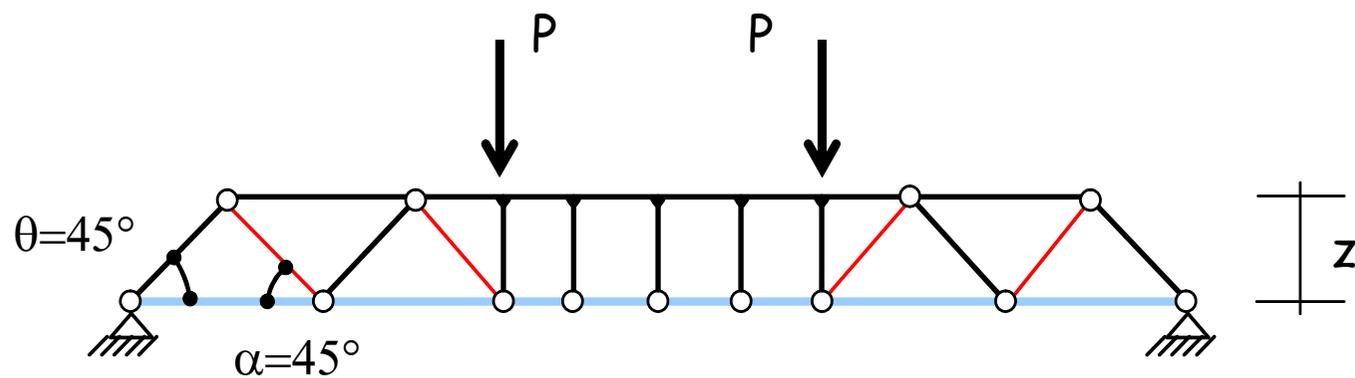
Traliccio di Morsch

Ipotesi

Modello con staffe



Modello con sagomati

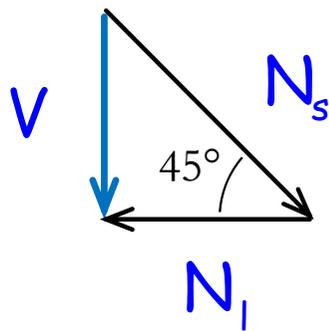


Traliccio di Morsch

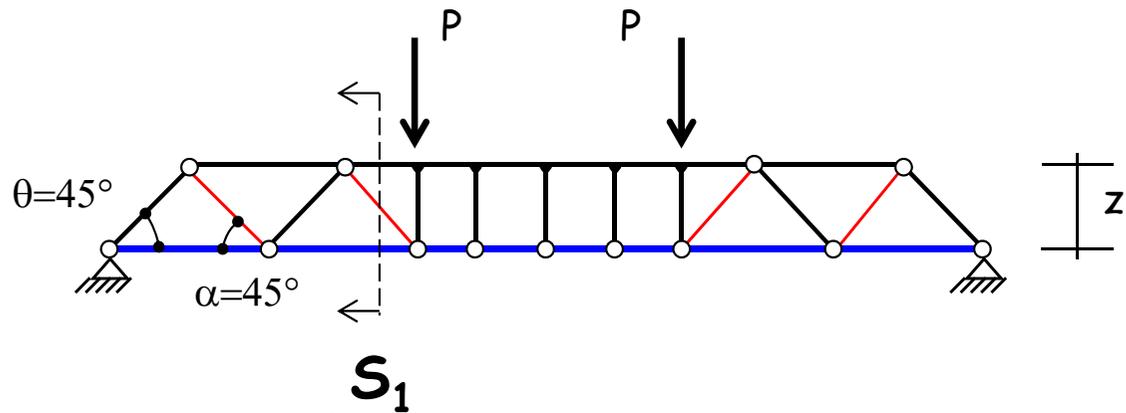
Modello con sagomati a 45°

La forza di trazione nei sagomati è data, in base alla condizione di equilibrio da

$$N_s = \frac{V}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2} V$$



Forze trasmesse
nella sezione S_1

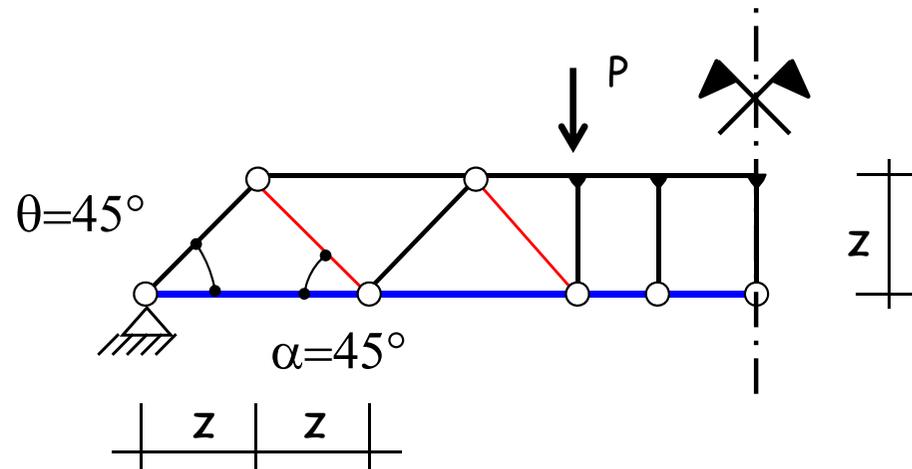


Traliccio di Morsch

Modello con sagomati a 45°

Nota: la forza N_s è agente sui sagomati disposti nel singolo modulo del traliccio.

Il singolo modulo è lungo $2z$, dove z è il braccio della coppia interna.



La tensione di trazione nell'armatura trasversale è quindi

$$\sigma_s = \frac{N_s}{A_{sag,2z}} = \frac{\sqrt{2} V}{2z A_{sag} / s}$$

dove

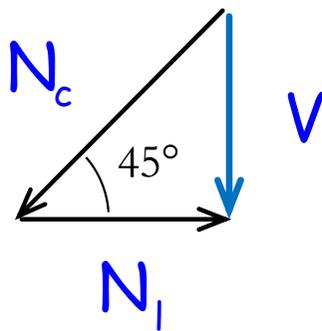
- A_{sag} è l'area trasversale dei sagomati disposti nel tratto s
- $A_{sag} 2z/s$ è l'area trasversale dei sagomati nel modulo $2z$

Traliccio di Morsch

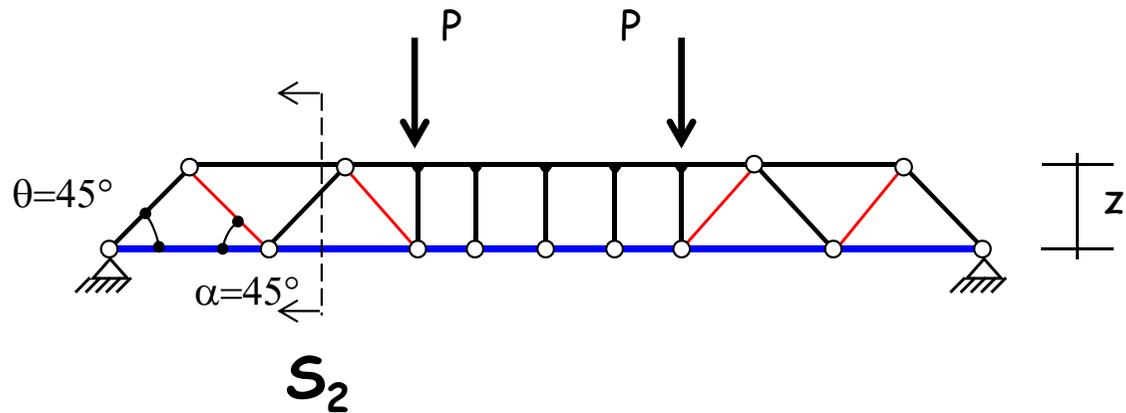
Modello con sagomati a 45°

La forza di compressione nel puntone è data, in base alla condizione di equilibrio, da

$$N_c = \frac{V}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2} V$$



Forze trasmesse
nella sezione S_2

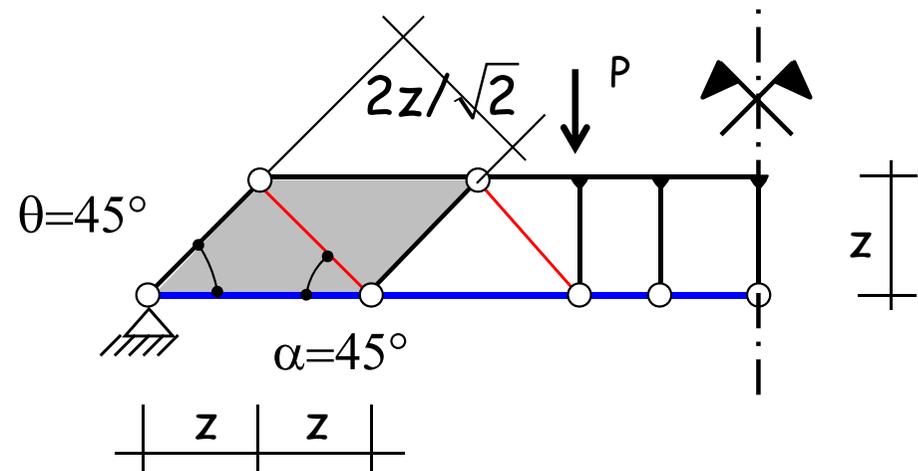


Traliccio di Morsch

Modello con sagomati a 45°

Nota: la forza N_c è agente sul calcestruzzo disposto nel singolo modulo del traliccio.

La distanza tra i puntoni, misurata in orizzontale, è pari a $2z$, mentre la loro sezione trasversale ha altezza $2z/\sqrt{2}$ e larghezza b .



La tensione di compressione è quindi

$$\sigma_c = \frac{N_c}{A_c} = \frac{\sqrt{2} V}{b z 2/\sqrt{2}} = \frac{V}{b z}$$

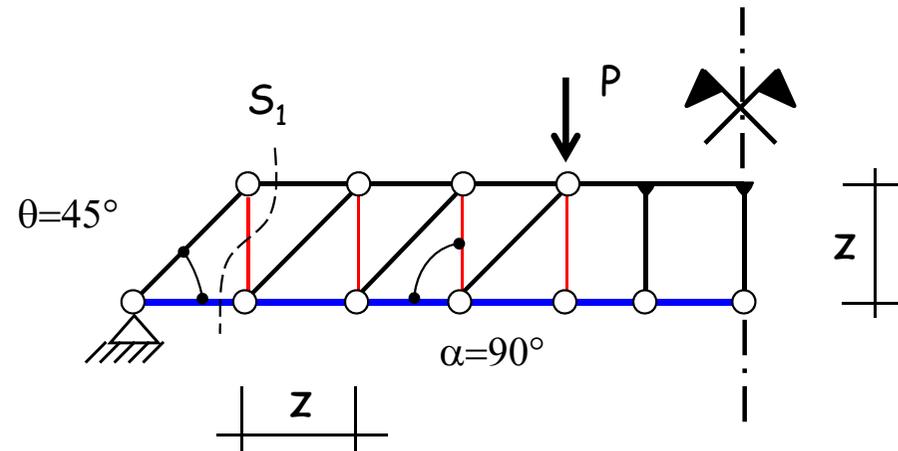
Traliccio di Morsch

Modello con staffe

La forza di trazione nelle staffe è

$$N_s = V$$

Attenzione: il singolo modulo è lungo z , dove z è il braccio della coppia interna.



La tensione di trazione è data dalla relazione:

$$\sigma_s = \frac{V s}{n A_{st} z}$$

dove

- n è il numero di bracci delle staffe
- $n A_{st}$ è l'area trasversale delle staffe disposte nel tratto s
- $n A_{st} z/s$ è l'area trasversale delle staffe nel modulo z

Traliccio di Morsch

Modello con staffe

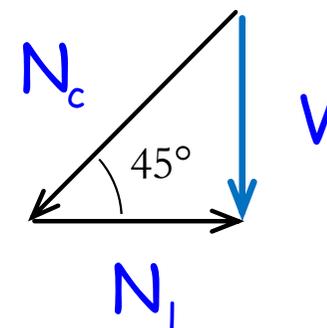
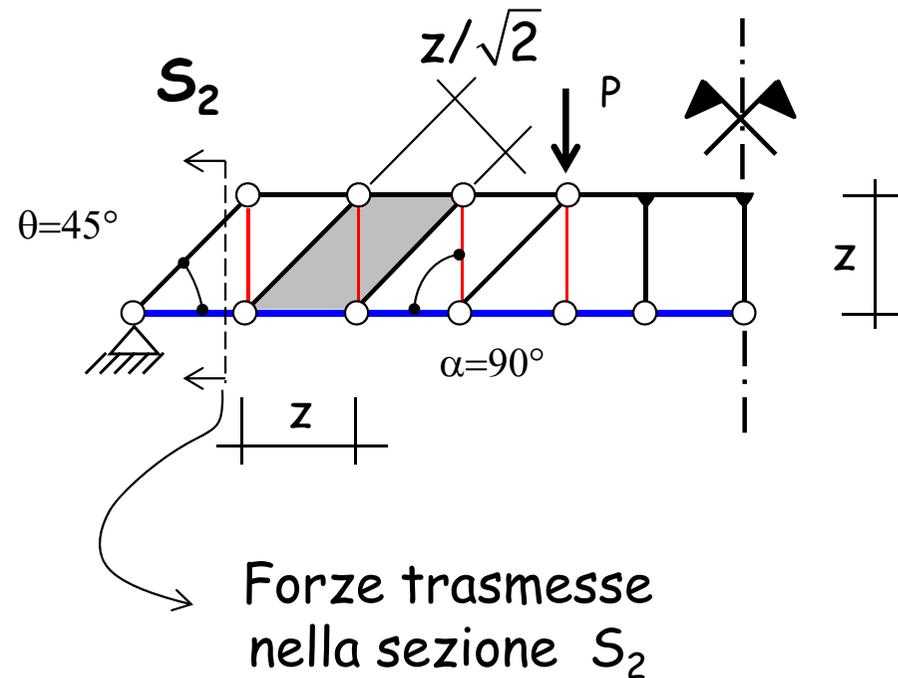
La forza di compressione nel puntone in calcestruzzo è

$$N_c = \sqrt{2} V$$

La distanza tra i puntoni, misurata in orizzontale, è pari a z , mentre la loro sezione trasversale ha altezza $z/\sqrt{2}$ e larghezza b .

La tensione di compressione è quindi

$$\sigma_c = \frac{N_c}{A_c} = \frac{2V}{bz}$$

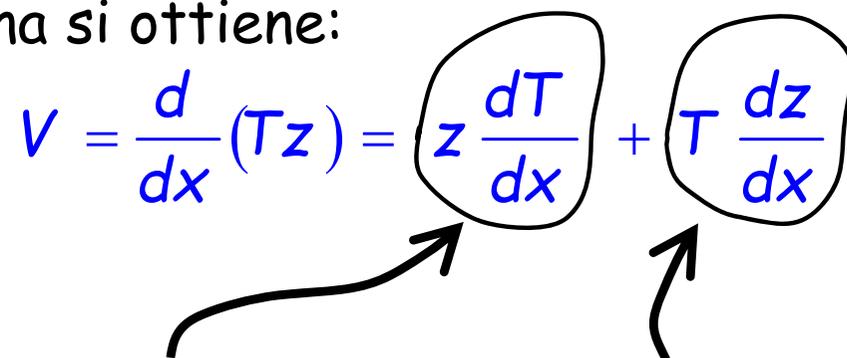


Principali meccanismi di resistenza al taglio

Dall'equazione indefinita dell'equilibrio, esprime il taglio come derivata del momento flettente,

$$V = \frac{dM}{dx}$$

e dalla equivalenza tra momento flettente e prodotto della risultante delle tensioni di trazione (o compressione) per il braccio della coppia interna si ottiene:

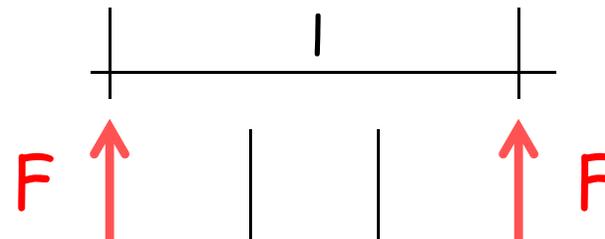
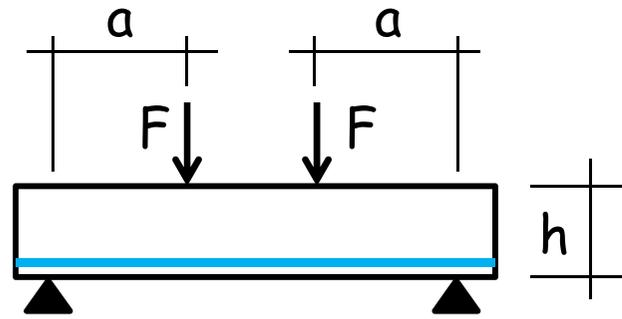
$$V = \frac{d}{dx}(Tz) = z \frac{dT}{dx} + T \frac{dz}{dx}$$


**comportamento
a trave**

**comportamento
ad arco**

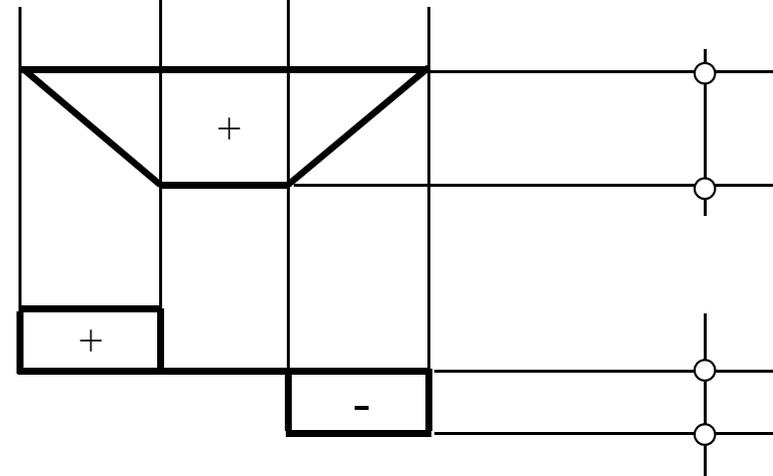
Sperimentazione di laboratorio

Modello fisico



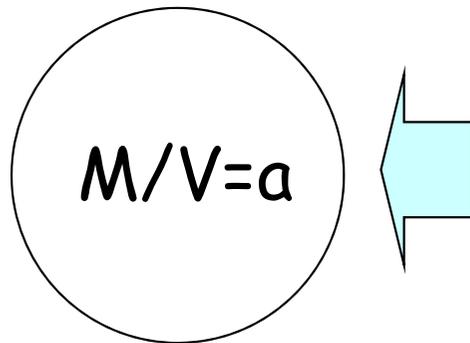
M

V



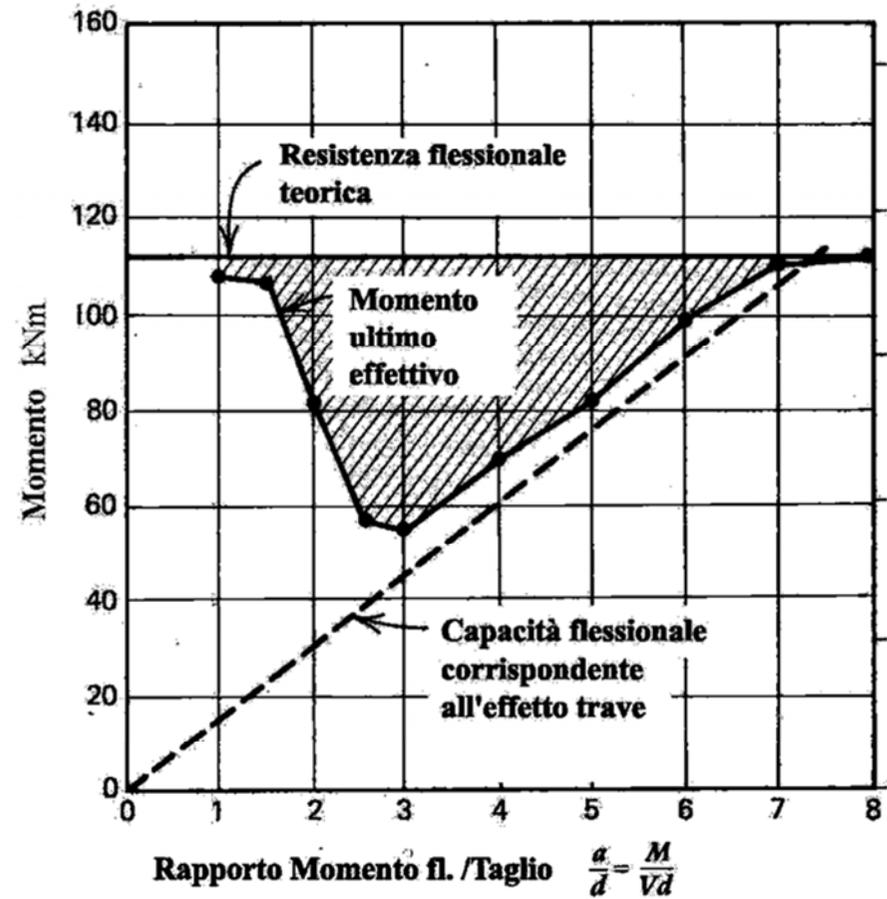
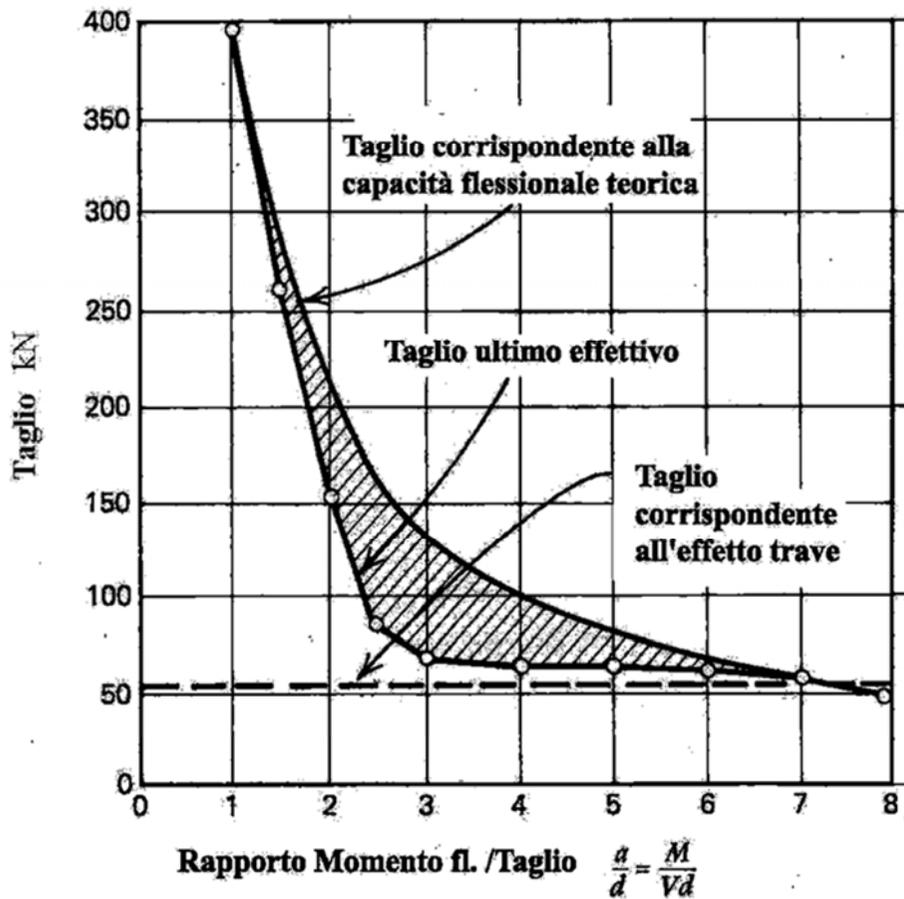
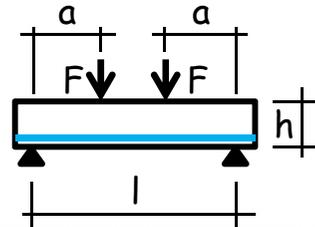
Fa

F



Resistenza

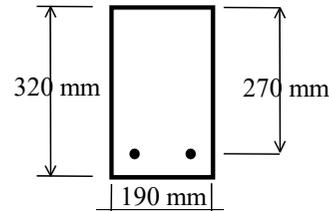
Travi senza armatura al taglio



Modelli di fessurazione a collasso

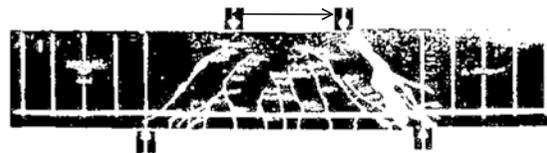
Travi senza armatura al taglio

a/d



*Tipo
collasso*

1.0



1.5



2.0



2.5



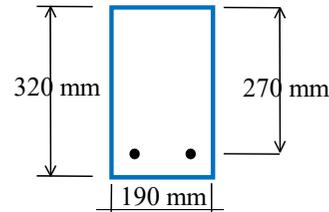
3.0



Modelli di fessurazione a collasso

Travi senza armatura al taglio

a/d



*Tipo
collasso*

4.0



5.0



6.0



8.0



7.0

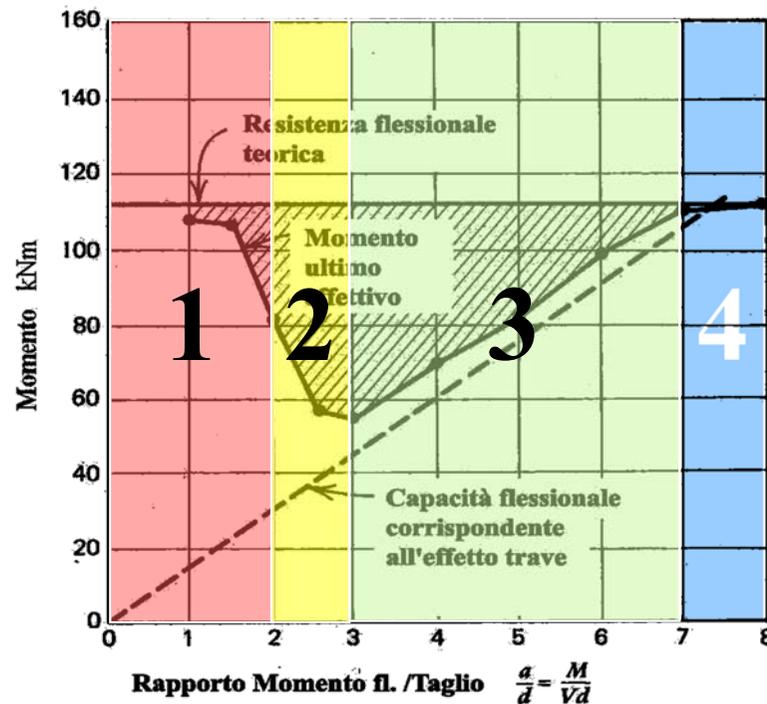


(tratto da R. Park and T. Paulay: Reinforced Concrete Structures)

Modalità di collasso

Travi senza armatura al taglio

Tipo 1.
Meccanismo ad arco
schiacciamento o
splitting del
calcestruzzo



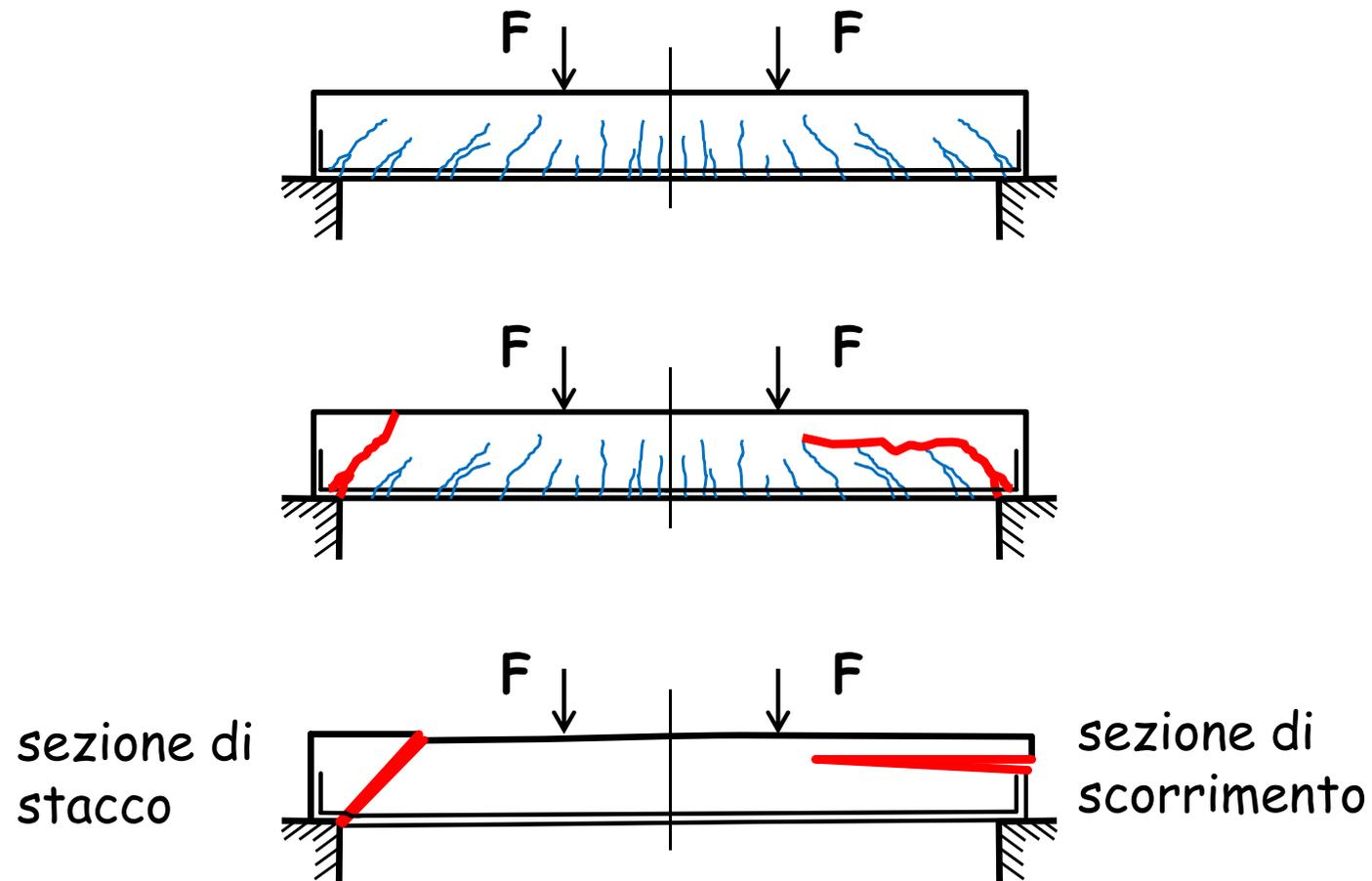
Tipo 4.
Meccanismo puramente flessionale
al raggiungimento della
capacità resistente
flessionale

Tipo 2.
Meccanismo ad arco
per compressione o trazione di origine
flessionale della zona compressa
(carico superiore a quello relativo alla fessurazione
diagonale)

Tipo 3.
Meccanismo di trave
al momento o immediatamente dopo
l'applicazione del carico
corrispondente alla fessurazione
diagonale

Meccanismi di collasso

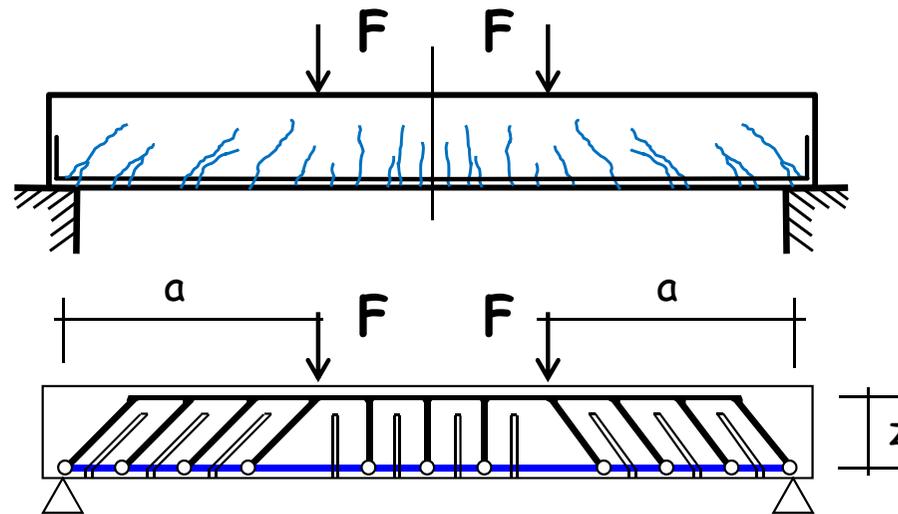
Travi senza armatura al taglio



(tratto da G. Toniolo: Cemento Armato)

Modello resistente

Travi senza armatura al taglio



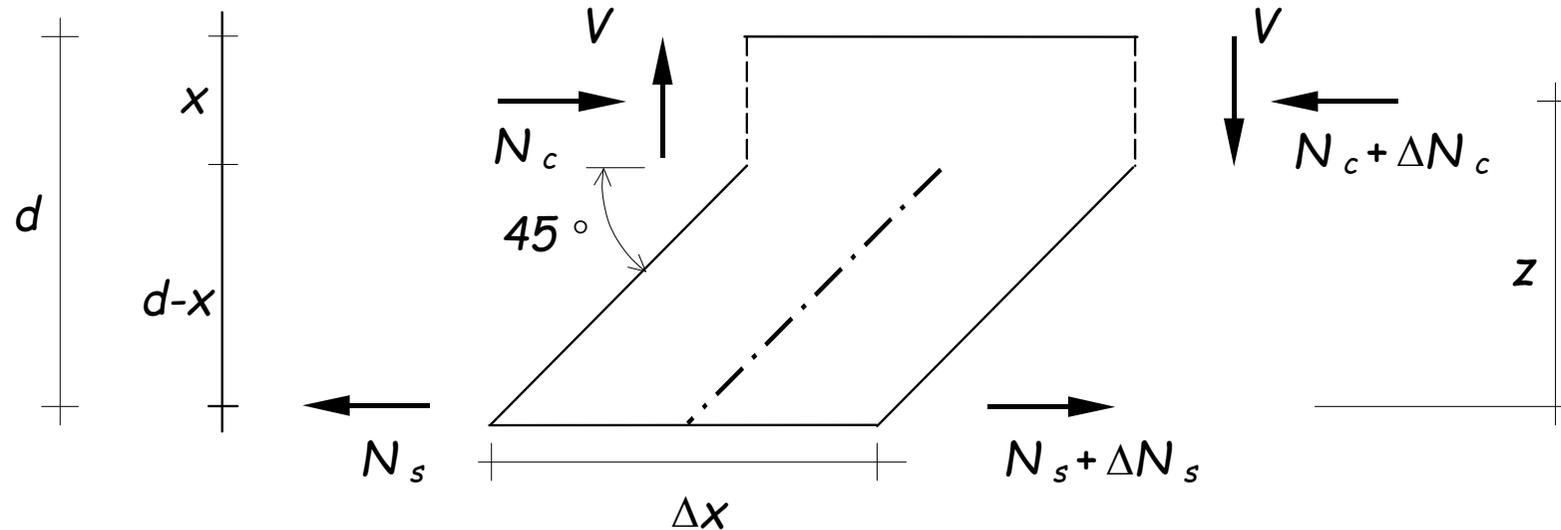
Il modello a pettine interpreta il comportamento a taglio-flessione degli elementi senza armatura al taglio.

Esso è costituito da:

- un corrente superiore (costola del pettine)
- elementi diagonali compresi tra le lesioni, inclinati a 45 gradi rispetto alla costola (denti del pettine).
- un corrente inferiore (armatura flessionale)

Modello a pettine

Analisi della sollecitazione

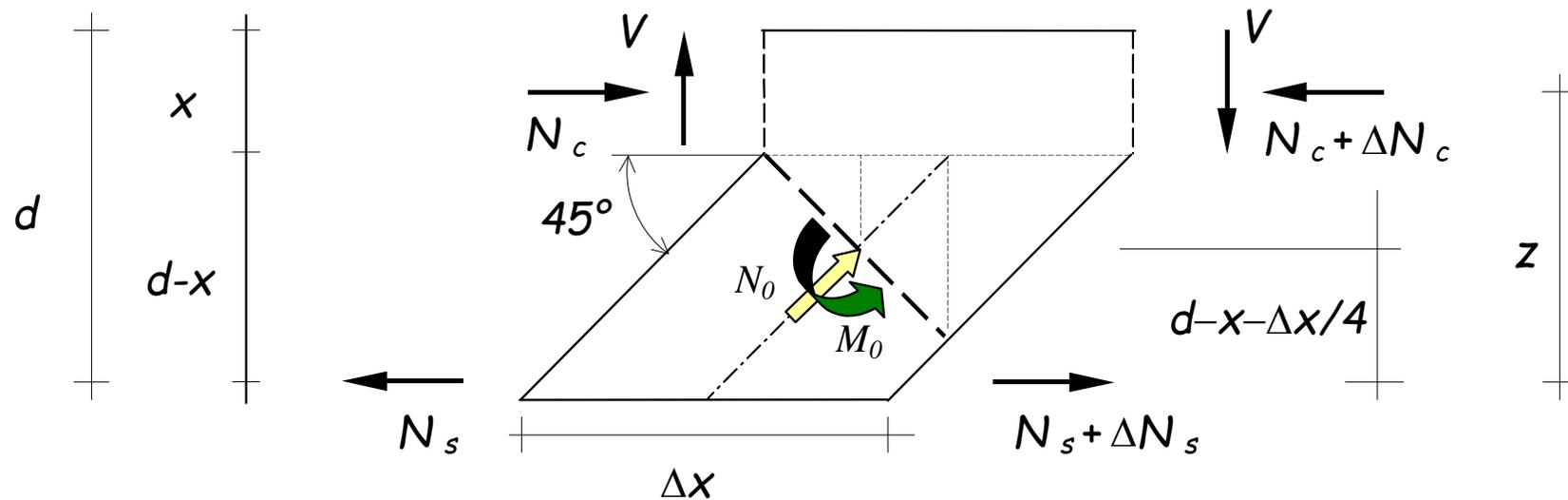


In presenza di fessurazione la variazione di N_s , bilanciata dalle tensioni di aderenza, esercita un'azione orizzontale ΔN_s sul dente del modello a pettine. Ricordando che la variazione del momento flettente è legata al taglio ($\Delta M = V \Delta x$), si ha

$$\Delta N_s = \frac{\Delta M}{z} = \frac{V \Delta x}{z}$$

Sezione di scorrimento

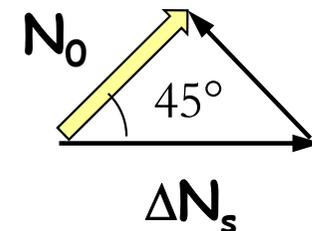
Analisi della sollecitazione



Le caratteristiche della sollecitazione provocate dalla forza ΔN_s sulla sezione di incastro del dente valgono:

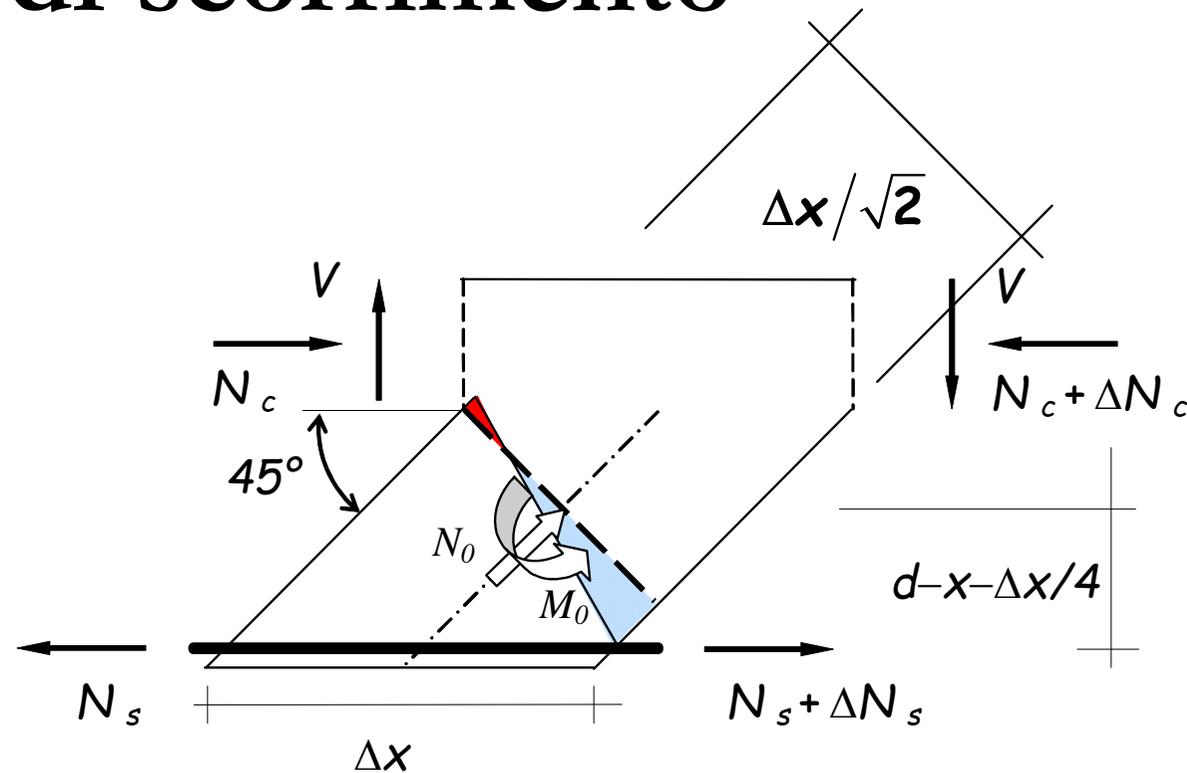
$$N_0 = -\frac{\Delta N_s}{\sqrt{2}} = -\frac{V \Delta x}{\sqrt{2} z}$$

$$M_0 = -\Delta N_s \left(d - x - \frac{\Delta x}{4} \right) = -\frac{V \Delta x}{z} \left(d - x - \frac{\Delta x}{4} \right)$$



Sezione di scorrimento

Geometria



La sezione resistente ha area

e modulo elastico: $W = b \left(\frac{\Delta x}{\sqrt{2}} \right)^2 / 6$

La massima tensione di trazione è pari a:

$$\sigma_+^{\max} = \frac{N_0}{b \left(\frac{\Delta x}{\sqrt{2}} \right)} - \frac{6 M_0}{b \left(\frac{\Delta x}{\sqrt{2}} \right)^2} = \frac{V}{b z} \left[-1 + \frac{12 (d - x - \Delta x / 4)}{\Delta x} \right]$$

Verifica della sezione di scorrimento

In base a considerazioni sperimentali si può però assumere:

$$x = 0.2 d$$

$$\Delta x = d$$

Si ottiene così

$$\sigma_t^{\max} = \frac{V}{b z} \left[-1 + \frac{12 (d - x - \Delta x / 4)}{\Delta x} \right] = \frac{5.6 V}{b z} = \frac{6.2 V}{b d}$$

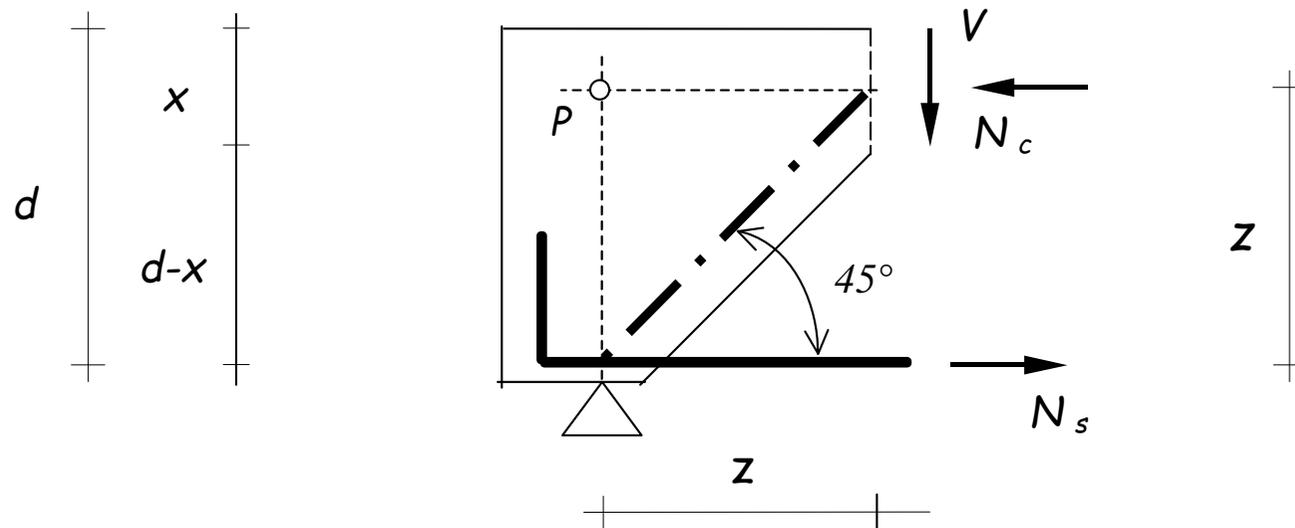
da cui,

imponendo la massima tensione di trazione eguale alla resistenza a trazione per flessione ($1.6 f_{ctd}$) si ha:

$$V_{Rd} = 0.25 b d f_{ctd}$$

Sezione di stacco

Analisi della sollecitazione



Se si prende in esame il conico di estremità della trave in corrispondenza dell'appoggio, delimitato dalla prima lesione a taglio, si ricava dall'equilibrio alla rotazione:

$$N_c = V$$

Sezione di stacco

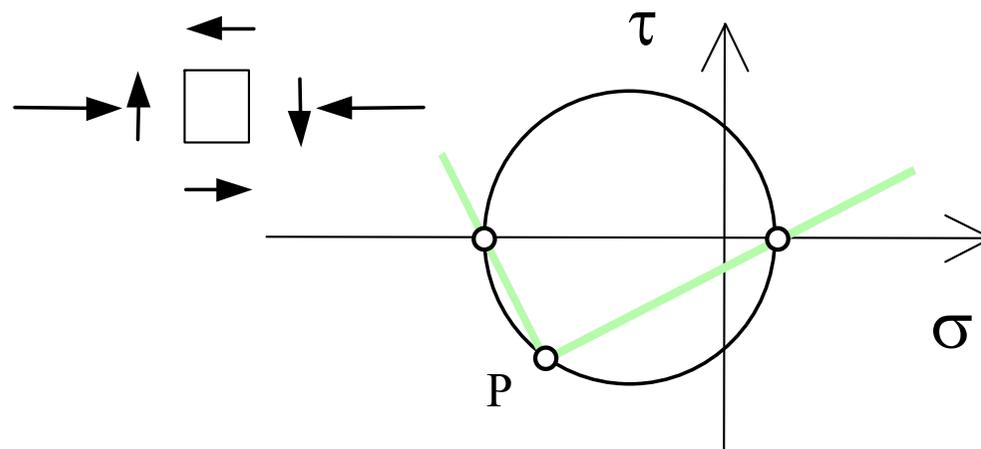
Analisi della sollecitazione

La sezione del corrente è soggetta a sforzo normale di compressione ed a taglio. Supponendo per semplicità che le tensioni dovute a ciascuna delle caratteristiche di sollecitazione siano costanti nella sezione, si ha:

$$\sigma = \frac{N_c}{b x} \quad \tau = \frac{V}{b x}$$

e quindi $\sigma = \tau$.

Il cerchio di Mohr corrispondente è caratterizzato da:



$$\sigma_{\xi} = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} - \frac{\sigma}{2}$$

Verifica del corrente compresso

Sostituendo nell'espressione della tensione principale di trazione i valori delle tensioni normali e tangenziali prima determinati si ha:

$$\sigma_{\xi} = 0.62 \quad \tau = 0.62 \frac{V}{b x}$$

Se, inoltre, si impone che la tensione principale di trazione sia uguale al valore di resistenza a trazione del calcestruzzo si ottiene un valore limite del taglio pari a:

$$V_{Rd} = 1.6 b x f_{ctd}$$

Nota: Confrontando il valore ora determinato con quello fornito dalla verifica del dente, si ha che la resistenza del corrente compresso è minore di quella del dente se:

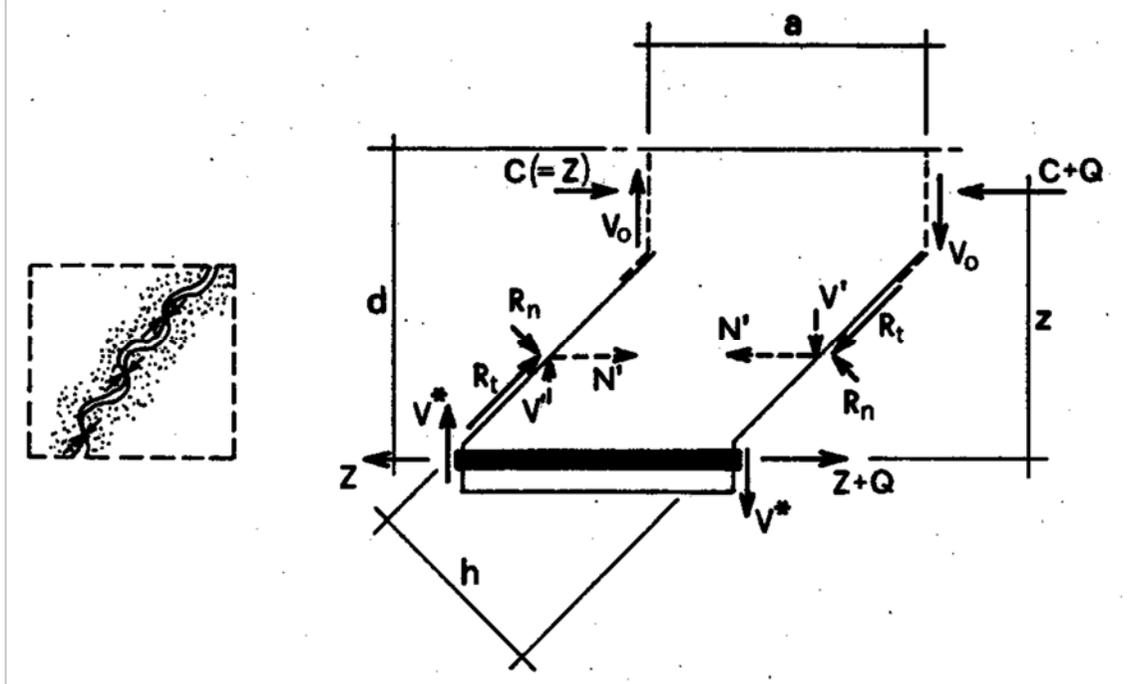
$$1.6 x < 0.25 d \quad \text{ovvero} \quad x < 0.156 d$$

Questa situazione normalmente non si verifica in sezioni soggette a flessione semplice, a meno che l'armatura a flessione non sia estremamente bassa; diventa invece molto probabile se la sezione è soggetta a tensoflessione.

Altri contributi alla resistenza

Ingranamento degli inerti

Le lesioni non sono mai perfettamente lisce; quando i denti si deformano a pressoflessione, lo scorrimento tra le due facce della fessura viene limitato dall'attrito dovuto alla scabrosità delle superfici e soprattutto dal contatto diretto tra gli inerti. Le azioni mutue così generate riducono l'entità del momento flettente e limitano la deformazione del dente.



Altri contributi alla resistenza

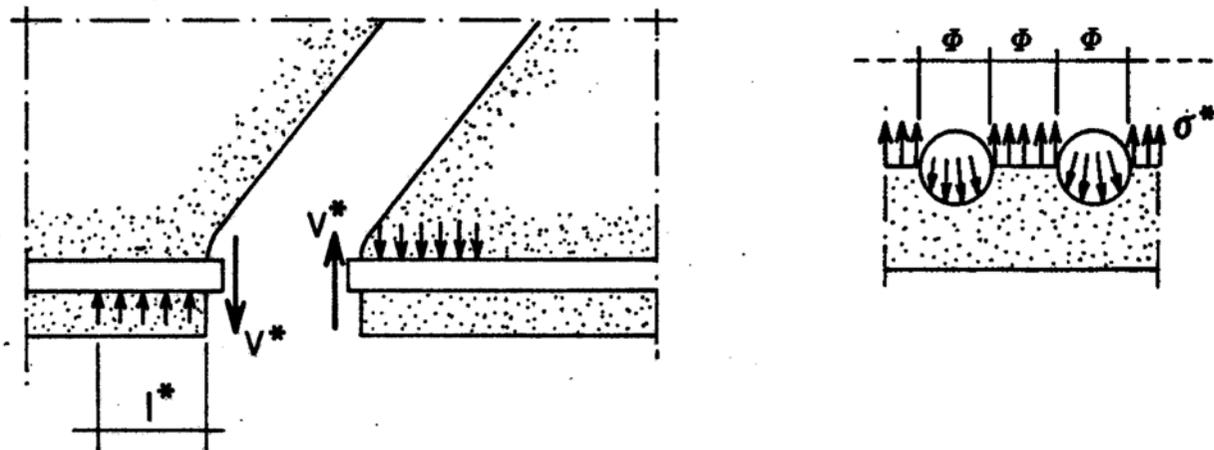
Ingranamento degli inerti

Questo effetto, detto di *ingranamento degli inerti*, è particolarmente rilevante per travi basse, per le quali le fessure sono particolarmente strette; al crescere dell'altezza della trave l'ampiezza della lesione aumenta e l'effetto dell'ingranamento si riduce.

Altri contributi alla resistenza

Effetto spinotto

Lo scorrimento tra le due facce di una fessura comporta anche una deformazione dell'armatura flessionale, mostrata in maniera esageratamente accentuata nella figura. Anche le barre di armatura esercitano quindi un'azione mutua che riduce il momento flettente nel dente e ne aumentano la resistenza (*effetto spinotto*, o *effetto bietta*). L'azione delle barre longitudinali è però limitata dalla possibilità che salti il copriferro ed il suo contributo può essere quantizzato proprio valutando la resistenza del calcestruzzo di ricoprimento.



Altri contributi alla resistenza

Effetto dello sforzo assiale

La presenza di uno sforzo assiale di compressione incrementa la resistenza a taglio di una sezione non armata. Esso infatti aumenta le dimensioni del corrente superiore rendendone più difficile la rottura; contemporaneamente i denti del modello a pettine vengono accorciati e si riduce in essi l'effetto flettente. Il contrario accade in presenza di trazione: la diminuzione di dimensione del corrente compresso e l'incremento di flessione nel dente riducono sensibilmente la capacità di portare taglio, rendendo quasi sempre necessaria la disposizione di specifiche armature per il taglio.

Resistenza di elementi non armati a taglio

1

2

COMPORTAMENTO
AD
ARCO

- Resistenza del corrente del modello a pettine
 - + contributi:
 - ingranamento inerti
 - spinotto
- Splitting/schiacciamento del cls

3

COMPORTAMENTO
A
TRAVE

- Resistenza del dente del modello a pettine
 - + contributi:
 - ingranamento inerti
 - spinotto

Elementi non armati a taglio

Norme Tecniche (Elementi che non richiedono armatura a taglio)

La resistenza a taglio di calcolo $V_{Rd,c}$ è data da:

$$V_{Rd,c} = \left[\frac{0.18k}{\gamma_c} \sqrt[3]{100\rho_l f_{ck}} + 0.15\sigma_{cp} \right] b_w d \geq (v_{min} + 0.15\sigma_{cp}) b_w d$$

$$v_{min} = 0.035\sqrt{k^3 f_{ck}}$$

$$k = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \leq 2 \quad (d \text{ in millimetri});$$

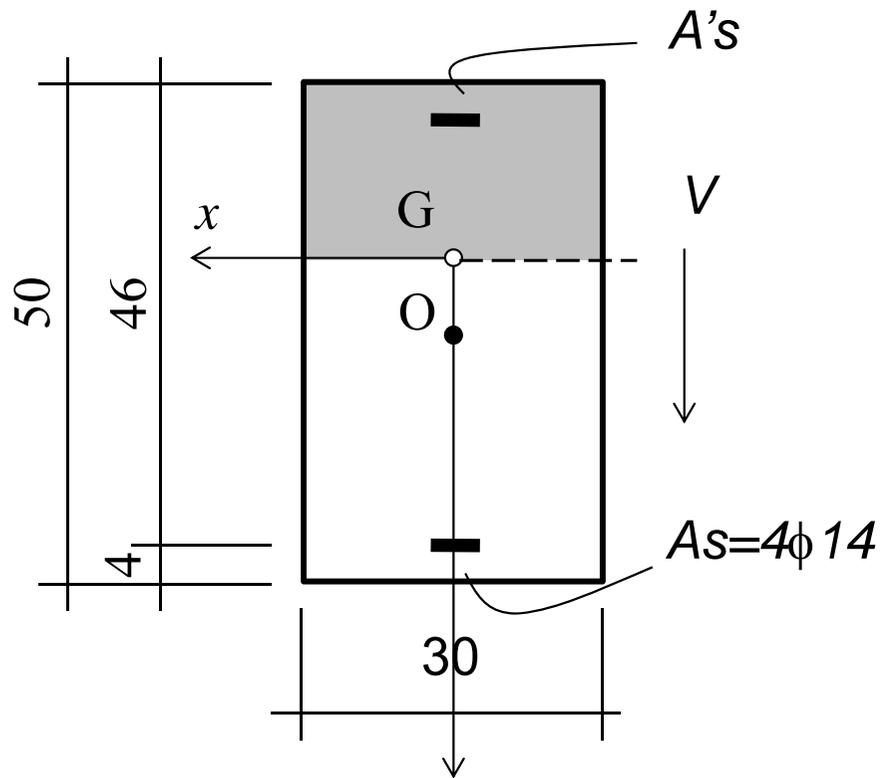
$$\rho = \frac{A_{sl}}{b_w d} \leq |0.02|; \text{ con } A_{sl} \text{ area delle armature di trazione che si estende per non meno di } d + l_{b,net} \text{ oltre la sezione considerata.}$$

b_w larghezza minima della sezione lungo l'altezza efficace;

σ_{cp} $N_{Sd} / A_c \leq 0.2f_{cd}$, con N_{Ed} forza longitudinale nella sezione dovuta ai carichi o alla precompressione (compressione positiva).

Esempio n. 9

3° stadio di comportamento



$$k = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} = 1.659 \leq 2$$

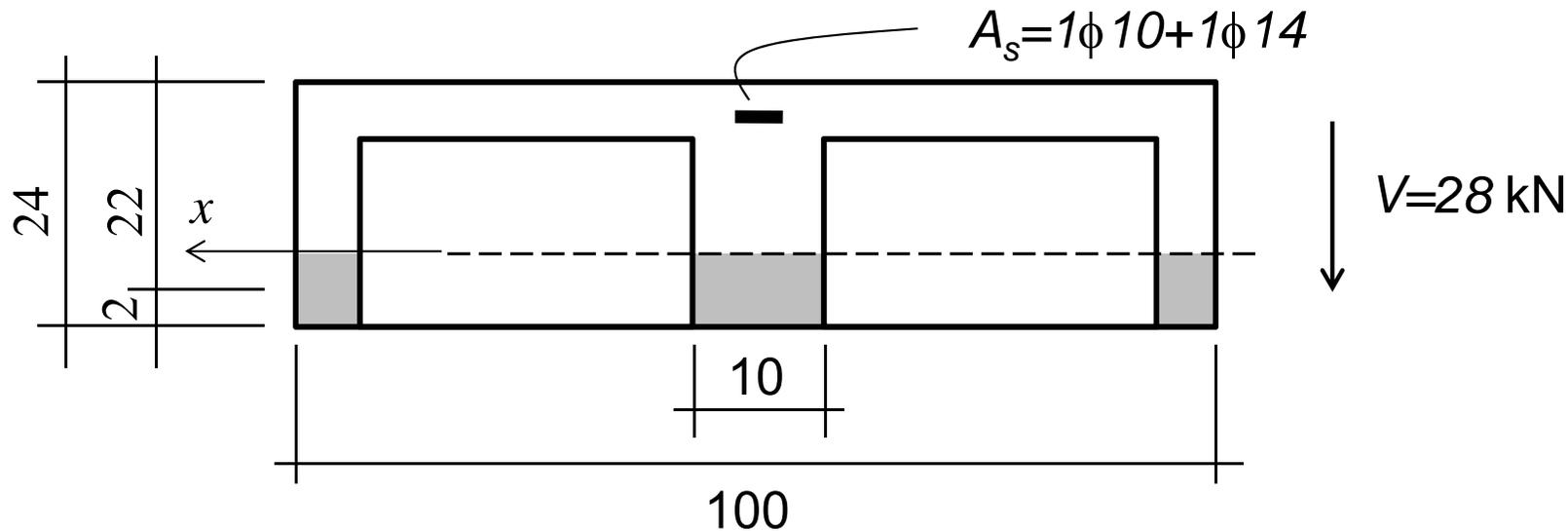
$$\rho_l = \frac{A_{sl}}{b_w d} = \frac{4 \cdot 1.54}{30 \cdot 46} = 0.00446 \leq 0.02$$

$$V_{Rd,c} = (v_{\min} + 0.15\sigma_{cp}) b_w d = 0.035 \sqrt{1.659^3} \cdot 25 \cdot 30 \cdot 46 \cdot 10^{-1} = 51.6 \text{ kN}$$

$$V_{Rd,c} = \left[\frac{0.18k}{\gamma_c} \sqrt[3]{100\rho_l f_{ck}} \right] b_w d = \left[\frac{0.18 \cdot 1.659}{1.5} \sqrt[3]{100 \cdot 0.00446 \cdot 25} \right] 30 \cdot 46 \cdot 10^{-1} = 61.4 \text{ kN}$$

Esempio n. 10

3° stadio di comportamento



$$k = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} = 1 + \sqrt{\frac{200}{220}} = 1.953 \leq 2 \quad \rho_l = \frac{A_{sl}}{b_w d} = \frac{2 \cdot (0.79 + 1.54)}{20 \cdot 22} = 0.01059$$

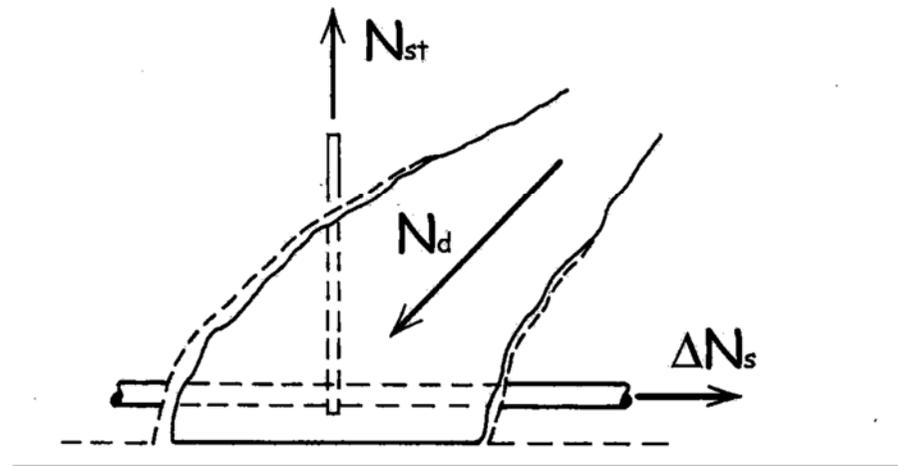
$$V_{Rd,c} = \left[\frac{0.18k}{\gamma_c} \sqrt[3]{100 \rho_l f_{ck}} \right] b_w d = \left[\frac{0.18 \cdot 1.953}{1.5} \sqrt[3]{100 \cdot 0.01059 \cdot 25} \right] 20 \cdot 22 \cdot 10^{-1} = 30.7 \text{ kN}$$

$$V_{Ed} < V_{Rd,c} \quad \text{La sezione non ha bisogno di essere armata a taglio}$$

Elementi con armatura a taglio

Osservazioni generali

- La presenza dell'armatura a taglio non muta sostanzialmente il meccanismo di resistenza al taglio precedentemente descritto.
- Le mensole di calcestruzzo (denti del modello a pettine), principali elementi del comportamento a trave, sono tuttavia ora vincolate dall'armatura trasversale.



(tratto da R. Park and T. Paulay: Reinforced Concrete Structures)

Meccanismi resistenti

Travi con armatura al taglio

La resistenza della trave in presenza di armatura trasversale risulta governata dal:

**comportamento
a trave**

**comportamento
ad arco**

+

**comportamento
a trave reticolare**

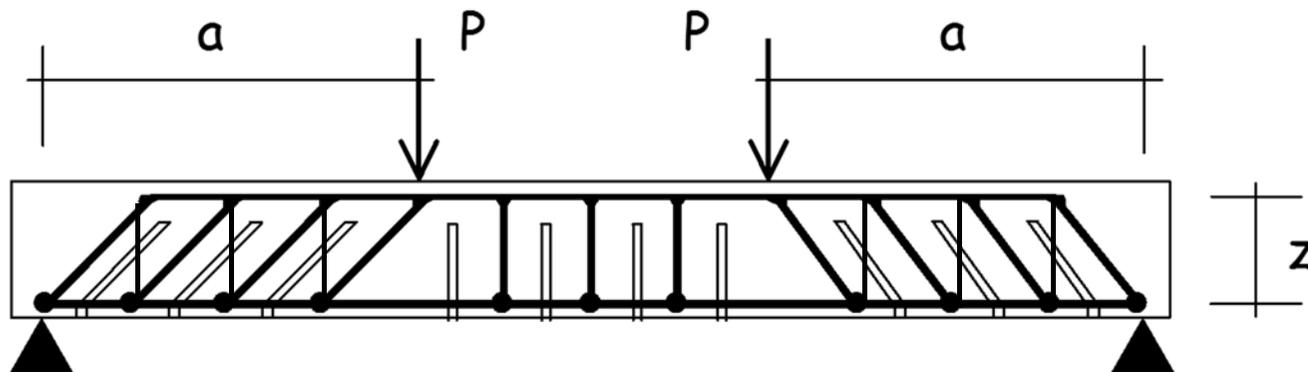
Modello resistente

Travi con armatura trasversale

Il comportamento a collasso a taglio-flessione degli elementi con armatura al taglio risulta individuato dal modello reticolare.

Esso è costituito da:

- un corrente superiore (calcestruzzo);
- elementi diagonali compressi (calcestruzzo);
- elementi diagonali tesi (armatura trasversale);
- un corrente inferiore (armatura flessionale);



Calcolo del taglio resistente di travi armate a taglio

SE

$$V_{Ed} > V_{Rd,c}$$

è richiesta armatura a taglio

Il calcolo del taglio resistente di elementi armati a taglio e' basato sui valori:

- $V_{Rd,max}$ Massima forza di taglio di calcolo che può essere sopportata senza rottura delle bielle compresse convenzionali di calcestruzzo
- $V_{Rd,s}$ Forza di taglio di calcolo che può essere sopportata da un elemento con armatura a taglio, il cui collasso è attivato dallo snervamento dell'armatura a taglio

Calcolo del taglio resistente di travi armate a taglio

Metodi di normativa per il calcolo di $V_{Rd,max}$ e $V_{Rd,s}$

- **Metodo dell'inclinazione variabile del traliccio**

il taglio resistente di elementi armati a taglio
e' fornito dal minore tra

$$V_{Rd,max} \text{ e } V_{Rd,s}$$

Metodo dell'inclinazione variabile

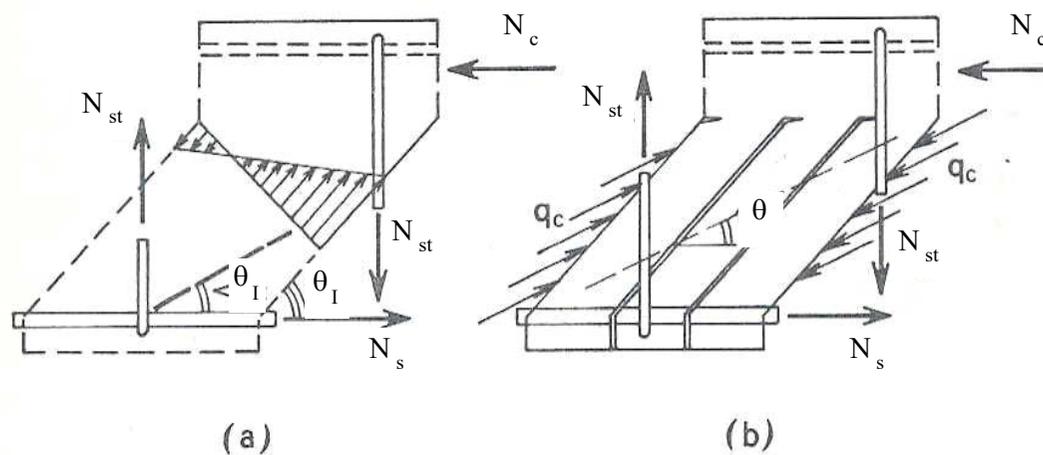
Ipotesi

- Traliccio isostatico
- Diagonali in calcestruzzo incernierate nel corrente compresso ed inclinate di un angolo non superiore a 45° .

N.B. nella trattazione si indicherà genericamente con θ l'angolo di inclinazione rispetto all'orizzontale delle diagonali compresse e con α l'angolo di inclinazione delle armature trasversali, essendo quindi $\alpha=45^\circ$ per i sagomati e $\alpha=90^\circ$ per le staffe.

Metodo dell'inclinazione variabile del traliccio

Le prove di carico condotte su travi, fino alla rottura per taglio, mostrano che l'inclinazione rispetto all'orizzontale delle isostatiche di compressione tende a diminuire dopo lo snervamento dell'armatura a taglio. Ciò può essere giustificato teoricamente pensando che quando le armature sono snervate tendono ad esserci sensibili scorrimenti lungo le lesioni a taglio e che per l'ingranamento degli inerti viene così trasmessa una tensione tangenziale τ_1 .



Metodo dell'inclinazione variabile

Schiacciamento del puntone

Lo sforzo normale nella diagonale in calcestruzzo vale:

$$N_{\text{pun}} = \frac{V}{\sin \theta}$$

Poiché la distanza tra i puntoni, misurata in orizzontale, è pari a $z (\cot \theta + \cot \alpha)$, la loro sezione trasversale ha altezza $z (\cot \theta + \cot \alpha) \sin \theta$ e larghezza b_w .

Metodo dell'inclinazione variabile

Schiacciamento del puntone

La rottura a compressione è dunque regolata dalla relazione:

$$\sigma_c = \frac{V/\sin\theta}{b_w z (\cot\theta + \cot\alpha)\sin\theta} = v f_{cd}$$

ed interviene per un valore del taglio, generalmente indicato col simbolo $V_{Rd,max}$

$$V_{Rd,max} = \frac{v f_{cd} b z (\cot\theta + \cot\alpha)}{1 + \cot^2\theta}$$

essendo $\sin^2\theta = 1/\cot^2\theta$

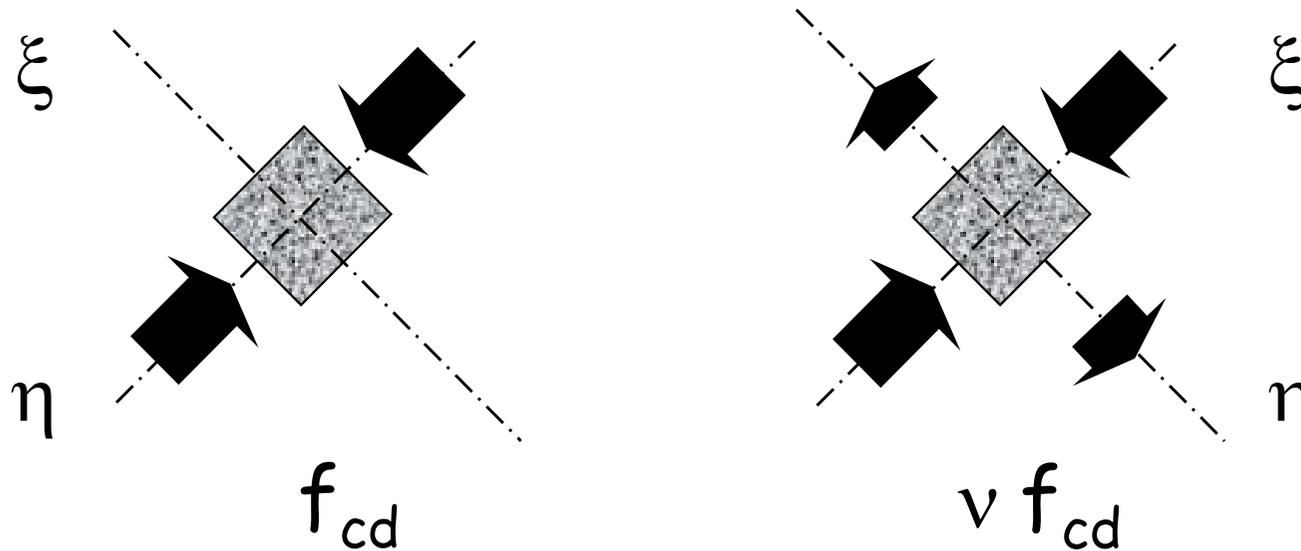
Fattore v

Schiacciamento del puntone

La rottura per schiacciamento interviene allorché la tensione normale eguaglia il valore $v f_{cd}$, essendo v un opportuno fattore di riduzione.

Eurocodice 2 $v = 0,6 - \frac{f_{ck}}{200} \geq 0,5$ (f_{ck} in N/mm^2)

NTC08 $v = 0.5$



Metodo dell'inclinazione variabile

Snervamento dell'armatura

La forza che agisce nell'armatura inclinata vale ancora

$$N_{\text{diag}} = \frac{V}{\text{sen } \alpha}$$

mentre l'area della diagonale tesa è, in funzione dell'area di armatura a taglio A_{sw} disposta in un tratto Δx ,

$$A_{\text{diag}} = \frac{A_{sw}}{\Delta x} z (\cot \theta + \cot \alpha)$$

Il taglio che provoca lo snervamento dell'armatura è quindi

$$V_{Rd,s} = \frac{A_{sw}}{\Delta x} z f_{yd} (\cot \theta + \cot \alpha) \text{sen } \alpha$$

Metodo dell'inclinazione variabile

Osservazioni

Dalle due espressioni :

$$V_{Rd,max} = \frac{v f_{cd} b z (\cot \theta + \cot \alpha)}{1 + \cot^2 \theta}$$

$$V_{Rd,s} = \frac{A_{sw}}{\Delta x} z f_{yd} (\cot \theta + \cot \alpha) \sin \alpha$$

si può notare che se, a partire da un'inclinazione del puntone $\theta=45^\circ$ (cioè $\cot \theta=1$), si riduce il valore di θ (e cresce $\cot \theta$) si ha una riduzione di $V_{Rd,max}$ ed un aumento di $V_{Rd,s}$

Metodo dell'inclinazione variabile

Limitazione dell'angolo θ

L'inclinazione θ dei puntoni di calcestruzzo rispetto all'asse della trave deve rispettare i limiti seguenti:

$$1 \leq \cot \theta \leq 2.5$$

Metodo dell'inclinazione variabile

Procedura di verifica

Procedura di verifica

$$V_{Ed} \leq \min \left\{ \begin{array}{l} V_{Rd,max} \\ V_{Rd,s} \end{array} \right.$$

- $V_{Rd,max} = \alpha_{cw} \frac{v f_{cd} b z (\cot \theta + \cot \alpha)}{1 + \cot^2 \theta}$
- $V_{Rd,s} = \frac{A_{sw}}{\Delta x} z f_{yd} (\cot \theta + \cot \alpha) \sin \alpha$

Metodo dell'inclinazione variabile

Influenza dello sforzo normale

Il valore raccomandato di α_{cw} è:

1	per strutture non compresse
$(1 + \sigma_{cp}/f_{cd})$	per $0 < \sigma_{cp} \leq 0,25 f_{cd}$
1.25	per $0.25 f_{cd} < \sigma_{cp} \leq 0.5 f_{cd}$
$2.5 (1 - \sigma_{cp}/f_{cd})$	per $0.5 f_{cd} < \sigma_{cp} < 1.0 f_{cd}$

dove:

σ_{cp} è la tensione media di compressione, considerata positiva, nel calcestruzzo dovuta alla forza assiale di progetto.
Si raccomanda che questa sia ottenuta come valore medio sulla sezione di calcestruzzo tenendo conto delle armature.

Metodo dell'inclinazione variabile

Procedura di progetto

Procedura di progetto

Se è necessaria armatura a taglio ($V_{Ed} > V_{Rd,c}$),

si calcola il valore di $V_{Rd,max}$ in corrispondenza di $\cot\theta=2.5$:

$$V_{Rd,max}(\cot\theta=2.5) = \frac{v f_{cd} b z (2.5 + \cot\alpha)}{1 + 2.5^2}$$

Poi ...

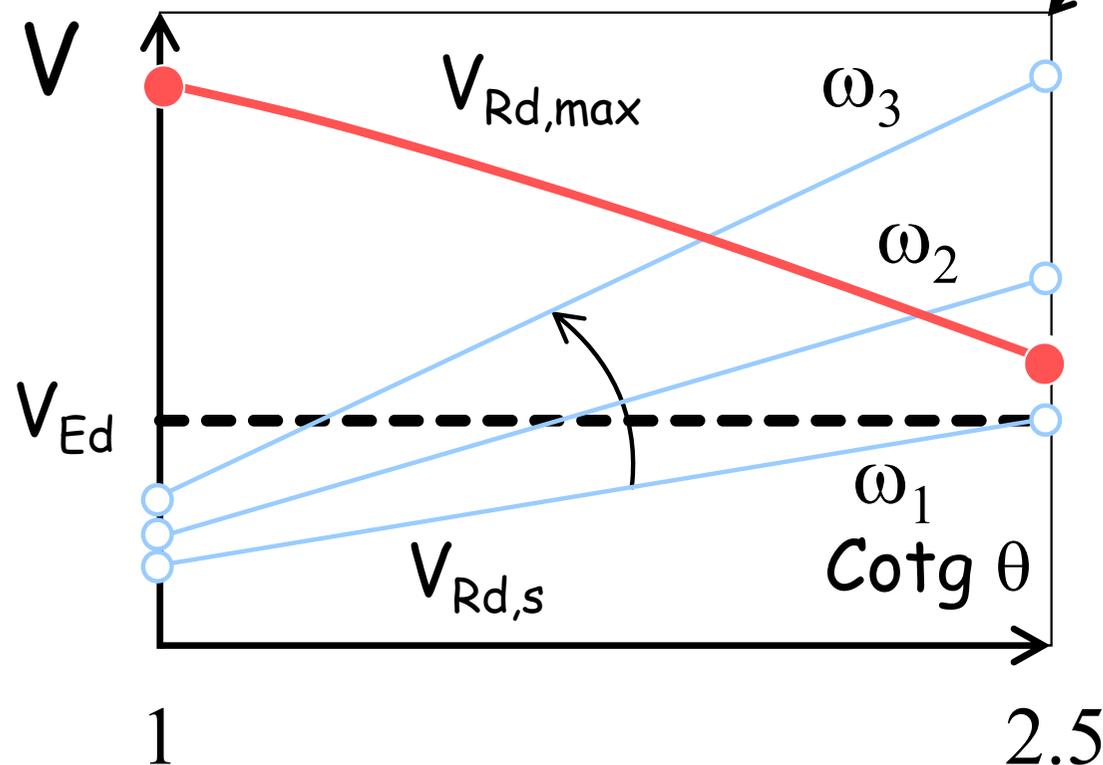
Progetto dell'armatura a taglio

Metodo dell'inclinazione variabile del traliccio

1

Se...

$$V_{Rd,max}(\cotg \theta = 2.5) \geq V_{Ed}$$



$$V_{Rd,max} = \alpha_{cw} \frac{v f_{cd} b z (\cot \theta + \cot \alpha)}{1 + \cot^2 \theta}$$

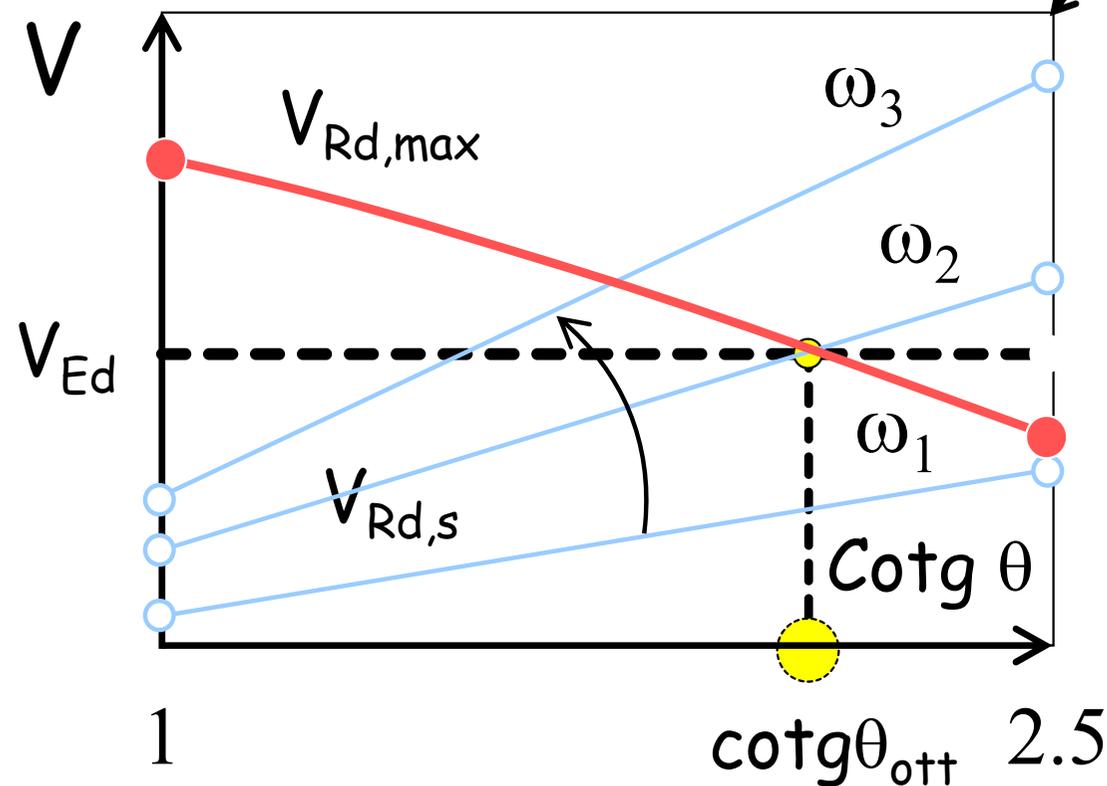
$$V_{Rd,s} = \frac{A_{sw}}{\Delta x} z f_{yd} (\cot \theta + \cot \alpha) \sin \alpha$$

Progetto dell'armatura a taglio

Metodo dell'inclinazione variabile del traliccio

2

Se... $V_{Rd,max}(\cotg \theta = 2.5) < V_{Ed}$



$$V_{Rd,max} = \alpha_{cw} \frac{v f_{cd} b z (\cot \theta + \cot \alpha)}{1 + \cot^2 \theta}$$

$$V_{Rd,s} = \frac{A_{sw}}{\Delta x} z f_{yd} (\cot \theta + \cot \alpha) \sin \alpha$$

Armatura a taglio

Armature sagomate

- Le armature rialzate non devono essere utilizzate come armature a taglio se non in combinazione con staffe. Almeno il 50% del valore di V_{Ed} deve essere assorbito da staffe verticali.
- L'angolo tra le armature rialzate e l'asse longitudinale della trave non deve essere minore di 45° .

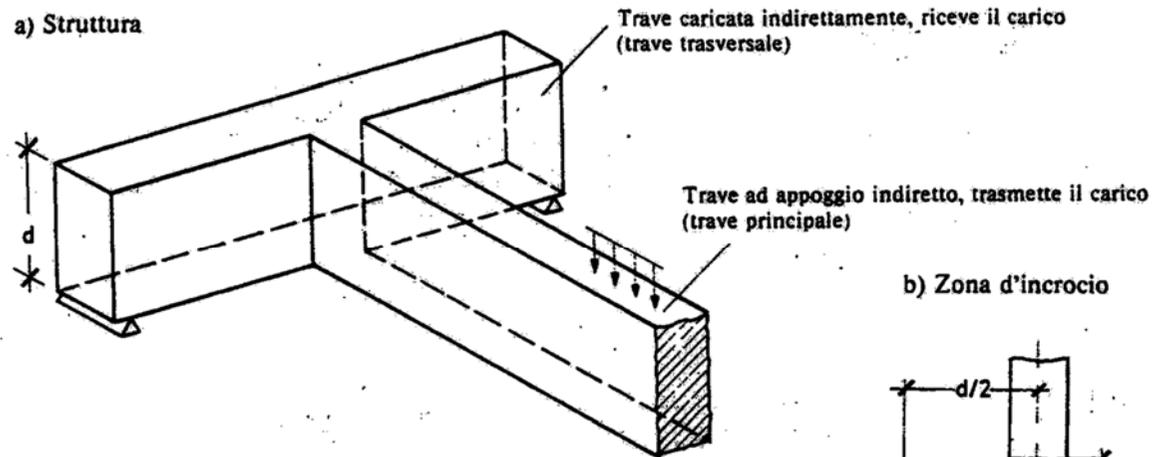
Introduzione del carico

Appoggio indiretto

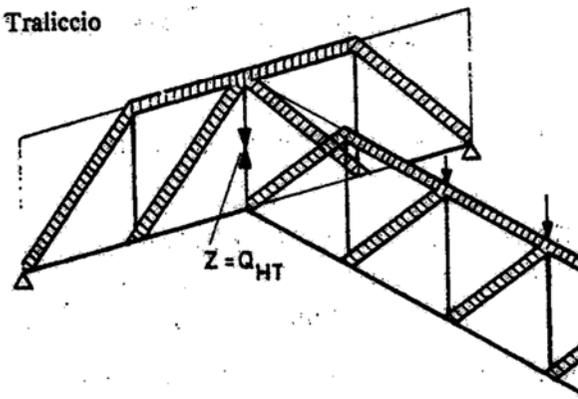
Dove il carico non agisca all'estradosso della trave, o quando l'appoggio non sia all'intradosso della trave ...

si devono disporre ulteriori armature per riportare gli sforzi all'estradosso del traliccio resistente

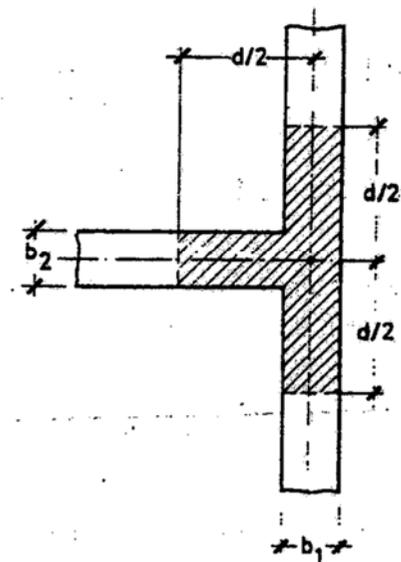
a) Struttura



c) Traliccio



b) Zona d'incrocio



Effetto arco

Carichi concentrati

Carichi concentrati

Vicino agli appoggi,

dove la configurazione di carichi concentrati e la reazione di appoggio è tale che una parte dei carichi può essere trasferita all'appoggio per compressione diretta (appoggio diretto),

si può ammettere che solo una quota di tali carichi debba essere sopportata per effetto trave.

Tale eventualità dipende in modo significativo da un appropriato ancoraggio delle armature tese da una parte e dall'altra di ogni possibile piano di rottura.

Effetto arco

Carichi concentrati

Il taglio all'appoggio determinato da carichi applicati alla distanza $a_v \leq 2d$ dall'appoggio stesso si potrà ridurre nel rapporto $a_v/2d$

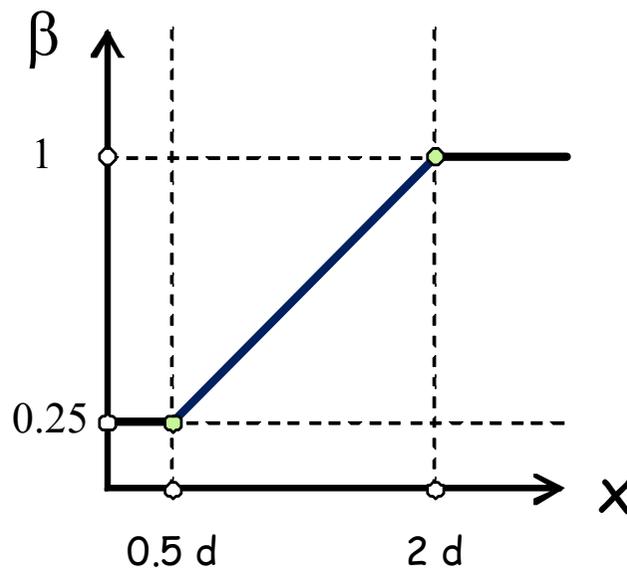
con l'osservanza delle seguenti prescrizioni:

- nel caso di appoggio di estremità, l'armatura di trazione necessaria nella sezione ove è applicato il carico più vicino all'appoggio sia prolungata e ancorata al di là dell'asse teorico di appoggio;
- nel caso di appoggio intermedio l'armatura di trazione all'appoggio sia prolungata sin dove necessario e comunque fino alla sezione ove è applicato il carico più lontano compreso nella zona con $a_v/2d$.

Effetto arco

Carichi concentrati

Per elementi soggetti a carichi applicati all'estradosso a distanza $0,5d \leq a_v \leq 2d$ a partire dal bordo dell'appoggio, il contributo di questo carico al taglio V_{Ed} (effetto trave) può essere ridotto con il fattore $\beta = a_v / 2d$.



$$\beta = \frac{a_v}{2d}$$

con

$$0.25 \leq \beta \leq 1$$

Effetto arco

Carichi uniformemente distribuiti

Carichi uniformemente distribuiti

Per elementi soggetti prevalentemente a carichi uniformemente distribuiti, lo sforzo di taglio di progetto non deve essere verificato a una distanza minore di d misurata dalla faccia dell'appoggio.

Si raccomanda che l'armatura richiesta per il taglio sia estesa fino all'appoggio.

Effetto arco

Elementi non armati a taglio

Si raccomanda che lo sforzo di taglio V_{Ed} ,
calcolato in corrispondenza dell'appoggio senza la riduzione β
rispetti comunque sempre la condizione

$$V_{Ed} \leq 0.5 b_w d v f_{cd}$$

essendo $v=0.5$ un coefficiente di riduzione della resistenza del
calcestruzzo fessurato per taglio.

Effetto arco

Elementi armati a taglio

Si raccomanda che lo sforzo di taglio V_{Ed} ,
calcolato in corrispondenza dell'appoggio senza la riduzione β
rispetti la condizione :

$$V_{Ed} \leq V_{Rd,max}$$

Elementi con armatura a taglio

Importanza delle armature trasversali

La presenza delle armature trasversali:

1. Migliora l'effetto spinotto;
2. Diminuisce le tensioni di trazione da flessione nelle sezioni di incastro delle mensole (denti del pettine);
3. Limita l'apertura delle fessure diagonali in campo elastico, dunque preservando e migliorando il trasferimento del taglio per effetto ingranamento degli inerti;
4. Confina e dunque aumenta la resistenza a compressione di zone sollecitate da comportamento ad arco;
5. Impedisce il cedimento dell'ancoraggio, allorché fessure da splitting si sviluppano nelle zone di ancoraggio.

Armatatura a taglio

Minimi di armatura trasversale

Il rapporto di armatura a taglio è :

$$\rho_w = \frac{A_{sw}}{s b \operatorname{sen} \alpha}$$

dove:

A_{sw} è l'area dell'armatura a taglio sulla lunghezza s ;

s è il passo dell'armatura a taglio;

b_w è la larghezza dell'anima dell'elemento;

α è l'angolo tra l'armatura a taglio e l'armatura principale (per staffe verticali $\alpha=90^\circ$ e $\operatorname{sen} \alpha=1$).

Armatura a taglio

Minimi di armatura trasversale

Travi

$$\rho_{w,\min} = \frac{0.08 \sqrt{f_{ck}}}{f_{yk}}$$

(f_{ck} in MPa)

$$s_{\max} = 0.75 d$$

Eurocodice 2 (2005)

$$\frac{A_{sw}}{s} = 0.15 b_w \text{ cm}^2/\text{m}$$

(b_w in cm)

$$s_{\max} = 0.80 d$$

**Norme tecniche per le
Costruzioni 2008**

Armatura a taglio

Minimi di armatura trasversale

Pilastrini

Norme tecniche per le Costruzioni 2008

Il diametro delle armature trasversali deve essere non minore di :

- 6 mm
- un quarto del massimo diametro delle barre longitudinali

L'interasse delle armature trasversali deve essere non maggiore di :

- 12 volte il minimo diametro delle barre longitudinali
- 250 mm

Armatura a taglio

Minimi di armatura trasversale

Pilastri [Eurocodice 2 (2005)]

L'interasse delle armature trasversali non deve essere maggiore di :

- 20 volte il minimo diametro delle barre longitudinali;
- il lato minore della sezione del pilastro;
- 400 mm.

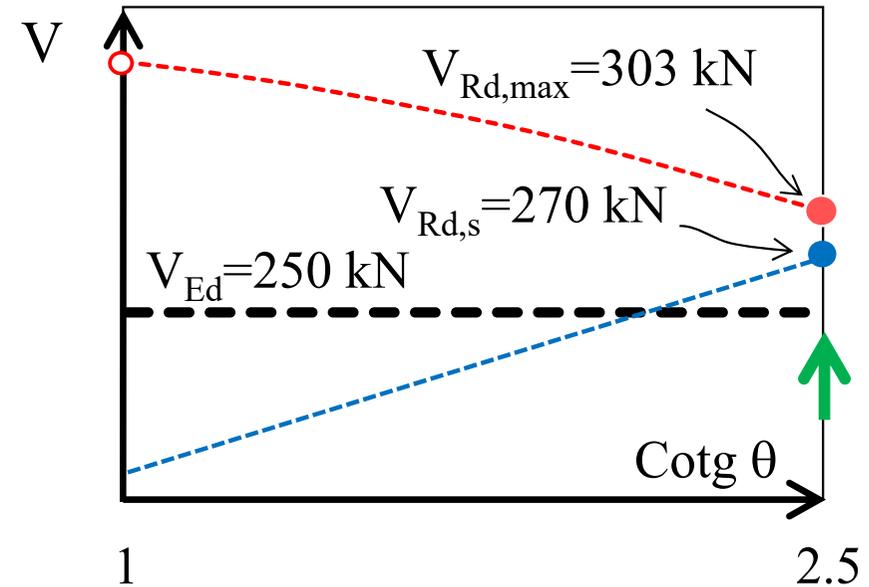
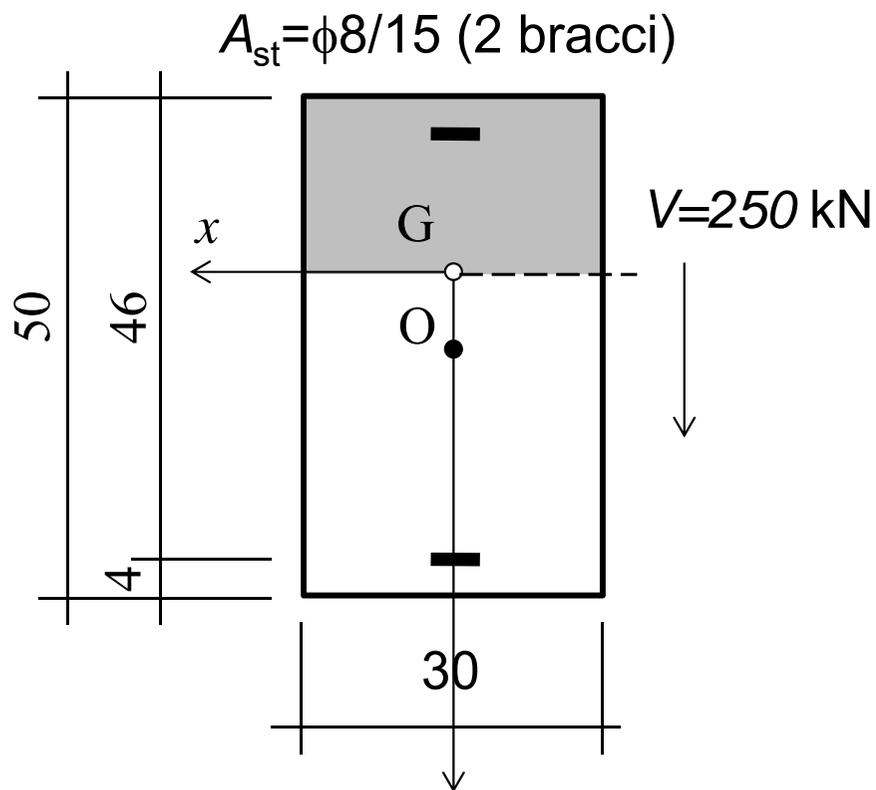
L'interasse delle armature trasversali sarà ridotto di un fattore 0.6 :

- i) in sezioni posizionate al di sopra o al di sotto di una trave o di una piastra per un tratto pari alla maggiore dimensione della sezione del pilastro;
- ii) in prossimità delle giunzioni per sovrapposizione se il massimo diametro delle barre è maggiore di 14 mm.

Un minimo di 3 barre disposte con passo costante è richiesto nella lunghezza di sovrapposizione.

Esempio n. 11

3° stadio di comportamento



Area staffe (in un tratto di 100 cm)

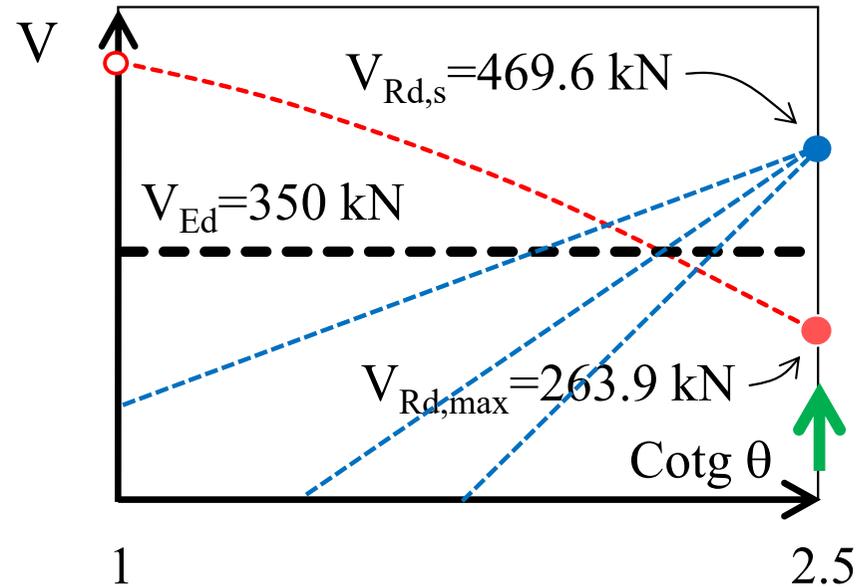
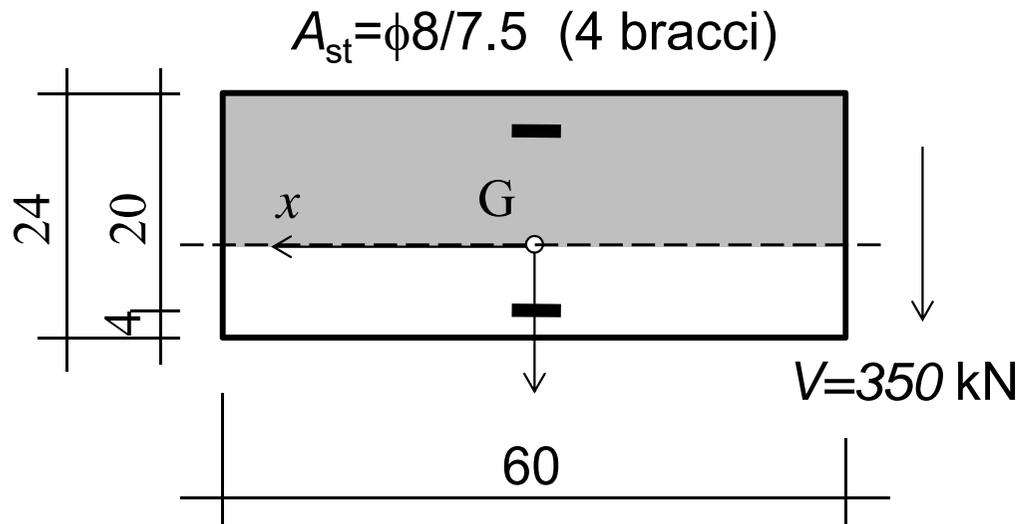
$$A_{st} = \frac{100}{15} \cdot 2 \cdot 0.5 = 6.67 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$V_{Rd,max} = \frac{v \cdot f_{cd} \cdot b \cdot z \cdot (\cot \theta + \cot \alpha)}{1 + \cot^2 \theta} = \frac{0.5 \cdot 14.17 \cdot 30 \cdot 41.4 \cdot 2.5}{1 + 2.5^2} \cdot 10^{-1} = 303.4 \text{ kN}$$

$$V_{Rd,s} = \frac{A_{sw}}{\Delta x} z f_{yd} (\cot \theta + \cot \alpha) \text{sen } \alpha = \frac{6.67 \cdot 41.4 \cdot 391.3}{100} \cdot 2.5 \cdot 10^{-1} = 270 \text{ kN}$$

Esempio n. 12

3° stadio di comportamento



Area staffe (in un tratto di 100 cm)

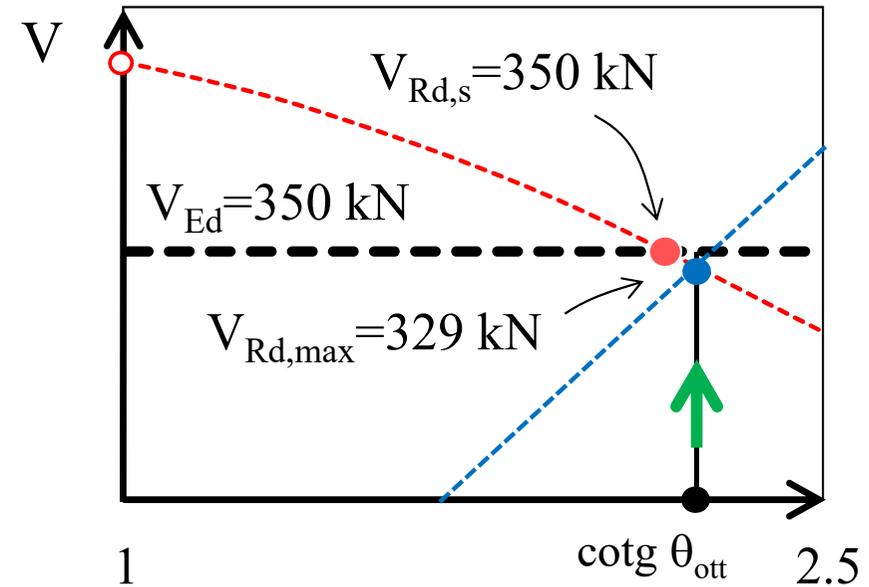
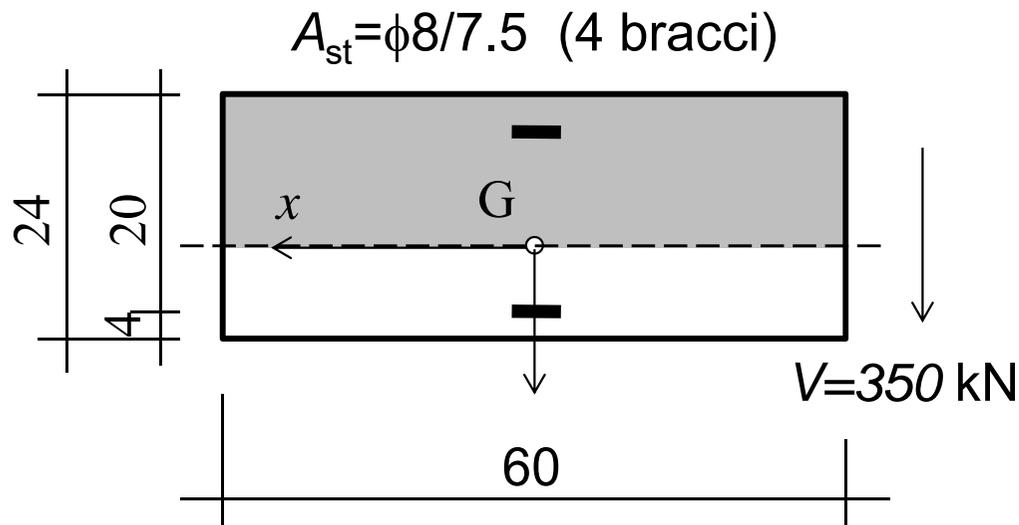
$$A_{st} = \frac{100}{7.4} \cdot 4 \cdot 0.5 = 26.67 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$V_{Rd,max} = \frac{v \cdot f_{cd} \cdot b \cdot z \cdot (\cot \theta + \cot \alpha)}{1 + \cot^2 \theta} = \frac{0.5 \cdot 14.17 \cdot 60 \cdot 18 \cdot 2.5}{1 + 2.5^2} \cdot 10^{-1} = 263.9 \text{ kN}$$

$$V_{Rd,s} = \frac{A_{sw}}{\Delta x} z f_{yd} (\cot \theta + \cot \alpha) \sin \alpha = \frac{26.67 \cdot 18 \cdot 391.3}{100} \cdot 2.5 \cdot 10^{-1} = 469.6 \text{ kN}$$

Esempio n. 12

3° stadio di comportamento



$$\cot \theta_{ott} = \sqrt{\frac{v f_{cd} b_w}{A_{sw} / s f_{yd}} - 1}$$

$$= \sqrt{\frac{0.5 \cdot 14.17 \cdot 60}{26.67 / 100 \cdot 391.3} - 1} = 1.753$$

Poiché $V_{Ed} > V_{Rd,max}(\cot \theta = 2.5)$
calcoliamo il θ che ottimizza la resistenza:

$$V_{Rd,s} = \frac{A_{sw}}{\Delta x} z f_{yd} (\cot \theta + \cot \alpha) \sin \alpha = \frac{26.67 \cdot 18 \cdot 391.3}{100} \cdot 1.753 \cdot 10^{-1} = 329.3 \text{ kN}$$

Poiché $V_{Rd,s}$ è minore di V_{Ed} , la sezione non è verificata

Fine