

Lezione

PONTI E GRANDI STRUTTURE

Prof. Pier Paolo Rossi

Università degli Studi di Catania

Torsione elastica

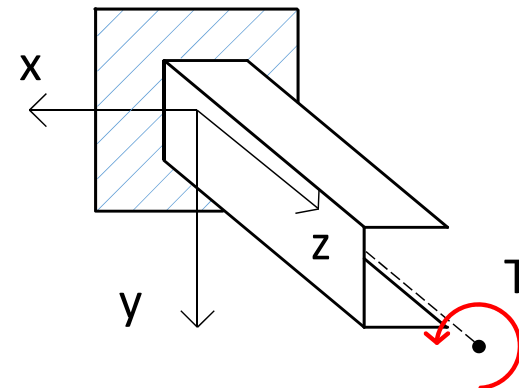
Torsione elastica

Problema del De Saint Venant

Si consideri una trave a sezione costante incastrata ad un estremo e sottoposta ad momento torcente.

Per l'equilibrio le tensioni trasmesse al vincolo danno luogo ad un momento torcente uguale e di verso opposto a quello sollecitante.

Dal punto di vista statico,
il problema è equivalente a quello
di De Saint Venant per la torsione.



Torsione elastica

Problema del De Saint Venant

Il momento torcente vale :

$$T = GJ \theta'$$

dove :

J rigidità torsionale

θ' angolo di torsione unitario

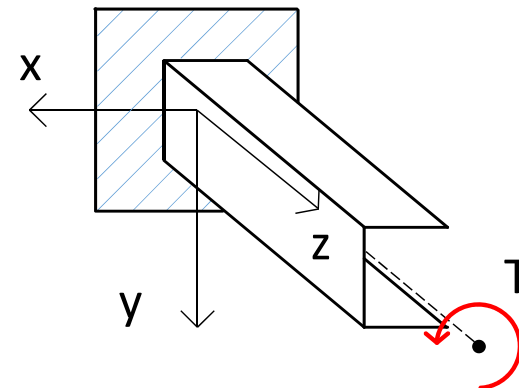
Nota! Per profili aperti in parete sottile la rigidità torsionale è approssimativamente ottenuta dalla relazione :

$$J = \frac{1}{3} \int_0^a b^3(s) ds$$

essendo

b lo spessore del profilo

a la lunghezza totale della linea media



Torsione elastica

Problema del De Saint Venant

La rotazione della sezione varia linearmente con z , raggiungendo il suo valore massimo all'estremo :

$$\theta(z) = \frac{T z}{GJ}$$

Gli spostamenti sono :

$$s_x = -\theta y \quad s_y = \theta x \quad s_z = \theta' \psi(s)$$

dove :

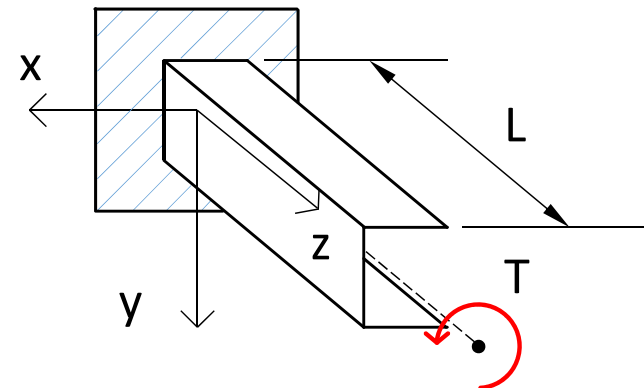
ψ funzione di ingobbamento

θ rotazione torsionale

Nota!

Le sezioni si ingobbano tutte in egual misura, la torsione è uniforme !

... ciò comporta che le fibre non si deformano in direzione longitudinale.



Torsione elastica

Teoria di Timoshenko - Vlasov

È evidente come un incastro impedisca ai punti di spostarsi longitudinalmente. Lo spostamento s_z risulterà in realtà funzione di z in una zona più o meno estesa a partire dal vincolo (principio di equivalenza elastica).

Un modo di incorporare questo aspetto è quello di assumere un angolo di torsione unitario θ' funzione di z .

Nota!

Le sezioni non si ingobbano tutte in egual misura,
la torsione è non uniforme

Torsione elastica

Teoria di Timoshenko - Vlasov

L'espressione degli spostamenti diviene:

$$s_x = -\theta(z)[y(s) - y_c] \quad s_y = \theta(z)[x(s) - x_c] \quad s_z = \theta'(z)\psi(s)$$

dove :

x_c y_c coordinate del centro di taglio nel riferimento principale della sezione

L'espressione di $s_z = \theta'(z)\psi(s)$ dipende da z , quindi

le fibre subiscono deformazioni dirette in senso longitudinale :

$$\varepsilon_z = \frac{\partial s_z}{\partial z} = \psi(s)\theta''(z)$$

Torsione elastica

Teoria di Timoshenko - Vlasov

La presenza di deformazioni longitudinali comporta la presenza di tensioni normali σ_z :

$$\sigma(z) = E \varepsilon_z = E \psi(s) \theta''(z)$$

Torsione elastica

La funzione di ingobbamento

La funzione di ingobbamento vale:

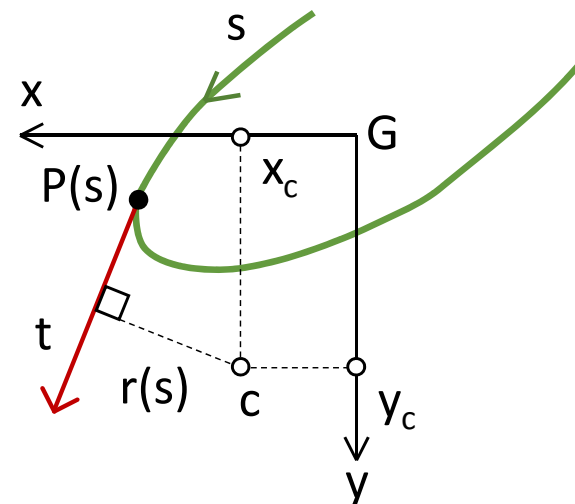
$$\psi(s) = 2 \left[\bar{\Omega} - \Omega(s) \right]$$

dove :

$$\Omega(s) = \frac{1}{2} \int_0^s r(s') ds'$$

$$\bar{\Omega} = \frac{1}{A} \int_A \Omega dA$$

$r(s)$ distanza dal centro di taglio della tangente alla linea media nel generico punto $P(s)$.
Tale distanza si considera positiva se t provoca rotazione positiva intorno al centro di taglio.



Torsione elastica

La funzione di ingobbamento

La funzione di ingobbamento gode delle seguenti proprietà

$$\int_A \psi dA = 0$$

Non ci può essere sforzo normale

$$\int_A x\psi dA = 0$$

Non ci può essere momento flettente
intorno all'asse y

$$\int_A y\psi dA = 0$$

Non ci può essere momento flettente
intorno all'asse x

Torsione elastica

La funzione di ingobbamento

Le σ_z devono quindi costituire uno stato di autotensione, corrispondente ad azione assiale e momenti flettenti nulli.

Avendo assunto il centro di rotazione come centro di taglio, questa proprietà risulta verificata :

$$N = \int_A \sigma_z dA = E\theta'' \int_A \psi dA = 0$$

$$M_x = \int_A y \sigma_z dA = E\theta'' \int_A y \psi dA = 0$$

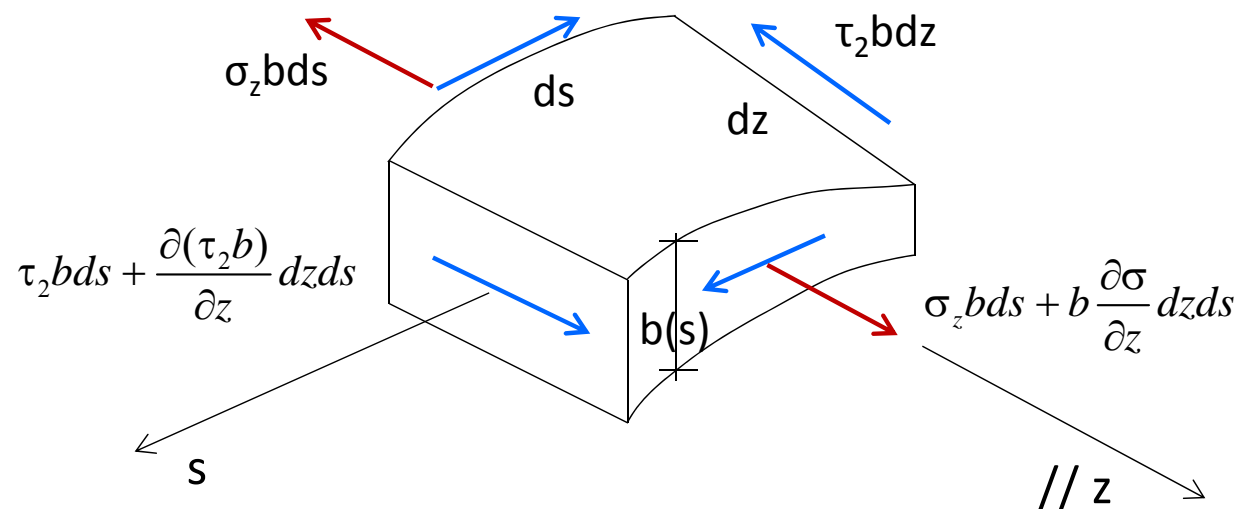
$$M_y = -\int_A x \sigma_z dA = -E\theta'' \int_A x \psi dA = 0$$

Torsione elastica

Teoria di Timoshenko - Vlasov

Si consideri un elemento infinitesimo di trave. Data la piccolezza dello spessore, le σ_z sono assunte distribuite uniformemente su di esso.

Poiché esse variano lungo z , per l'equilibrio nascono delle tensioni tangenziali τ_2 , dette secondarie, uniformi sullo spessore.

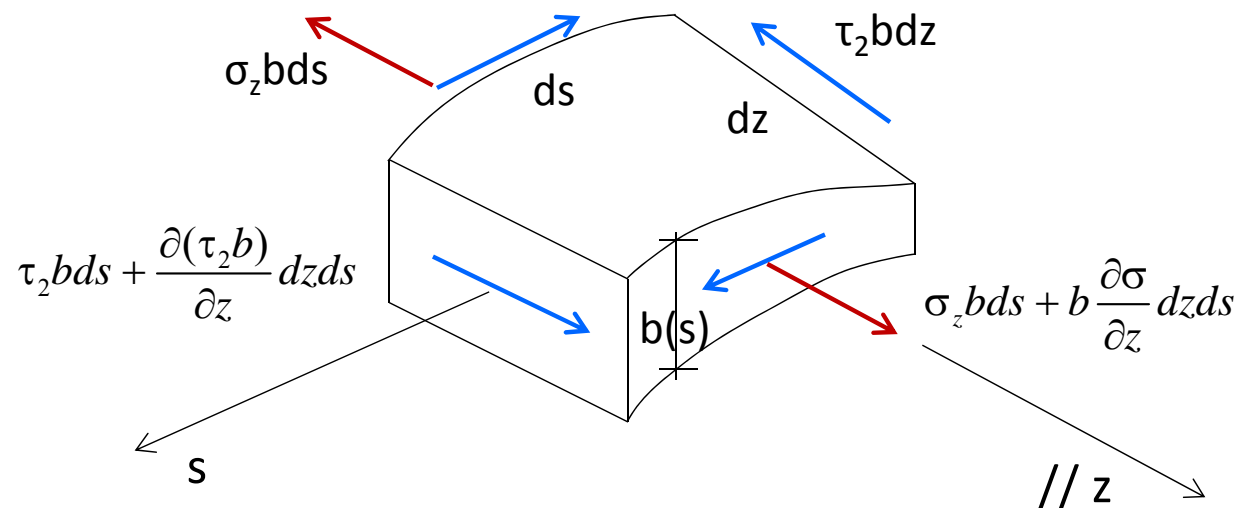


Torsione elastica

Teoria di Timoshenko - Vlasov

L'equilibrio alla traslazione lungo l'asse z impone :

$$\frac{\partial(\tau_2 b)}{\partial s} = -b \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -Eb(s) \psi(s) \theta'''(z)$$



Torsione elastica

Teoria di Timoshenko - Vlasov

Il flusso $q = \tau_2 b$ delle tensioni tangenziali secondarie attraverso lo spessore può essere calcolato integrando la precedente relazione.

Se la superficie laterale è scarica, per l'equilibrio deve essere $\tau_2 = 0$. La costante di integrazione è quindi nulla e si ottiene :

$$q(s, z) = \tau_2 b = -E\theta'''(z) \int_0^s b(s') \psi(s') ds'$$

A tale flusso non corrispondono azioni taglianti.

Torsione elastica

Teoria di Timoshenko - Vlasov

Tale flusso dà luogo ad un momento torcente T_2

$$T_2 = \int_0^a q r ds = -E \theta'''(z) \int_0^a \left[\int_0^s b(s') \psi(s') ds' \right] r(s) ds$$

dove :

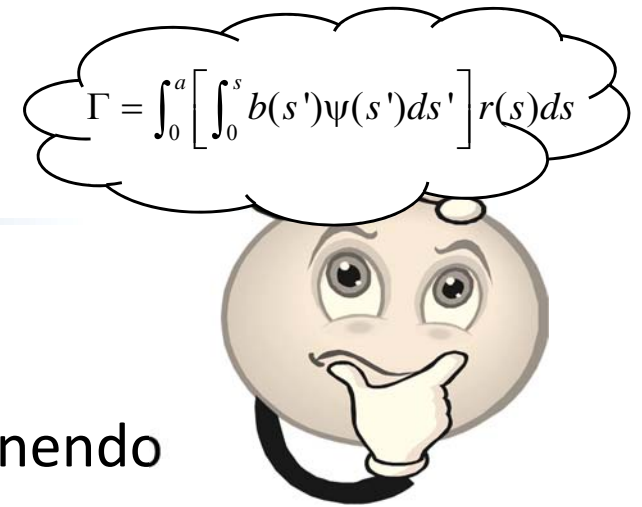
$$\Gamma = \int_0^a \left[\int_0^s b(s') \psi(s') ds' \right] r(s) ds$$

è una proprietà geometrica della sezione,
detta **rigidità di ingobbamento** (*warping rigidity*).

Quindi $T_2 = -E \Gamma \theta'''(z)$ = **momento torcente secondario**

Torsione elastica

Teoria di Timoshenko - Vlasov



Si può ricondurre Γ ad una forma più semplice ponendo

$$\Lambda(s) = \int_0^s \psi(s') b(s') ds' \quad \text{e sostituendo } r ds = -d\psi :$$

Integrando per parti ($\int_0^a u dv = uv|_0^a - \int_0^a v du$)

l'espressione della rigidità d'ingobbamento, si ottiene:

$$\Gamma = -\int_0^a \Lambda(s) d\psi = -\Lambda(a)\psi(a) + \Lambda(0)\psi(0) + \int_0^a \psi(s) d\Lambda$$

dove $\Lambda(0)=0$ e $\Lambda(a)=0$

Poiché $d\Lambda = \psi b ds = \psi dA$, la rigidità di ingobbamento diviene :

$$\Gamma = \int_A \psi^2 dA$$

Torsione elastica

Teoria di Timoshenko - Vlasov

Il momento torcente secondario T_2 rappresenta il contributo degli effetti del vincolo.

Sommato al momento primario T_1 , corrispondente alle tensioni tangenziali date dalla soluzione di De Saint Venant, equilibra in ogni sezione la coppia applicata all'estremo della mensola :

$$T = T_1 + T_2 = GJ \theta'(z) - E \Gamma \theta'''(z)$$

Nota!

I due contributi hanno importanza relativa diversa nelle diverse sezioni. L'effetto del vincolo diminuisce con la distanza dal vincolo stesso.

Torsione elastica

Teoria di Timoshenko - Vlasov

E' possibile estendere i risultati anche ad una trave soggetta a momento torcente distribuito m_t per unità di lunghezza.

Per l'equilibrio alla rotazione di un elemento infinitesimo di trave si ha :

$$dT/dz = -m_t$$

Derivando l'equazione fondamentale della torsione $T(z) = G J \theta'(z) - E \Gamma \theta'''(z)$, si ottiene :

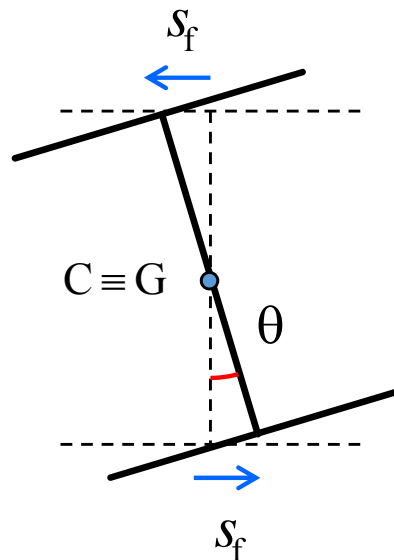
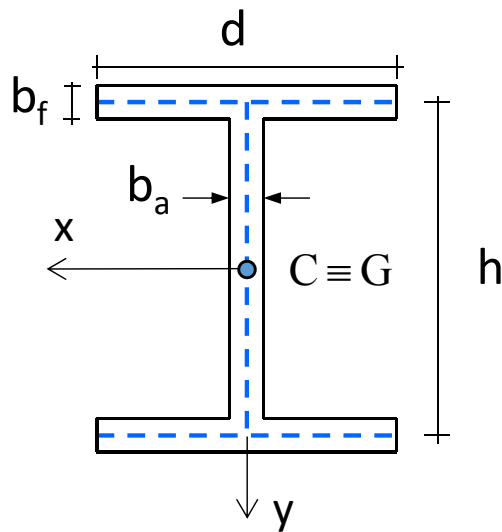
$$m_t = E \Gamma \theta''''(z) - G J \theta''(z)$$

Questa equazione differenziale, lineare a coefficienti costanti, governa il comportamento torsionale dei profili aperti. Il suo integrale generale dipende da quattro costanti di integrazione, determinate dalle condizioni al contorno.

Torsione elastica

Sezione a I

In una sezione a I
il centro di taglio coincide con il baricentro della sezione.
Se la sezione ruota di un angolo θ intorno a questo punto,
le flange subiscono uno spostamento orizzontale s_f :



$$s_f(z) = \frac{h}{2} \theta(z)$$

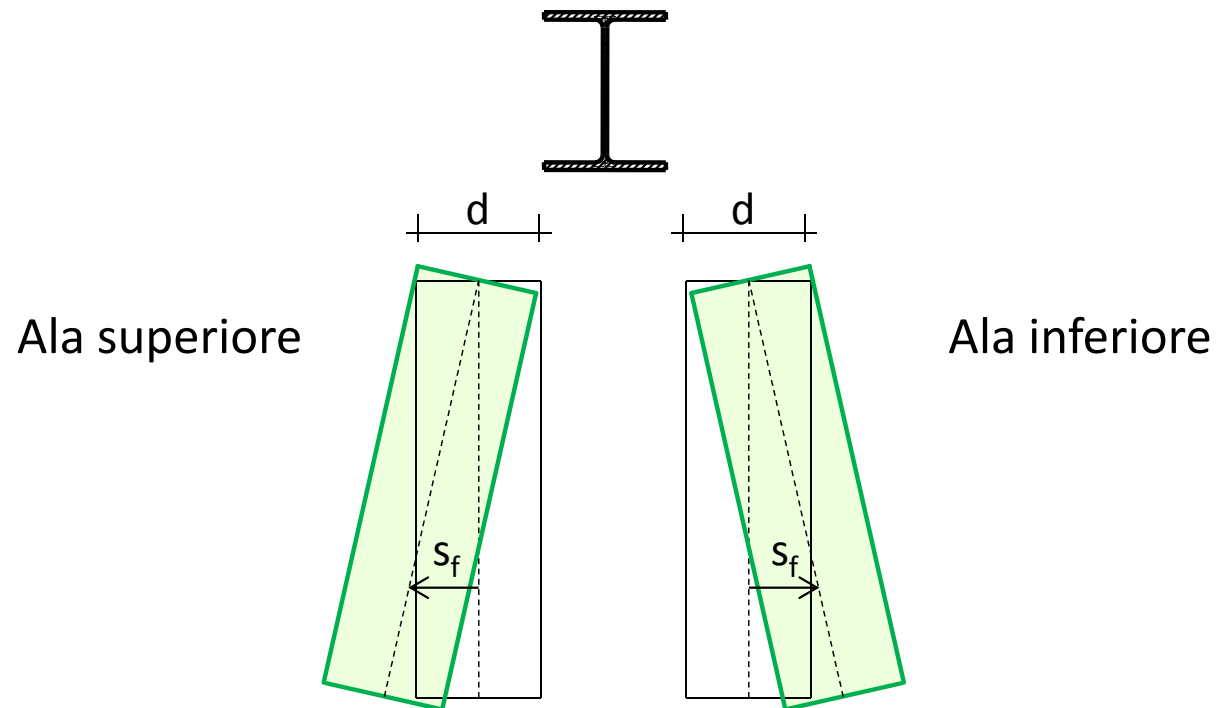
essendo,
più in generale :

$$s_x(z) = y \theta(z)$$

Torsione elastica

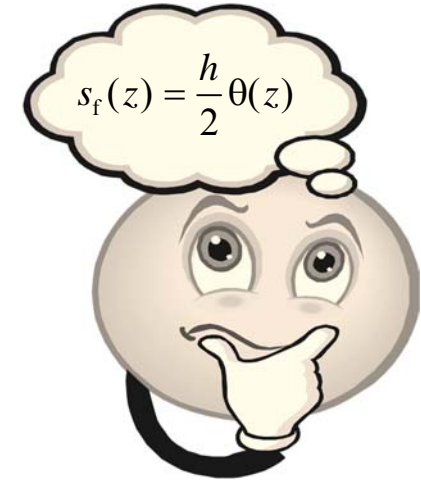
Sezione a I

Se le sezioni fossero libere di ingobbarsi, si avrebbe una rotazione rigida delle flange nel proprio piano.



Torsione elastica

Sezione a I



Per la presenza dell'incastro,
la flangia si inflette e tale inflessione è contrastata
dalla rigidezza legata al momento d'inerzia della flangia I_f :

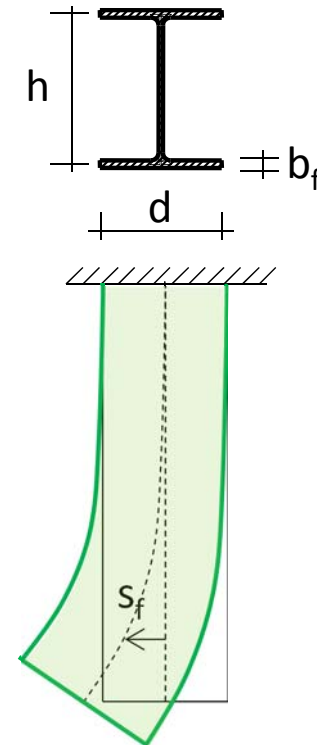
$$I_f = \frac{1}{12} b_f d^3$$

Nella flangia saranno presenti
momenti flettenti

$$M_f(z) = EI_f \frac{d^2 s_f}{dz^2} = E \frac{b_f d^3 h}{24} \theta''$$

e sforzi di taglio

$$V_f(z) = E \frac{b_f d^3 h}{24} \theta'''$$

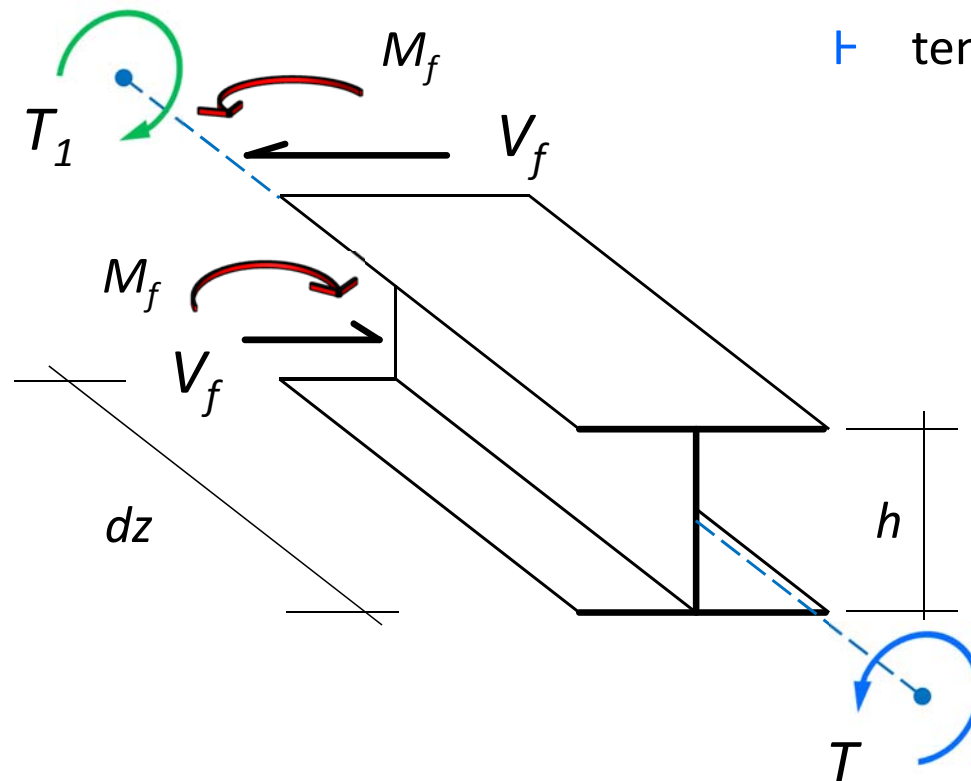


Torsione elastica

Sezione a I

Sulla sezione sono presenti :

- └ tensioni tangenziali conseguenti a T_1
- └ tensioni normali da momenti di flangia M_f
- └ tensioni tangenziali da tagli di flangia V_f



e ...

$$T = T_1 - V_f h$$

Torsione elastica

Sezione a I

Il primo addendo è il momento torcente secondo De Saint Venant :

$$T_1 = G J \theta'(z)$$

dove :

$$J = \frac{1}{3} (h b_a^3 + 2d b_f^3) \quad \text{è la rigidità torsionale primaria per la sezione ad I}$$

... il secondo addendo è il momento torcente secondario :

$$T_2(z) = -V_f(z)h = -E \Gamma \theta'''(z)$$

dove :

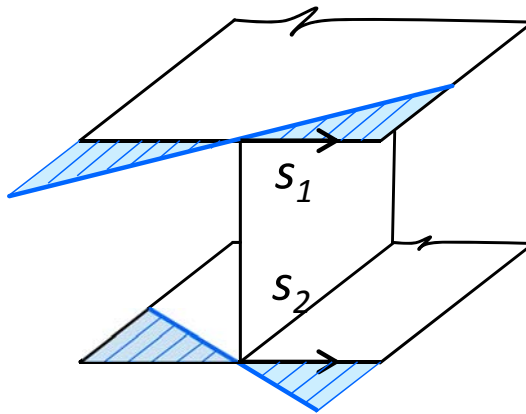
$$\Gamma = \frac{b_f d^3 h^2}{24} \quad \text{è la rigidità di ingobbamento per la sezione ad I}$$

Torsione elastica

Sezione a I

La funzione d'ingobbamento vale :

$$\psi(s) = \begin{cases} -(h/2) s_1 & \text{flangia superiore} \\ 0 & \text{anima} \\ (h/2) s_2 & \text{flangia inferiore} \end{cases}$$



Torsione elastica

Sezione a I

Si definisce *bimomento* la quantità :

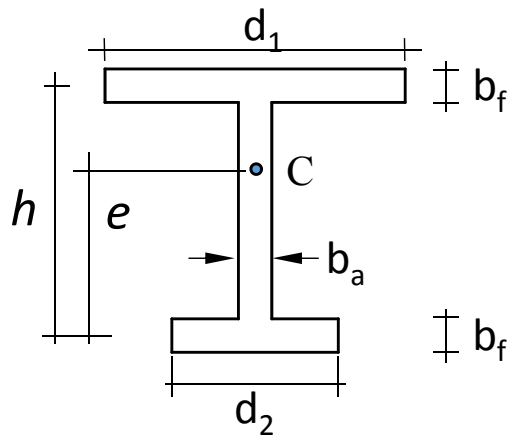
$$B = E \Gamma \theta''$$

Nella sezione a I,
il bimomento è pari al prodotto dei momenti di flangia per la distanza
tra le flange stesse, ovvero :

$$B = M_f h$$

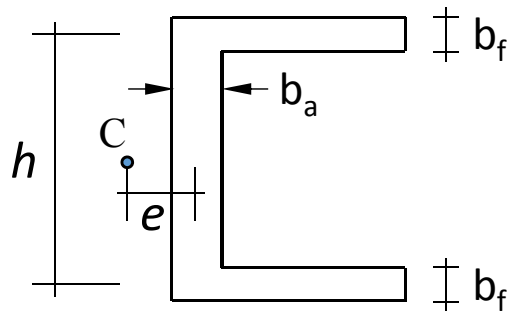
Torsione elastica

Altri profili



$$e = h \frac{d_1^3}{d_1^3 + d_2^3}$$

$$J = \frac{1}{3} [hb_a^3 + (d_1 + d_2)b_f^3] \quad \Gamma = \frac{b_f h^2}{12} \frac{d_1^3 d_2^3}{d_1^3 + d_2^3}$$



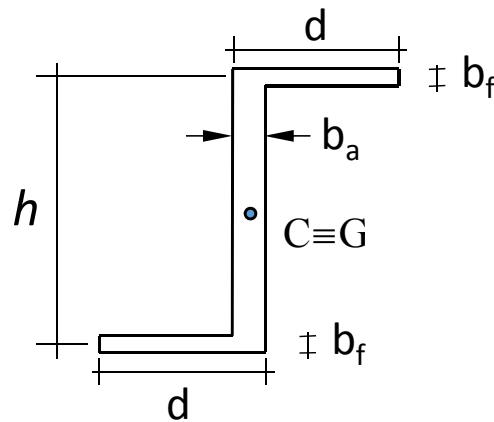
$$e = \frac{3b_f d^3}{6b_f d + hb_a}$$

$$J = \frac{1}{3} (hb_a^3 + 2db_f^3)$$

$$\Gamma = \frac{b_f d^3 h^2}{12} \frac{3db_f + 2hb_a}{6db_f + hb_a}$$

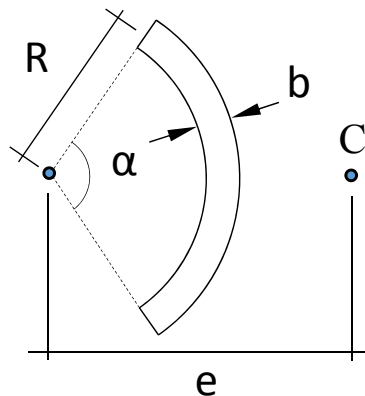
Torsione elastica

Altri profili



$$J = \frac{1}{3} (hb_a^3 + 2db_f^3)$$

$$\Gamma = \frac{b_f h^2}{12} \frac{d_1^3 d_2^3}{d_1^3 + d_2^3}$$



$$e = 2R \frac{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha}$$

$$J = \frac{2}{3} \alpha R b^3$$

$$\Gamma = \frac{2}{3} b R^5 \left[\alpha^3 - \frac{6(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)^2}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha} \right]$$

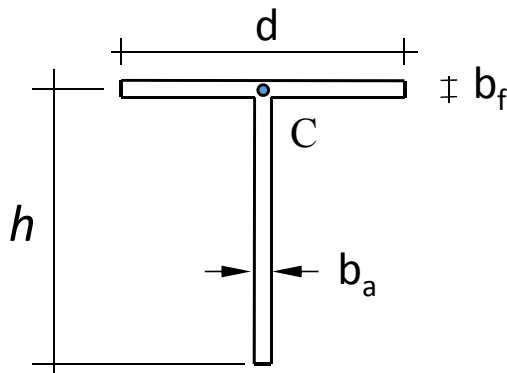
Torsione elastica

Altri profili

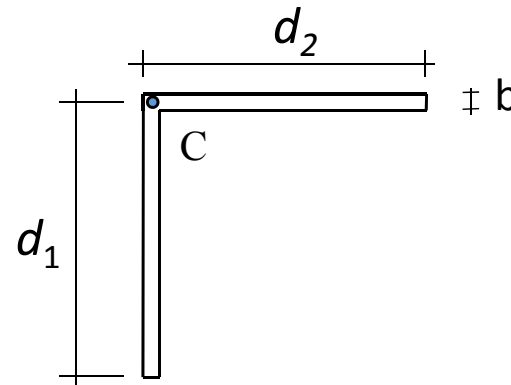
Per profili costituiti da rettangoli allungati convergenti in un solo punto la rigidità di ingobbamento risulta nulla.

Il centro di taglio si colloca nel punto di incontro dei rettangoli e ciò comporta un valore nullo per la distanza $r(s)$ della tangente alla linea media da C.

Se si considerano le variazioni di ingobbamento sullo spessore si ottengono dei valori della rigidità di ingobbamento che possono ritenersi trascurabili.



$$J = \frac{1}{3} (hb_a^3 + db_f^3) \quad \Gamma = \frac{1}{144} b_f^3 d^3 + \frac{1}{36} b_a^3 h^3$$



$$J = \frac{1}{3} b^3 (d_1 + d_2) \quad \Gamma = \frac{1}{36} b^3 (d_1^3 + d_2^3)$$

Principali riferimenti

- ❑ Leoni Corradi Dell'Acqua. Meccanica delle strutture 1 - Il comportamento dei corpi continui, Mc Graw Hill. ISBN: 978 88386 67145
- ❑ Leoni Corradi Dell'Acqua. Meccanica delle strutture 2 - Volume 2 - Le teorie strutturali e il metodo degli elementi finiti, Mc Graw Hill. ISBN: 978 88386 67152

FINE