Lezione

PONTI E GRANDI STRUTTURE

Prof. Pier Paolo Rossi
Università degli Studi di Catania

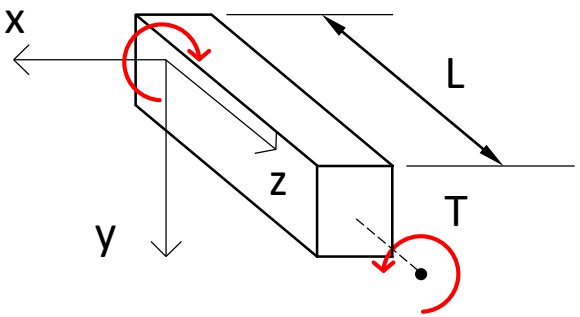
TORSIONE ELASTICA PRIMARIA

Torsione elastica

Il solido di De Saint Venant

- Il solido è cilindrico e privo di vincoli
- Il cilindro è omogeneo e costituito da materiale elastico-lineare e isotropo
- Le forze di volume e le trazioni superficiali sulla superficie laterale sono nulle
- Le sole azioni esterne sono forze di superficie sulle due sezioni estreme, globalmente equilibrate

Barré de Saint-Venant 1797-1886



Torsione elastica

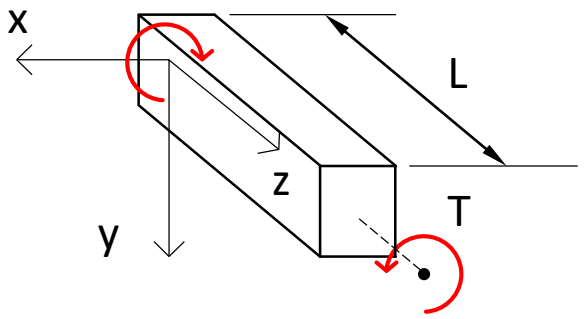
La torsione secondo De Saint Venant

Gli spostamenti dei punti della sezione sono :

$$s_x = -\theta y \qquad s_y = \theta x \qquad s_z = \theta' \psi(x, y)$$

dove :

ψ	funzione di ingobbamento
θ	rotazione torsionale



Nota!

Le sezioni si ingobbano tutte in egual misura, la torsione è uniforme !

… ciò comporta che le fibre non si deformano in direzione longitudinale.

tratto da: Leone Corradi Dell'Acqua. Meccanica delle strutture, vol.1. McGraw-Hill

Torsione elastica

La torsione secondo De Saint Venant

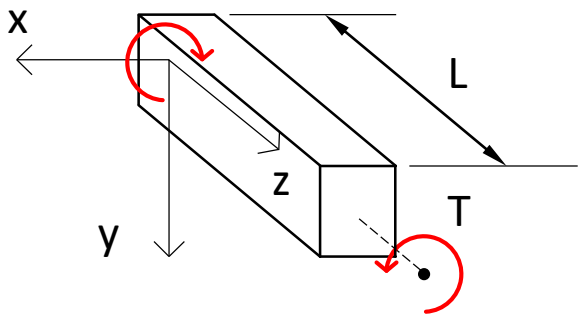
Dagli spostamenti assunti risulta che le deformazioni valgono:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \gamma_{xy} = 0$$

$$\varepsilon_z = 0$$

$$\gamma_{zx} = \theta'\left(\partial\psi/\partial x - y\right)$$

$$\gamma_{zy} = \theta'\left(\partial\psi/\partial y + x\right)$$



Inoltre, le tensioni valgono :

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0 \qquad \tau_{zx} = G\,\theta'\left(\partial\psi/\partial x - y\right)$$

$$\sigma_z = 0 \qquad \tau_{zy} = G\,\theta'\left(\partial\psi/\partial y + x\right)$$

Torsione elastica

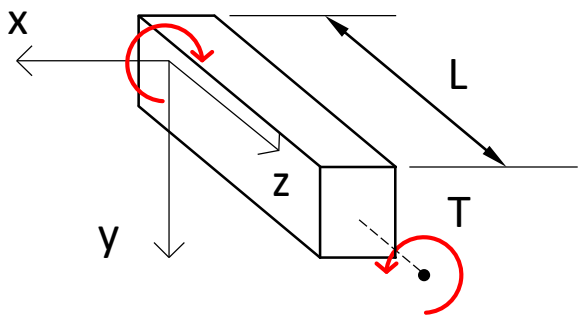
La torsione secondo De Saint Venant

Le condizioni indefinite di equilibrio si traducono nella relazione :

$$G\theta'\left(\partial^2\psi/\partial x^2 + \partial^2\psi/\partial y^2\right) = 0$$

$$\left(\partial\tau_{xz}/\partial x + \partial\tau_{yz}/\partial y + \partial\sigma_z/\partial z + Z = 0\right)$$

(sulla sezione trasversale)



Le condizioni al contorno, invece,
si traducono nella relazione :

$$G\theta'\left[\left(\partial\psi/\partial x\right)n_x + \left(\partial\psi/\partial y\right)n_y - yn_x + xn_y\right] = 0$$

$$\left(\tau_{zx}n_x + \tau_{zy}n_y + \sigma_z n_z = p_z\right)$$

(sul contorno
della superficie laterale scarica)

Torsione elastica

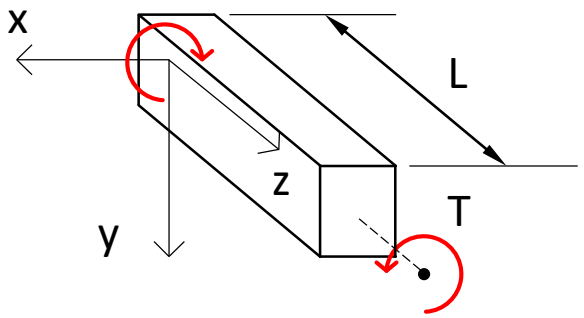
La torsione secondo De Saint Venant

Le relazioni :

$$\nabla_2 \psi = 0 \quad \text{(sulla sezione trasversale)}$$

$$\left(\partial\psi/\partial n\right) = y n_x - x n_y$$

(sul contorno della superficie laterale scarica)

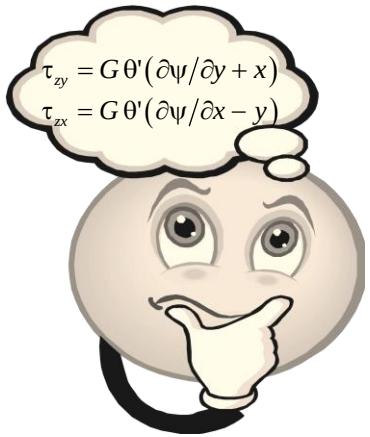


definiscono il problema di **Neumann-Dini**.

La soluzione di tale problema esiste ed è univocamente definita a meno di una costante, che ha il significato di traslazione rigida secondo l'asse z.

Torsione elastica

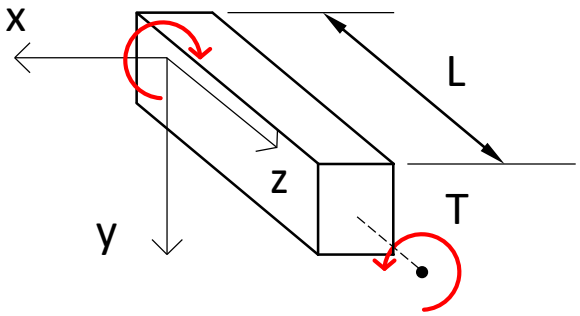
La torsione secondo De Saint Venant



Le caratteristiche di sollecitazione sulle sezioni di estremità sono :

$$N = M_x = M_y = 0$$ (essendo σ_z=0)

$$V_x = V_y = 0$$ (per equilibrio globale alla rotazione)



$$T = \int_A \left(\tau_{zy} x - \tau_{zx} y\right) dA = GJ\ \theta'$$

dove :

$$J = \int_A \left(x\frac{\partial\psi}{\partial y} - y\frac{\partial\psi}{\partial x} + x^2 + y^2 \right) dA$$

Torsione elastica

Analogia idrodinamica

Le relazioni che governano il problema della torsione presentano analogie con quelle relative ad altri fenomeni fisici.

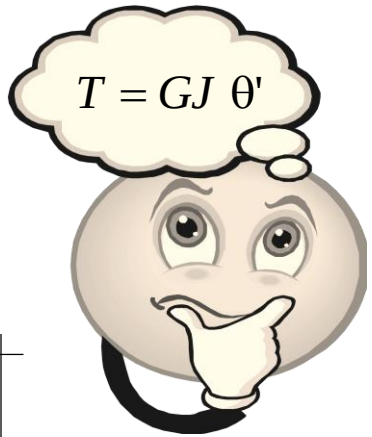
L'analogia idrodinamica considera il moto di un fluido in rotazione con vorticità uniforme in un tubo che abbia la stessa forma trasversale della sezione soggetta a torsione.

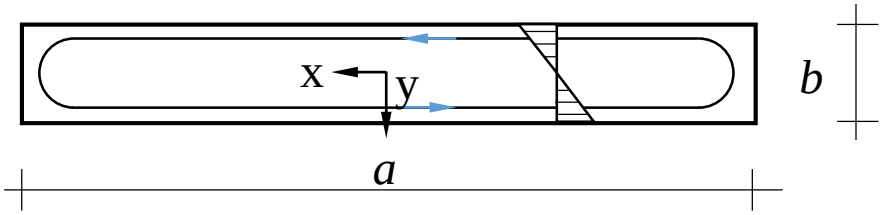
Il confronto stabilisce l'analogia tra i due fenomeni, identificando il vettore delle tensioni tangenziali con la velocità del fluido

> In particolare, l'analogia idrodinamica evidenzia la maggiore efficienza torsionale di profili chiusi in parete sottile rispetto ai profili aperti. Infatti, a parità di tensioni tangenziali massime, un profilo aperto riesce ad equilibrare un momento torcente ben più elevato di quello della sezione aperta.

Torsione elastica

Sezione rettangolare allungata





Se a>>b, l'andamento delle tensioni suggerito dall'analogia idrodinamica prevede che, con l'eccezione di due piccole zone adiacenti ai lati corti, il vettore delle tensioni tangenziali sia parallelo all'asse x. Pertanto : $\tau_{zy} = 0$

Le equazioni indefinite dell'equilibrio e di congruenza interna sono :

$$\partial\tau_{zx}/\partial x = 0 \qquad \partial\tau_{zx}/\partial y = -2G\theta'$$

Per ovvi motivi di simmetria, per y=0 dovrà essere τ_{zx}=0.

Quindi : $\tau_{zx} = -2G\theta' y = -2yT/J$

Inoltre : $J = \frac{1}{3}ab^3$ e $\tau_{zx,\max} = \frac{Tb}{J} = 3\frac{T}{ab^2}$

Torsione elastica

Sezione rettangolare generica

Per il caso della sezione rettangolare generica sono disponibili soluzioni in termini di sviluppi in serie. Ingegneristicamente, i risultati sono posti nella forma :

$$J = \alpha\, ab^3 \qquad \text{e} \qquad \tau_{zx,\max} = \beta \frac{T}{ab^2}$$

I valori di α e β sono qui riportati in funzione del rapporto tra i lati.

a/b	∞	10	5	3	2	1
α	0.333	0.312	0.291	0.263	0.229	0.141
β	3.00	3.20	3.44	3.74	4.06	4.80

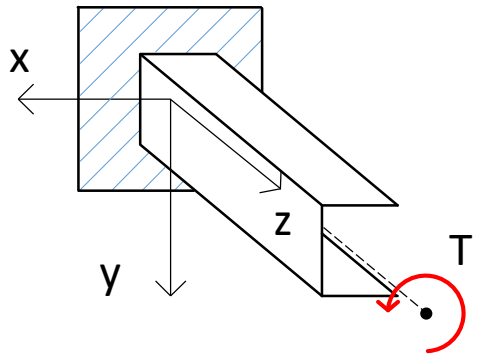
Torsione elastica

Profili aperti a parete sottile

Nota!

Per profili aperti in parete sottile la rigidità torsionale è approssimativamente ottenuta dalla relazione :

$$J = \frac{1}{3}\int_0^a b^3(s)ds$$



dove :

b lo spessore del profilo

a la lunghezza totale della linea media

Torsione elastica

Profili aperti a parete sottile

La variazione della funzione di ingobbamento nel passare da un punto A ad un punto B a distanza ds sulla linea media vale:

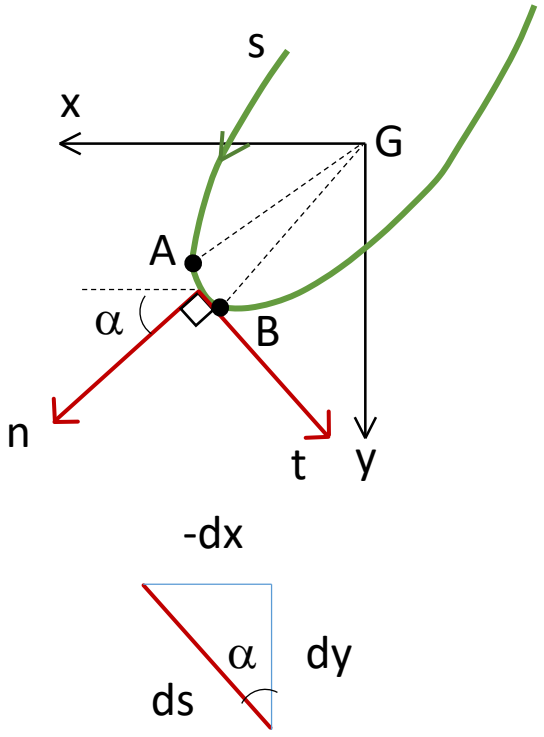
$$d\psi = \left(\partial\psi/\partial x\right)dx + \left(\partial\psi/\partial y\right)dy$$

Se α è l'angolo tra gli assi n ed x, la precedente relazione si scrive :

$$d\psi = \left[\left(-\partial\psi/\partial x\right)\sin\alpha + \left(\partial\psi/\partial y\right)\cos\alpha\right]ds$$

Inoltre, valgono le relazioni * :

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{J}{T}\tau_{zx} + y \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{J}{T}\tau_{zy} - x$$



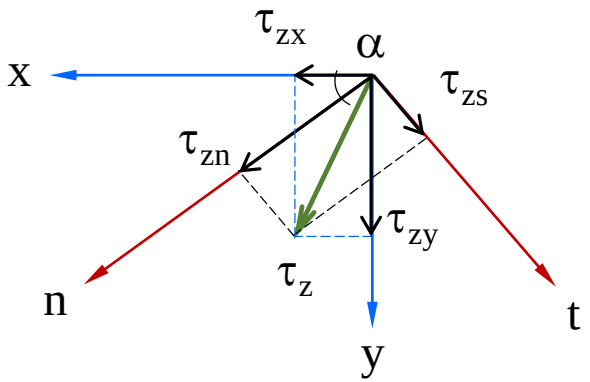
* vedi Leone Corradi Dell'Acqua. Meccanica delle strutture Volume 1

Torsione elastica

Profili aperti a parete sottile

Quindi:

$$d\psi = \left[\frac{J}{T}\left(-\tau_{zx}\sin\alpha + \tau_{zy}\cos\alpha\right) - \left(y\sin\alpha + x\cos\alpha\right)\right]ds$$



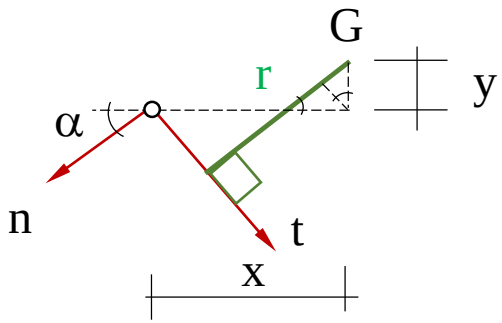
Valgono peraltro le relazioni :

$$\tau_{zs}(s) = -\tau_{zx}\sin\alpha + \tau_{zy}\cos\alpha$$

$$r(s) = y\sin\alpha + x\cos\alpha$$

Pertanto :

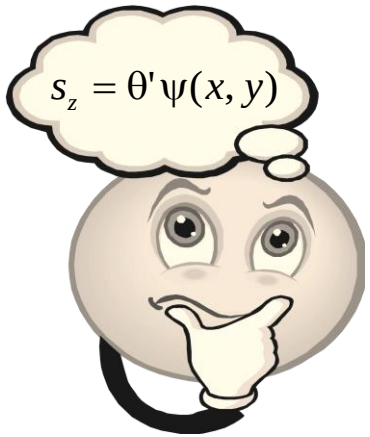
$$d\psi = \left[\frac{J}{T}\tau_{zs}(s) - r(s)\right]ds$$



Poiché si ipotizza che
le tensioni si annullino sulla linea media si ha: $d\psi = -r(s)\,ds$

Torsione elastica

Profili aperti a parete sottile



Integrando $d\psi = -r(s)\,ds$ si ha :

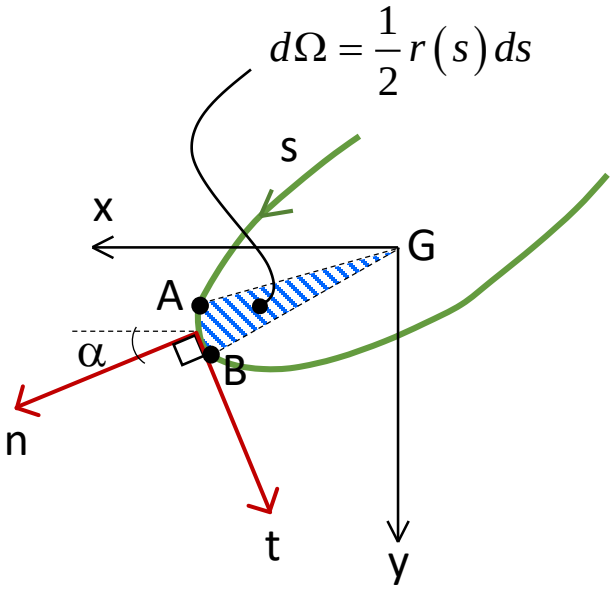
$$\psi(s) = -\int_0^s r(s')\,ds' + \psi_0 = -2\Omega(s) + \psi_0$$

La costante $\psi_0=\psi(s=0)$ può essere fissata imponendo che sia nullo lo spostamento medio della sezione nella direzione dell'asse z della membratura :

$$-\int_A 2\Omega(s)\,dA + A\psi_0 = 0$$

Pertanto : $\psi_0 = \dfrac{2}{A}\int_A \Omega\,dA = 2\bar{\Omega}$

dove : $\bar{\Omega}$ è il valore medio dell'area settoriale



Infine : $\psi(s) = 2\left[\bar{\Omega} - \Omega(s)\right]$

Torsione elastica

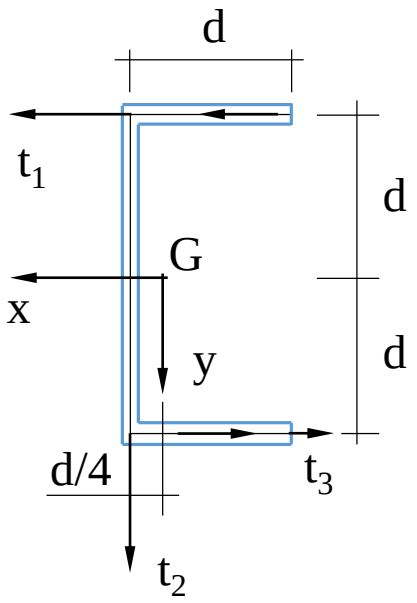
Profili aperti a parete sottile - Esempio

Le proprietà geometriche della sezione sono :

$$A = 4bd \qquad I_x = \frac{8}{3} b\, d^3$$

Inoltre :

$$J = \frac{4}{3} b^3 d \qquad \tau_{max} = \frac{T}{b\, J} = \frac{3}{4} \frac{T}{b^2 d}$$



La distanza r_G del baricentro dalla tangente alla linea media vale :

$$r_G = \begin{cases} d & 0 \le s \le d \\ d/4 & d \le s \le 3d \\ d & 3d \le s \le 4d \end{cases}$$

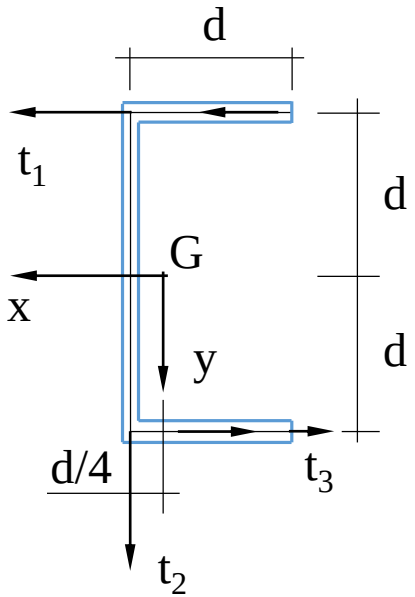
Torsione elastica

Profili aperti a parete sottile - Esempio

Si ha dunque:

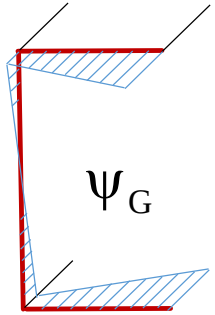
$$2\Omega_G(s) = \int_0^s r_G(s')\,ds' = \begin{cases} sd & 0 \le s \le d \\ 3/4 \cdot d^2 + 1/4 \cdot sd & d \le s \le 3d \\ -3/2 \cdot d^2 + sd & 3d \le s \le 4d \end{cases}$$

$$2\bar{\Omega}_G = \frac{1}{4bd}\int_0^{4d} 2\Omega_G(s')\,b\,ds' = \frac{5}{4}d^2$$



La funzione d'ingobbamento vale :

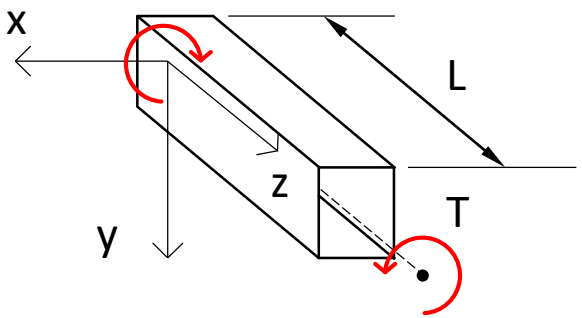
$$\psi_G(s) = 2\left[\bar{\Omega}_G - \Omega_G(s)\right] = \begin{cases} 5/4 \cdot d^2 - sd & 0 \le s \le d \\ 1/2 \cdot d^2 - 1/4 \cdot sd & d \le s \le 3d \\ 11/4 \cdot d^2 - sd & 3d \le s \le 4d \end{cases}$$



Torsione elastica

Profili chiusi a parete sottile

L'analogia idrodinamica suggerisce la presenza di un flusso di tensioni tangenziali ovunque diretto secondo la linea media.



Si può allora assumere :

$$\tau_{zs} = \tau_{zs}(s,n) \qquad \tau_{zn} = 0$$

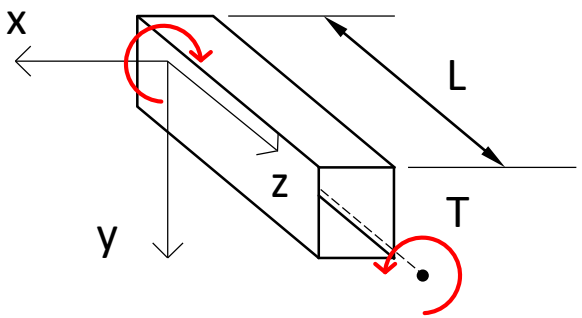
Il flusso delle tensioni tangenziali è costante :

$$q = \int_{-b/2}^{b/2} \tau_{zs}\, \mathrm{d}n = \mathrm{cost}$$

Torsione elastica

Profili chiusi a parete sottile

Il legame tra il momento torcente ed il flusso delle tensioni tangenziali si ottiene per equilibrio e risulta:



$$T = \int_0^a q\, r(s)\, \mathrm{d}s = 2\,\mathrm{q}\,\Omega$$

dove:
- s è l'ascissa curvilinea che percorre la linea media a partire da un'origine arbitraria;
- a è la lunghezza totale della linea media;
- Ω è l'area racchiusa dalla linea media, ovvero: $\Omega = \frac{1}{2}\int_0^a r(s)\,\mathrm{d}s$

Se lo spessore è sottile, è lecito assumere che le τ_{zs} siano uniformemente distribuite sullo spessore. Quindi:

$$\tau_{zs} = \frac{q}{b(s)} = \frac{T}{2\,\Omega\, b(s)}$$ (formula di Bredt)

Torsione elastica

Profili chiusi a parete sottile

Il parametro J può essere valutato imponendo l'uguaglianza dei lavori interni ed esterni :

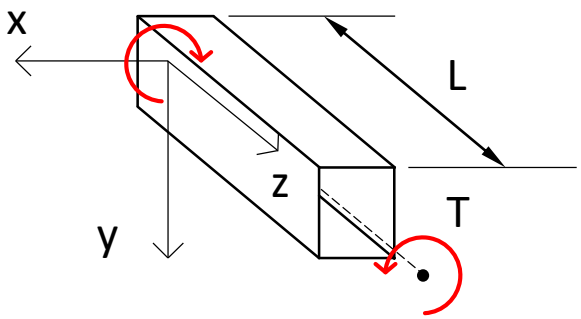
$$\frac{1}{2}\frac{T^2}{GJ} = \frac{1}{2G}\int_A \tau^2 \, \mathrm{d}A \qquad \Rightarrow \qquad J = \frac{1}{\int_A \tau_*^2 \, \mathrm{d}A}$$

dove: τ_* è il modulo del vettore tensione tangenziale prodotto da un momento torcente unitario;

A è l'area della sezione trasversale;

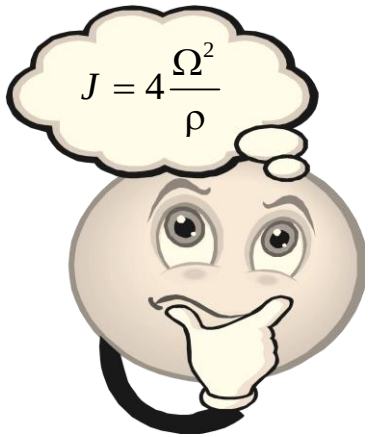
Pertanto, posto $\mathrm{d}A = b\,\mathrm{d}s$ si ha :

$$J = \left(\int_0^a \frac{b\,ds}{4\Omega^2 b^2} \right)^{-1} = 4\frac{\Omega^2}{\rho} \qquad \text{dove} \quad \rho = \int_0^a \frac{ds}{b(s)}$$



Torsione elastica

Profili chiusi a parete sottile

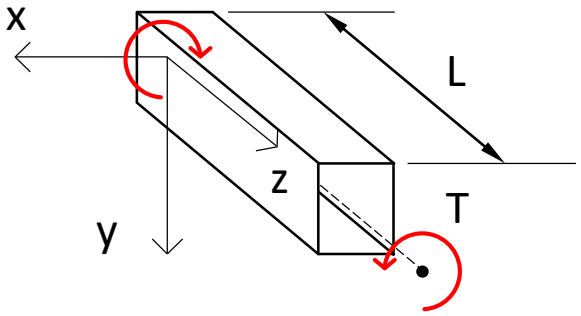


La funzione di ingobbamento può essere valutata ricordando quanto fatto per le sezioni aperte:

$$d\psi = \left[\frac{J}{T}\tau_{zs}(s) - r(s)\right]ds = \left[\frac{2\Omega}{\rho b(s)} - r(s)\right]ds$$

Per integrazione si ha :

$$\psi(s) = \int_0^s \left[\frac{2\Omega}{\rho b(s)} - r(s')\right]ds' + \psi_0$$



Al solito, la costante $\psi_0=\psi(s=0)$ può essere fissata imponendo che sia nullo lo spostamento medio della sezione della direzione dell'asse z della membratura.

Torsione elastica

Profili chiusi a parete sottile - Esempio

Le proprietà geometriche della sezione sono :

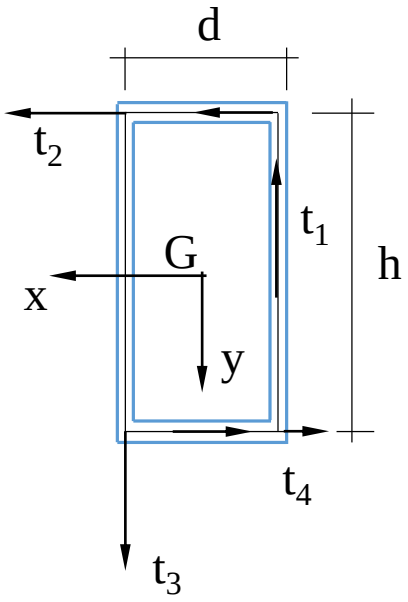
$$\Omega = h\,d \qquad a = 2(h+d)$$

$$\rho = \int_0^a \frac{ds}{b} = 2(h+d)/b$$

Inoltre :

$$J = \frac{4\Omega^2}{\rho} = 2\frac{d^2h^2b}{d+h}$$

$$\tau_{zs} = \frac{T}{2\Omega b} = \frac{1}{2}\frac{T}{b\,h\,d}$$



La distanza r_G del baricentro dalla tangente alla linea media vale :

$$r_G = \begin{cases} d/2 & i = 1,3 \\ h/2 & i = 2,4 \end{cases}$$

Torsione elastica

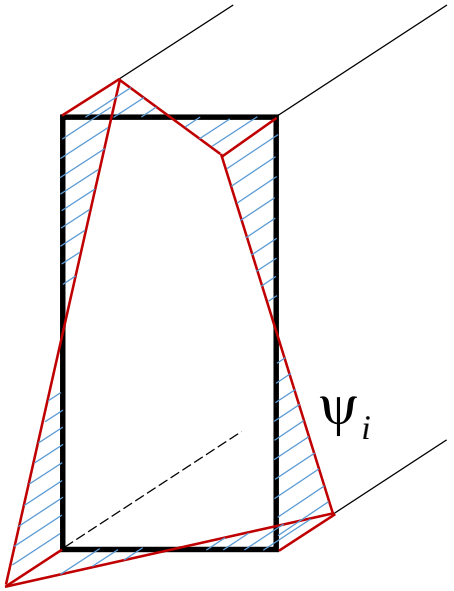
Profili chiusi a parete sottile - Esempio

La funzione d'ingobbamento si calcola mediante la relazione :

$$\psi(s) = \int_0^s \left(\frac{2\Omega}{\rho b} - r \right) ds' + \psi_0 = \int_0^s \left(\frac{dh}{d+h} - r \right) ds' + \psi_0$$

$$\psi_i = \begin{cases} \dfrac{d}{2}\dfrac{h-d}{h+d}\xi_i & i = 1, 3 \\ -\dfrac{h}{2}\dfrac{h-d}{h+d}\xi_i & i = 2, 4 \end{cases}$$

dove ξ indica la coordinata locale con origine nel punto medio di ogni tratto

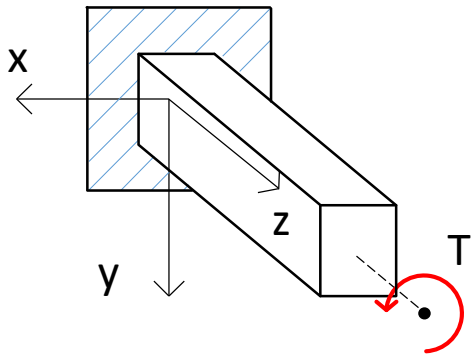


TORSIONE ELASTICA SECONDARIA

Torsione elastica

Teoria di Timoshenko - Vlasov

È evidente come un incastro impedisca ai punti di spostarsi longitudinalmente. Lo spostamento s_z risulterà in realtà funzione di z in una zona più o meno estesa a partire dal vincolo (principio di equivalenza elastica).



Un modo di incorporare questo aspetto è quello di assumere un angolo di torsione unitario θ' funzione di z.

Nota!

Le sezioni non si ingobbano tutte in egual misura, la torsione è non uniforme

tratto da: Leone Corradi Dell'Acqua. Meccanica delle strutture, vol.2. McGraw-Hill

Torsione elastica

Teoria di Timoshenko - Vlasov

L'espressione degli spostamenti diviene:

$$s_x = -\theta(z)\left[y(s) - y_c\right] \qquad s_y = \theta(z)\left[x(s) - x_c\right]$$

$$s_z = \theta'(z)\,\psi(s)$$

Stepan Timošenko 1878-1972

dove :

x_c y_c coordinate del centro di taglio nel riferimento principale della sezione

L'espressione di $s_z = \theta'(z)\,\psi(s)$ dipende da z, quindi ….

le fibre subiscono deformazioni dirette in senso longitudinale :

$$\varepsilon_z = \frac{\partial s_z}{\partial z} = \psi(s)\,\theta''(z)$$

Torsione elastica

Teoria di Timoshenko - Vlasov

La presenza di deformazioni longitudinali comporta la presenza di tensioni normali σ_z :

$$\sigma(z) = E\,\varepsilon_z = E\ \psi(s)\ \theta''(z)$$

Torsione elastica

La funzione di ingobbamento

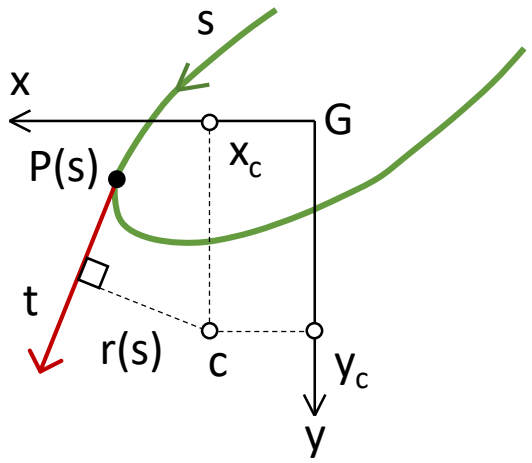
La funzione di ingobbamento vale:

$$\psi(s) = 2\left[\overline{\Omega} - \Omega(s)\right]$$

dove :

$$\Omega(s) = \frac{1}{2}\int_0^s r(s')ds' \qquad \overline{\Omega} = \frac{1}{A}\int_A \Omega dA$$

r(s) distanza dal centro di taglio della tangente alla linea media nel generico punto P(s).
Tale distanza si considera positiva se t provoca rotazione positiva intorno al centro di taglio.



Torsione elastica

La funzione di ingobbamento

La funzione di ingobbamento gode delle seguenti proprietà

$$\int_A \psi dA = 0$$

Non ci può essere sforzo normale

$$\int_A x\psi dA = 0$$

Non ci può essere momento flettente intorno all'asse y

$$\int_A y\psi dA = 0$$

Non ci può essere momento flettente intorno all'asse x

Torsione elastica

La funzione di ingobbamento

Le σ_z devono quindi costituire uno stato di autotensione, corrispondente ad azione assiale e momenti flettenti nulli.

Avendo assunto il centro di rotazione come centro di taglio, questa proprietà risulta verificata :

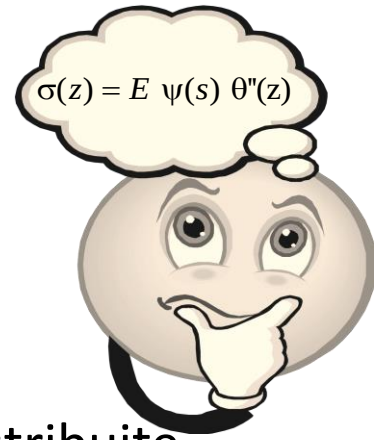
$$N = \int_A \sigma_z dA = E\theta'' \int_A \psi dA = 0$$

$$M_x = \int_A y\sigma_z dA = E\theta'' \int_A y\psi dA = 0$$

$$M_y = -\int_A x\sigma_z dA = -E\theta'' \int_A x\psi dA = 0$$

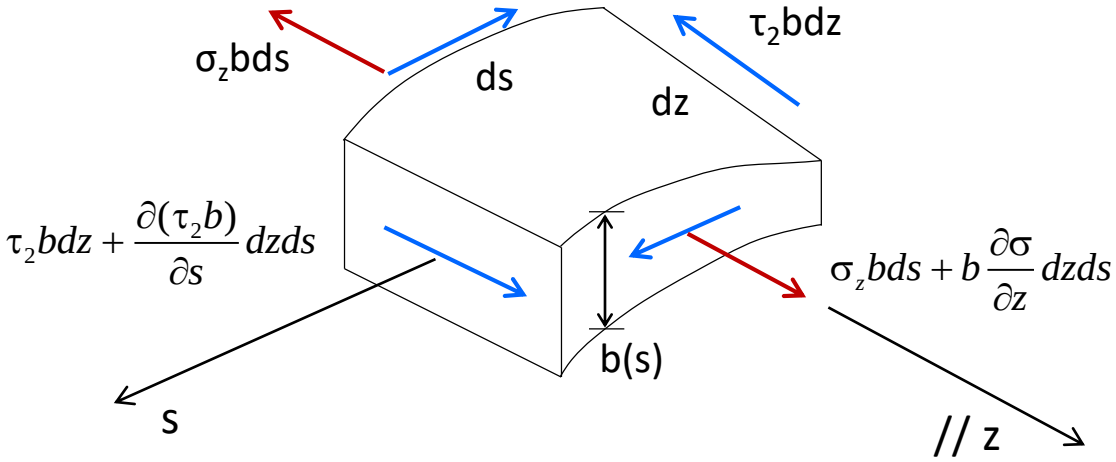
Torsione elastica

Teoria di Timoshenko - Vlasov



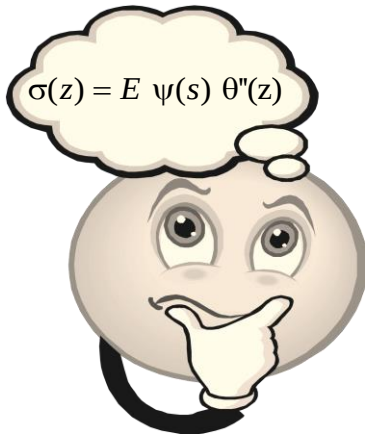
Si consideri un elemento infinitesimo di trave.
Data la piccolezza dello spessore, le σ_z sono assunte distribuite uniformemente su di esso.

Poiché esse variano lungo z, per l'equilibrio nascono delle tensioni tangenziali τ_2, dette secondarie, uniformi sullo spessore.



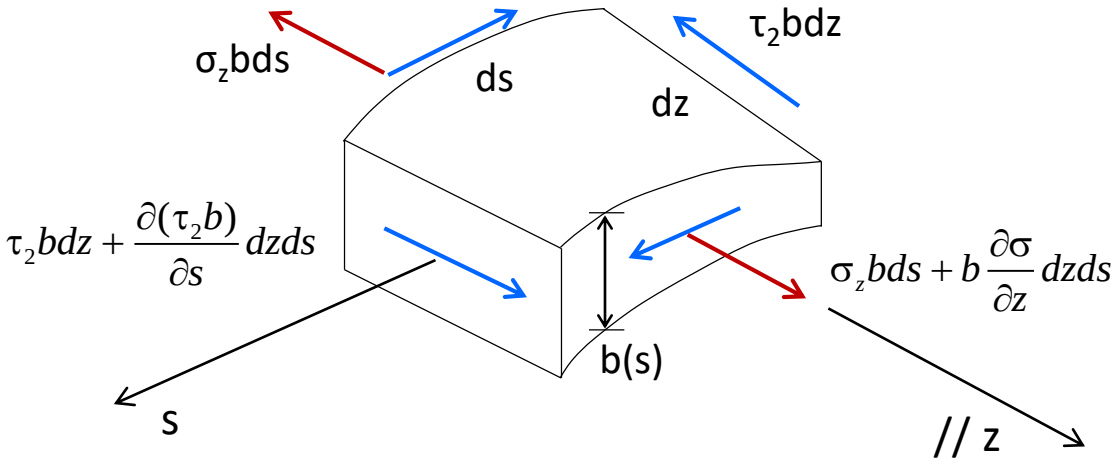
Torsione elastica

Teoria di Timoshenko - Vlasov



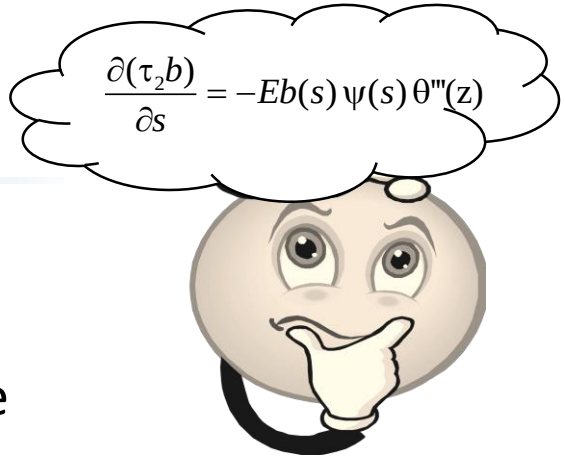
L'equilibrio alla traslazione lungo l'asse *z* impone :

$$\frac{\partial(\tau_2 b)}{\partial s} = -b\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -Eb(s)\,\psi(s)\,\theta'''(z)$$



Torsione elastica

Teoria di Timoshenko - Vlasov



Il flusso $q=\tau_2 b$ delle tensioni tangenziali secondarie attraverso lo spessore può essere calcolato integrando la precedente relazione.

Se la superficie laterale è scarica, agli estremi liberi della sezione per l'equilibrio deve essere $\tau_2=0$.

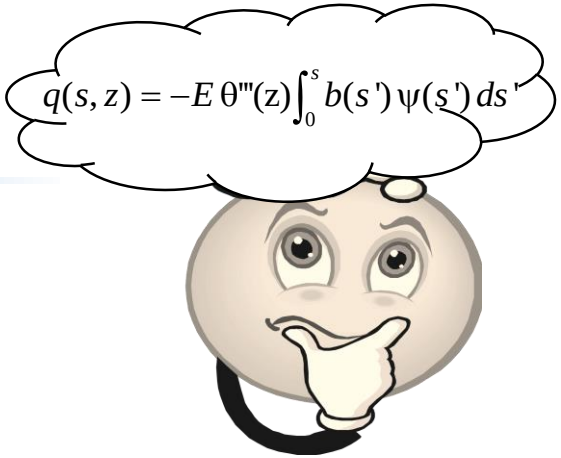
La costante di integrazione è quindi nulla e si ottiene :

$$q(s,z) = \tau_2\, b = -E\,\theta'''(z)\int_0^s b(s')\,\psi(s')\,ds'$$

A tale flusso non corrispondono azioni taglianti.

Torsione elastica

Teoria di Timoshenko - Vlasov



Tale flusso dà luogo ad un momento torcente T_2

$$T_2 = \int_0^a q\,r\,ds = -E\,\theta'''(z)\int_0^a \left[\int_0^s b(s')\,\psi(s')\,ds'\right] r(s)\,ds$$

dove :

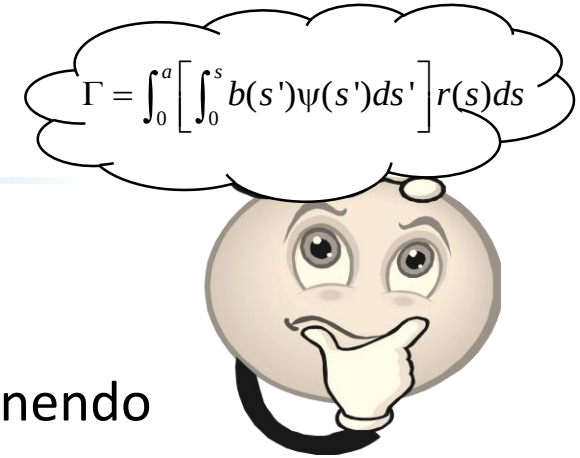
$$\Gamma = \int_0^a \left[\int_0^s b(s')\psi(s')ds'\right] r(s)ds$$

è una proprietà geometrica della sezione,
detta **rigidità di ingobbamento** (*warping rigidity*).

Quindi $T_2 = -E\,\Gamma\,\theta'''(z)$ = **momento torcente secondario**

Torsione elastica

Teoria di Timoshenko - Vlasov



Si può ricondurre Γ ad una forma più semplice ponendo

$$\Lambda(s) = \int_0^s \psi(s')b(s')ds'$$ e sostituendo *rds* = -*d*ψ : (vedi diapositiva 14)

Integrando per parti ($\int_0^a u\,dv = uv\big|_0^a - \int_0^a v\,du$)
l'espressione della rigidità d'ingobbamento, si ottiene:

$$\Gamma = -\int_0^a \Lambda(s)d\psi = -\Lambda(a)\psi(a) + \Lambda(0)\psi(0) + \int_0^a \psi(s)d\Lambda$$

dove Λ(0)=0 e Λ(a)=0 perché $\Lambda(a) = \int_0^a \psi\, b\, ds = \int_A \psi\, dA = 0$

Poiché *d*Λ=ψ*bds*= ψ*dA,* la rigidità d'ingobbamento diviene :

$$\Gamma = \int_A \psi^2 dA$$

Torsione elastica

Teoria di Timoshenko - Vlasov

Il momento torcente secondario T_2
rappresenta il contributo degli effetti del vincolo.

Sommato al momento primario T_1 , corrispondente alle tensioni tangenziali date dalla soluzione di De Saint Venant, equilibra in ogni sezione la coppia applicata all'estremo della mensola :

$$T = T_1 + T_2 = GJ\,\theta'(z) - E\,\Gamma\,\theta'''(z)$$

Nota!

I due contributi hanno importanza relativa diversa nelle diverse sezioni.
L'effetto del vincolo diminuisce con la distanza dal vincolo stesso.

Torsione elastica

Teoria di Timoshenko - Vlasov

E' possibile estendere i risultati anche ad una trave soggetta a momento torcente distribuito m_t per unità di lunghezza.

Per l'equilibrio alla rotazione di un elemento infinitesimo di trave si ha :

$$dT/dz = -m_t$$

Derivando l'equazione fondamentale della torsione $T(z) = G\,J\,\theta'(z) - E\,\Gamma\theta'''(z)$, si ottiene :

$$m_t = E\,\Gamma\,\theta''''(z) - G\,J\,\theta''(z)$$

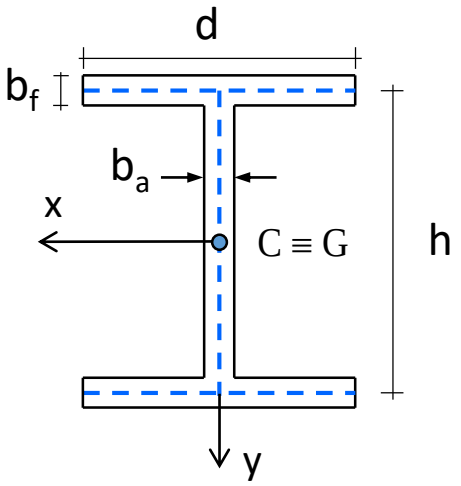
Questa equazione differenziale, lineare a coefficienti constanti, governa il comportamento torsionale dei profili aperti. Il suo integrale generale dipende da quattro costanti di integrazione, determinate dalle condizioni al contorno.

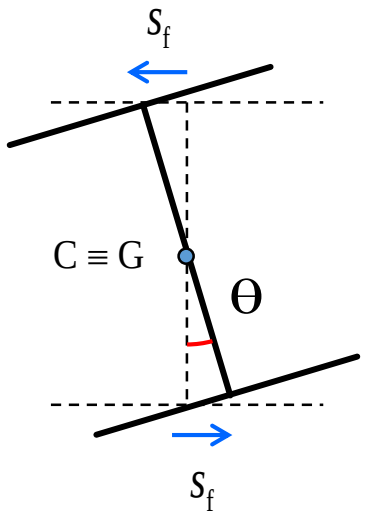
Torsione elastica

Sezione a I

In una sezione a I
il centro di taglio coincide con il baricentro della sezione.

Se la sezioni ruota di un angolo θ intorno a questo punto,
le flange subiscono uno spostamento orizzontale s_f :





$$s_f(z) = \frac{h}{2}\theta(z)$$

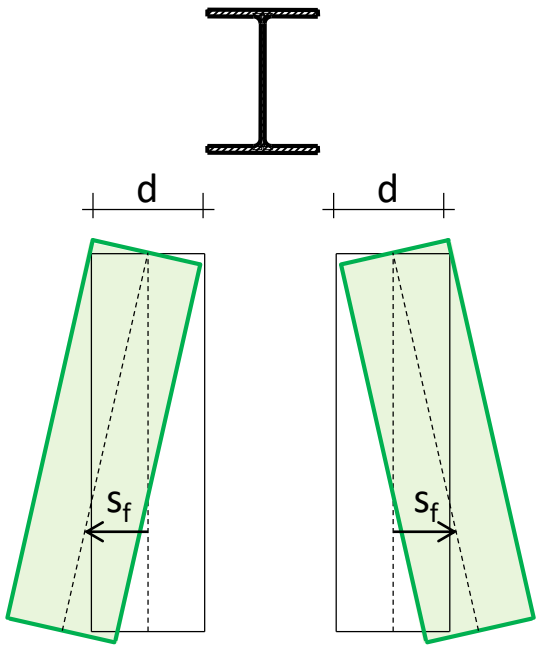
essendo,
più in generale :

$$s_x(z) = y\,\theta(z)$$

Torsione elastica

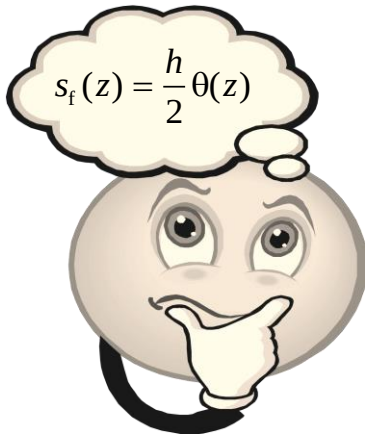
Sezione a I

Se le sezioni fossero libere di ingobbarsi,
si avrebbe una rotazione rigida delle flange nel proprio piano.



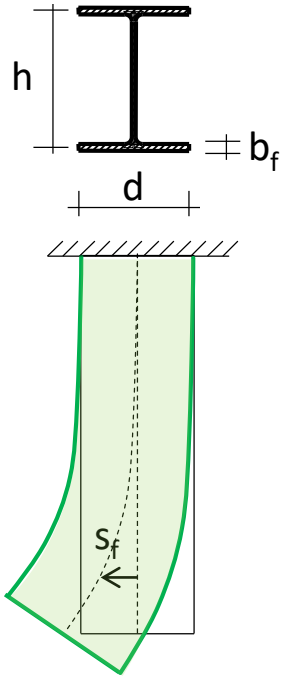
Torsione elastica

Sezione a I



Per la presenza dell'incastro,
la flangia si inflette e tale inflessione è contrastata
dalla rigidezza legata al momento d'inerzia della flangia I_f :

$$I_f = \frac{1}{12} b_f d^3$$



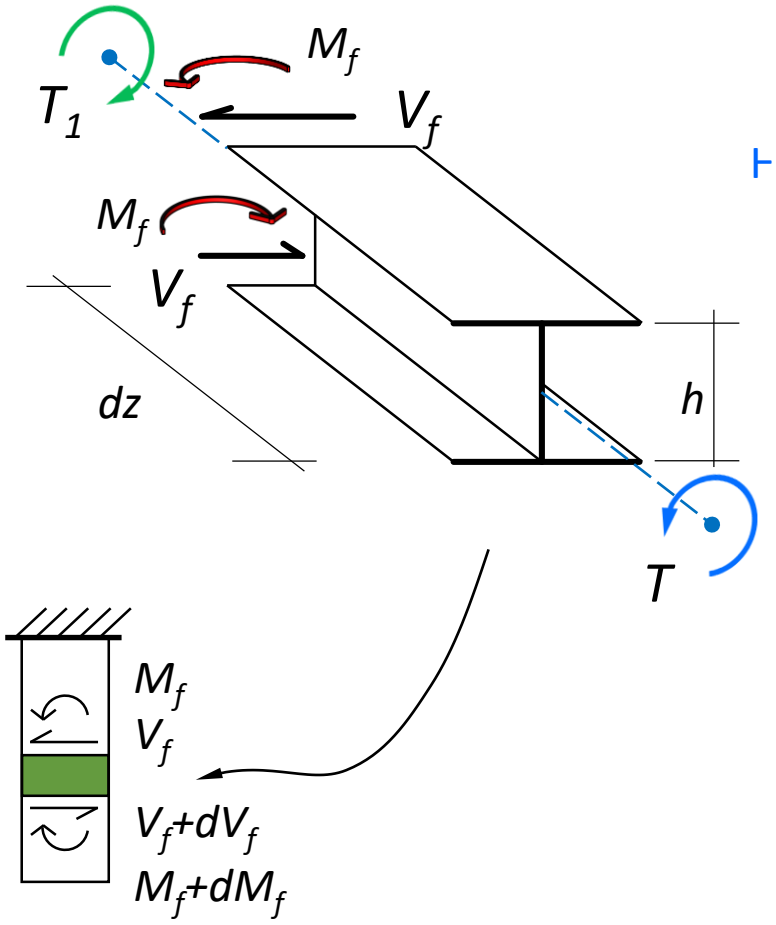
Nella flangia saranno presenti
momenti flettenti

$$M_f(z) = EI_f \frac{d^2 s_f}{dz^2} = E \frac{b_f d^3 h}{24} \theta''$$

e sforzi di taglio $$V_f(z) = E \frac{b_f d^3 h}{24} \theta'''$$

Torsione elastica

Sezione a I



Sulla sezione sono presenti :

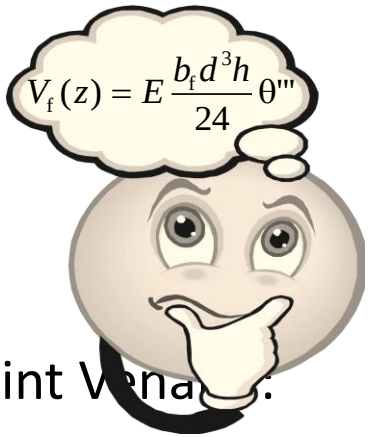
- tensioni tangenziali conseguenti a T_1
- tensioni normali da momenti di flangia M_f
- tensioni tangenziali da tagli di flangia V_f

e …

$$T = T_1 - V_f\, h$$

Torsione elastica

Sezione a I



Il primo addendo è il momento torcente secondo De Saint Venant:

$$T_1 = G\,J\,\theta'(z)$$

dove :

$J = \frac{1}{3}\left(h\,b_a^3 + 2d\,b_f^3\right)$ è la rigidità torsionale primaria per la sezione ad I

… il secondo addendo è il momento torcente secondario :

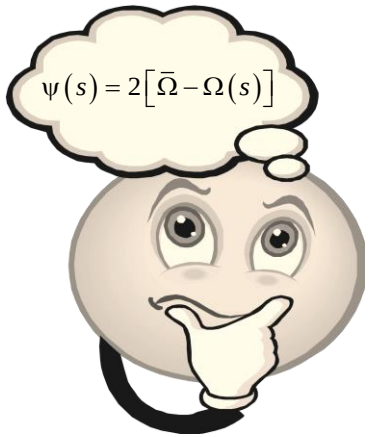
$$T_2(z) = -V_f(z)h = -E\,\Gamma\,\theta'''(z)$$

dove :

$\Gamma = \frac{b_f d^3 h^2}{24}$ è la rigidità di ingobbamento per la sezione ad I

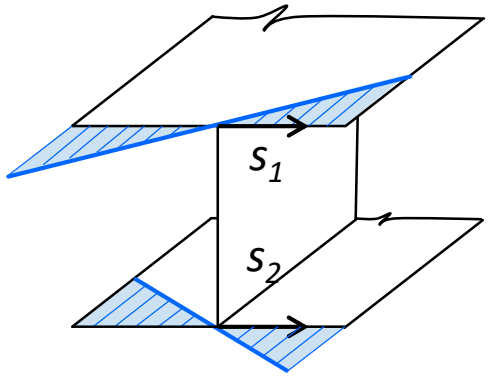
Torsione elastica

Sezione a I



La funzione d'ingobbamento vale :

$$\psi(s) = \begin{cases} -(h/2)\, s_1 & \text{flangia superiore} \\ 0 & \text{anima} \\ (h/2)\, s_2 & \text{flangia inferiore} \end{cases}$$



Torsione elastica

Sezione a I

Si definisce *bimomento* la quantità :

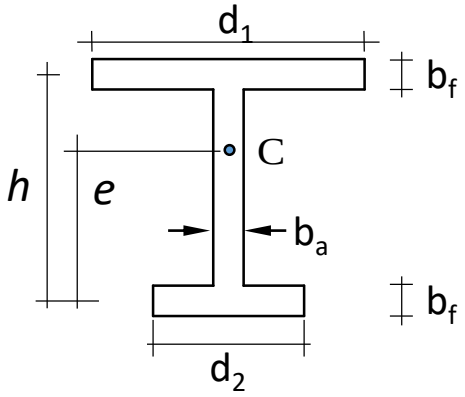
$$B = E\,\Gamma\,\theta''$$

Nella sezione a I,
il bimomento è pari al prodotto dei momenti di flangia per la distanza tra le flange stesse, ovvero :

$$B = M_{\mathrm{f}}\,h$$

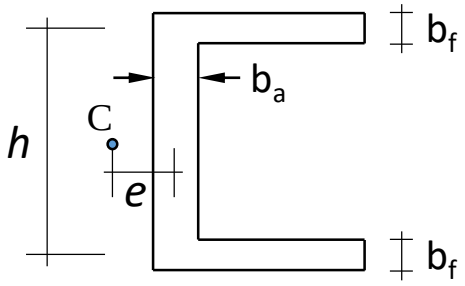
Torsione elastica

Altri profili



$$e = h\frac{d_1^3}{d_1^3 + d_2^3}$$

$$J = \frac{1}{3}\left[hb_a^3 + (d_1 + d_2)b_f^3\right] \qquad \Gamma = \frac{b_f h^2}{12}\frac{d_1^3 d_2^3}{d_1^3 + d_2^3}$$

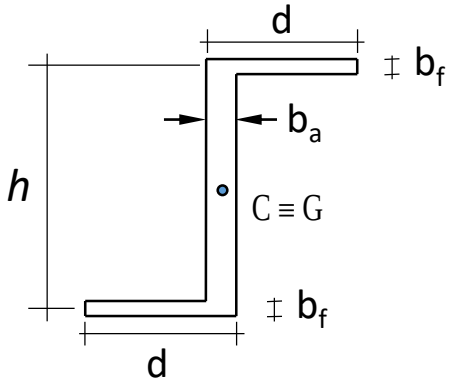


$$e = \frac{3b_f d^3}{6b_f d + hb_a}$$

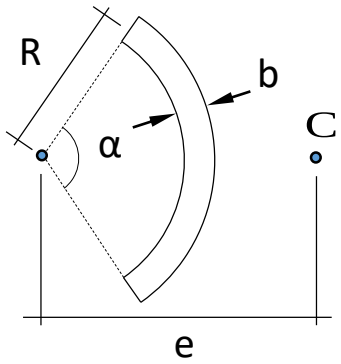
$$J = \frac{1}{3}\left(hb_a^3 + 2db_f^3\right) \qquad \Gamma = \frac{b_f d^3 h^2}{12}\frac{3db_f + 2hb_a}{6db_f + hb_a}$$

Torsione elastica

Altri profili



$$J = \frac{1}{3}\left(hb_a^3 + 2db_f^3\right) \qquad \Gamma = \frac{b_f h^2}{12}\frac{d_1^3 d_2^3}{d_1^3 + d_2^3}$$



$$e = 2R\frac{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}$$

$$J = \frac{2}{3}\alpha R b^3 \qquad \Gamma = \frac{2}{3}bR^5\left[\alpha^3 - \frac{6\left(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha\right)^2}{\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}\right]$$

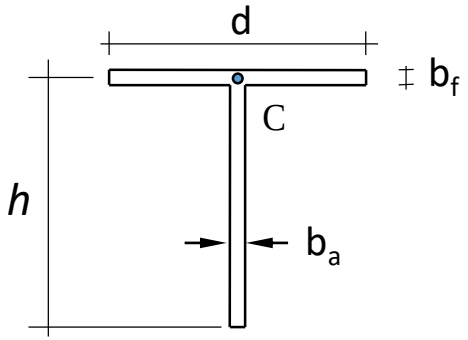
Torsione elastica

Altri profili

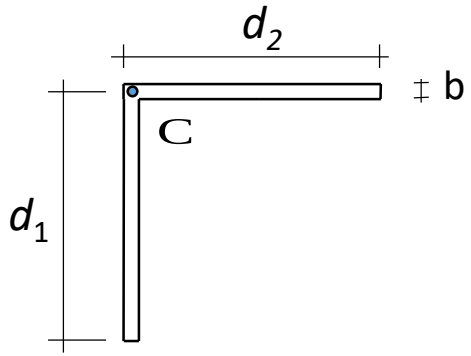
Per profili costituiti da rettangoli allungati convergenti in un solo punto la rigidità d'ingobbamento Γ risulta nulla.

Il centro di taglio si colloca nel punto di incontro dei rettangoli e ciò comporta un valore nullo per la distanza *r(s)* da C alla tangente alla linea media.

Se si considerano le variazioni di ingobbamento sullo spessore si ottengono dei valori della rigidità di ingobbamento che possono ritenersi trascurabili.



$$J = \frac{1}{3}\left(hb_a^3 + db_f^3\right) \qquad \Gamma = \frac{1}{144}b_f^3 d^3 + \frac{1}{36}b_a^3 h^3$$



$$J = \frac{1}{3}b^3\left(d_1 + d_2\right) \qquad \Gamma = \frac{1}{36}b^3\left(d_1^3 + d_2^3\right)$$

Principali riferimenti

- Leone Corradi Dell'Acqua. Meccanica delle strutture Volume 1 - Il comportamento dei corpi continui, Mc Graw Hill. ISBN: 978 88386 67145
- Leone Corradi Dell'Acqua. Meccanica delle strutture - Volume 2 - Le teorie strutturali e il metodo degli elementi finiti, Mc Graw Hill. ISBN: 978 88386 67152
- Aldo Raithel. Ponti a travata. Liguori editore. 1978. ISBN 88-207-0563-X

FINE