Lezione

Tecnica delle Costruzioni

La flessione composta

Verifica di sezioni soggette a flessione composta

Flessione composta

1° stadio (Formule di Scienza delle Costruzioni)

Con riferimento alla sezione omogeneizzata vale la formula di Scienza delle Costruzioni

$$\sigma = E\left(\varepsilon_G + \chi_x\, x + \chi_y\, y\right)$$

Pertanto:

$$N = E\,\varepsilon_G \int dA + E\,\chi_x \int x dA + E\,\chi_y \int y dA = \qquad E\,\varepsilon_G A \qquad \neq 0$$

$$M_x = E\,\varepsilon_G \int y dA + E\,\chi_x \int xy dA + E\,\chi_y \int y^2 dA = \qquad E\,\chi_y I_x \qquad \neq 0$$

$$M_y = E\,\varepsilon_G \int x dA + E\,\chi_x \int x^2 dA + E\,\chi_y \int xy dA = \; - \; E\,\chi_x I_y \qquad \neq 0$$

essendo $\int x dA = \int y dA = 0$ e $\int x\, y\, dA = 0$

Flessione composta

1° stadio (Formule di Scienza delle Costruzioni)

Con riferimento alla sezione omogeneizzata vale la formula di Scienza delle Costruzioni

$$\sigma = E\left(\varepsilon_G + \chi_x\, x + \chi_y\, y\right)$$

Curvatura nel piano x-z

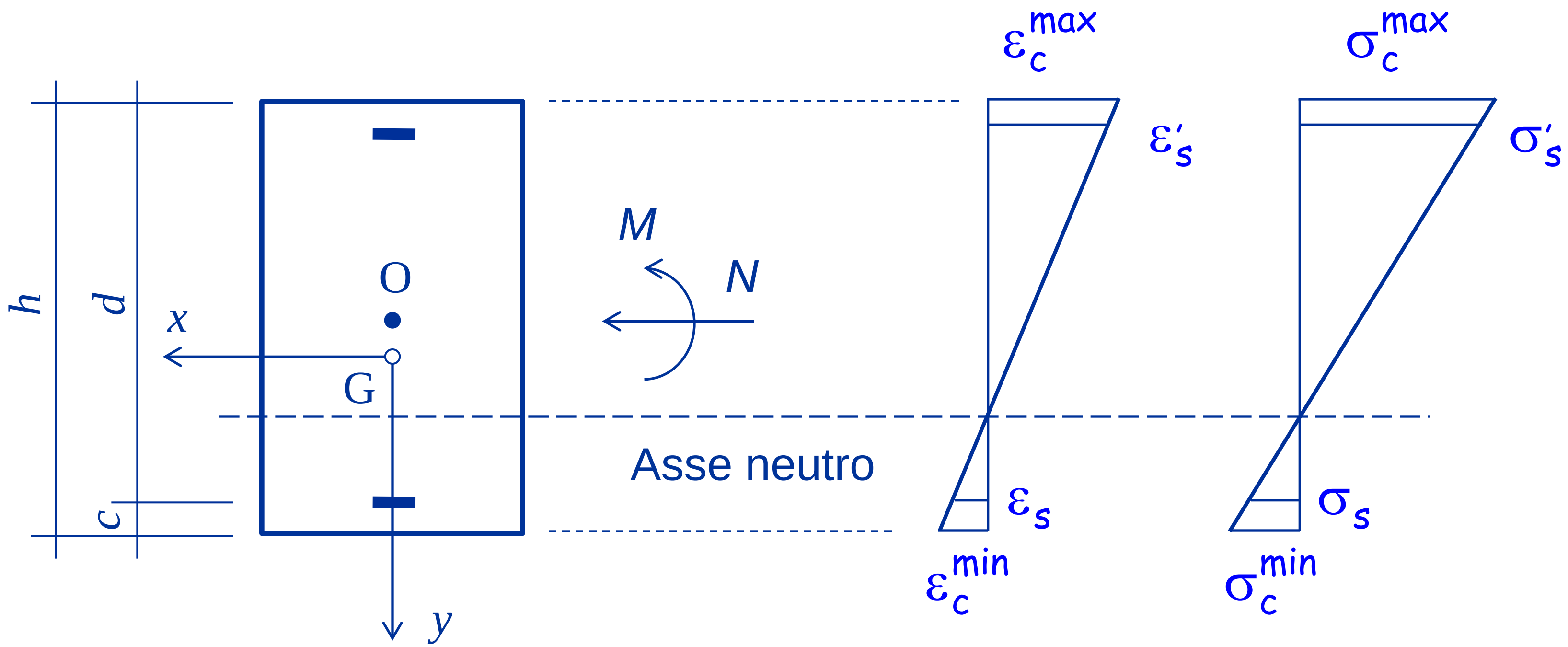
Curvatura nel piano y-z

ovvero

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_y}{I_y}x + \frac{M_x}{I_x}y$$

Flessione composta

1° stadio (Calcolo delle tensioni)



Nota 1: l'asse neutro non passa per il baricentro G della sezione omogen.

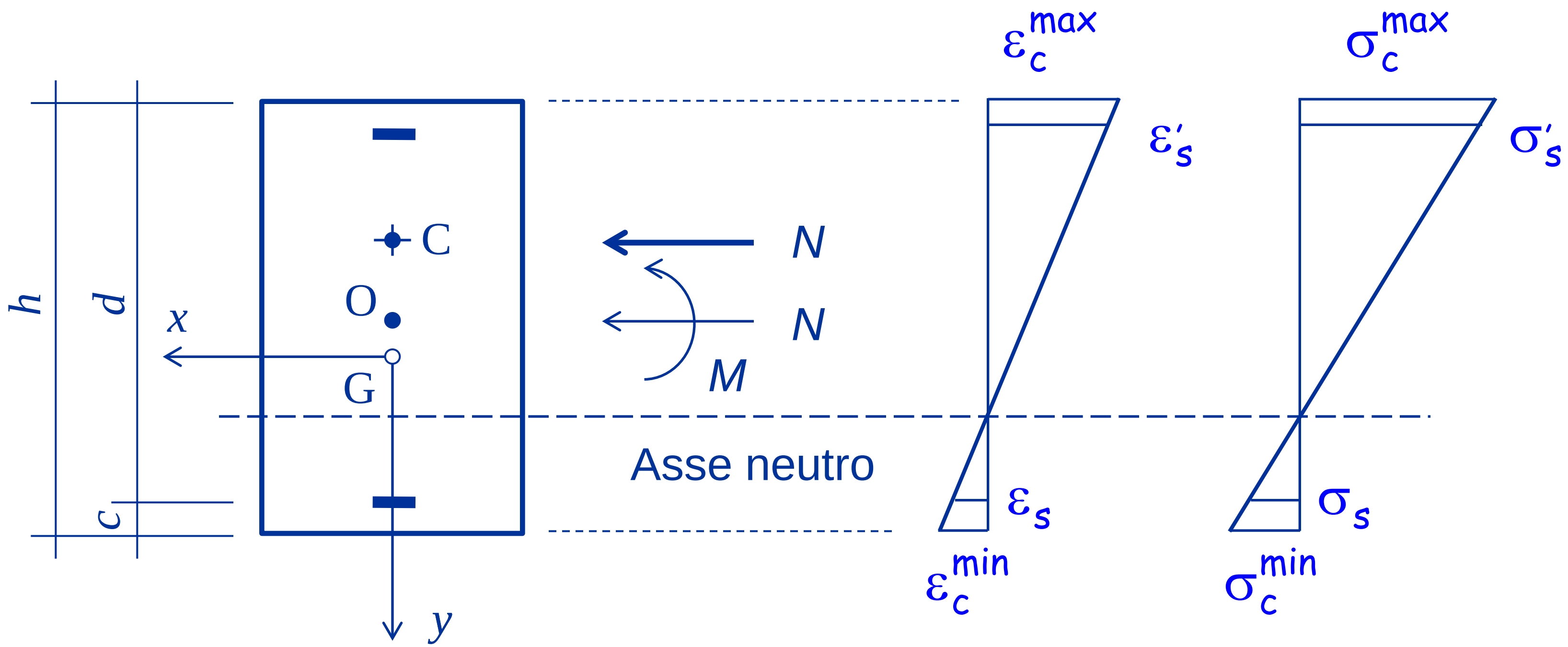
Nota 2: lo sforzo normale si intende applicato nel baricentro O della sezione in calcestruzzo

$$\sigma_c = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y$$

$$\sigma_s = n\left(\frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y\right)$$

Flessione composta

1° stadio (Calcolo delle tensioni)



Le azioni di sforzo normale e momento flett. equivalgono ad uno sforzo normale con eccentricità

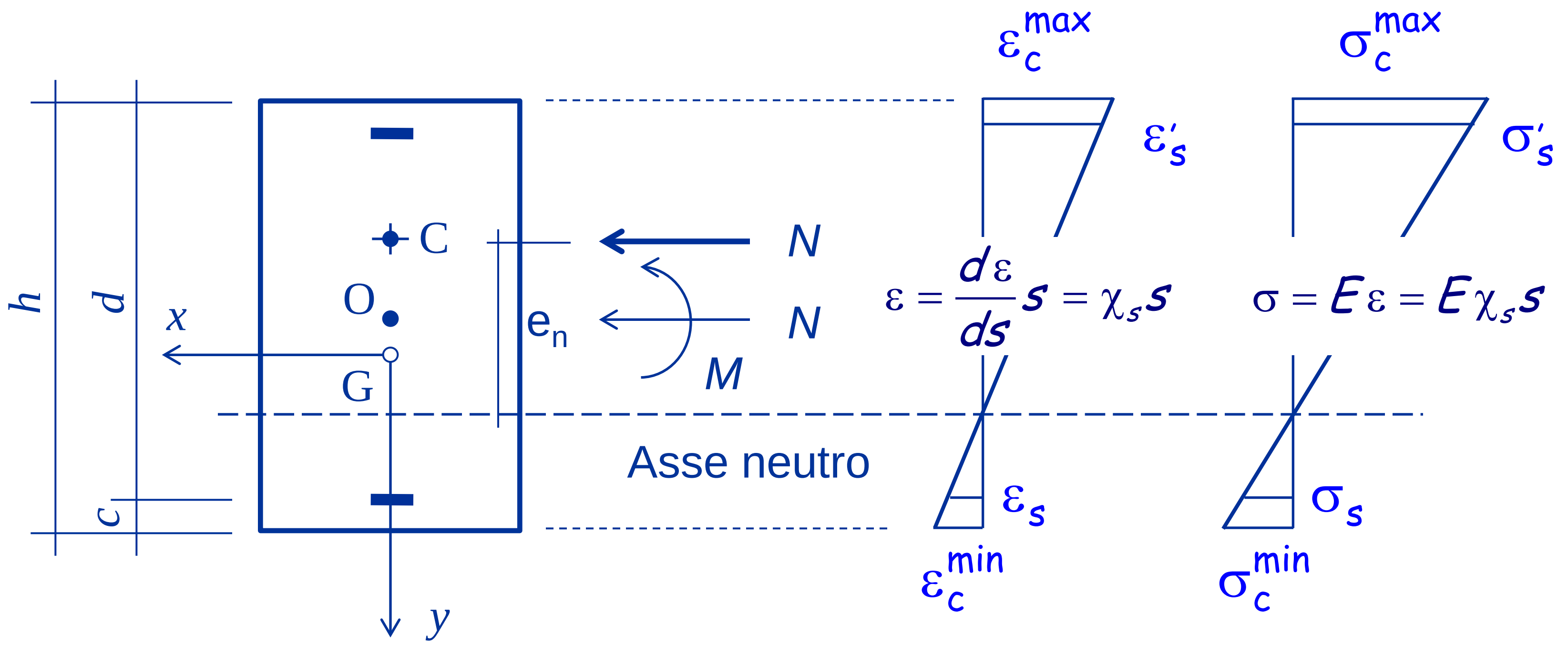
$$e_x = \frac{M_x}{N} \qquad e_y = -\frac{M_y}{N}$$

Il punto di applicazione dello sforzo normale eccentrico è detto

CENTRO DI SOLLECITAZIONE

Flessione composta

1° stadio (Calcolo delle tensioni)



$$N = \int \sigma \, dA = E\,\chi_s \int s \, dA = \qquad E\,\chi_s S_n$$

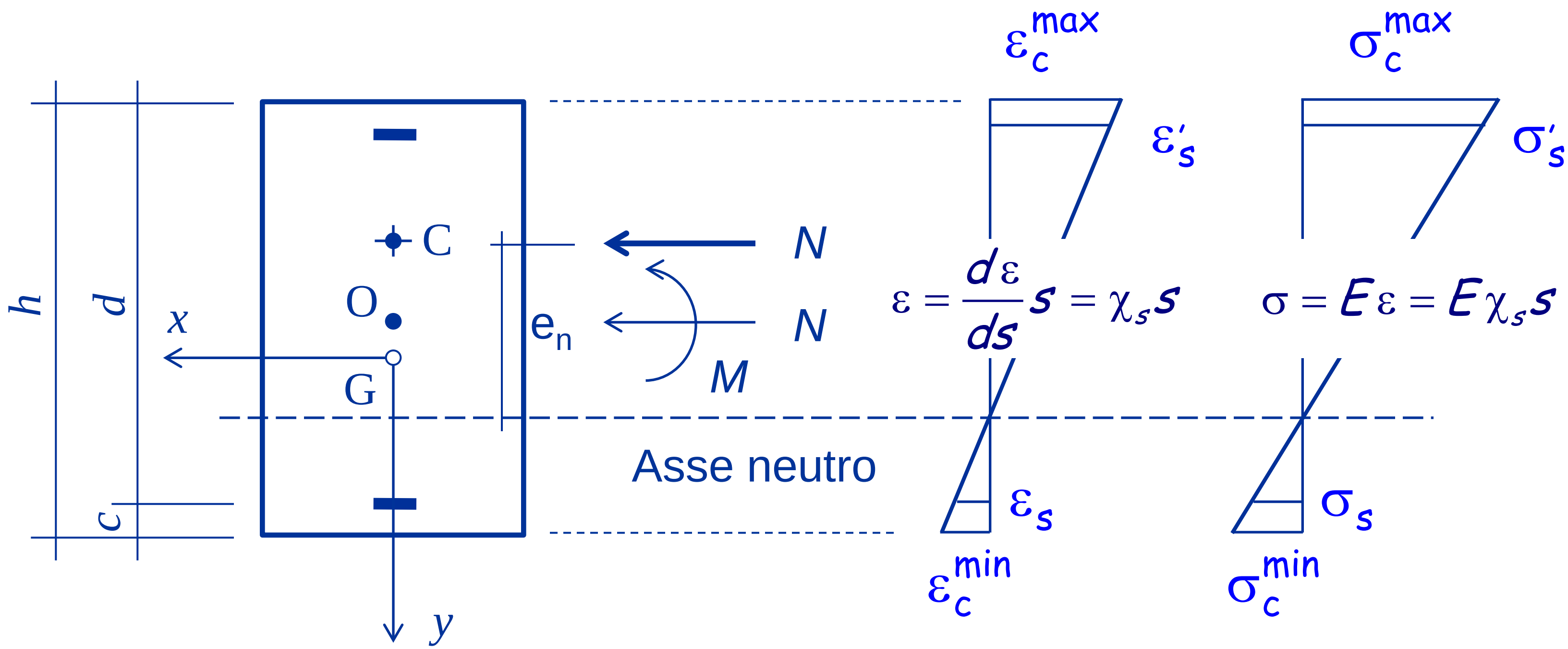
$$M_n = N e_n = \int \sigma \, s \, dA = E\,\chi_s \int s^2 dA = \qquad E\,\chi_s I_n$$

$$M_s = \int \sigma \, n \, dA = E\,\chi_s \int s \, n \, dA = \qquad 0$$

$$e_n = \frac{I_n}{S_n}$$

Flessione composta

1° stadio (Calcolo delle tensioni)



$$N = \int \sigma \, dA = E\chi_s \int s \, dA = \qquad E\chi_s S_n$$

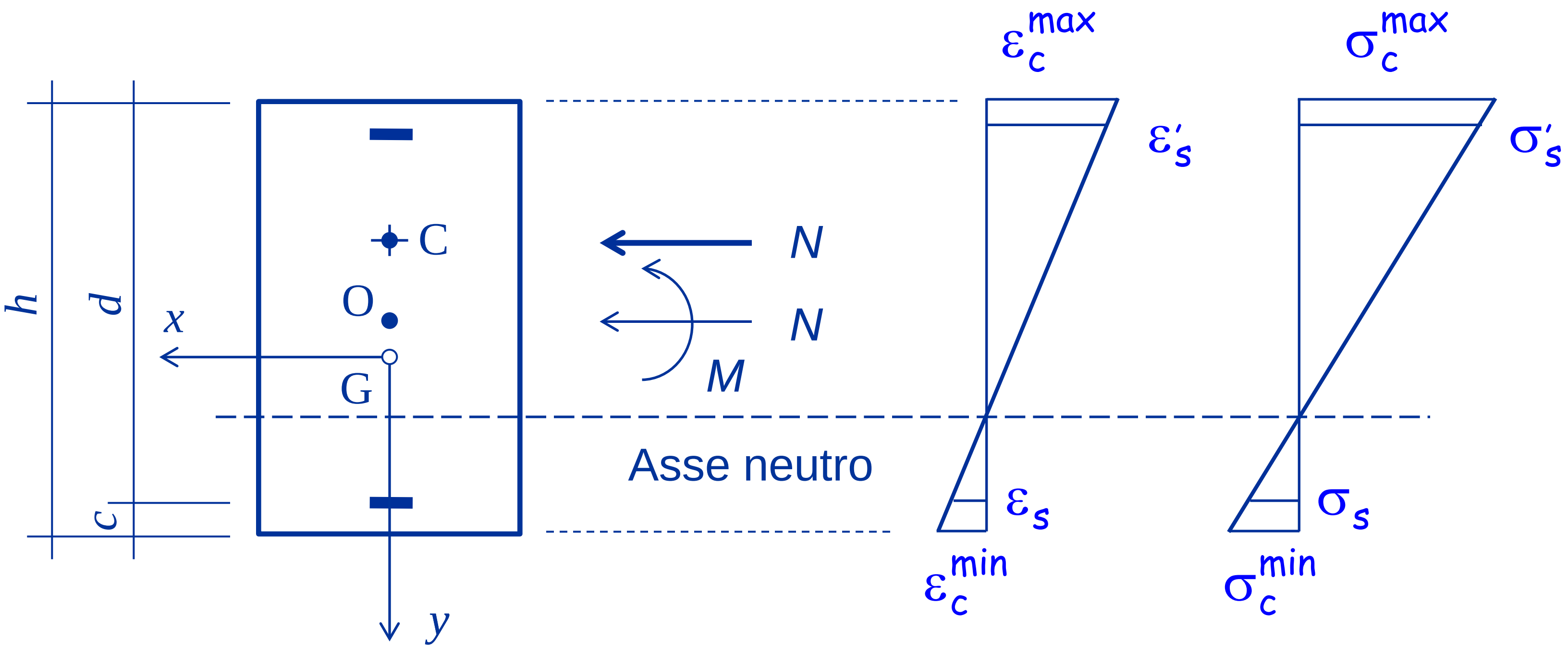
$$M_n = Ne_n = \int \sigma \, s \, dA = E\chi_s \int s^2 dA = \qquad E\chi_s I_n$$

$$M_s = \int \sigma \, n \, dA = E\chi_s \int s \, n \, dA = \qquad 0$$

$$\Rightarrow \quad \sigma = \frac{N}{S_n} s$$

Flessione composta

1° stadio



Dati:

- Geometria della sezione
- Armature
- Coppia M-N

Incognite:

Tensioni massime

Flessione composta

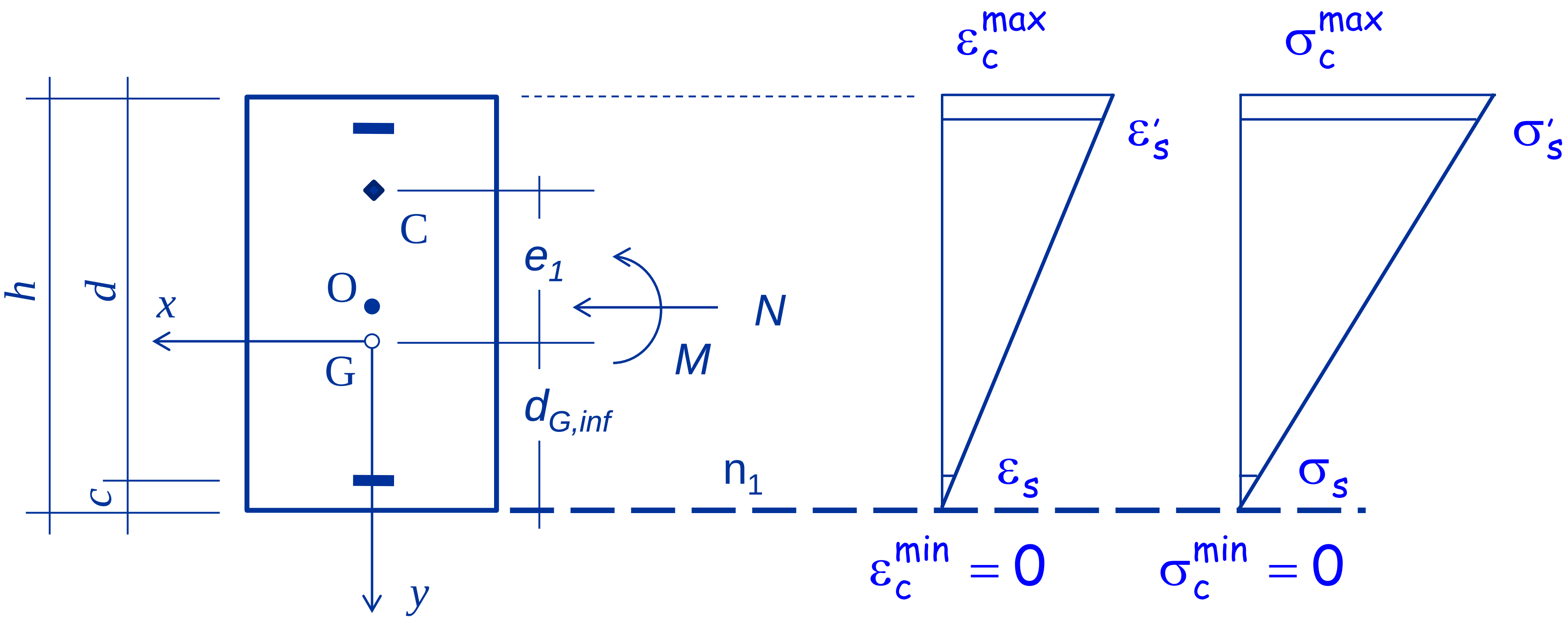
1° stadio

Se il centro di sollecitazione *C* è :

1. sul contorno del nocciolo d'inerzia → l'asse neutro è tangente alla sezione
2. interno al nocciolo d'inerzia → l'asse neutro è esterno alla sezione
3. esterno al nocciolo d'inerzia → l'asse neutro è interno alla sezione

Flessione composta

Estremi del nocciolo d'inerzia

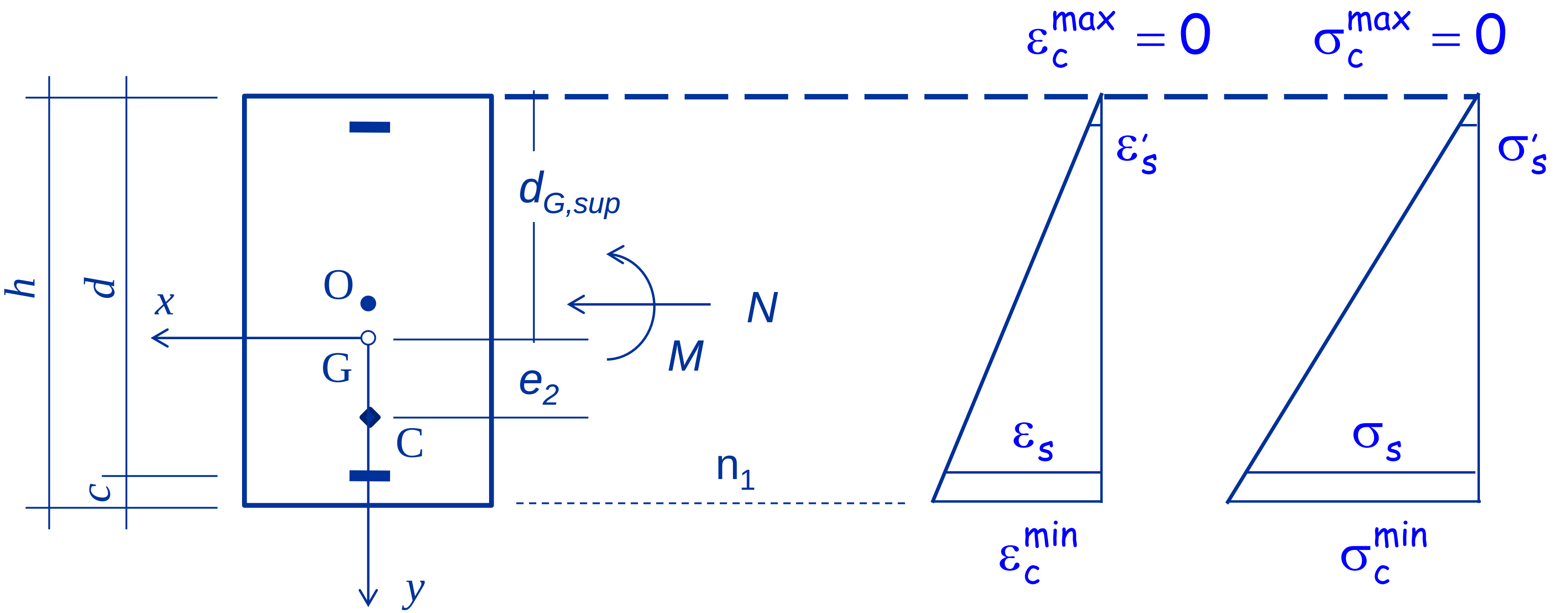


$$\sigma_c^{min} = \frac{N}{A} + \frac{-N\, e_1}{I_x} d_{G,inf} = 0 \quad \Rightarrow \quad e_1 = \frac{I_x}{A\, d_{G,inf}}$$

(e_1 e $d_{G,inf}$ sono in valore assoluto)

Flessione composta

Estremi del nocciolo d'inerzia

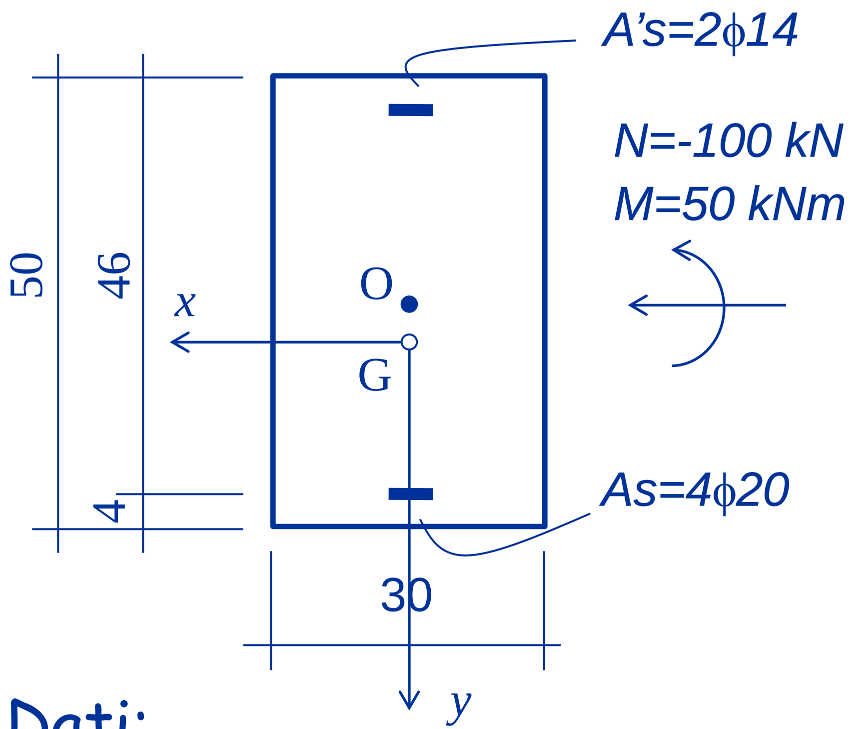


$$\sigma_c^{max} = \frac{N}{A} + \frac{N\,e_2}{I_x}\left(-d_{G,sup}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad e_2 = \frac{I_x}{A\,d_{G,sup}}$$

(e_2 e $d_{G,sup}$ sono in valore assoluto)

Esempio n.1

1° stadio



Dati:

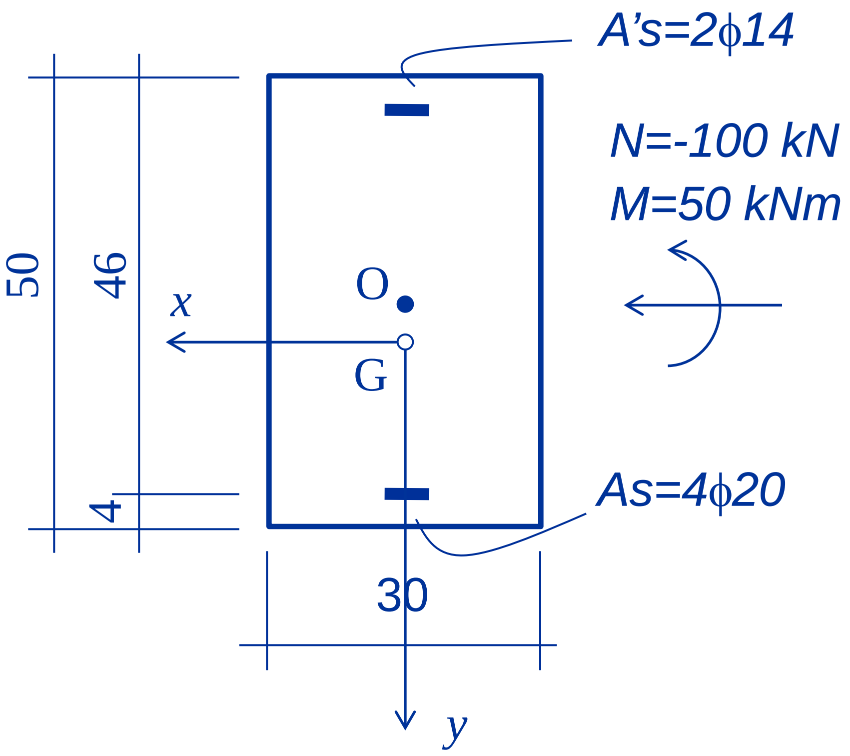
- Geometria della sezione
- Armature
- Coppia M-N

Incognite:

Tensioni massime

Esempio n.1

1° stadio

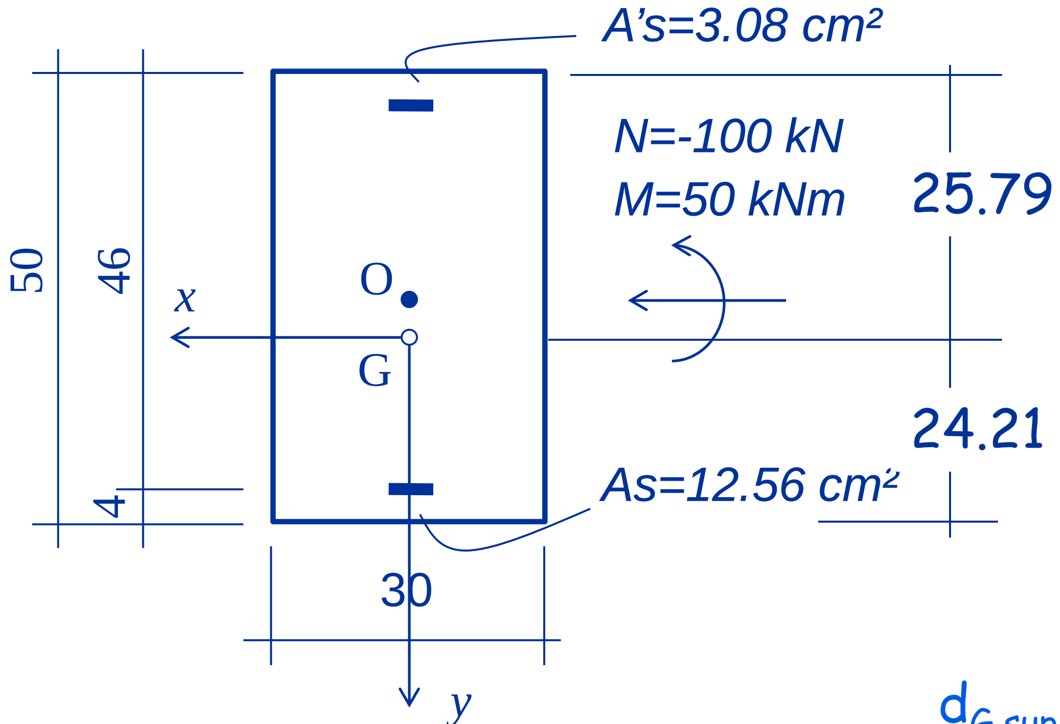


Procedura:

1. Individuazione dell'asse neutro
2. Determinazione del momento d'inerzia
3. Calcolo delle tensioni

Esempio n.1

1° stadio



Come già mostrato con riferimento alla flessione semplice:

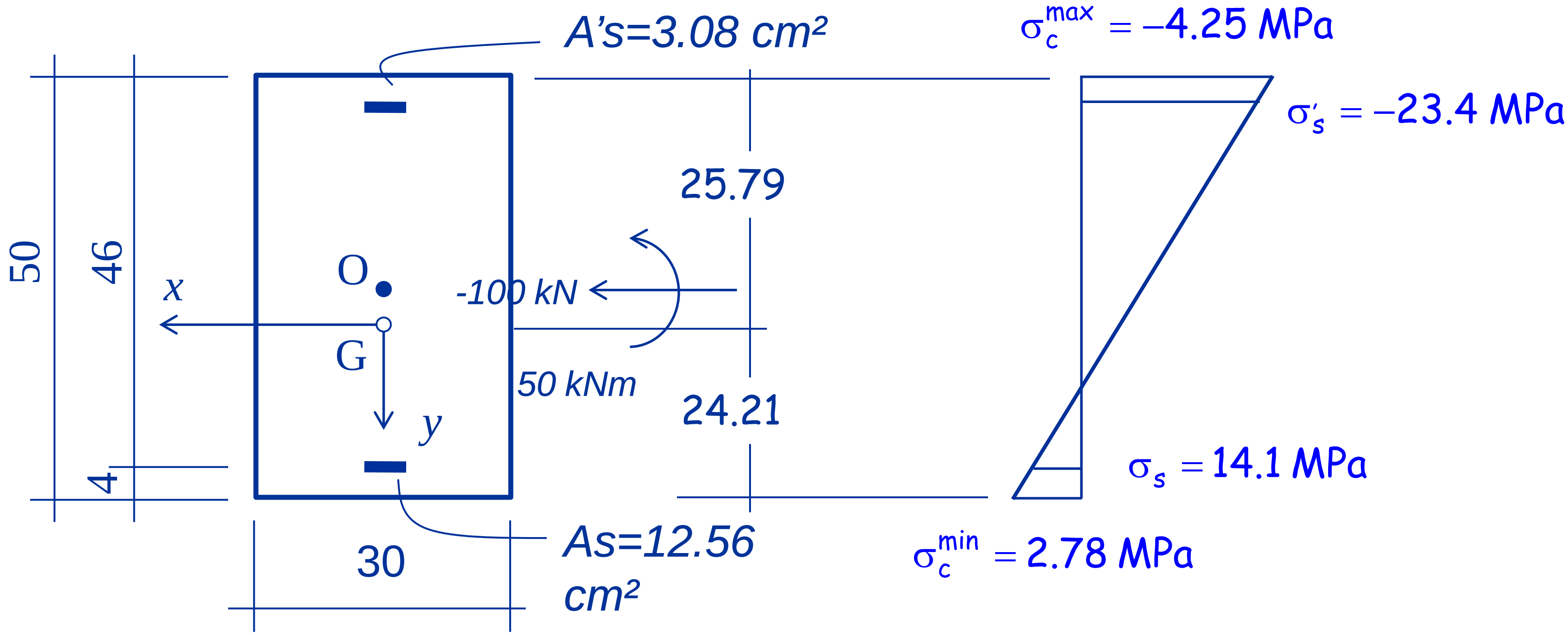
$d_{G,sup}$ =S/A=25.79 cm

$d_{G,inf}$ =h-$d_{G,sup}$=24.21 cm

I = 355298 cm^4

Esempio n.1

1° stadio



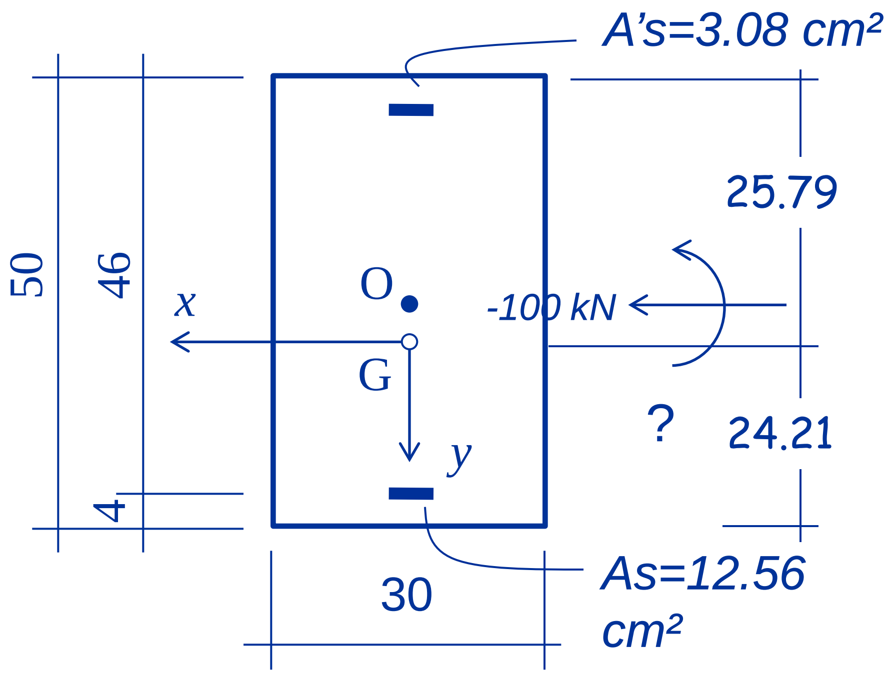
$$\sigma_{c,inf} = \frac{-100 \cdot 10^3}{1599.3 \cdot 10^2} + \frac{50 \cdot 10^6}{355298 \cdot 10^4} 24.21 \cdot 10 = 2.78 \text{ MPa} > f_{cfk} = 2.16 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{c,sup} = \frac{-100 \cdot 10^3}{1599.3 \cdot 10^2} + \frac{50 \cdot 10^6}{355298 \cdot 10^4} (-25.79 \cdot 10) = -4.25 \text{ MPa}$$

La sezione è fessurata

Esempio n.2

1° stadio



Calcolo del momento di prima fessurazione

$$\sigma_c = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} d_{G,inf} = f_{cfk}$$

con

f_{cfk} = 2.16 MPa

$$M_f = \left(f_{cfk} - \frac{N}{A} \right) \frac{I}{d_{G,inf}} = \left(2.16 - \frac{-100 \cdot 10^3}{1599.3 \cdot 10^2} \right) \frac{355298 \cdot 10^2}{24.21 \cdot 10} 10^{-6} = 40.9 \text{ kNm}$$

Flessione composta

2° stadio

Nel secondo stadio di comportamento
NON è nota la sezione reagente.

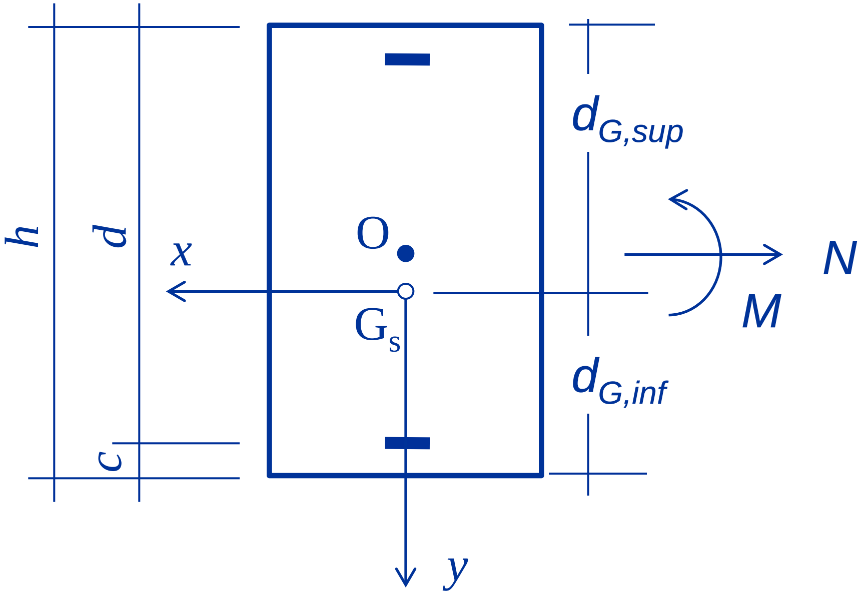
Le formule per il calcolo della coppia N-M resistente sono diverse a seconda che la sezione reagente sia costituita da sole armature, solo calcestruzzo oppure da armature e calcestruzzo.

Per tale motivo saranno separatamente considerati i casi :

1. Sforzo normale di trazione
   interno al nocciolo centrale d'inerzia
2. Sforzo normale di compressione
   interno al nocciolo centrale d'inerzia
3. Casi rimanenti

Flessione composta

2° stadio (Sforzo normale di trazione interno al nocciolo)



1° caso: sforzo normale di trazione interno al nocciolo centrale delle sole armature.

In tale caso,
solo le armature reagiscono.

$$d_{G,sup} = \frac{S}{A} = \frac{A_s d + A_s^{'} c}{A_s + A_s^{'}}$$

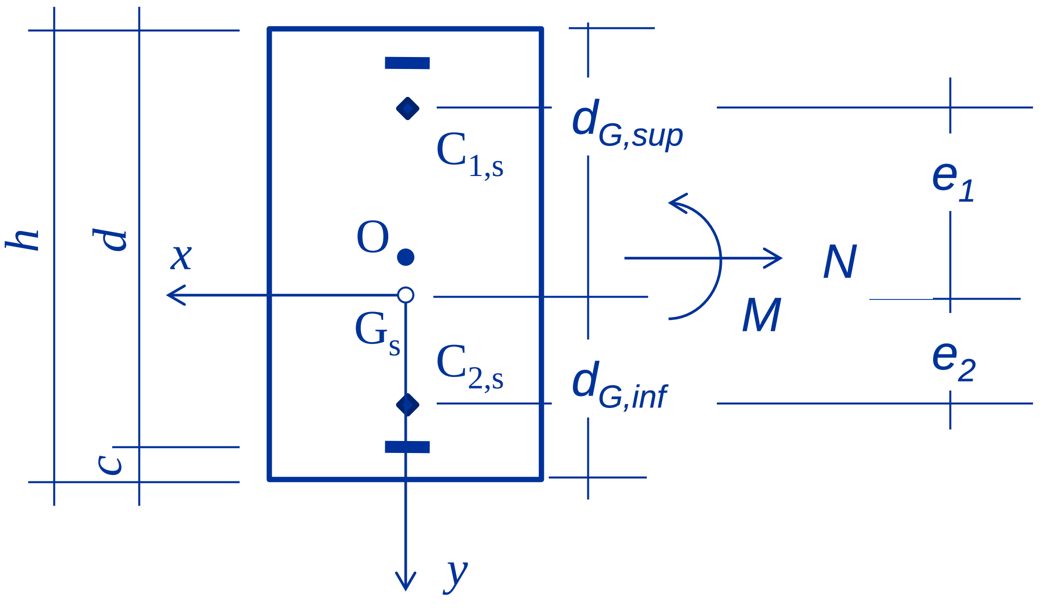
$$d_{G,inf} = h - d_{G,sup}$$

e

$$I_x = \frac{A_s\, A_s^{'}}{A_s + A_s^{'}} (d-c)^2$$

Flessione composta

2° stadio (Sforzo normale di trazione interno al nocciolo)



Nota: gli estremi del nocciolo centrale d`inerzia delle sole armature non coincidono con le posizioni delle armature

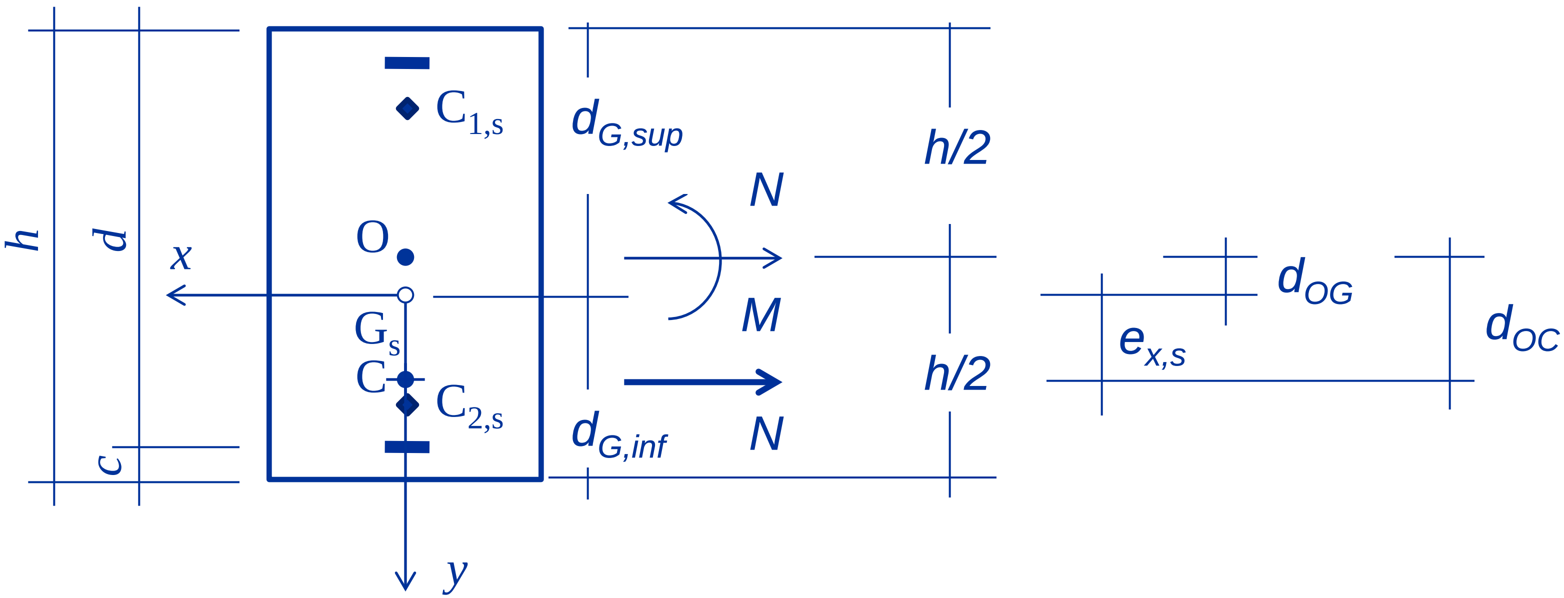
$$e_1 = \frac{I_x}{A\, d_{G,inf}} = \frac{A_s A_s^{'}}{A_s + A_s^{'}} \frac{(d-c)^2}{A_s c + A_s^{'} d}$$

$$e_2 = \frac{I_x}{A\, d_{G,sup}} = \frac{A_s A_s^{'}}{A_s + A_s^{'}} \frac{(d-c)^2}{A_s d + A_s^{'} c}$$

se $A_s = A'_s$ ... $\quad e_1 = e_2 = \dfrac{(d-c)^2}{2h}$

Flessione composta

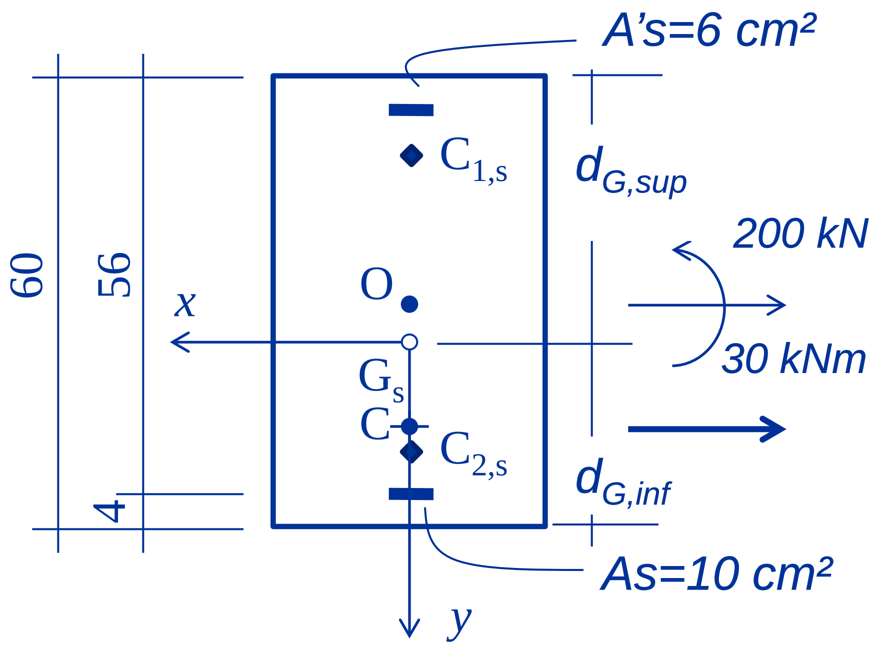
2° stadio (Sforzo normale di trazione interno al nocciolo)



$$\sigma_s = \frac{N}{A} + \frac{N\, e_{x,s}}{I_x} y \qquad \textit{dove} \qquad e_{x,s} = \underbrace{\frac{M_x}{N}}_{d_{OC}} - \underbrace{\left(\frac{h}{2} - d_{G,inf}\right)}_{d_{OG}}$$

Esempio n.3

2° stadio (Sforzo normale di trazione interno al nocciolo)



$$A = (10+6)\,10^{-4} = 0.0016\ m^2$$

$$S = 10 \cdot 10^{-4}\,0.56 + 6 \cdot 10^{-4}\,0.04$$
$$= 0.000584\ m^3$$

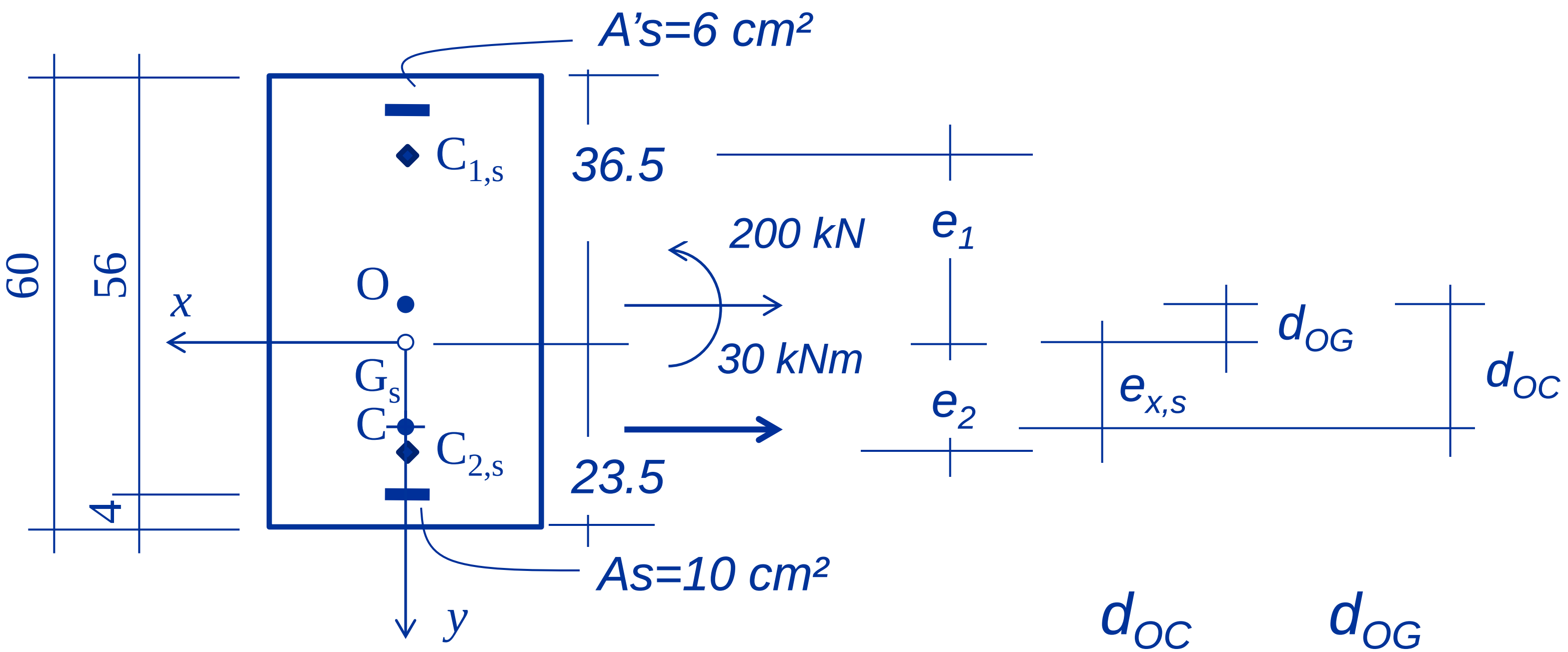
$$d_{G,sup} = \frac{0.000584}{0.0016} = 0.365\,m$$

$$d_{G,inf} = 0.6 - 0.365 = 0.235\,m$$

$$I = 10 \cdot 10^{-4}\,(0.235 - 0.04)^2 + 6 \cdot 10^{-4}\,(0.365 - 0.04)^2 = 0.0001014\ m^4$$

Esempio n.3

2° stadio (Sforzo normale di trazione interno al nocciolo)



$$e_1 = \frac{I_x}{A\,d_{G,inf}} = \frac{0.0001014}{0.0016 \cdot 0.235} = 0.2697\ \text{m}$$

$$e_2 = \frac{I_x}{A\,d_{G,sup}} = \frac{0.0001014}{0.0016 \cdot 0.365} = 0.1736\ \text{m}$$

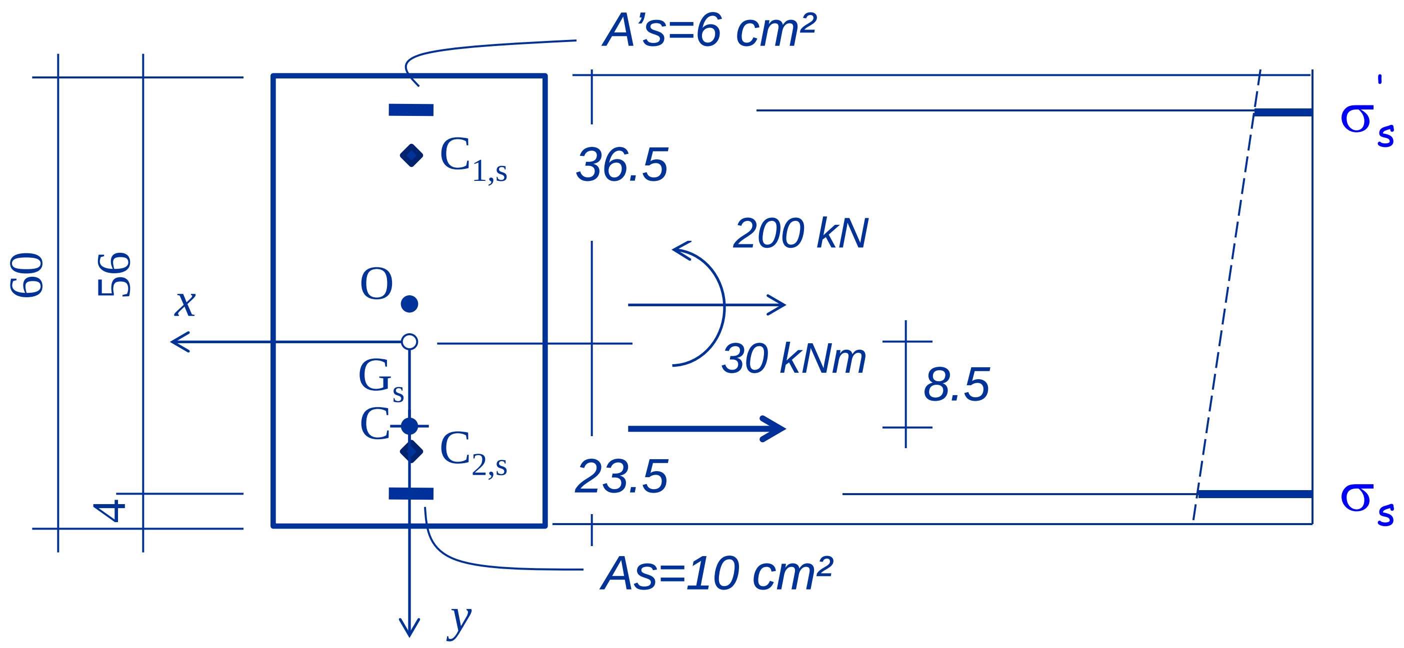
$$e_{x,s} = \overbrace{M_x/N}^{d_{OC}} - \overbrace{\left(h/2 - d_{G,inf}\right)}^{d_{OG}} =$$

$$30/200 - (0.30 - 0.235) =$$

$$0.085\ \text{m}$$

Esempio n.3

2° stadio (Sforzo normale di trazione interno al nocciolo)

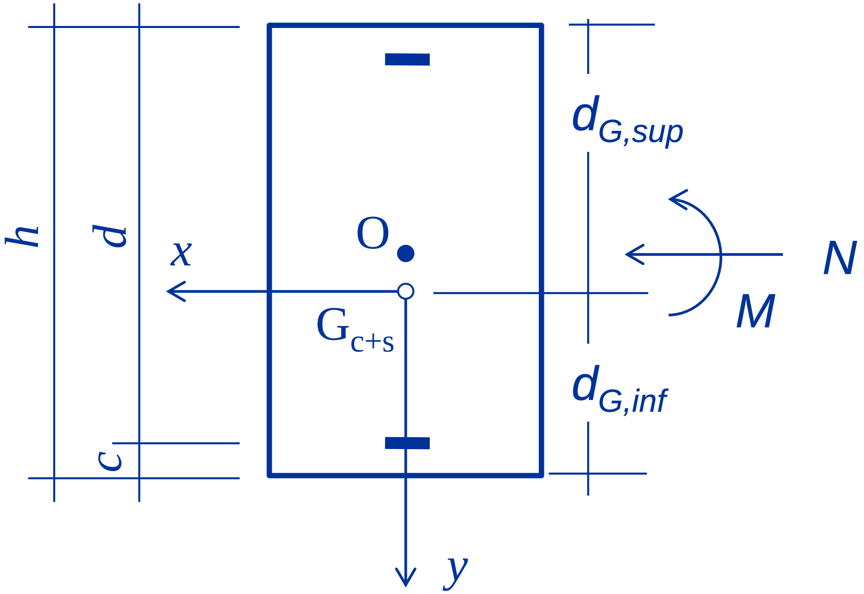


$$\sigma_s = \frac{200 \cdot 10^3}{0.0016 \cdot 10^6} + \frac{200 \cdot 10^3 \cdot 0.0085 \cdot 10^3}{0.0001014 \cdot 10^{12}}(0.235 - 0.04)10^3 = 157.7 \text{ MPa}$$

$$\sigma_s' = \frac{200 \cdot 10^3}{0.0016 \cdot 10^6} + \frac{200 \cdot 10^3 \cdot 0.0085 \cdot 10^3}{0.0001014 \cdot 10^{12}}(0.365 - 0.04)10^3 = 70.5 \text{ MPa}$$

Flessione composta

2° stadio (Sforzo normale di compress. interno al nocciolo)



2° caso: sforzo normale di compressione interno al nocciolo centrale del calcestruzzo più armature.

In tale caso,
sia il calcestruzzo che le armature reagiscono.

$$A = b \cdot h + n\left(A_s + A_s^{'}\right)$$

$$S = \frac{b \cdot h^2}{2} + n\left(A_s d + A_s^{'} c\right)$$

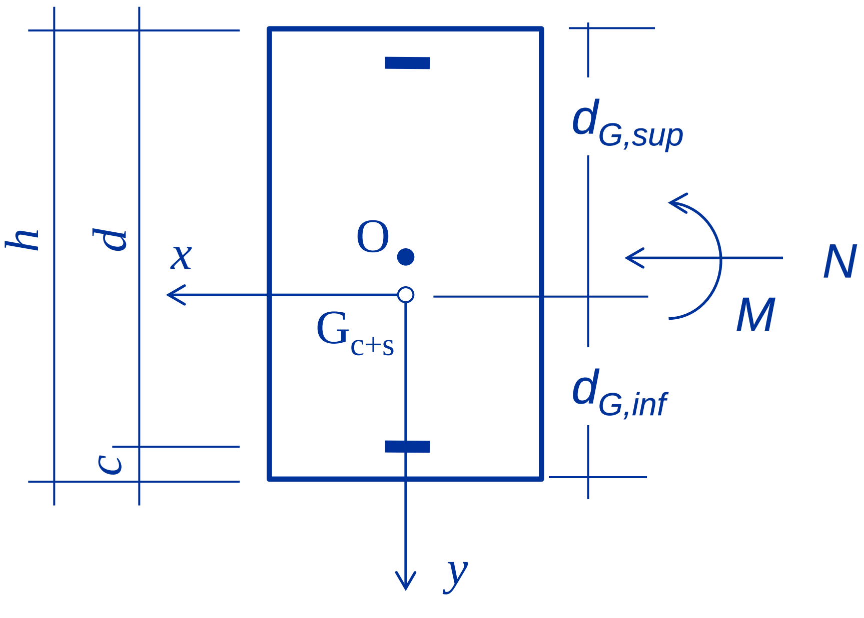
quindi

$$d_{G,sup} = S/A$$

$$d_{G,inf} = h - d_{G,sup}$$

Flessione composta

2° stadio (Sforzo normale di compress. interno al nocciolo)



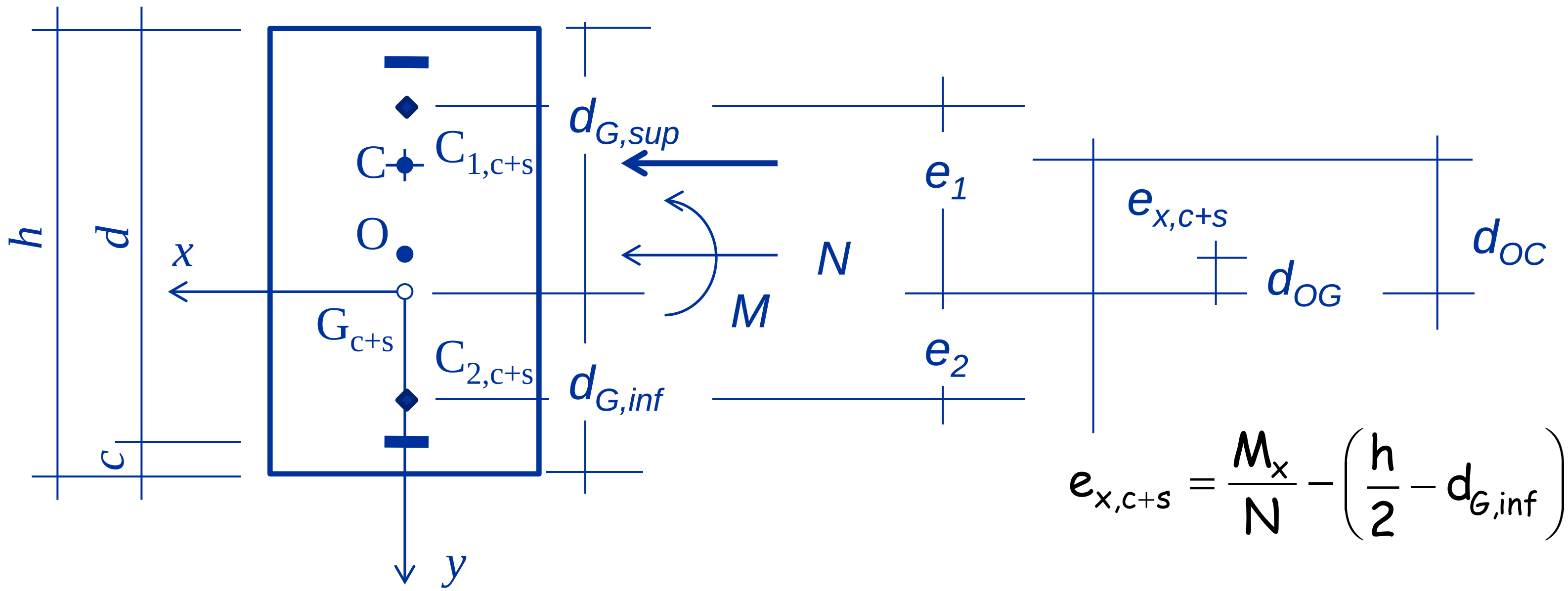
2° caso: sforzo normale di compressione interno al nocciolo centrale del calcestruzzo più armature.

In tale caso,
sia il calcestruzzo che le armature reagiscono.

$$I_x = b \cdot h\left(d_{G,sup} - \frac{h}{2}\right)^2 + \frac{bh^3}{12} + nA_s\left(d_{G,inf} - c\right)^2 + nA_s^{'}\left(d_{G,sup} - c\right)^2$$

Flessione composta

2° stadio (Sforzo normale di compress. interno al nocciolo)



$$e_{x,c+s} = \frac{M_x}{N} - \left(\frac{h}{2} - d_{G,inf}\right)$$

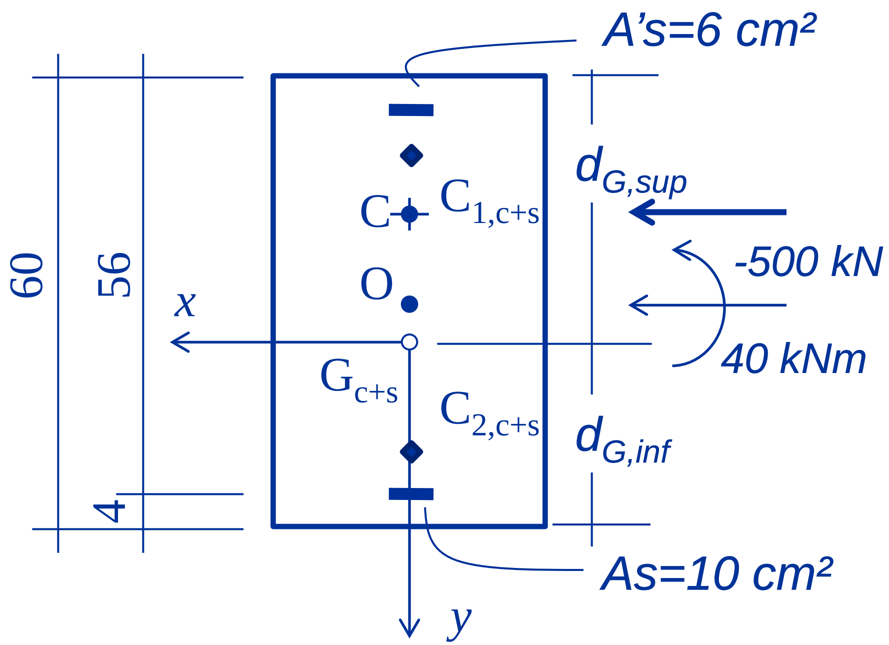
$$e_1 = \frac{I_x}{A\, d_{G,inf}} \qquad e_2 = \frac{I_x}{A\, d_{G,sup}} \qquad e \ldots$$

$$\sigma_c = \frac{N}{A} + \frac{N\, e_{x,c+s}}{I_x}\, y$$

$$\sigma_s = n\, \sigma_c$$

Esempio n.4

2° stadio (Sforzo normale di compress. interno al nocciolo)



$$A = 0.3 \cdot 0.6 + 15 \cdot (10+6)\,10^{-4}$$
$$= 0.204\ m^2$$

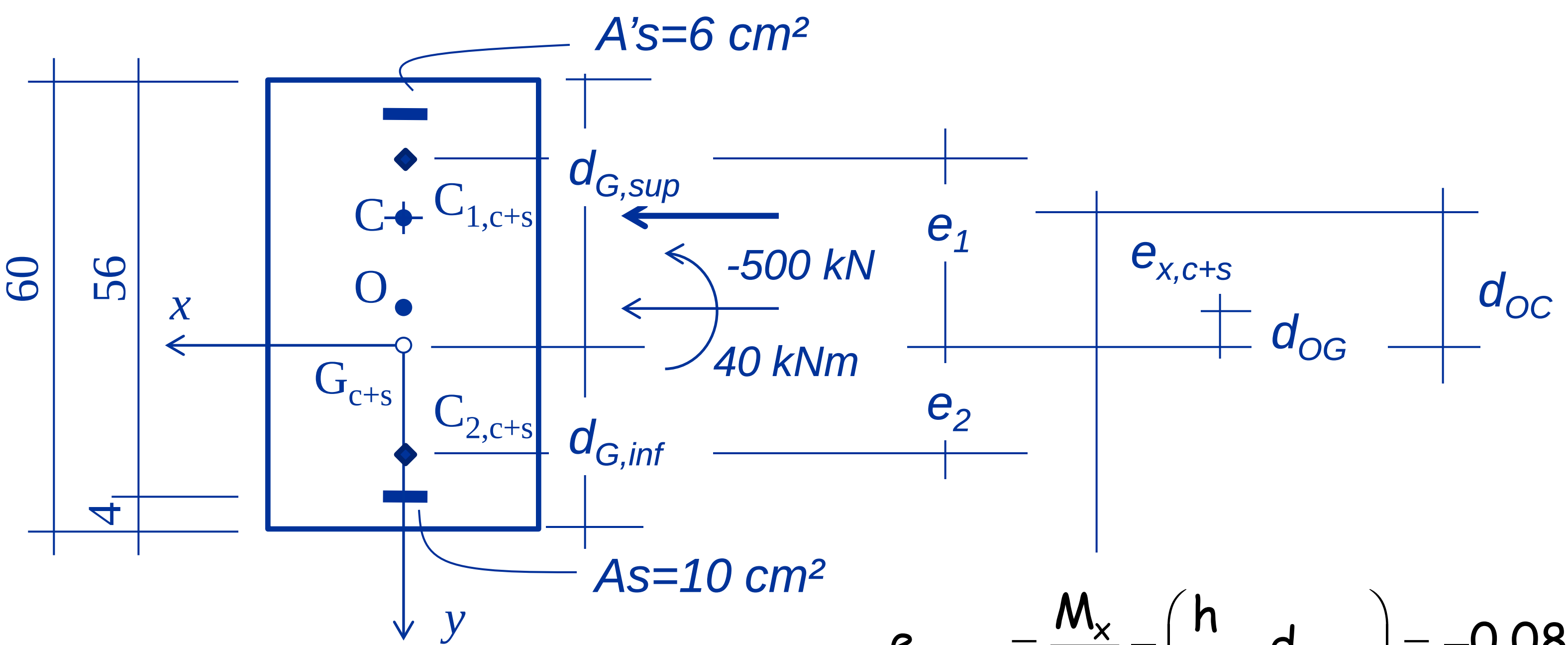
$$S = \frac{0.30 \cdot 0.60^2}{2} + 15(10 \cdot 10^{-4}\,0.56$$
$$+6 \cdot 10^{-4}\,0.04) = 0.06276\ m^3$$

$$d_{G,sup} = \frac{0.06276}{0.204} = 0.3076\,m \qquad d_{G,inf} = 0.6 - 0.3076 = 0.2924\,m$$

$$I = 0.30 \cdot 0.60 \cdot (0.3076 - 0.30)^2 + \frac{0.30 \cdot 0.60^3}{12} + 15(\ldots.) = 0.007010\ m^4$$

Esempio n.4

2° stadio (Sforzo normale di compress. interno al nocciolo)



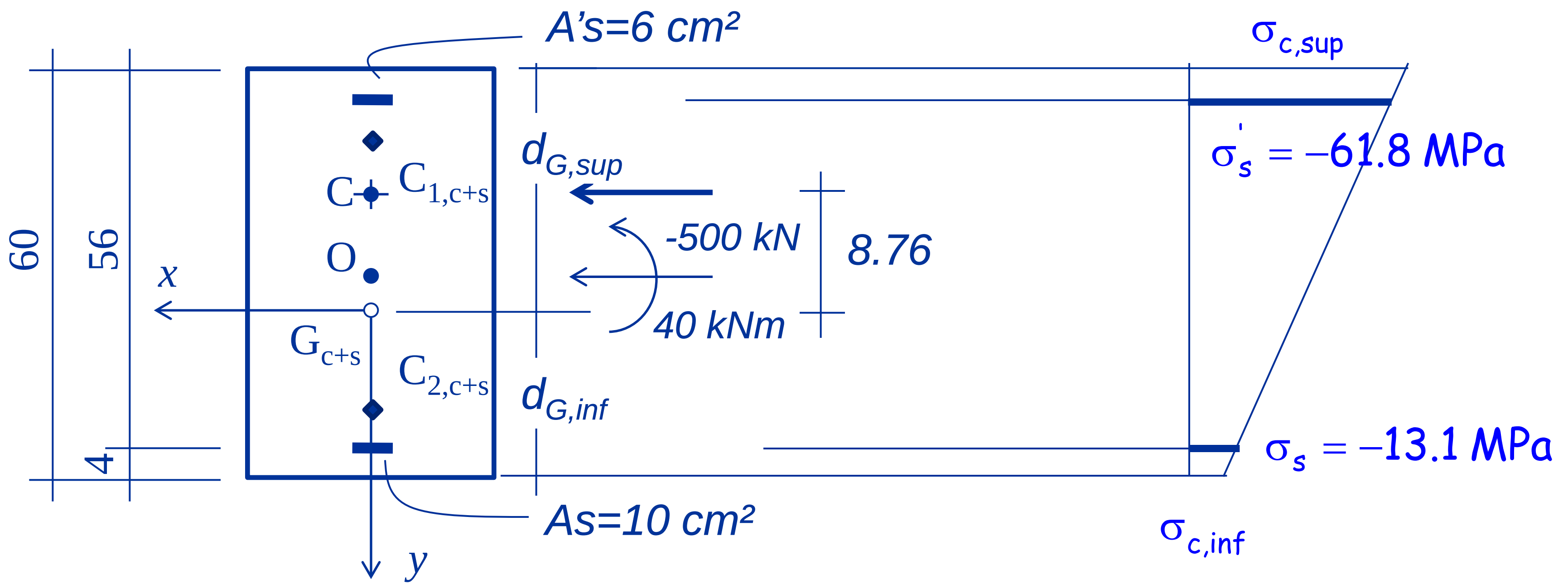
$$e_{x,c+s} = \frac{M_x}{N} - \left(\frac{h}{2} - d_{G,inf}\right) = -0.0876 \text{ m}$$

$$e_1 = \frac{0.007010}{0.204 \cdot 0.2924} = 0.1175 \text{ m}$$

$$e_2 = \frac{0.007010}{0.204 \cdot 0.3076} = 0.1117 \text{ m}$$

Esempio n.4

2° stadio (Sforzo normale di compress. interno al nocciolo)

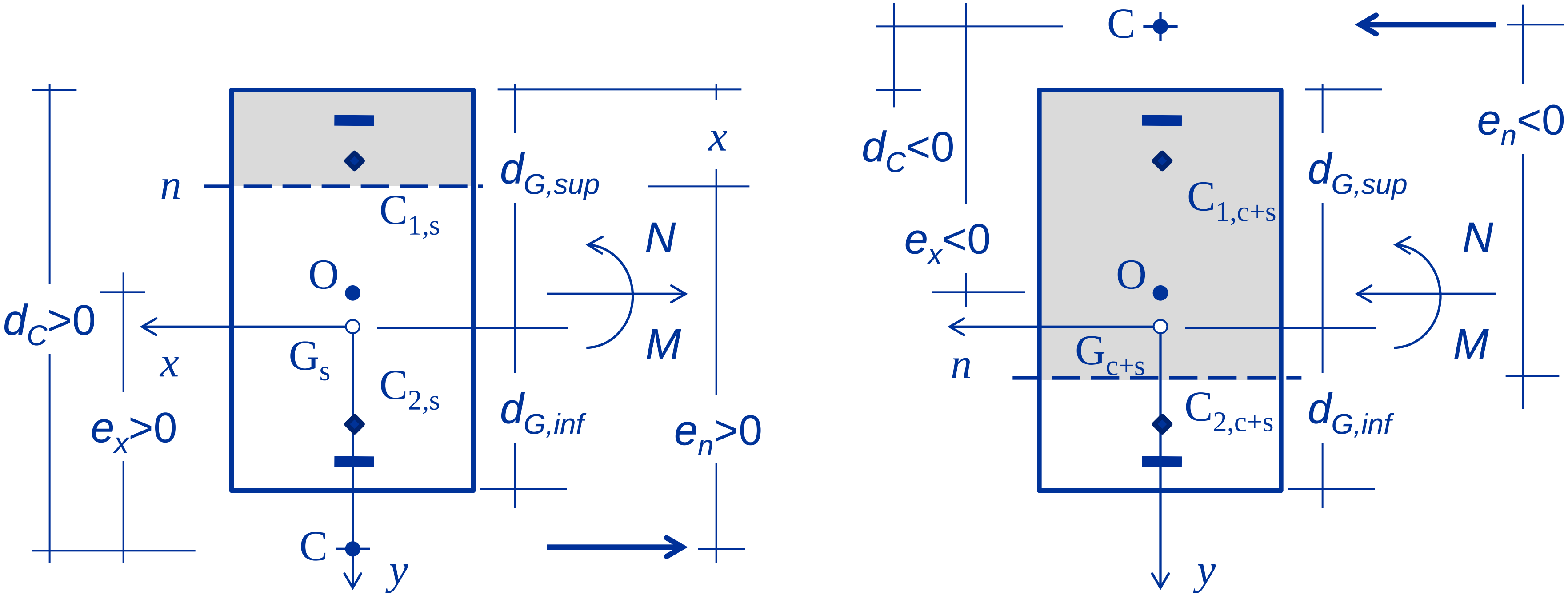


$$\sigma_{c,sup} = \frac{-500\cdot 10^3}{0.204\cdot 10^6} + \frac{-500\cdot 10^3\left(-0.0876\cdot 10^3\right)}{0.007010\cdot 10^{12}}\left(-0.3076\cdot 10^3\right) = -4.37 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{c,inf} = \frac{-500\cdot 10^3}{0.204\cdot 10^6} + \frac{-500\cdot 10^3\left(-0.0876\cdot 10^3\right)}{0.007010\cdot 10^{12}}\left(0.2924\cdot 10^3\right) = -0.62 \text{ MPa}$$

Flessione composta

2° stadio (Sforzo normale esterno al nocciolo)

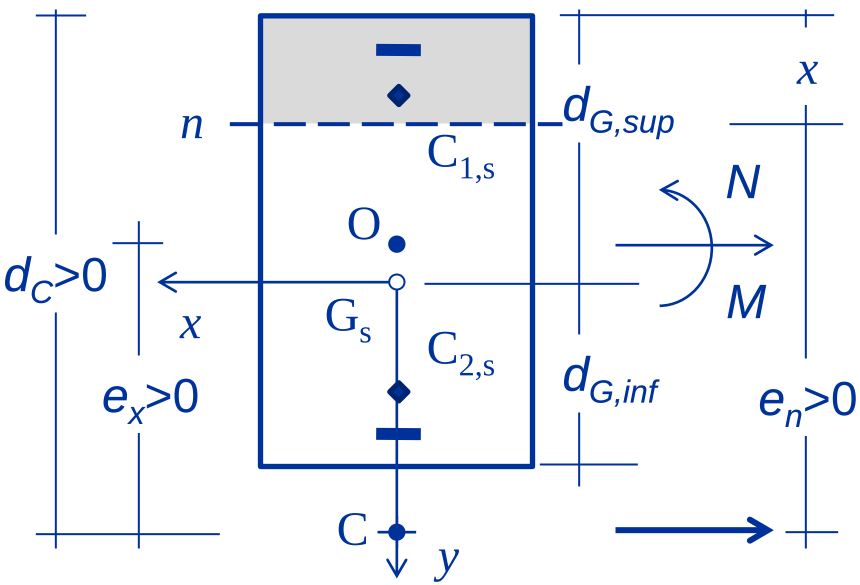


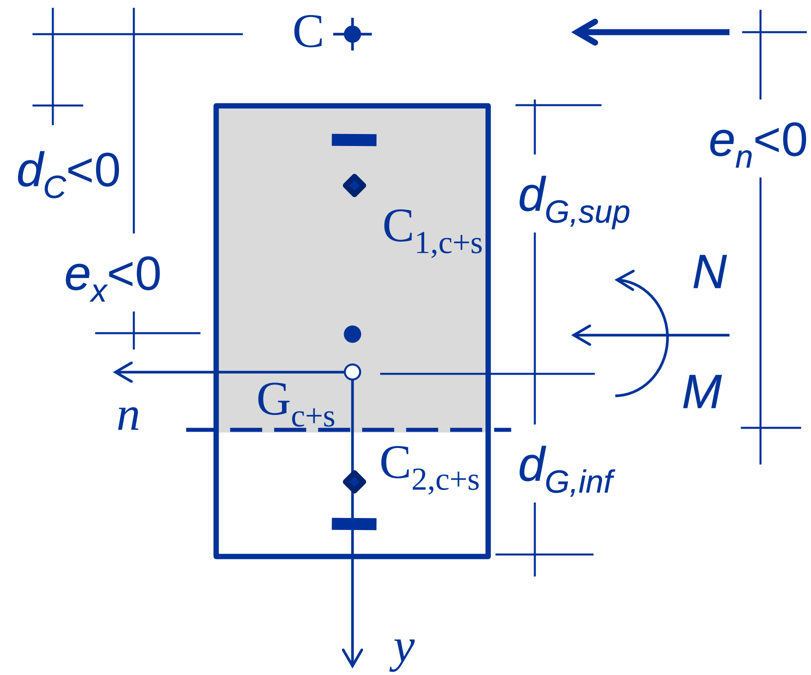
3° caso: sforzo normale di trazione esterno al nocciolo centrale delle sole armature.

3° caso: sforzo normale di compressione esterno al nocciolo centrale del calcestruzzo più armature.

Flessione composta

2° stadio (Sforzo normale esterno al nocciolo)





distanza del centro di sollecitazione dall`asse neutro

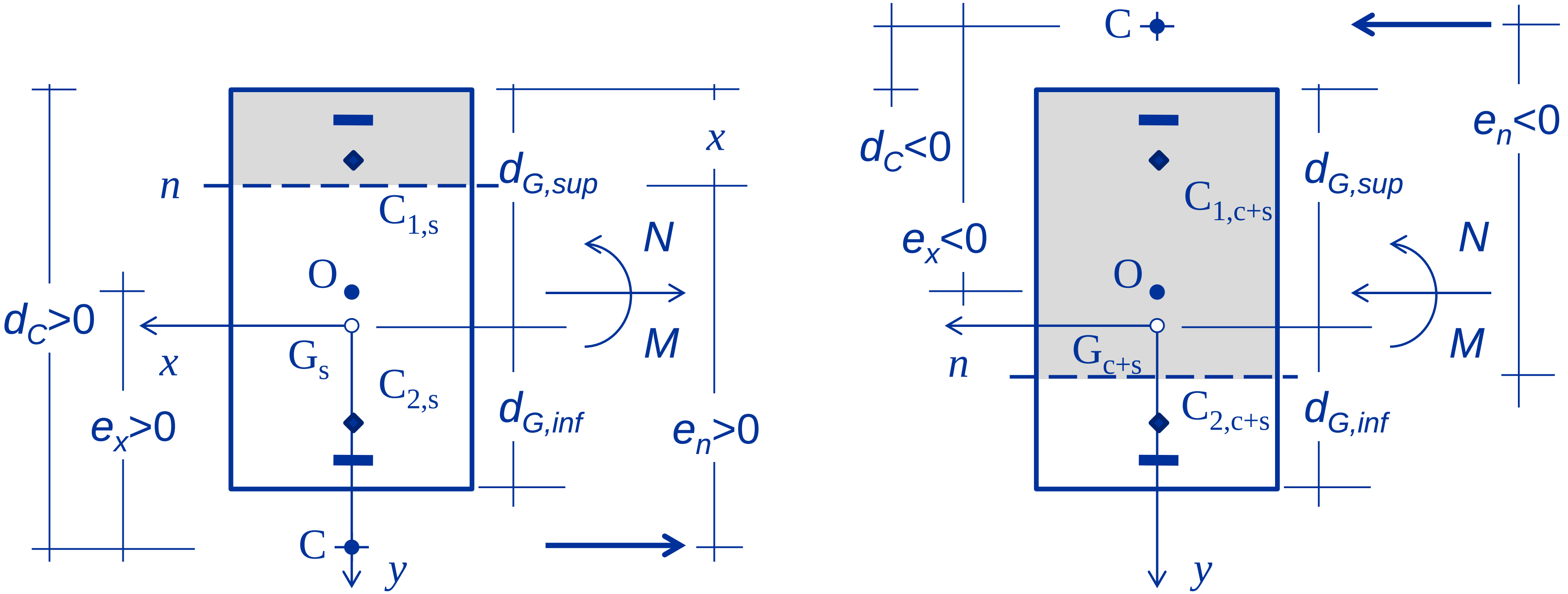
$$e_n = d_c - x$$

distanza del centro di sollecitazione dal bordo superiore

$$d_c = e_x + \frac{h}{2}$$

Flessione composta

2° stadio (Sforzo normale esterno al nocciolo)



1. Determinazione dell'asse neutro

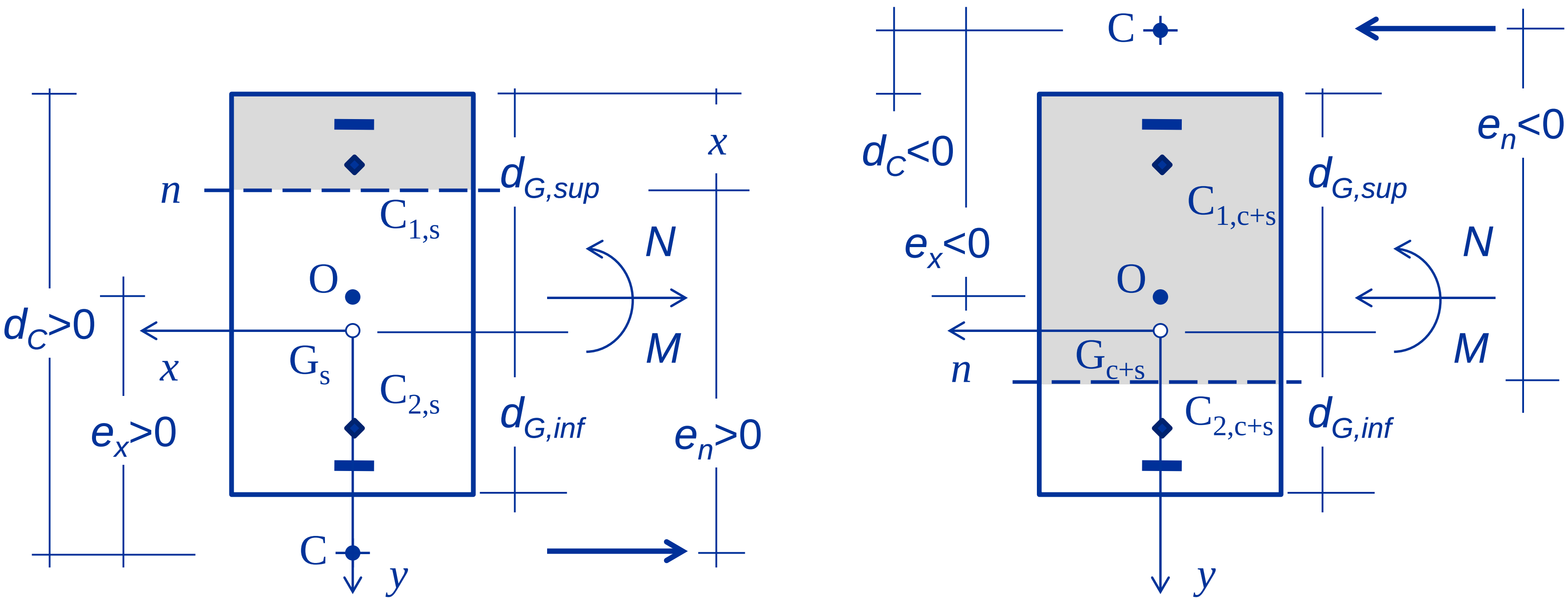
$$S_n\, e_n = I_n$$

oppure

$$S_n\,(d_c - x) = I_n$$

Flessione composta

2° stadio (Sforzo normale esterno al nocciolo)



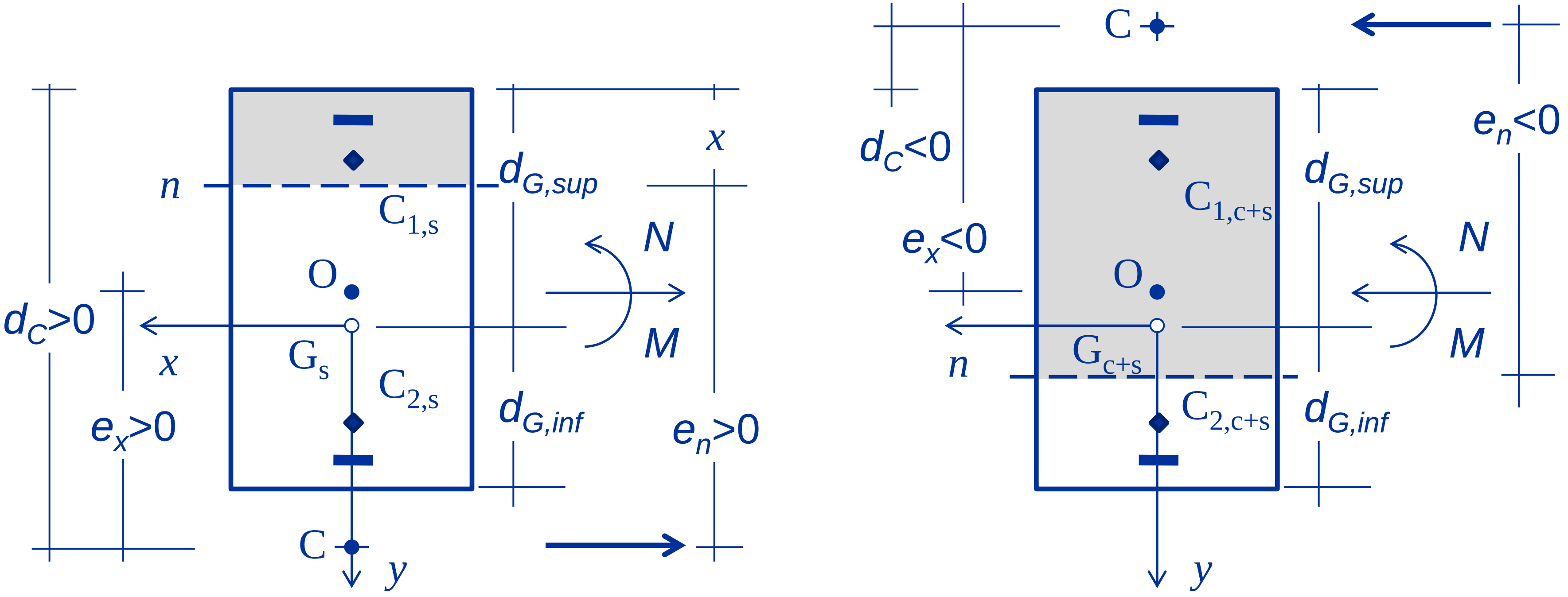
$$S_n = -\frac{bx^2}{2} - nA_s'(x-c) + nA_s(d-x)$$

$$I_n = \frac{bx^3}{3} + nA_s'(x-c)^2 + nA_s(d-x)^2$$

da cui …

Flessione composta

2° stadio (Sforzo normale esterno al nocciolo)

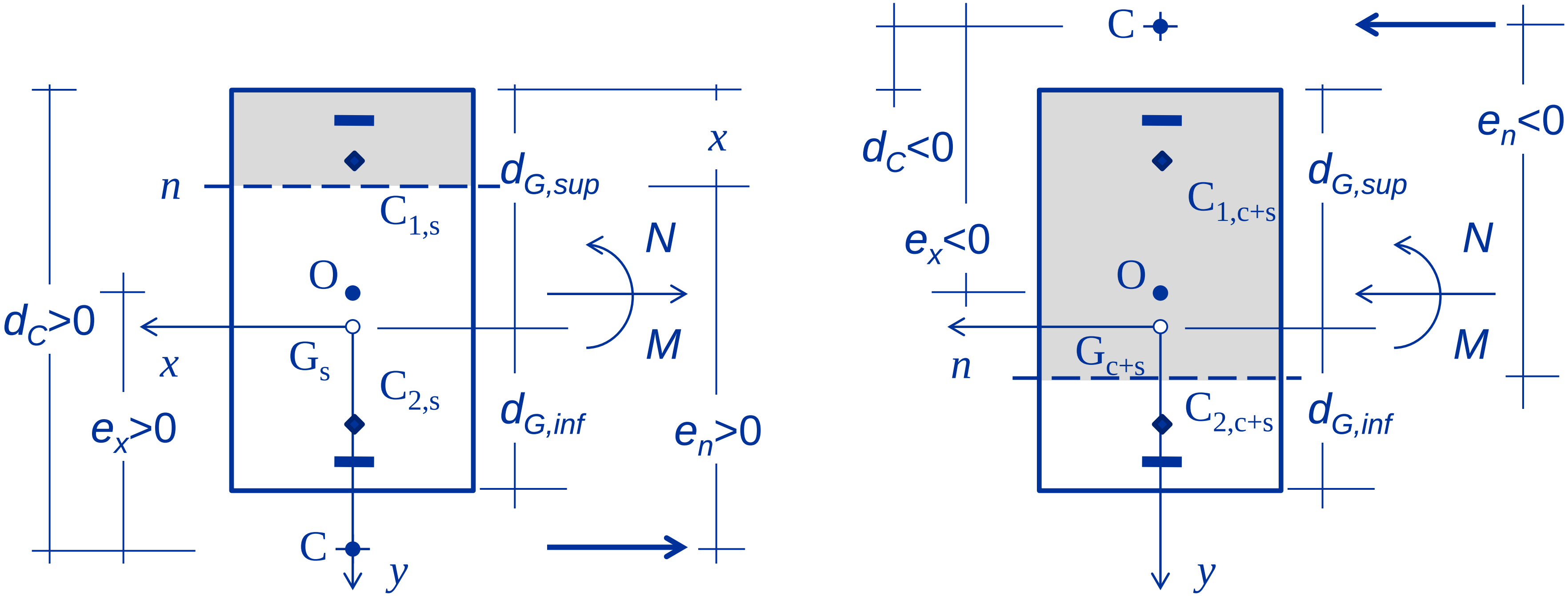


La posizione dell`asse neutro si ottiene dalla risoluzione
della seguente equazione di terzo grado

$$x^3 - 3d_C x^2 + \frac{6n}{b}\left[A_s(d-d_C) + A_s^{'}(c-d_C)\right]x - \frac{6n}{b}\left[A_s d(d-d_C) + A_s^{'} c(c-d_C)\right] = 0$$

Flessione composta

2° stadio (Sforzo normale esterno al nocciolo)

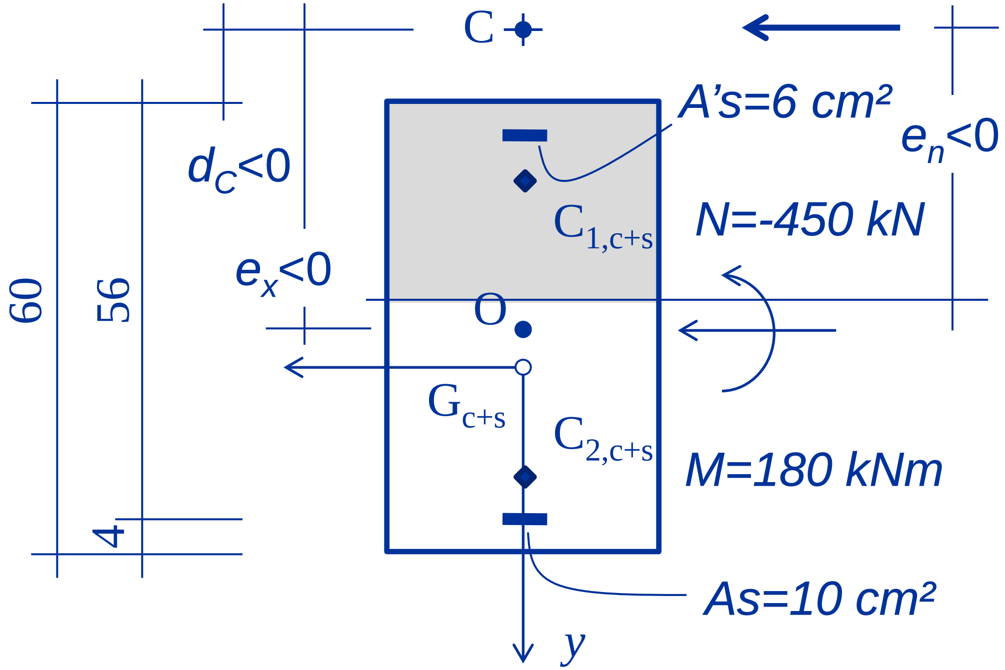


2. Calcolo delle tensioni

$$\sigma_c = \frac{N}{S_n} s \quad \text{e} \quad \sigma_s = n \frac{N}{S_n} s$$

Esempio n.5

2° stadio (Sforzo normale esterno al nocciolo)



$$d_c = e_x + \frac{h}{2} =$$

$$\frac{180}{-450} + \frac{0.60}{2} = -0.10 \text{ m}$$

Dalla risoluzione dell`equazione di terzo grado si ha:

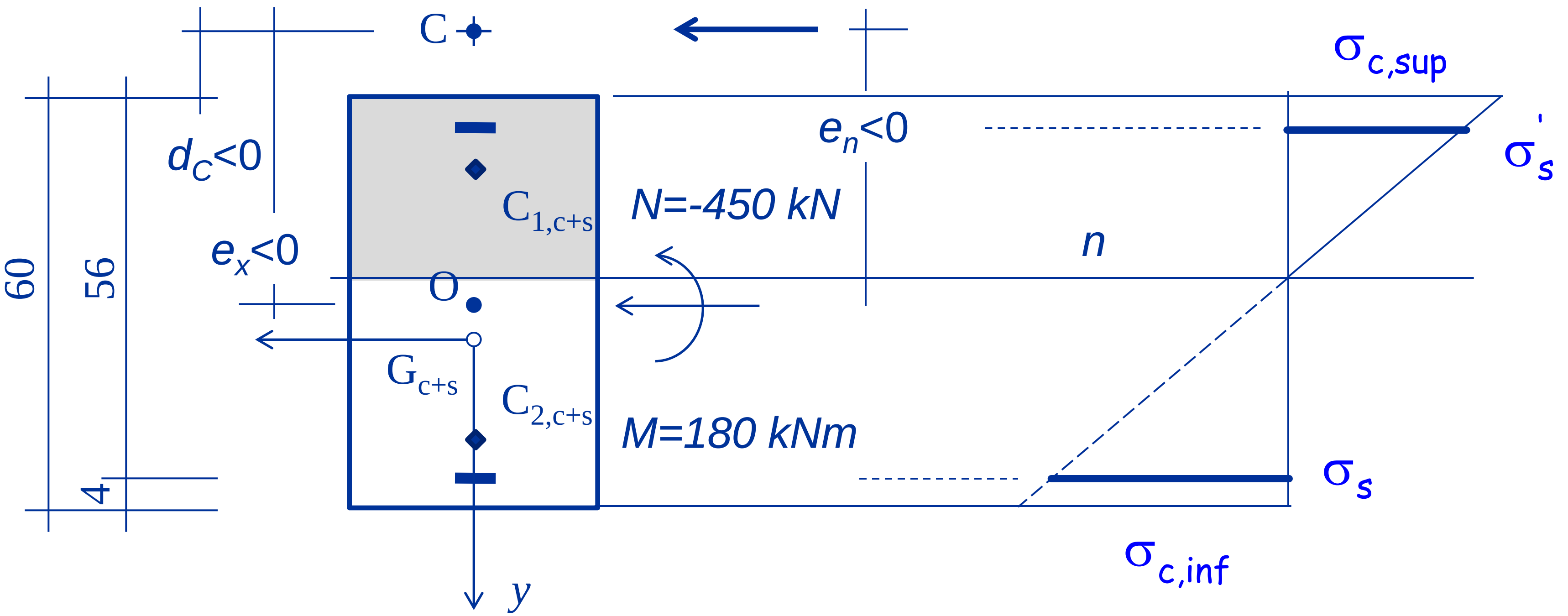
$$x = 0.2862 \text{ m}$$

$$S_n = -\frac{bx^2}{2} - nA_s^{'}(x-c) + nA_s(d-x)$$

$$S_n = \frac{0.30 \cdot 0.2862^2}{2} - 15 \cdot 6 \cdot 10^{-4} \cdot (0.2862 - 0.04) + 15 \cdot 10 \cdot 10^{-4} \cdot (0.56 - 0.2862) = -0.010395 \, m^3$$

Esempio n.5

2° stadio (Sforzo normale esterno al nocciolo)

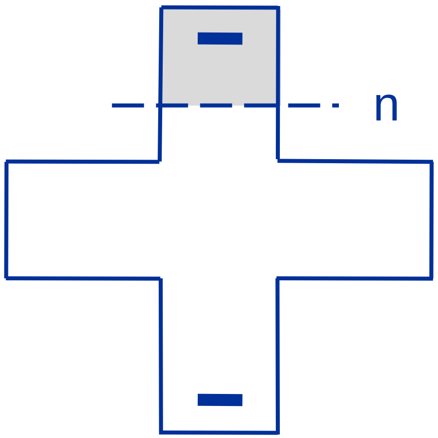


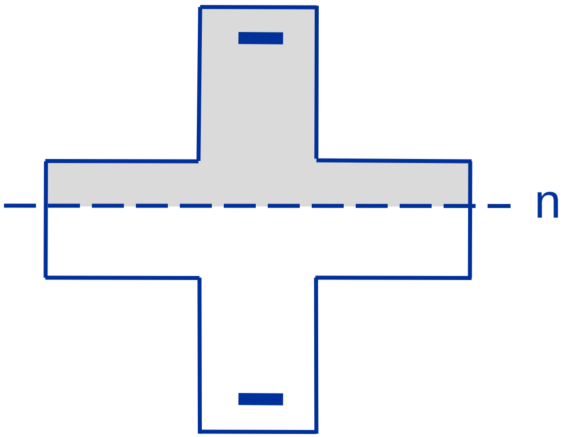
$$\sigma_{c,sup} = \frac{-450 \cdot 10^3}{-0.01039 \cdot 10^9}\left(-0.2862 \cdot 10^3\right) = -12.39 \text{ MPa}$$

$$\sigma_s = 15\frac{-450 \cdot 10^3}{-0.01039 \cdot 10^9}(0.56 - 0.2862) \cdot 10^3 = 177.8 \text{ MPa}$$

Sezioni non rettangolari

2° stadio





Se la parte compressa
è rettangolare ....

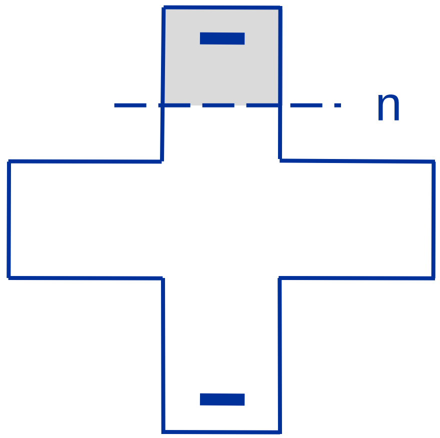
Se la parte compressa
non è rettangolare ....

la sezione può essere trattata come rettangolare

la sezione NON può essere trattata come rettangolare

Sezioni non rettangolari

2° stadio



In presenza di una sezione rettangolare a tratti si può fare inizialmente l'ipotesi che la parte compressa sia rettangolare
(nel caso in figura, che l'asse neutro tagli l'anima superiore).

Si determina la posizione dell'asse neutro con la formula:

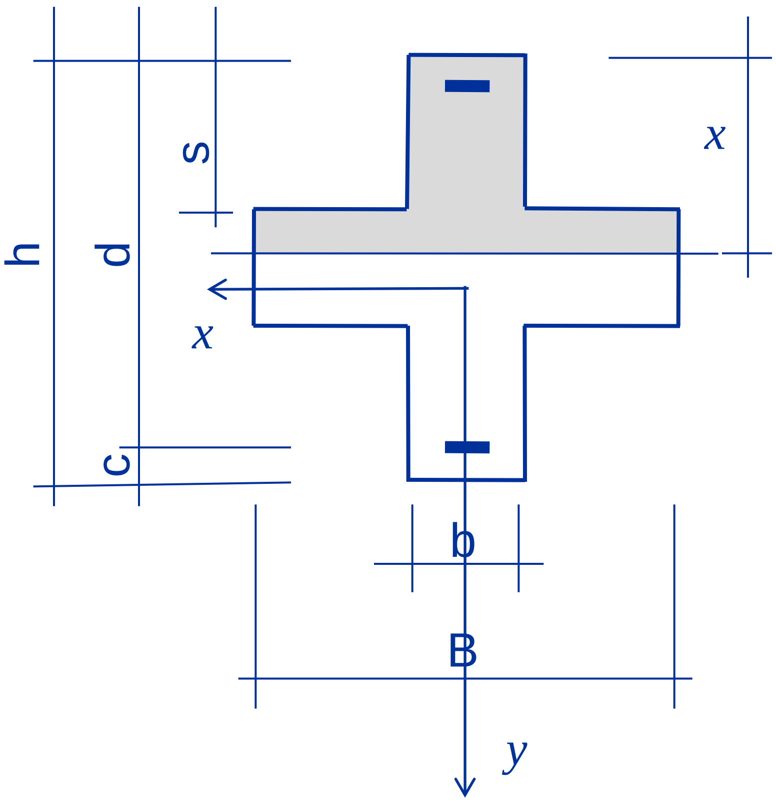
$$S_n \, e_n = I_n$$

Se l'asse neutro taglia l'anima superiore

la posizione dell'asse neutro è corretta e il momento d'inerzia della sezione reagente omogeneizzata può essere calcolato con le formule della sezione rettangolare.

Sezioni non rettangolari

2° stadio



Se l'asse neutro non taglia l'anima superiore

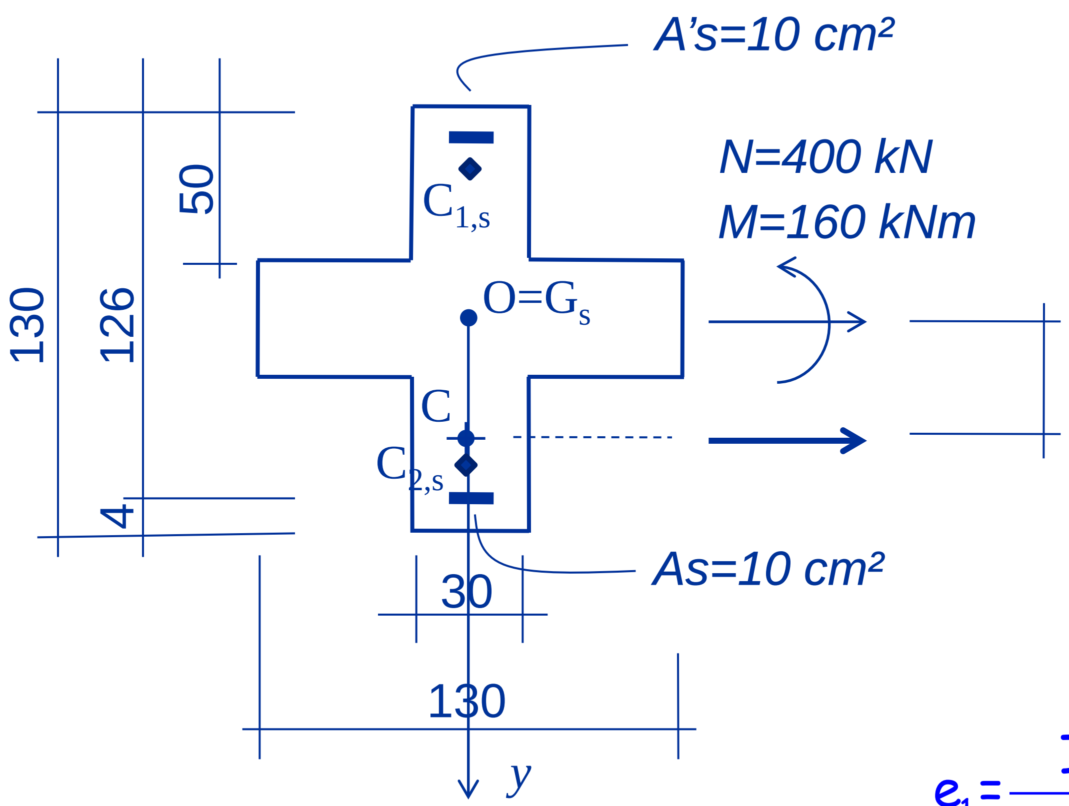
la posizione calcolata dell'asse neutro è errata. La posizione dell'asse neutro deve essere rivalutata ipotizzando che l'asse neutro tagli l'ala. La nuova posizione dell'asse neutro può essere calcolata imponendo

$$S_n \, e_n = I_n$$

dove S_n e I_n sono definiti in funzione della forma non rettangolare della parte compressa.

Esempio n. 8

2° stadio



Centro di sollecitazione interno al nocciolo delle sole armature:

SEZIONE TUTTA TESA

$e_x = 0.40$ m

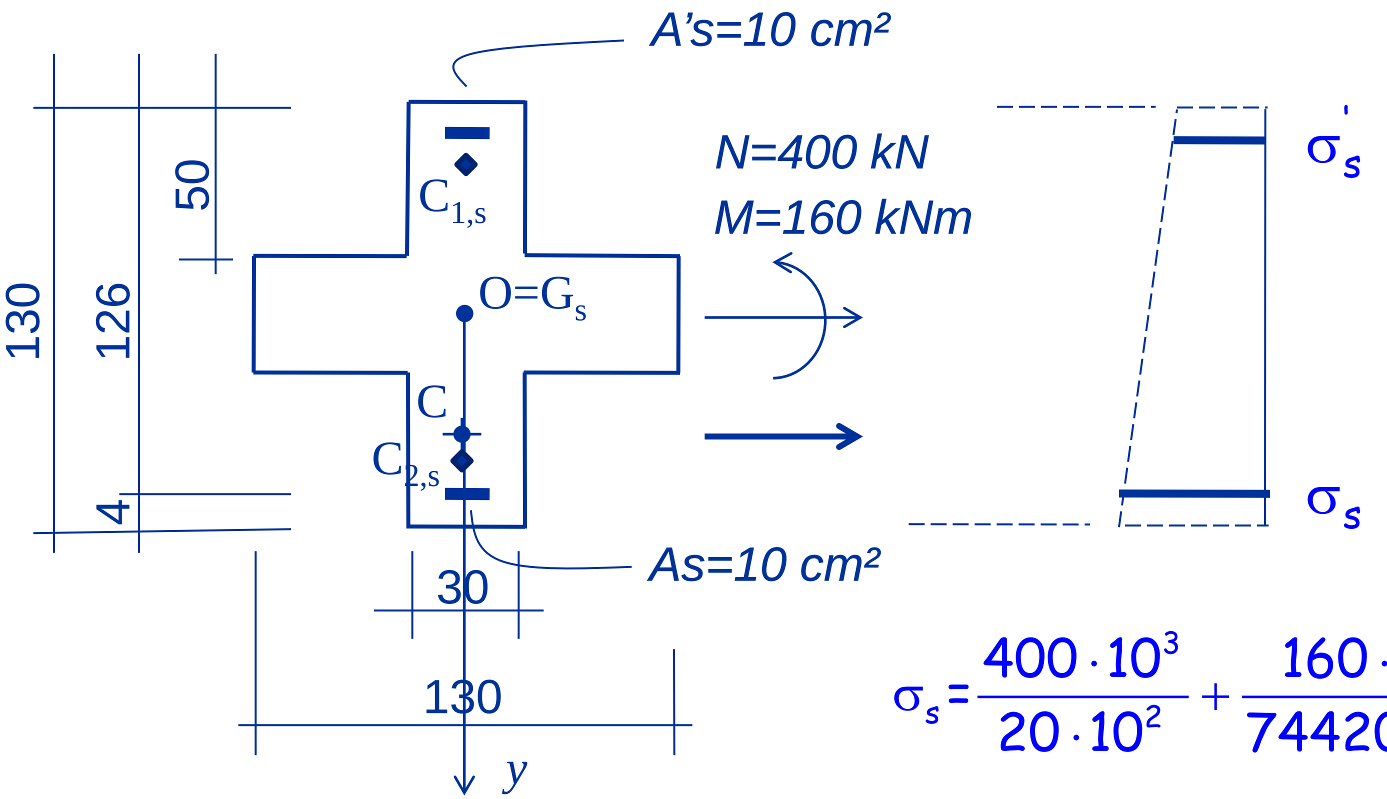
$$e_1 = \frac{I_x}{A\, d_{G,inf}} = \frac{74420}{20 \cdot 65} = 57.25 \text{ cm}$$

$$e_2 = e_1$$

$$e_x = \frac{M_x}{N} = \frac{160}{400} = 0.40 \text{ m}$$

Esempio n. 8

2° stadio



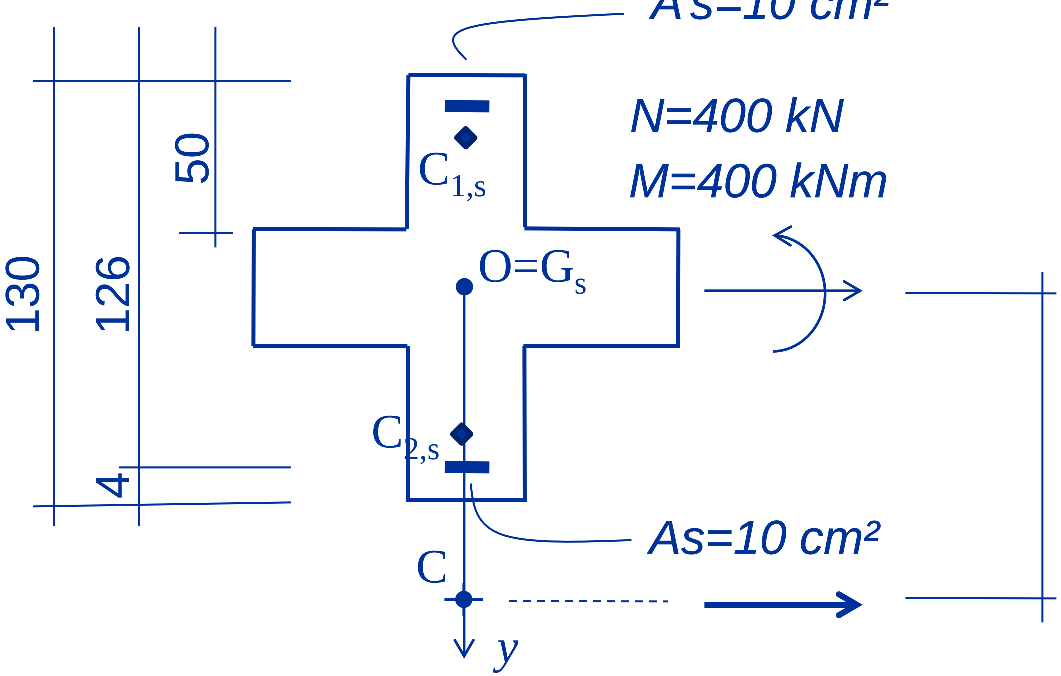
$$\sigma_s = \frac{400 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^2} + \frac{160 \cdot 10^6}{74420 \cdot 10^4}(61 \cdot 10)$$

$$= 331.1 \text{ MPa}$$

$$\sigma_s' = 200 + 0.215(-610) = 68.9 \text{ MPa}$$

Esempio n. 9

2° stadio



Centro di sollecitazione esterno al nocciolo delle sole armature:

SEZIONE PARZIALIZZATA

e_x=*1* m

$$e_x = \frac{M_x}{N} = \frac{400}{400} = 1\,m$$

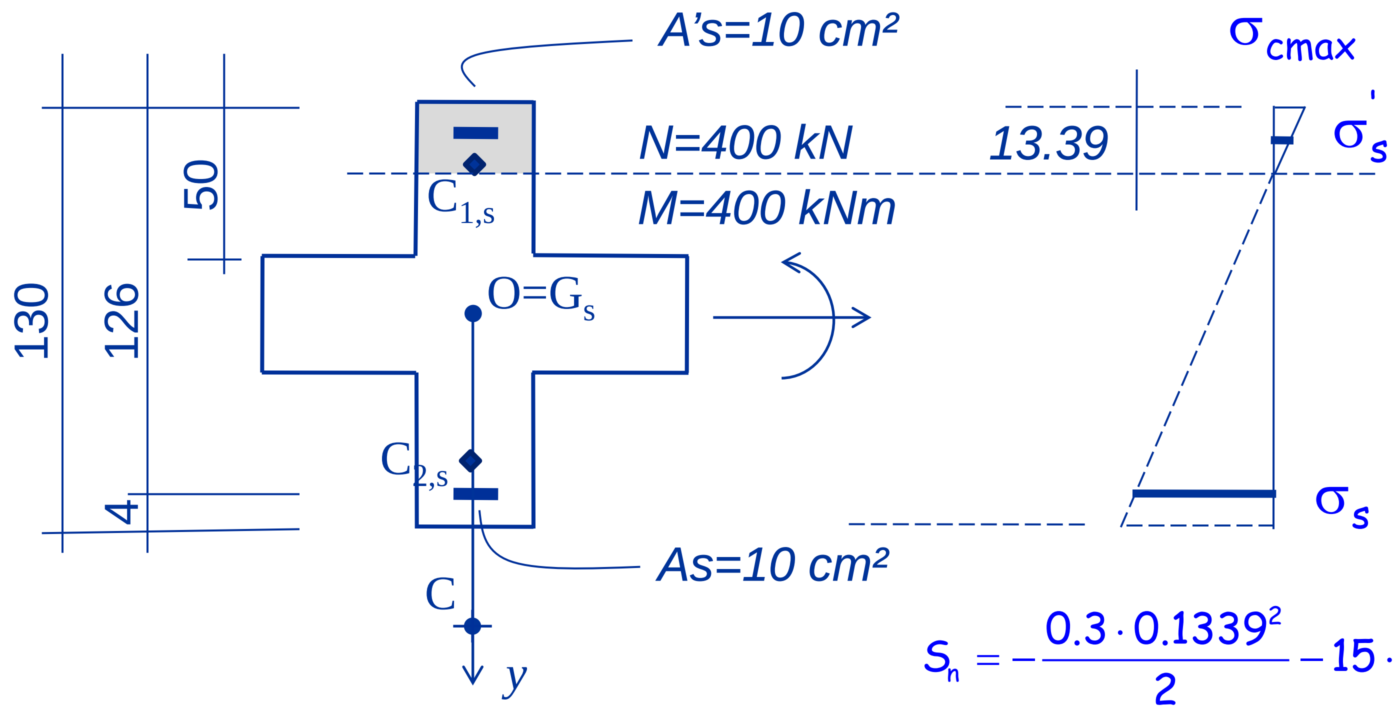
$$x^3 - 4.95x^2 - 0.60x - 0.16674 = 0$$

⇩

x=13.39 cm

Esempio n. 9

2° stadio



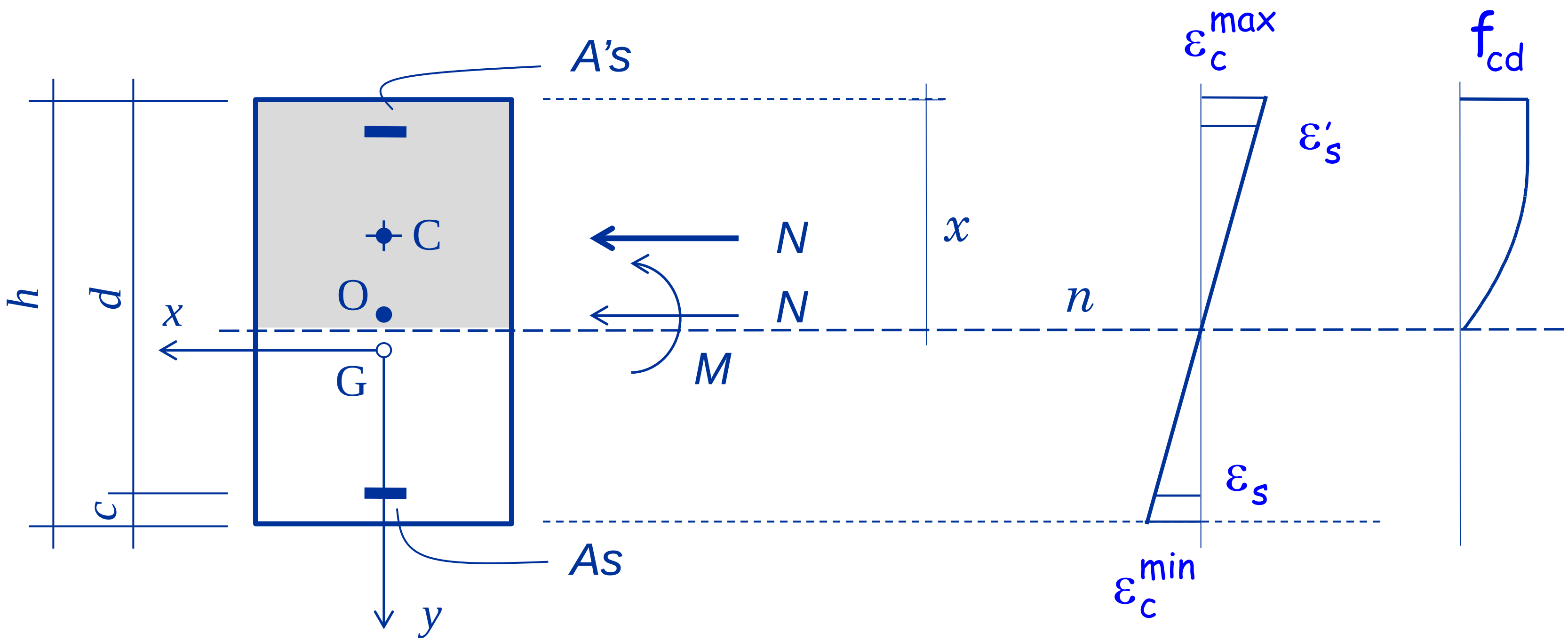
$$S_n = -\frac{0.3 \cdot 0.1339^2}{2} - 15 \cdot 10 \cdot 10^{-4} \cdot 0.0939 +$$
$$15 \cdot 10 \cdot 10^{-4} \cdot (1.26 - 0.1339) = 0.01279 \text{ m}^3$$

$$\sigma_{cmax} = \frac{400 \cdot 10^3}{0.01279 \cdot 10^9}\left(-0.01339 \cdot 10^3\right)$$
$$= -4.19 \text{ MPa}$$

$$\sigma_s = 15 \cdot 0.03127 \ (1260 - 133.9)$$
$$= 528.2 \text{ MPa}$$

Flessione composta

3° stadio



Dati:

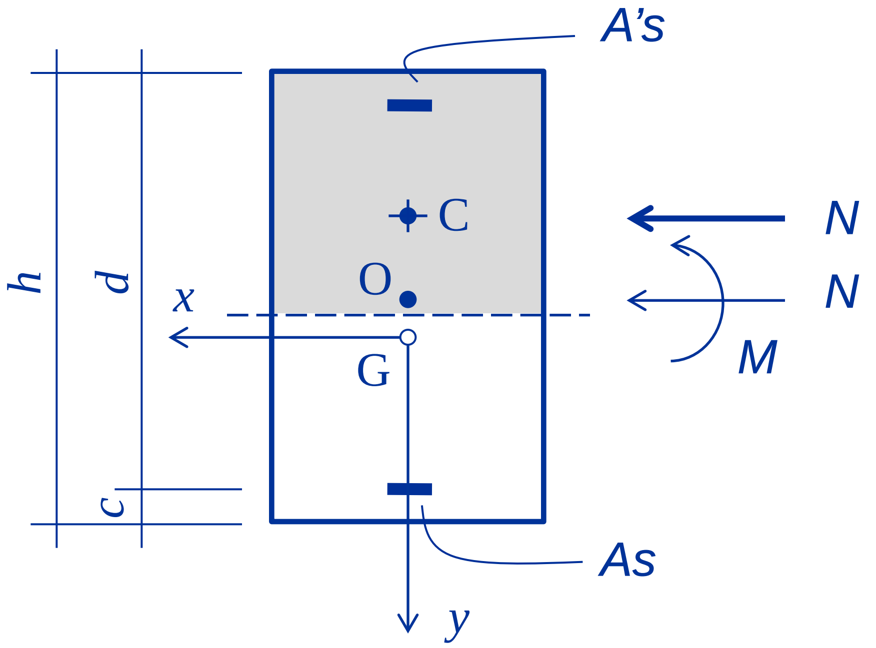
- Geometria della sezione
- Armature
- Coppia M_{Ed}-N_{Ed}

Incognite:

Momento resistente M_{Rd} corrispondente a N_{Ed}

Flessione composta

3° stadio

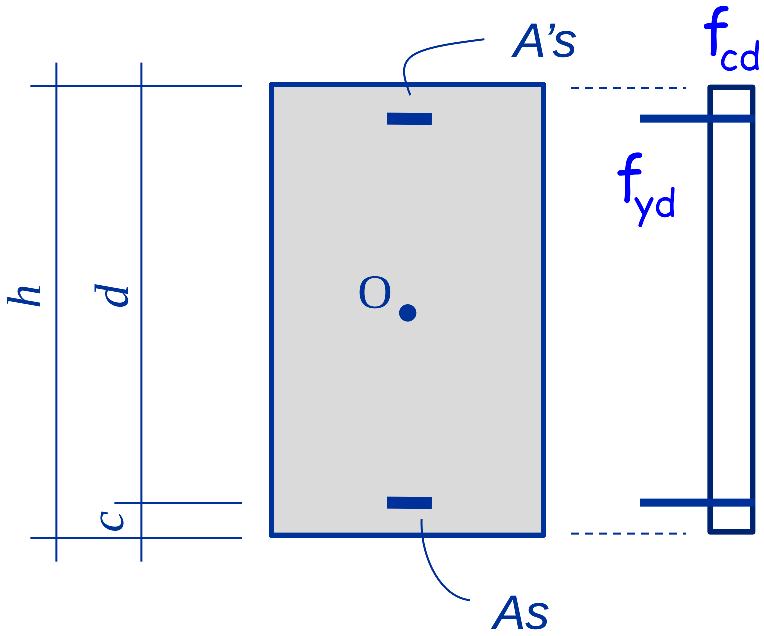


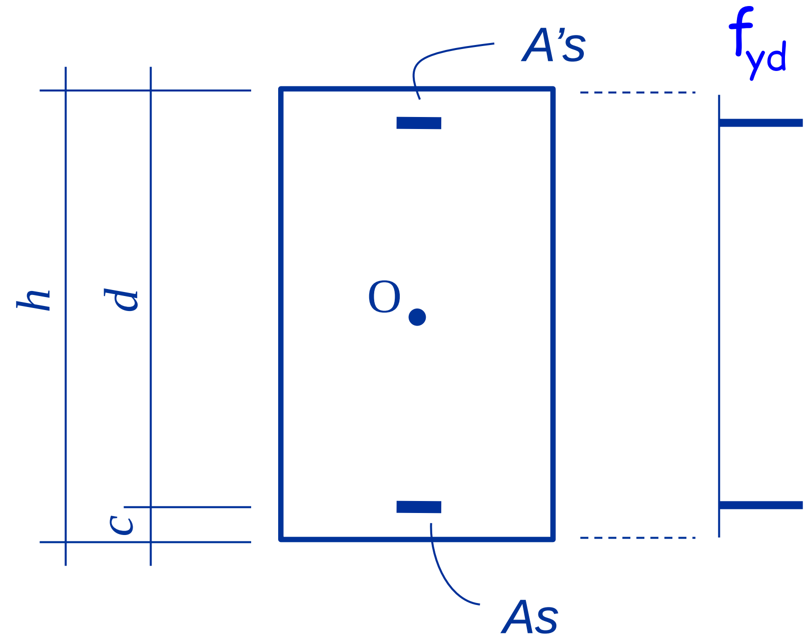
Procedura:

1. Individuazione dell'asse neutro
2. Calcolo delle tensioni
3. Calcolo del momento resistente

Massimo sforzo normale

3° stadio





Massimo sforzo di compressione

$$N_{Rd} = -\left(A_c\, f_{cd} + A_{s,tot}\, f_{yd}\right)$$

Massimo sforzo di trazione

$$N_{Rd} = A_{s,tot}\, f_{yd}$$

Individuazione asse neutro

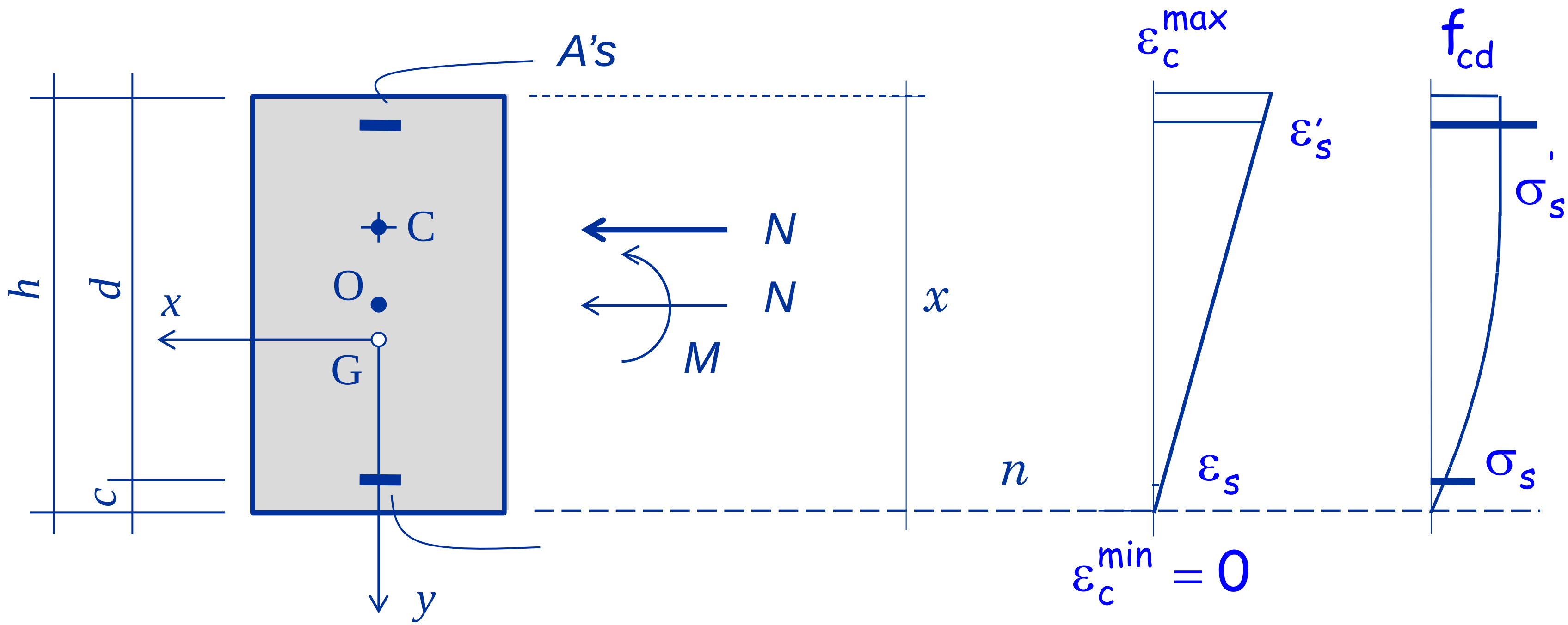
3° stadio

Avendo posto solo un limite alla deformazione massima del calcestruzzo, esistono due possibilità relativamente ai diagrammi di deformazione :

Sezione parzializzata　　　Sezione tutta compressa

Individuazione asse neutro

3° stadio

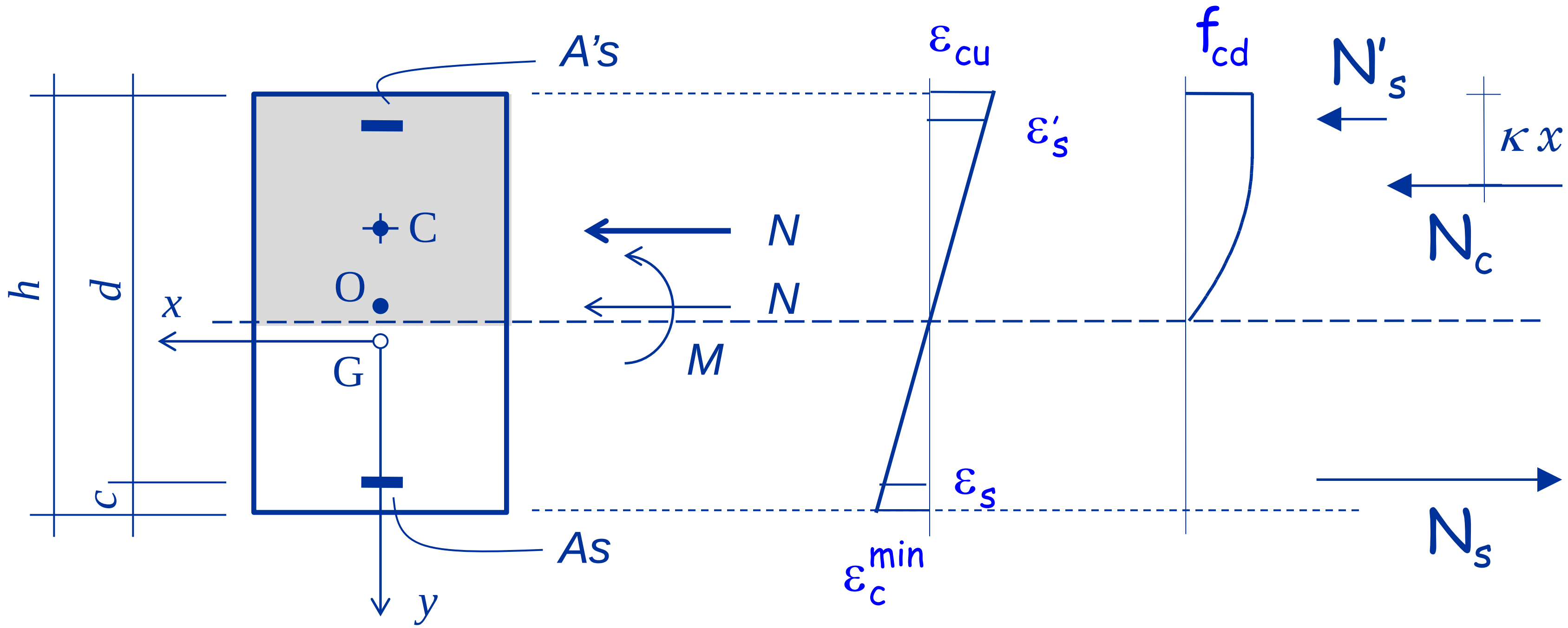


Lo sforzo normale corrispondente al diagramma di passaggio tra sezioni parzializzate e tutte compresse è:

$$N_{Rd} = -\beta A_c f_{cd} + \sum A_{s,i} \sigma_{s,i}$$

Individuazione asse neutro

3° stadio (sezione parzializzata)

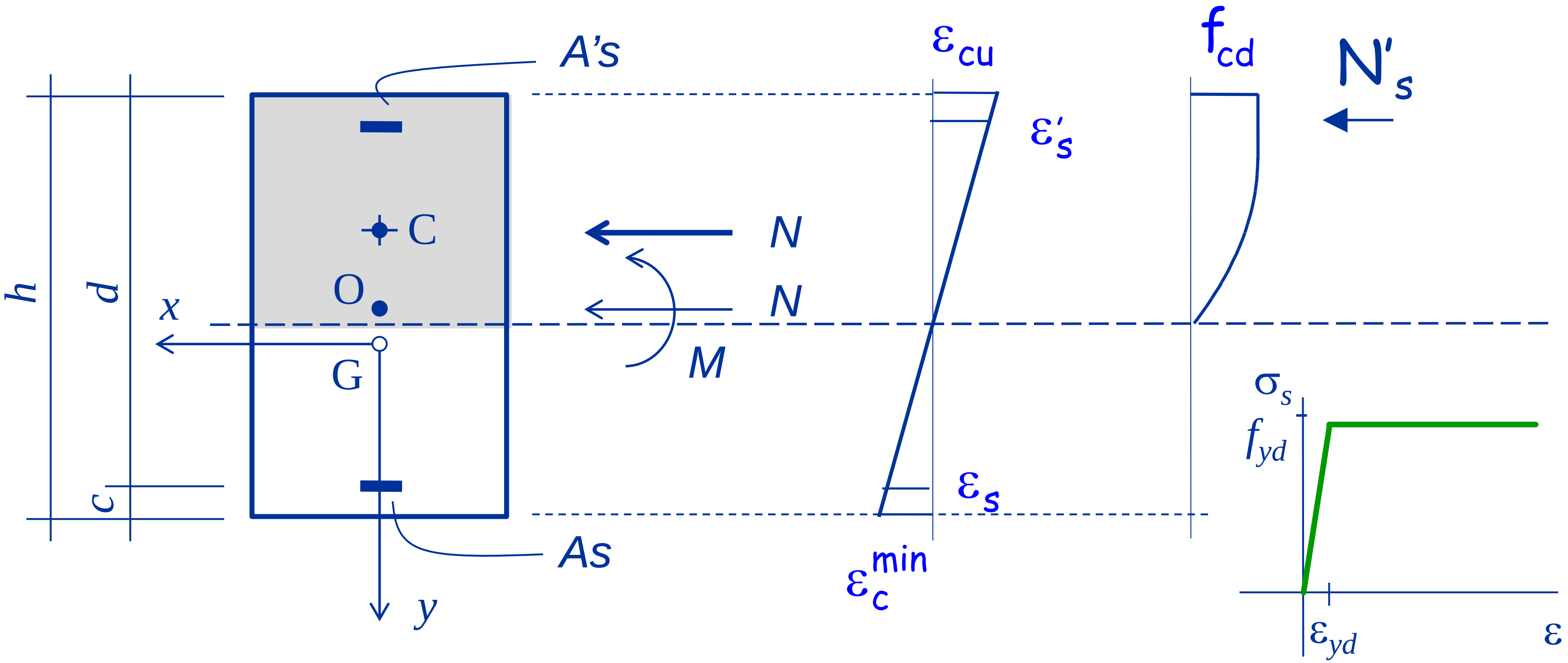


1. Individuazione dell'asse neutro:

$N_c + N'_s + N_s = N_{Ed}$
(equilibrio alla traslazione)

Risultante delle tensioni

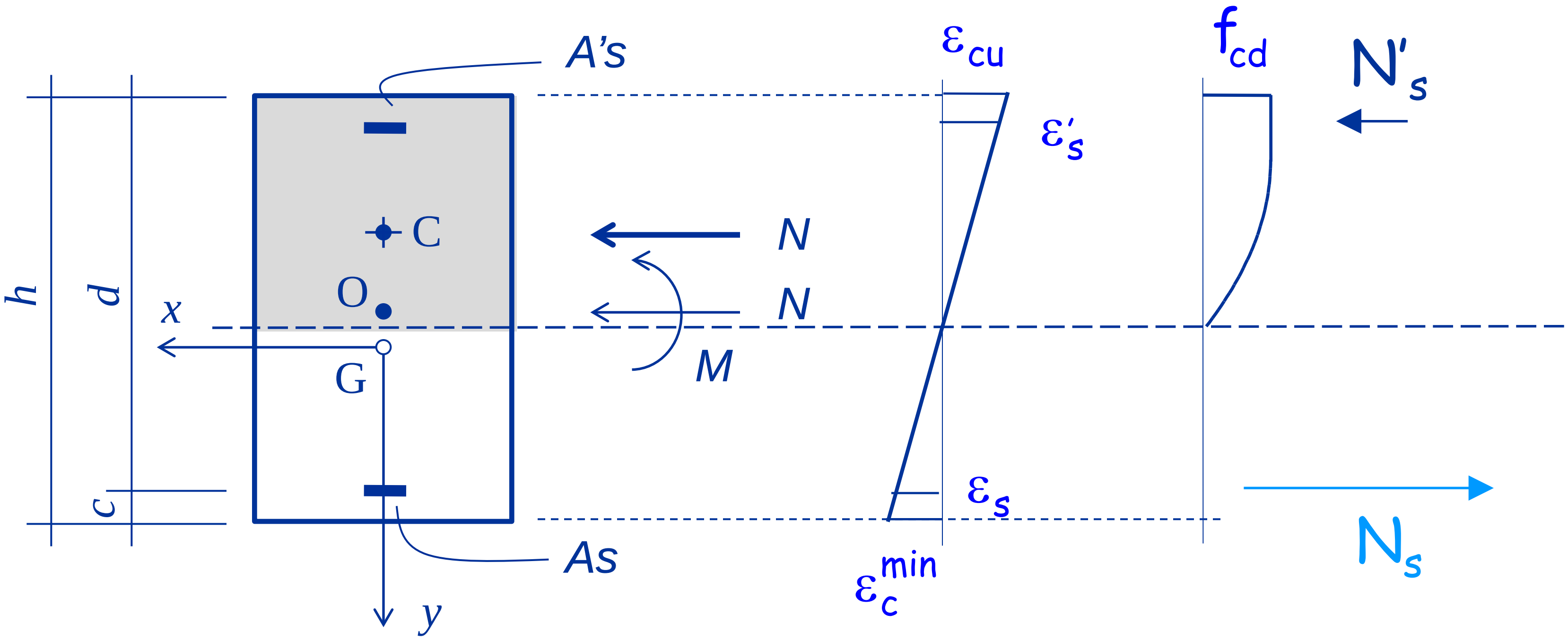
armatura compressa (sezione parzializzata)



$$\varepsilon_s' = \frac{x-c}{x}\varepsilon_{cu} \quad \begin{cases} \text{se } \varepsilon'_s > \varepsilon_{yd} \Rightarrow \sigma_s' = f_{yd} \Rightarrow N_s' = A_s' \, f_{yd} \\ \text{se } \varepsilon'_s \le \varepsilon_{yd} \Rightarrow \sigma_s' = \dfrac{\varepsilon_s'}{\varepsilon_{yd}} f_{yd} \Rightarrow N_s' = A_s' \, \sigma_s' \end{cases}$$

Risultante delle tensioni

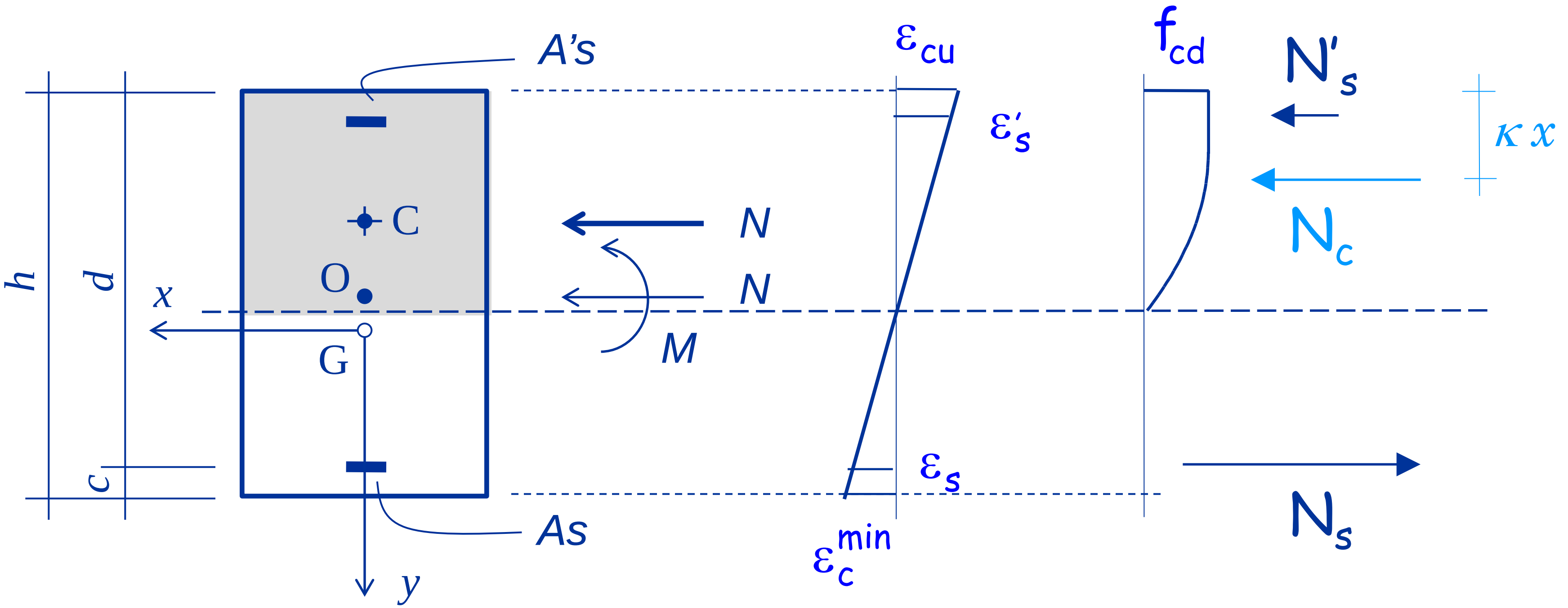
armatura compressa (sezione parzializzata)



$$\varepsilon_s = \frac{d-x}{x}\varepsilon_{cu} \quad \begin{cases} \text{se } \varepsilon_s > \varepsilon_{yd} \quad \Rightarrow \sigma_s = f_{yd} \quad \Rightarrow N_s = A_s\, f_{yd} \\ \text{se } \varepsilon_s \leq \varepsilon_{yd} \quad \Rightarrow \sigma_s = \dfrac{\varepsilon_s}{\varepsilon_{yd}} f_{yd} \quad \Rightarrow N_s = A_s\, \sigma_s \end{cases}$$

Risultante delle tensioni

armatura compressa (sezione parzializzata)



$N_c = \beta \; b \, x \, f_{cd}$

per sezione rettangolare, $\beta = 0.810$

Calcolo dell'asse neutro

Sezione rettangolare parzializzata

Per sezione parzializzata e con armature snervate, si ottiene un'equazione di primo grado che ha come soluzione

$$x = \frac{(A_s - A'_s)\, f_{yd} - N_{Ed}}{\beta\, b\, f_{cd}}$$

N_{Ed} positivo se trazione

Una volta trovata la profondità dell'asse neutro occorre verificare che le armature siano snervate. Se ciò accade la soluzione trovata è corretta.

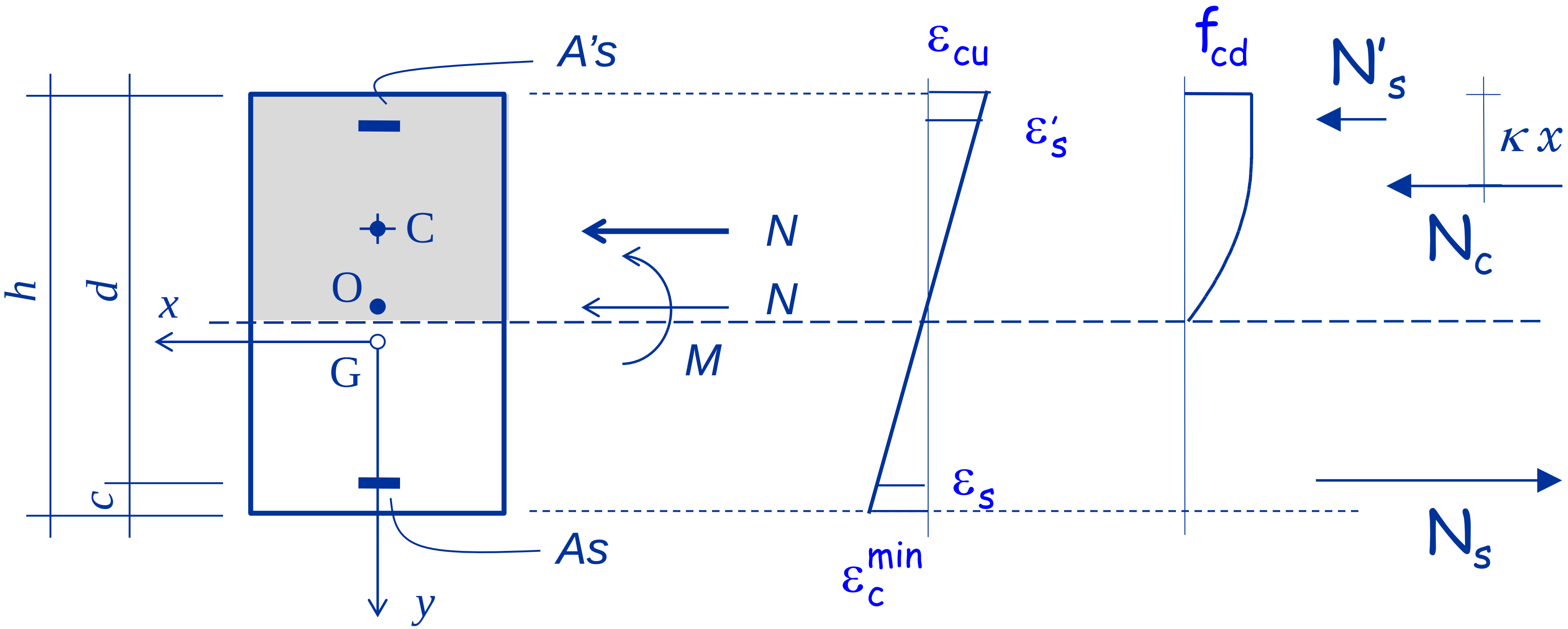
Calcolo dell'asse neutro

Sezione rettangolare parzializzata

Se almeno una delle armature non è snervata,
la soluzione dell'equazione va ricercata per tentativi, ossia fissando valori della profondità dell'asse neutro e verificando il soddisfacimento dell'equilibrio alla traslazione longitudinale:

$$N_c + N'_s + N_s = N_{Ed}$$

Momento resistente



3. Calcolo del momento resistente

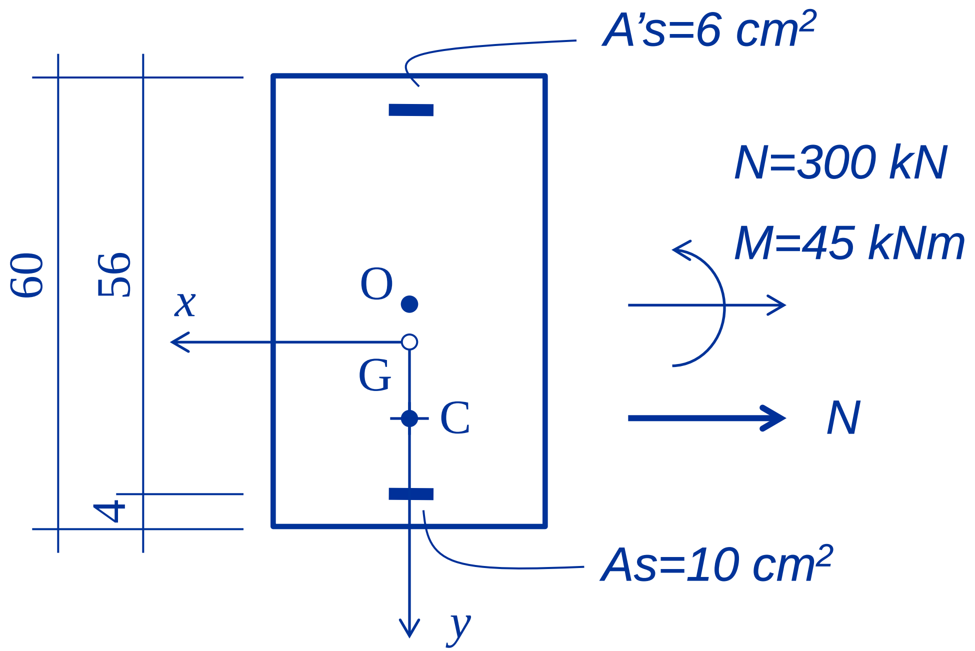
(rispetto al baricentro della sezione)

$$M_{Rd} = (N_s - N'_s)\,(h/2 - c) - N_c\,(h/2 - \kappa\, x)$$

per sezione rettangolare, $\kappa = 0.416$

Esempio N.16

Sezione rettangolare tensoinflessa



Poiché N è di trazione la sezione è parzializzata

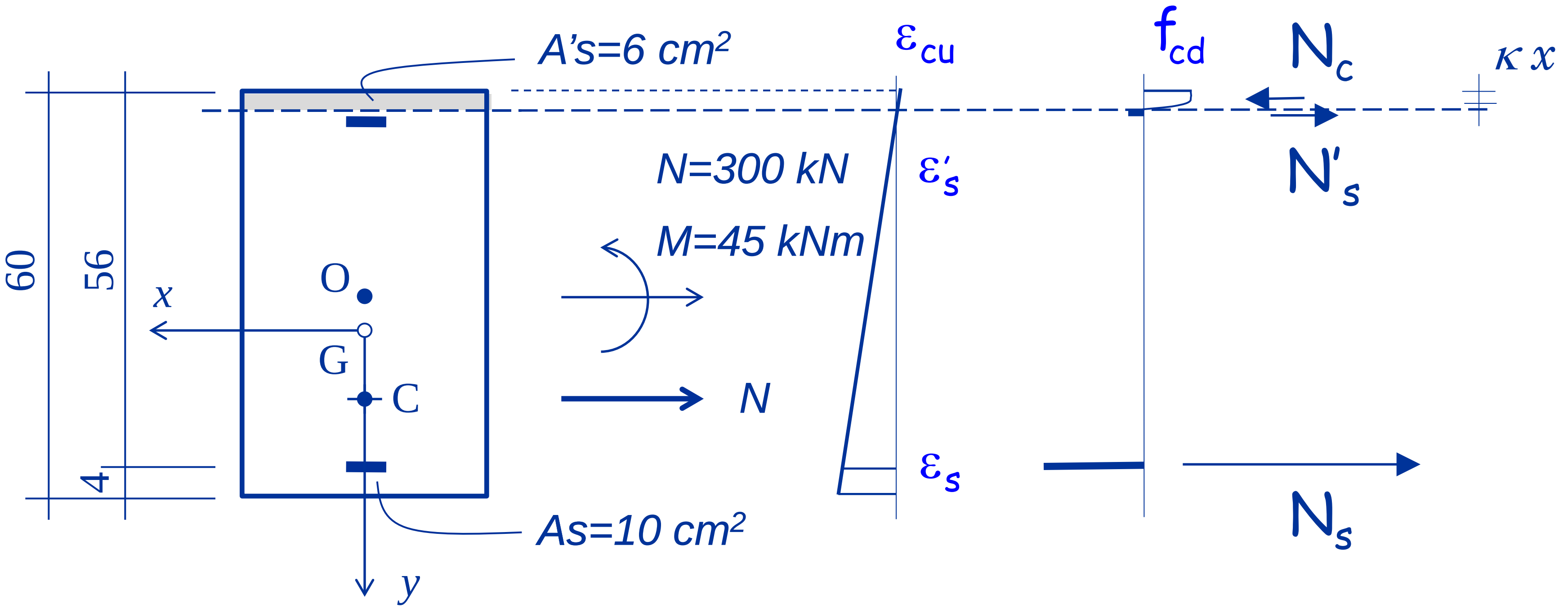
Se entrambe le armature fossero snervate sarebbe

$$x = \frac{(A_s - A'_s)\, f_{yd} - N_{Ed}}{\beta\, b\, f_{cd}} = -4.18 \;\; cm$$

ma questo valore non è accettabile (è negativo)

Esempio N.16

Sezione rettangolare tensoinflessa



L'equilibrio alla traslazione longitudinale è rispettato se x=3.69 cm

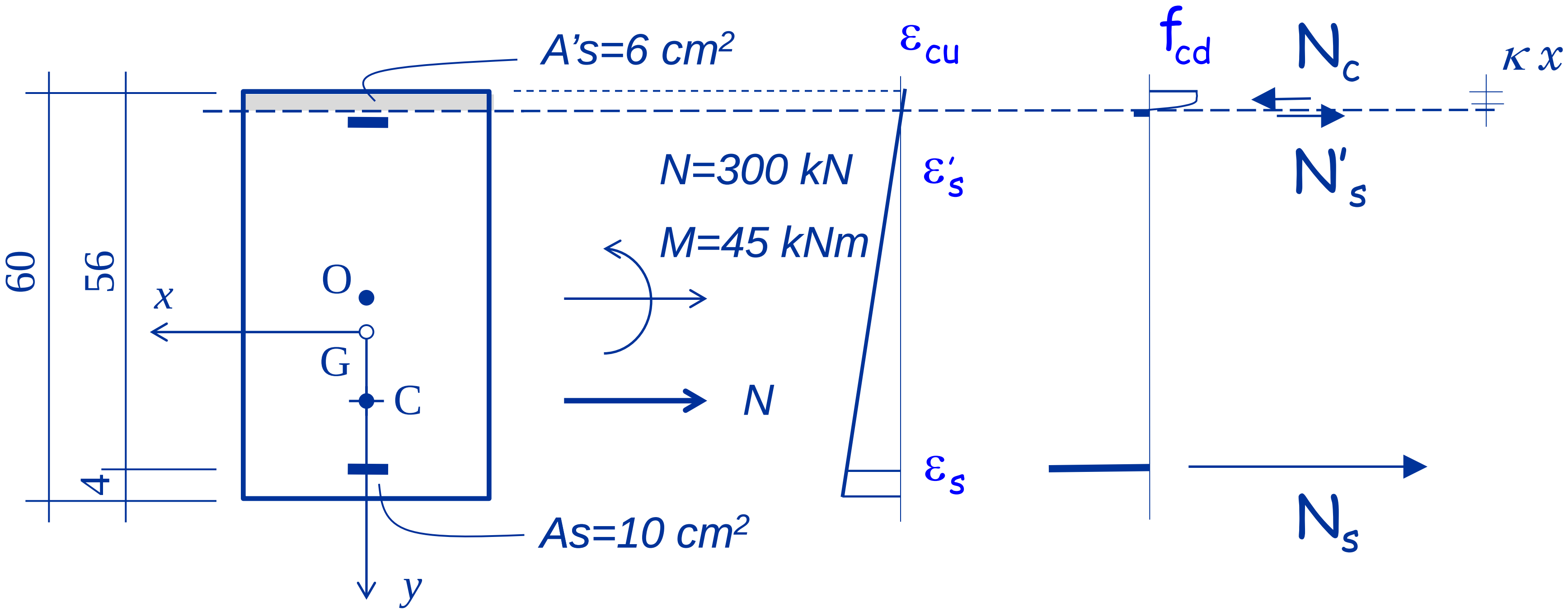
$\varepsilon_s = 0.04966$ $\quad \varepsilon_s' = 0.00030$

$\sigma_s = 391.3$ MPa $\quad \sigma_s' = 59.4$ MPa

$$N = \underbrace{391.3}_{N_s} + \underbrace{35.7}_{N_s'} \underbrace{-127.0}_{N_c} = -300 \text{ kN}$$

Esempio N.16

Sezione rettangolare tensoinflessa



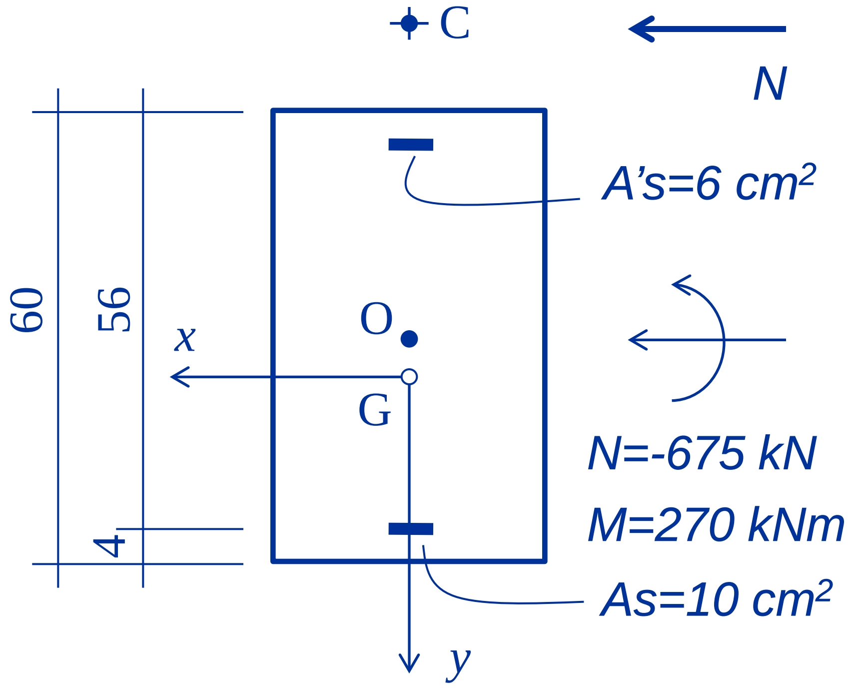
L'equilibrio alla rotazione intorno ad O fornisce il momento resistente

$$M_{Rd} = (N_s - N'_s)\,(h/2 - c) - N_c\,(h/2 - \kappa\, x)$$

$$M_{Rd} = \left[(391.3 - 35.7)\cdot 26 - (-127)\cdot(30 - 0.416\cdot 3.69)\right]10^{-2} = 128.6\,\mathrm{kNm}$$

Esempio N.17

Sezione rettangolare pressoinflessa



Se si immagina x=h si ha:

$$\varepsilon_s = -0.00023$$

$$\varepsilon_s^{'} = -0.00327$$

$$\sigma_s = -46.7 \text{ MPa}$$

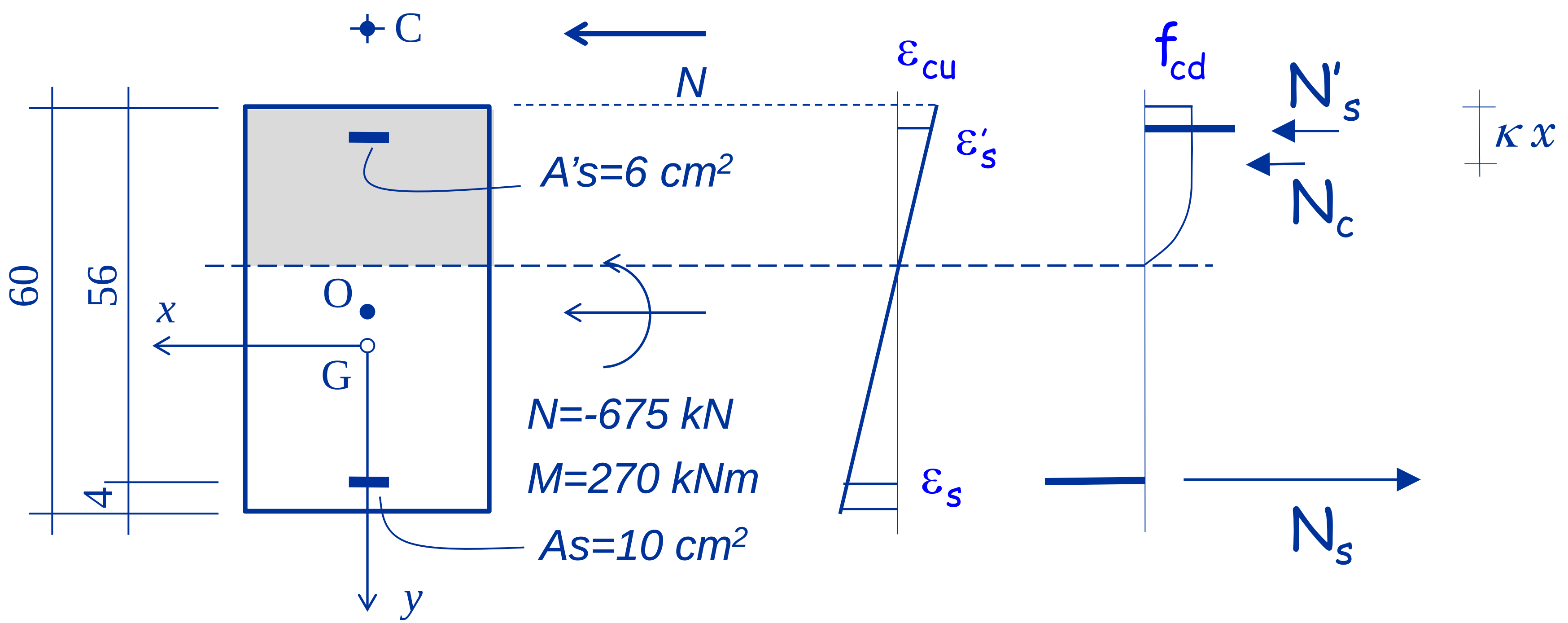
$$\sigma_s^{'} = -391.3 \text{ MPa}$$

$$N = \underbrace{-46.7}_{N_s} \underbrace{-234.8}_{N_s^{'}} \underbrace{-2066.0}_{N_c} = -2347.5 \text{ kN}$$

Lo sforzo normale di compressione è inferiore. Pertanto, la sezione è parzializzata

Esempio N.17

Sezione rettangolare pressoinflessa



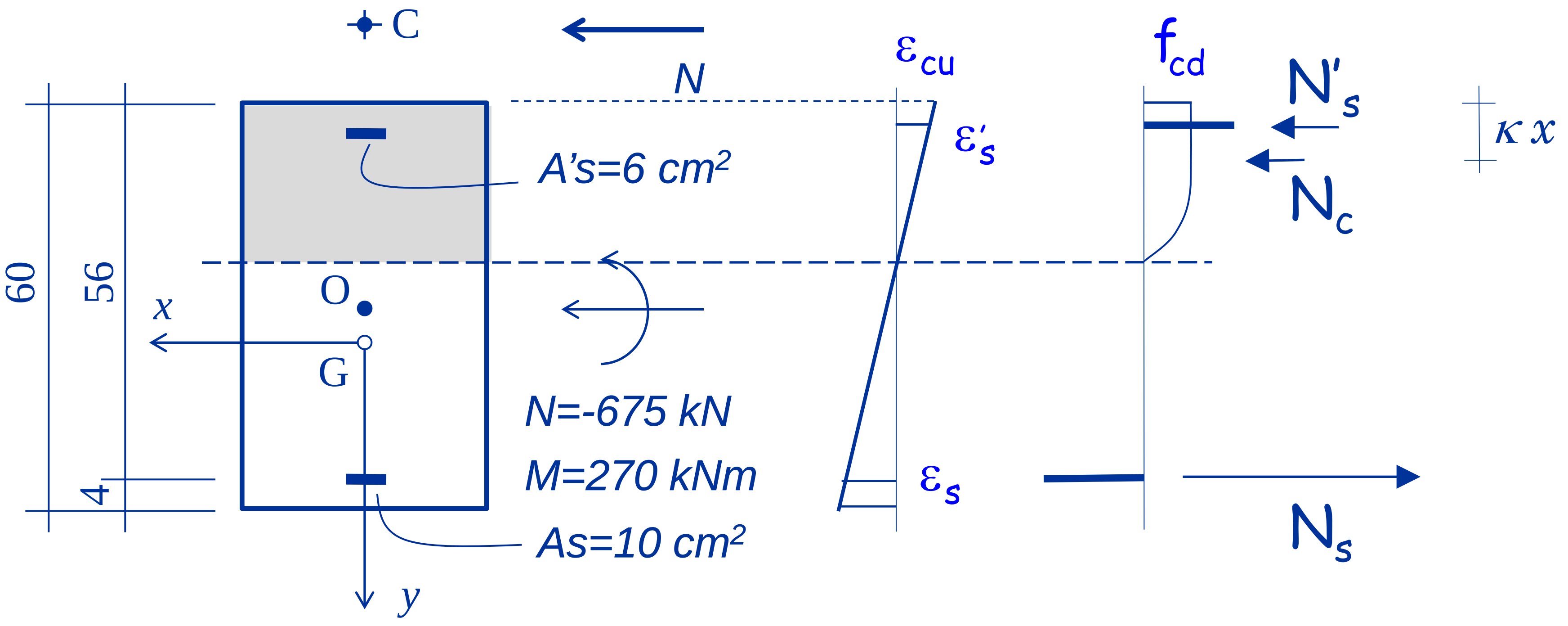
L'equilibrio alla traslazione longitudinale è rispettato se x=24.15 cm

$$\overset{N_s}{391.3} - \overset{N'_s}{234.8} - \overset{N_c}{831.5}$$

$$N = 391.3 - 234.8 - 831.5 = -675.0 \text{ kN}$$

Esempio N.17

Sezione rettangolare pressoinflessa



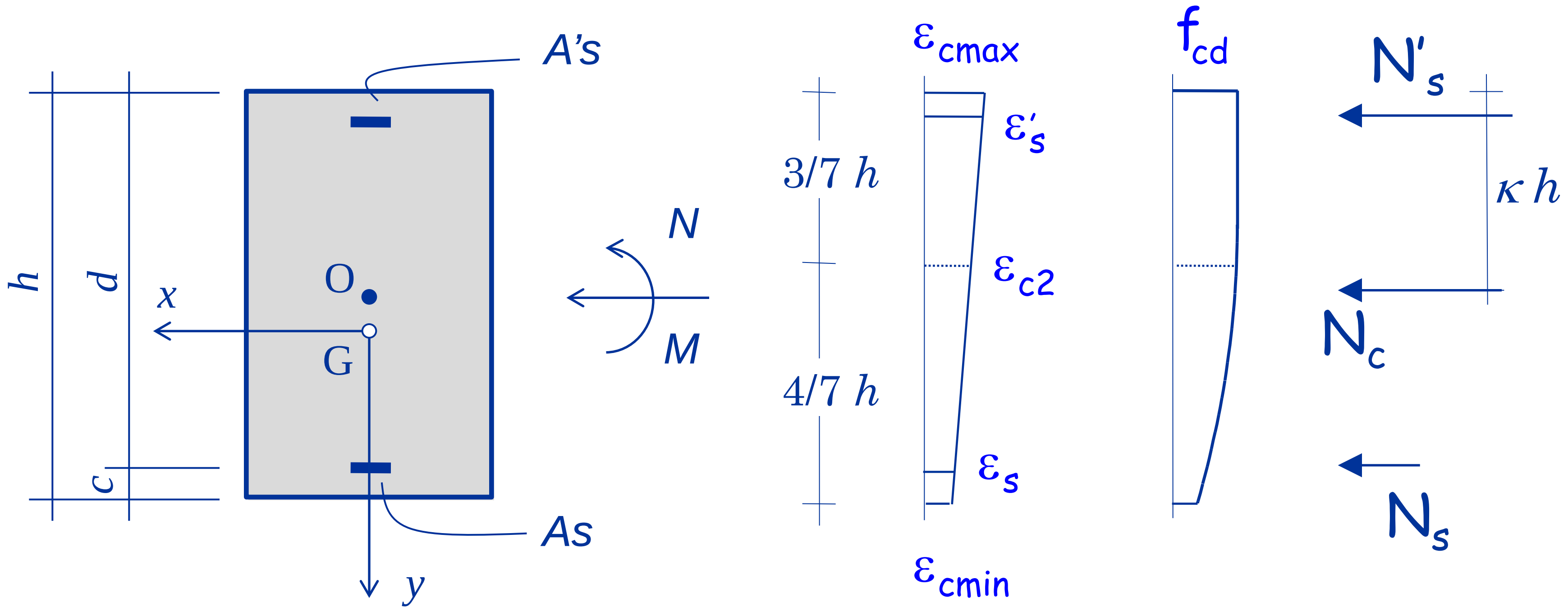
L'equilibrio alla rotazione intorno ad O fornisce il momento resistente

$$M_{Rd} = (N_s - N'_s)\,(h/2 - c) - N_c\,(h/2 - \kappa\, x)$$

$$M_{Rd} = \left[(391.3 + 234.8)\cdot 26 - (-831.5)\cdot(30 - 0.416\cdot 24.15)\right]10^{-2} = 328.7\,\text{kNm}$$

Calcolo dell'asse neutro

Sezione rettangolare tutta compressa



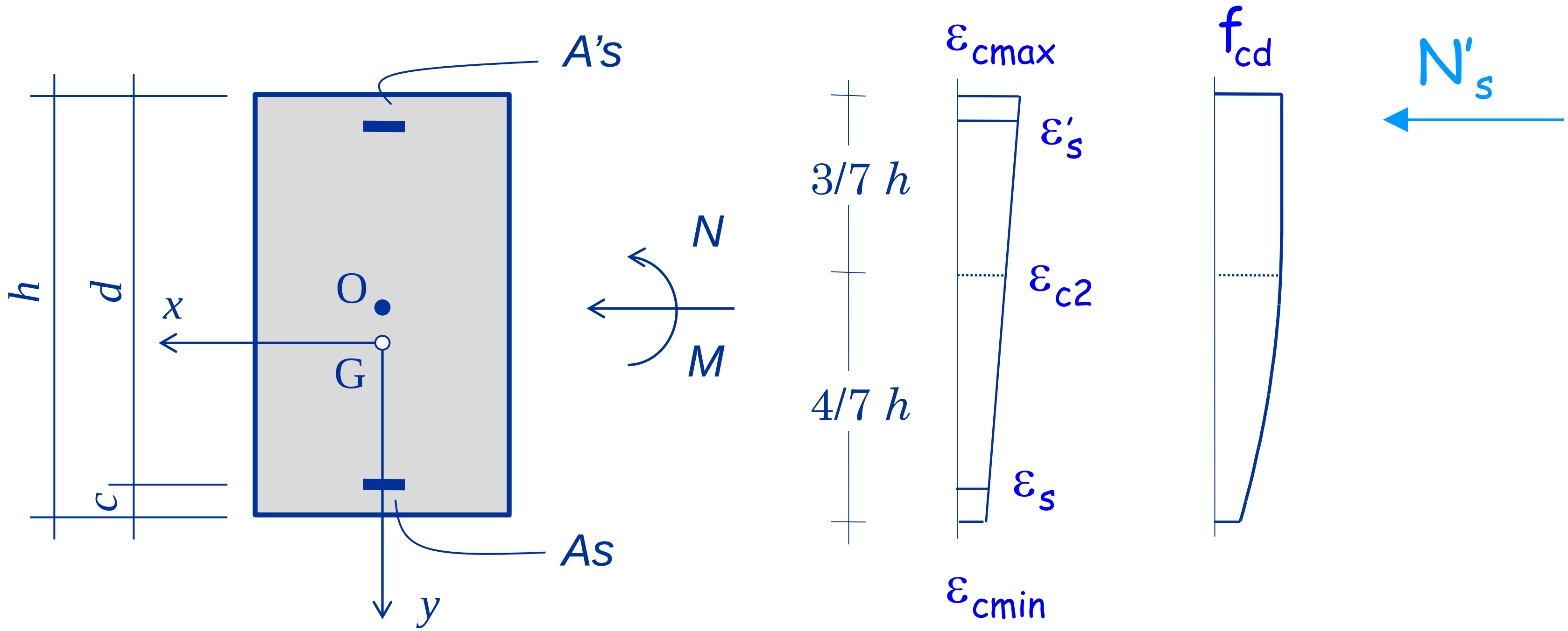
1. Individuazione dell'asse neutro:

$$N_c + N'_s + N_s = N_{Ed}$$

(equilibrio alla traslazione)

Risultante delle tensioni

armatura superiore (sezione tutta compressa)

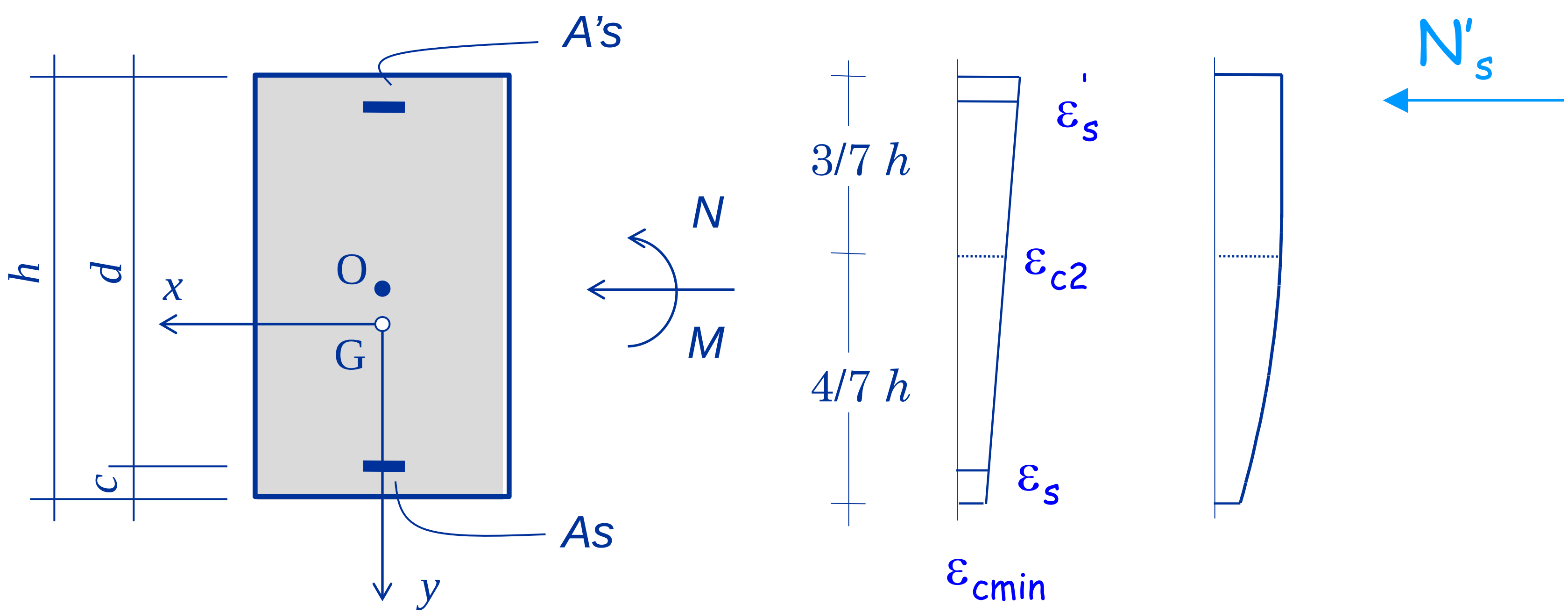


$$\varepsilon'_s = \varepsilon_{c2}\left[\frac{d}{4/7\,h}\left(1-\eta_{min}\right)+\eta_{min}\right]$$

dove $\eta_{min} = \dfrac{\varepsilon_{c,min}}{\varepsilon_{c2}}$

Risultante delle tensioni

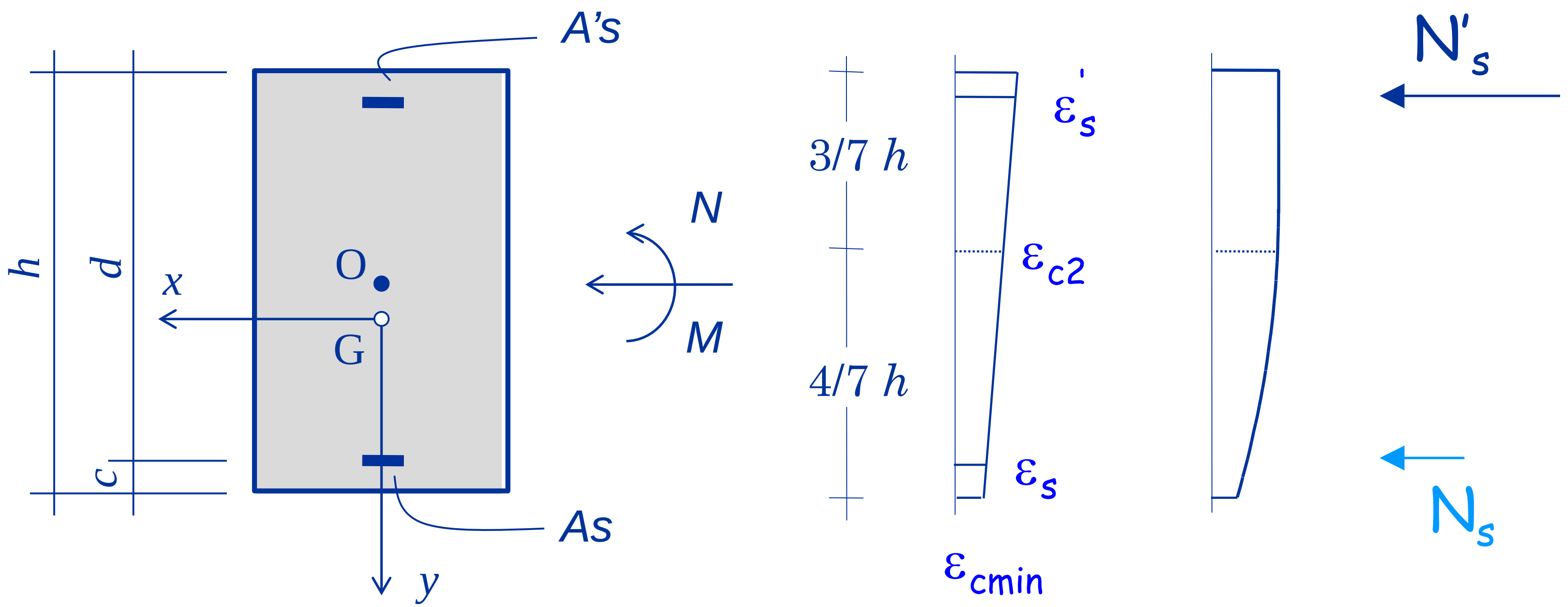
armatura superiore (sezione tutta compressa)



$$\text{noto } \varepsilon'_s \Rightarrow \begin{cases} \text{se } \varepsilon'_s < \varepsilon_{yd} \Rightarrow \sigma'_s = \dfrac{\varepsilon'_s}{\varepsilon_{yd}} f_{yd} \\ \text{se } \varepsilon'_s \geq \varepsilon_{yd} \Rightarrow \sigma'_s = f_{yd} \end{cases} \Rightarrow N'_s = A'_s \, \sigma'_s$$

Risultante delle tensioni

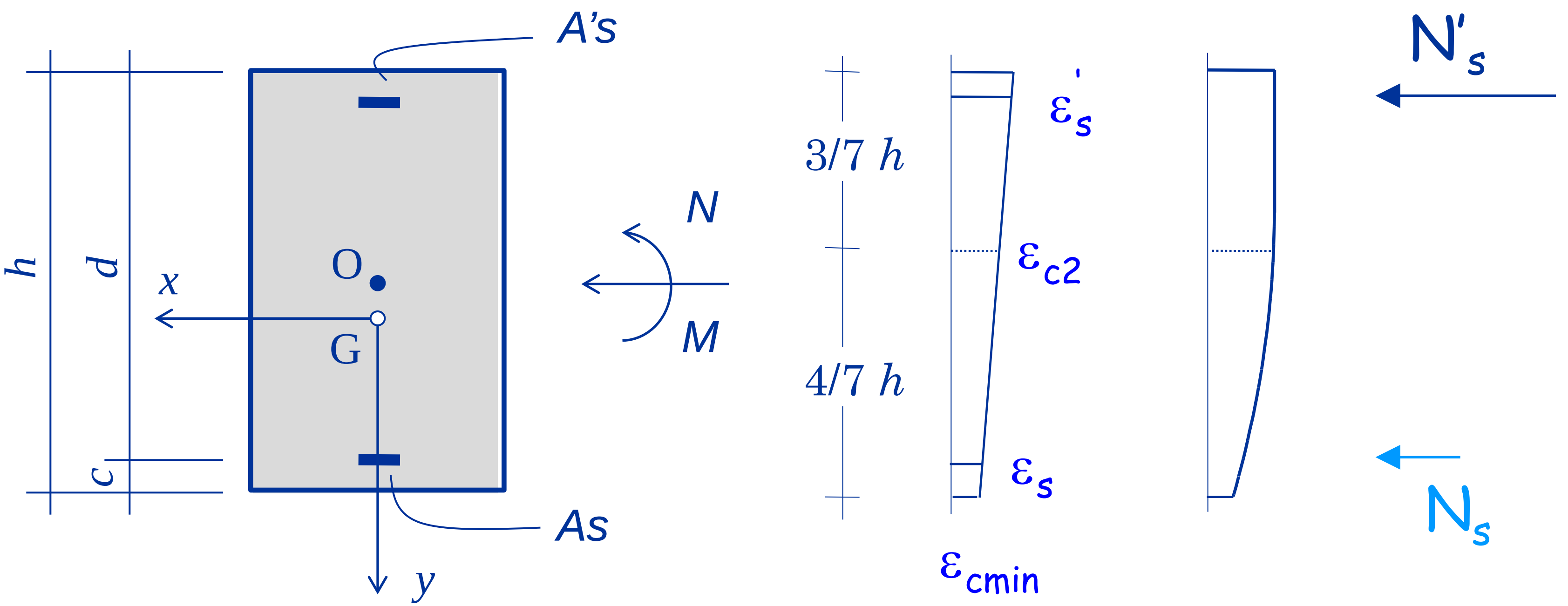
armatura inferiore (sezione tutta compressa)



$$\varepsilon_s = \varepsilon_{c2}\left[\frac{c}{4/7\,h}\left(1-\eta_{min}\right)+\eta_{min}\right] \qquad \text{dove} \quad \eta_{min} = \frac{\varepsilon_{c,min}}{\varepsilon_{c2}}$$

Risultante delle tensioni

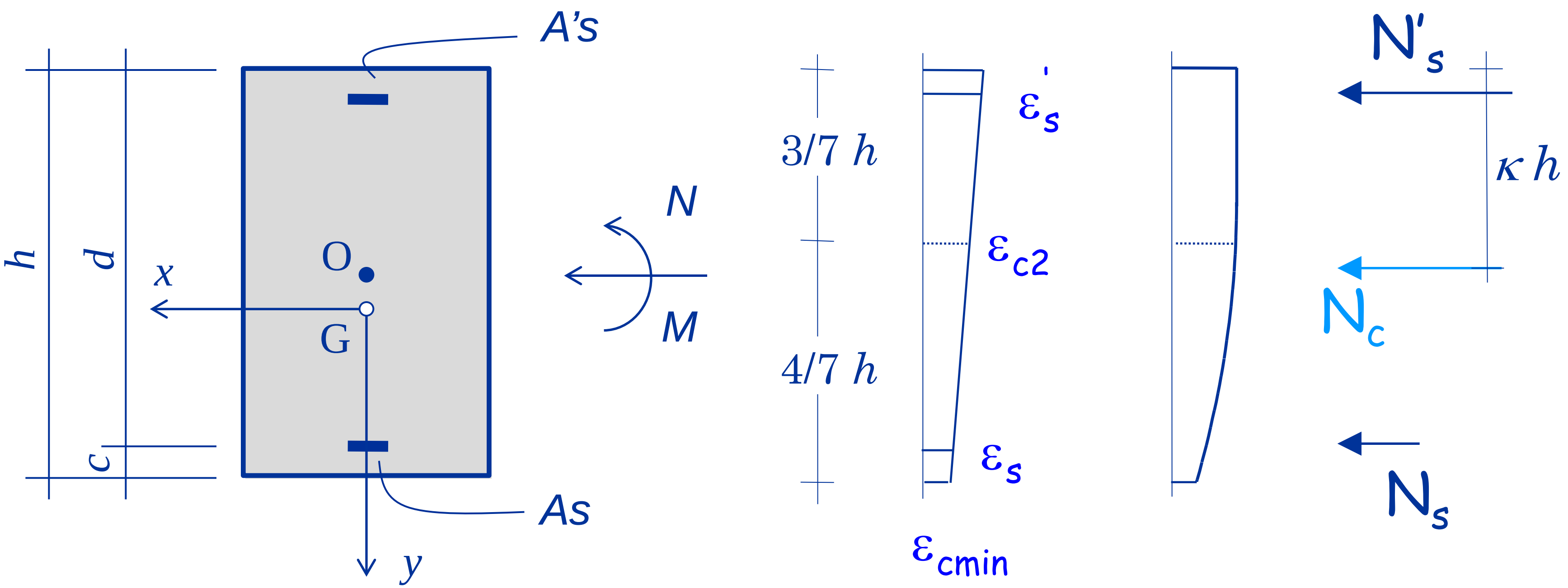
armatura inferiore (sezione tutta compressa)



$$\text{noto } \varepsilon_s \Rightarrow \begin{cases} \text{se } \varepsilon_s < \varepsilon_{yd} \Rightarrow \sigma_s = \dfrac{\varepsilon_s}{\varepsilon_{yd}} f_{yd} \\ \text{se } \varepsilon_s \geq \varepsilon_{yd} \Rightarrow \sigma_s = f_{yd} \end{cases} \Rightarrow N_s = A_s\, \sigma_s$$

Risultante delle tensioni

calcestruzzo (sezione tutta compressa)



$N_c = \beta \; b \; h \; f_{cd}$

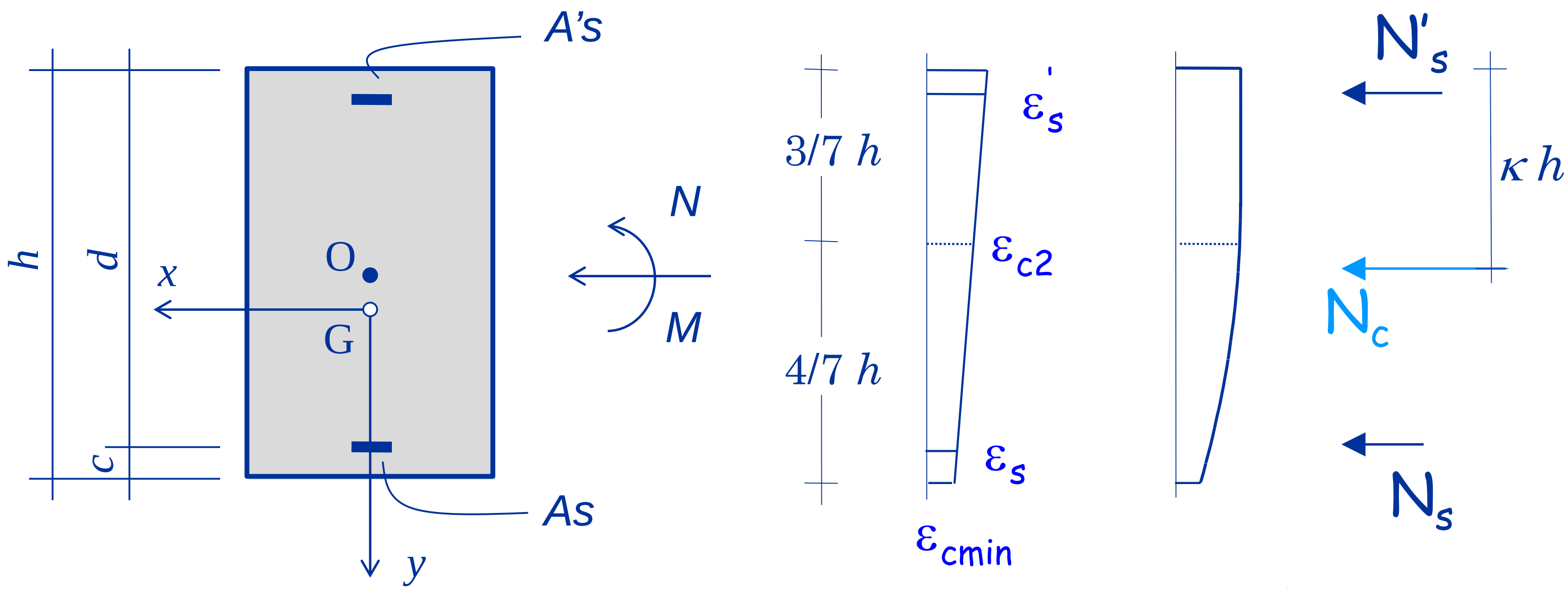
In questo caso β dipende da η_{min}

per sezione rettangolare: $\beta = 1 - \frac{4}{21}\left(1 - \eta_{min}\right)$

Valori di β per sezione rettangolare

η_{min}	β
0.0	0.810
0.1	0.846
0.2	0.878
0.3	0.907
0.4	0.931
0.5	0.952
0.6	0.970
0.7	0.983
0.8	0.992
0.9	0.998
1.0	1.000

Momento resistente



$$M_{Rd} = (N_s - N'_s)\,(h/2 - c) - N_c\,(h/2 - \kappa\, h)$$

2. Calcolo del momento resistente
(rispetto al baricentro O della sezione)

per sezione rettangolare:

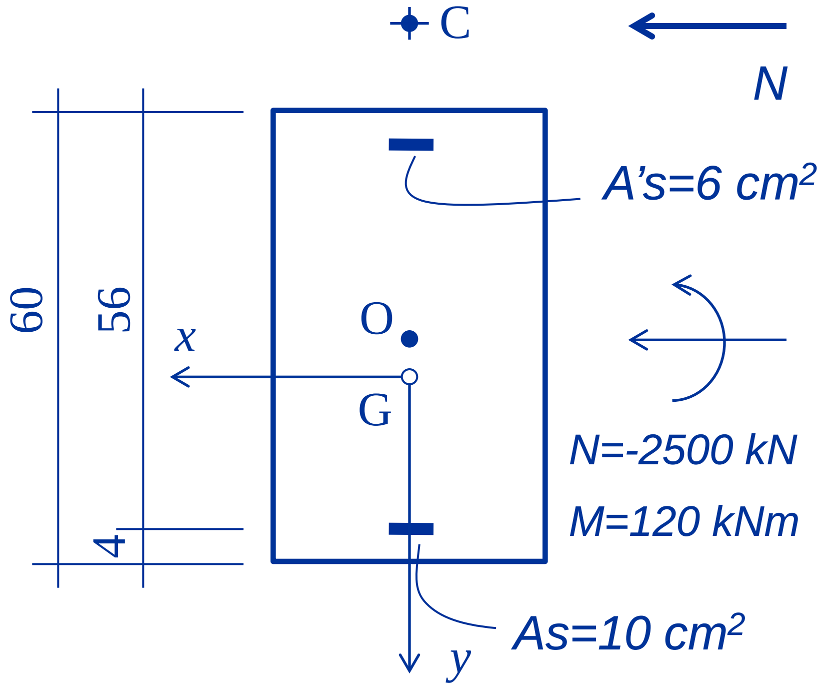
$$\kappa = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-16/49\,(1-\eta_{min})^2}{1-4/21\,(1-\eta_{min})^2}$$

Valori di β e k per sezione rettangolare

η_{min}	β	κ
0.0	0.810	0.416
0.1	0.846	0.435
0.2	0.878	0.450
0.3	0.907	0.463
0.4	0.931	0.474
0.5	0.952	0.482
0.6	0.970	0.489
0.7	0.983	0.494
0.8	0.992	0.497
0.9	0.998	0.499
1.0	1.000	0.500

Esempio N.18

Sezione rettangolare pressoinflessa

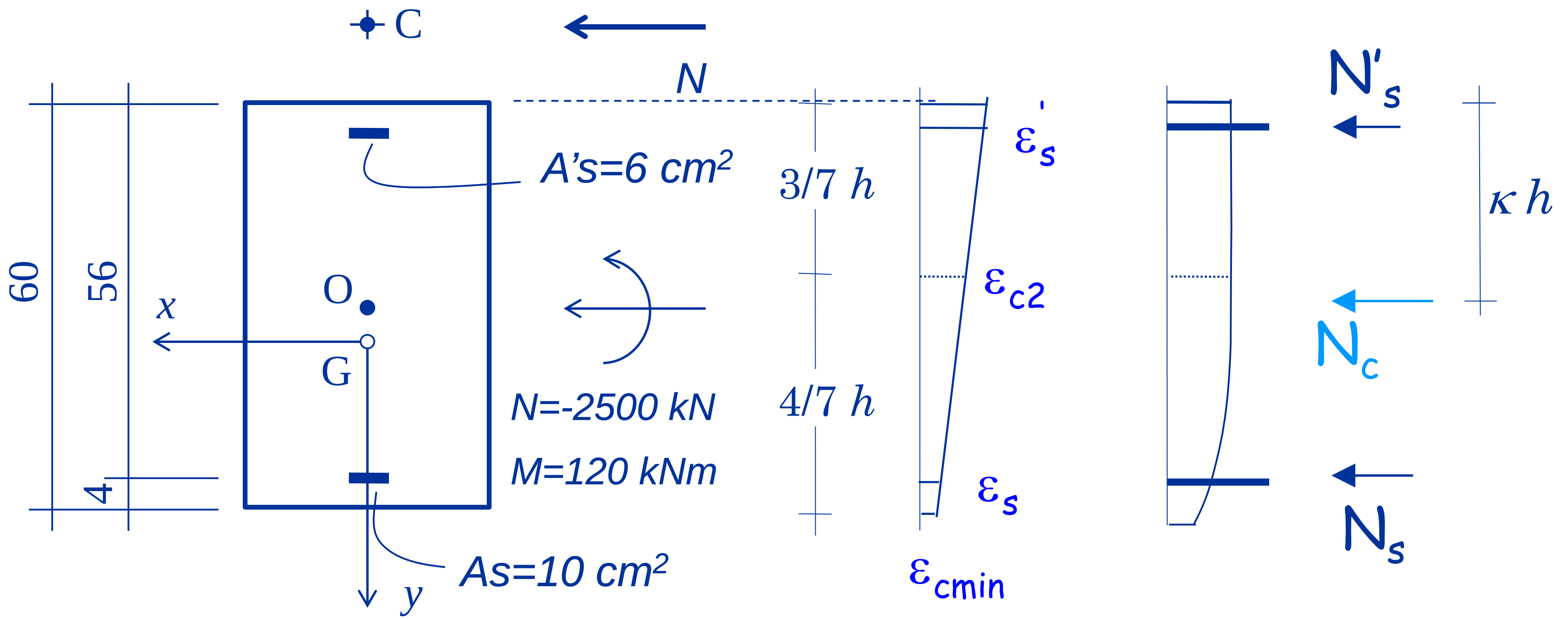


Lo sforzo normale di compressione (-2500 kN) è superiore a quello relativo a x=h (-2347.5 kN).

Pertanto, la sezione è completamente compressa

Esempio N.18

Sezione rettangolare pressoinflessa



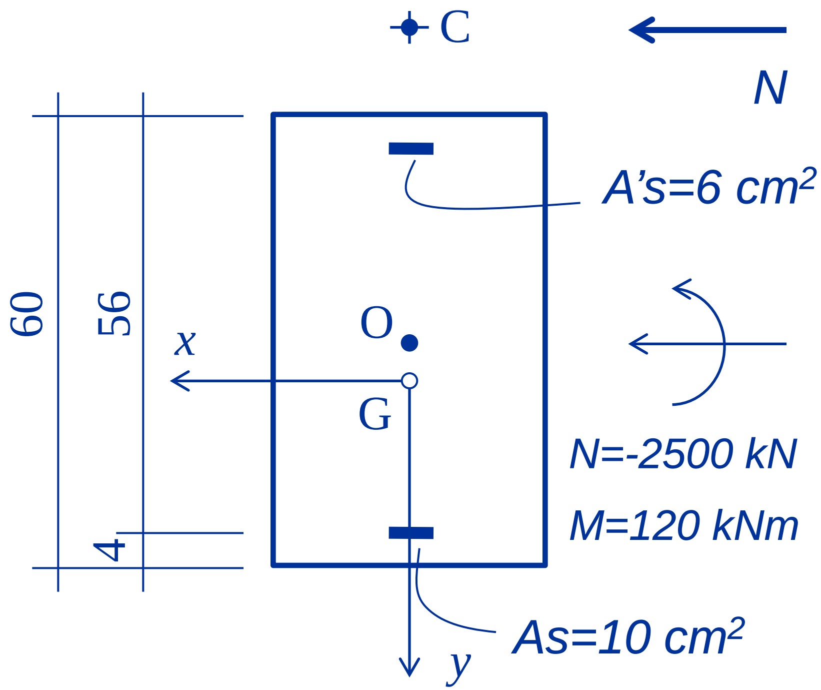
Se si immagina η=0.1215 h

$$\varepsilon_s = -\varepsilon_{c2}\left[\frac{c}{4/7\ \ h}\left(1-\eta_{min}\right)+\eta_{min}\right] = -0.0004479$$

$$\varepsilon_s = -\varepsilon_{c2}\left[\frac{d}{4/7\ \ h}\left(1-\eta_{min}\right)+\eta_{min}\right] = -0.00311$$

Esempio N.18

Sezione rettangolare pressoinflessa



Se si immagina η=0.1215 h

$$N_c = -0.853 \cdot 30 \cdot 60 \cdot 14.17 \cdot 10^{-3}$$
$$= -2175.6 \text{ kN}$$

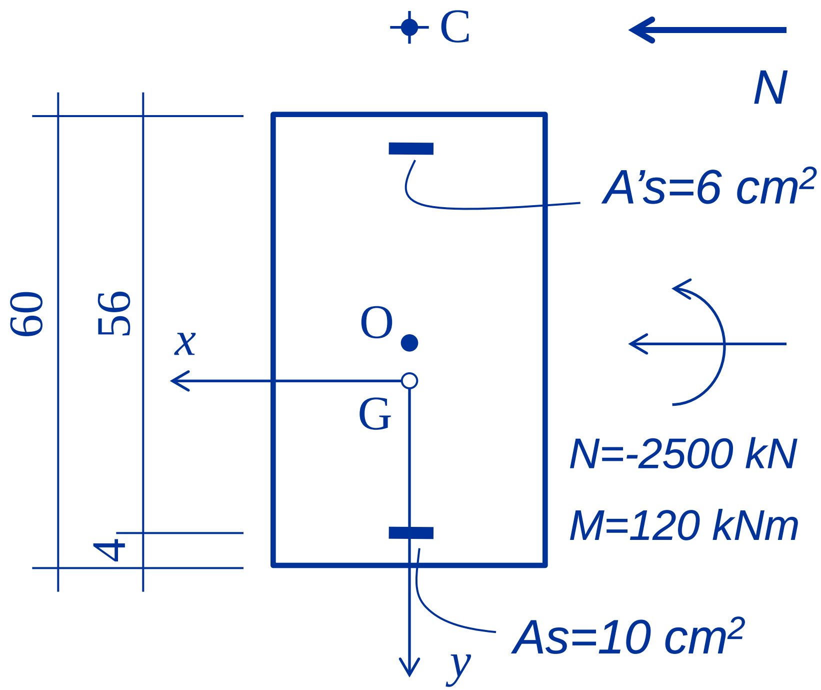
$$N_s = 200000 \cdot 10 \cdot 0.0004479 \cdot 10^{-1}$$
$$= -89.6 \text{ kN}$$

$$N_s^{'} = 391.3 \cdot 6 \cdot 10^{-1} = -234.8 \text{ kN}$$

$$N = \underbrace{-89.6}_{N_s} \underbrace{-234.8}_{N_s^{'}} \underbrace{-2175.6}_{N_c}$$
$$= -2500 \text{ kN}$$

Esempio N.18

Sezione rettangolare pressoinflessa



Attenzione: la sezione non è verificata perché il momento resistente (118.8 kNm) è inferiore al momento agente (120 kNm)

$$\kappa = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-16/49\left(1-\eta_{min}\right)^2}{1-4/21\left(1-\eta_{min}\right)^2} = 0.4384$$

L'equilibrio alla rotazione intorno ad O fornisce il momento resistente

$$M_{Rd} = (N_s - N'_s)\,(h/2 - c) - N_c\,(h/2 - \kappa\, x)$$

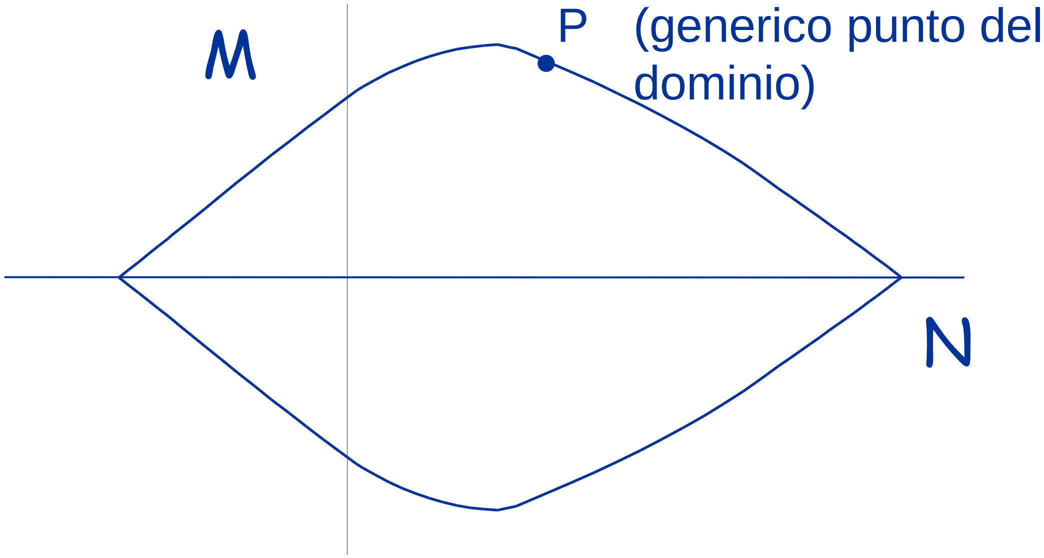
$$M_{Rd} = \left[\left(-89.6+234.8\right)\cdot 26-\left(-2175.6\right)\cdot\left(30-0.4384\cdot 60\right)\right]10^{-2} = 118.1\,\text{kNm}$$

Domini M-N
per flessione composta retta

Domini di resistenza

Stato limite ultimo

Dominio di resistenza, o curva di interazione = insieme delle coppie M-N per cui ε_{max} è uguale a ε_{cu}



Domini di resistenza

Stato limite ultimo

Per ricavare una coppia M-N del dominio

1. Si definisce la retta limite di deformazione

2. Si calcolano le tensioni e le risultanti delle tensioni

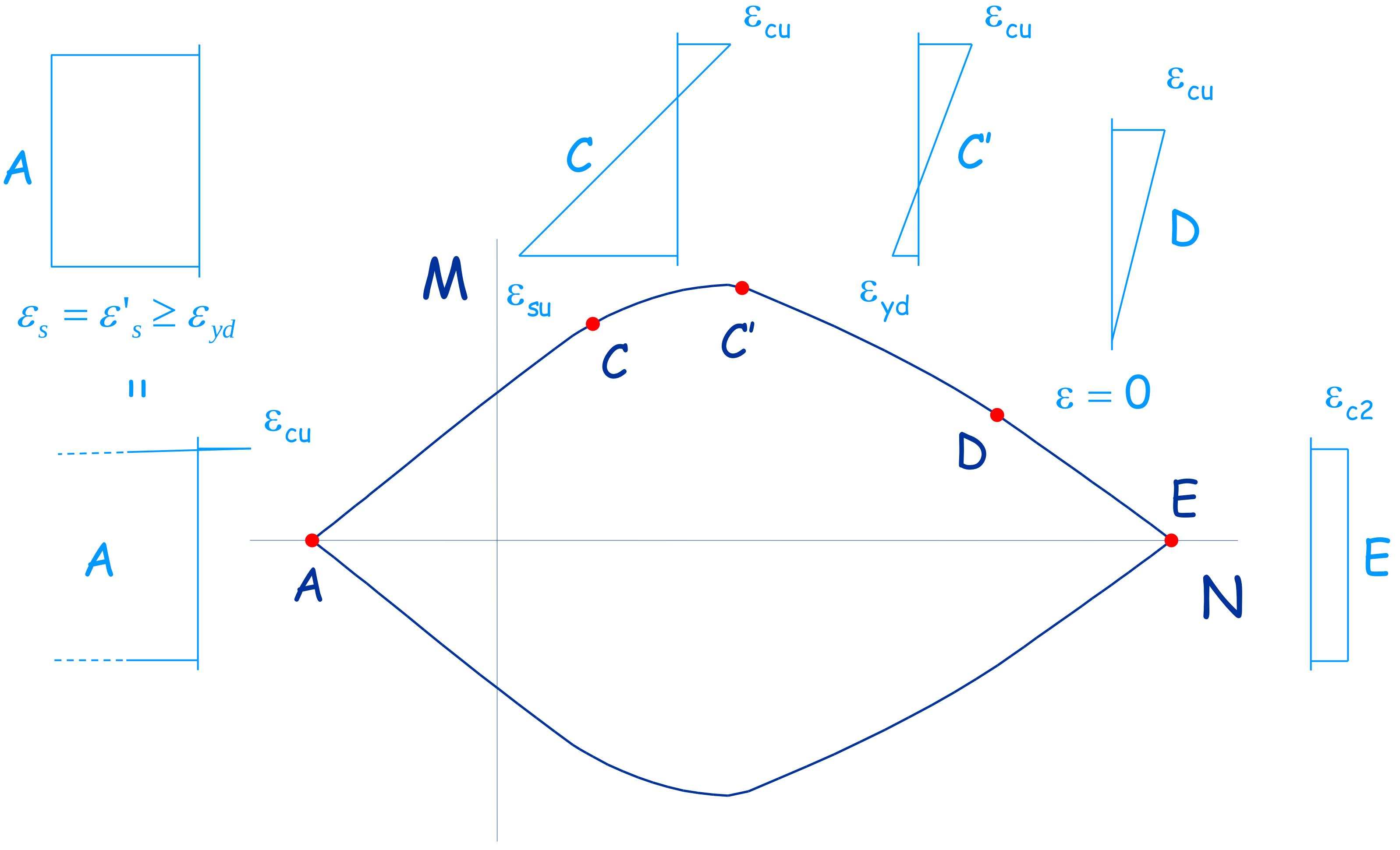
3. Si calcolano le caratteristiche N ed M tramite equilibrio alla traslazione ed alla rotazione

$$N = \int \sigma \, dA$$

$$M = \int \sigma \, y \, dA$$

Domini di resistenza

Stato limite ultimo



Domini di resistenza
Stato limite ultimo

Cambiando l'armatura, si ottengono tanti diagrammi

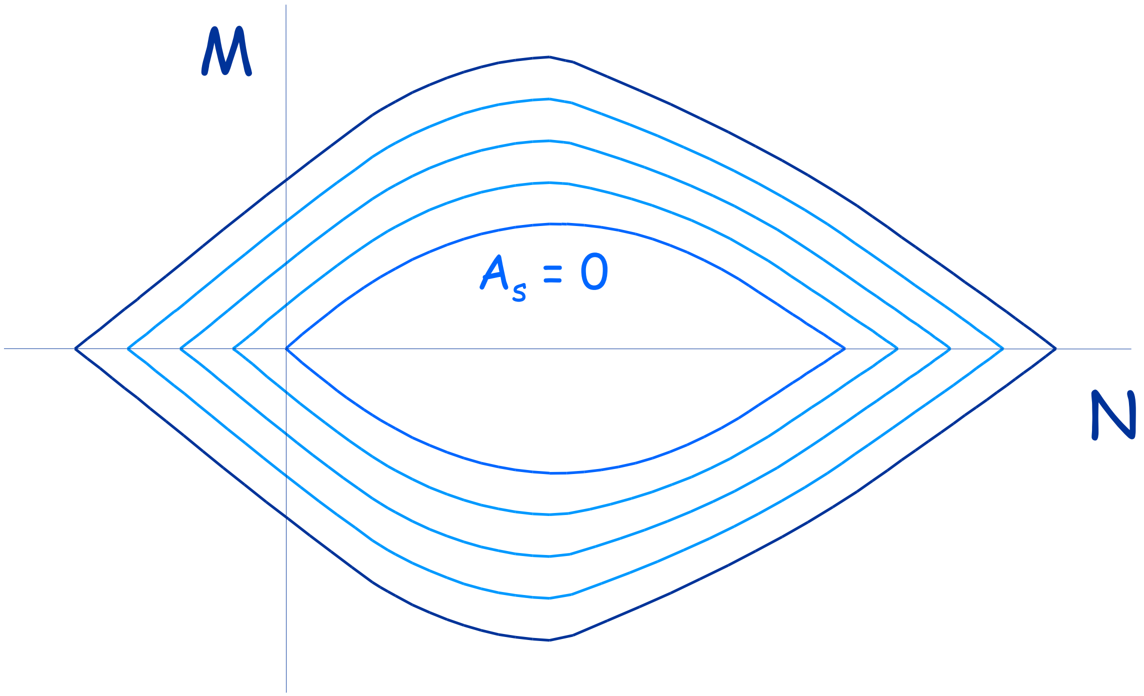
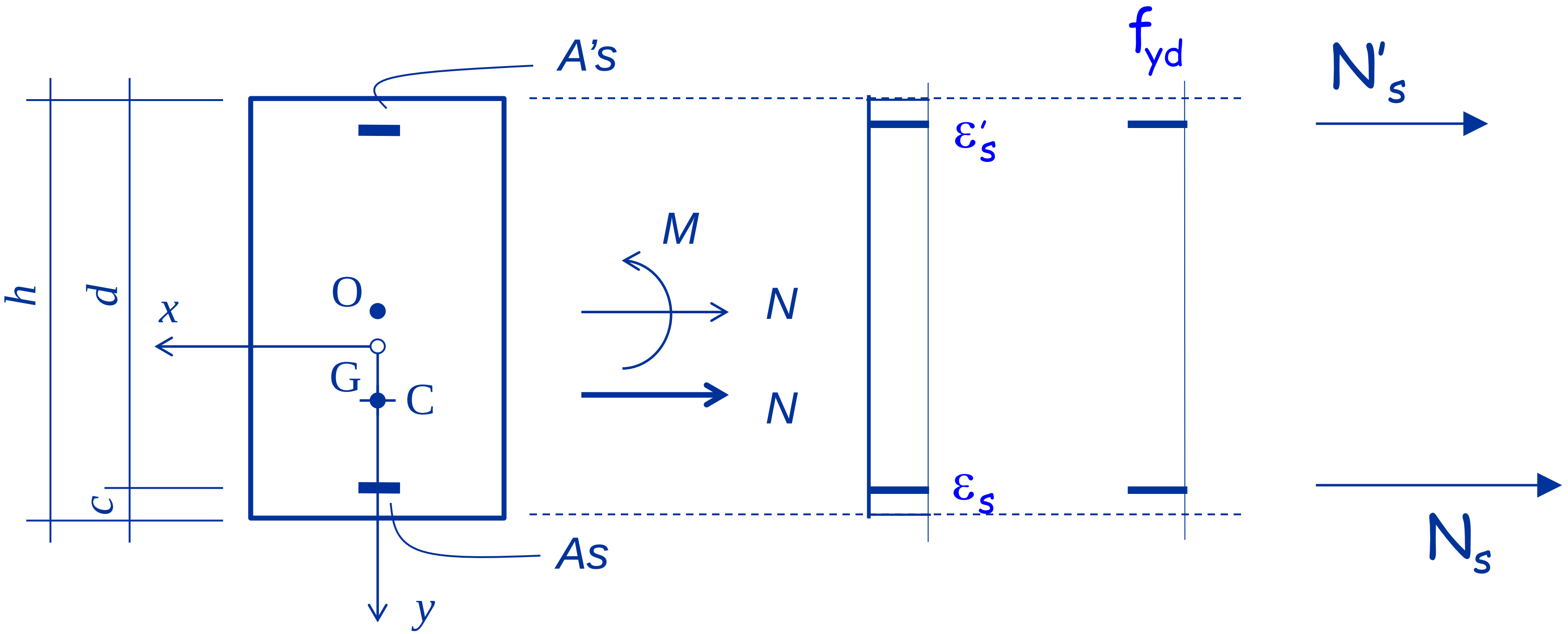


Diagramma A

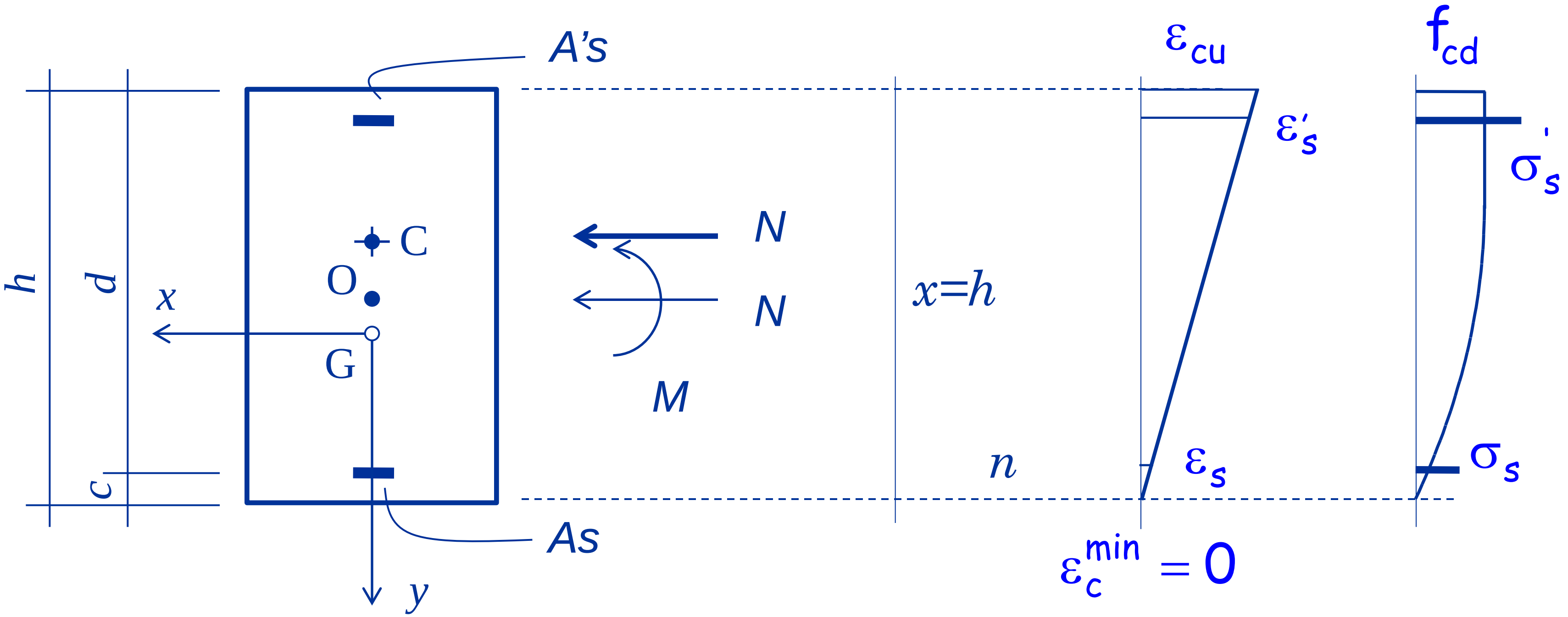


$$N = \left(A_s + A_s^{'}\right) f_{yd}$$

$$M = \left(A_s - A_s^{'}\right)\left(\frac{h}{2} - c\right) f_{yd}$$

Nota:
Se le armature sono eguali il momento flettente è nullo.
Il punto di coordinate N-M giace sull'asse N.

Diagramma D

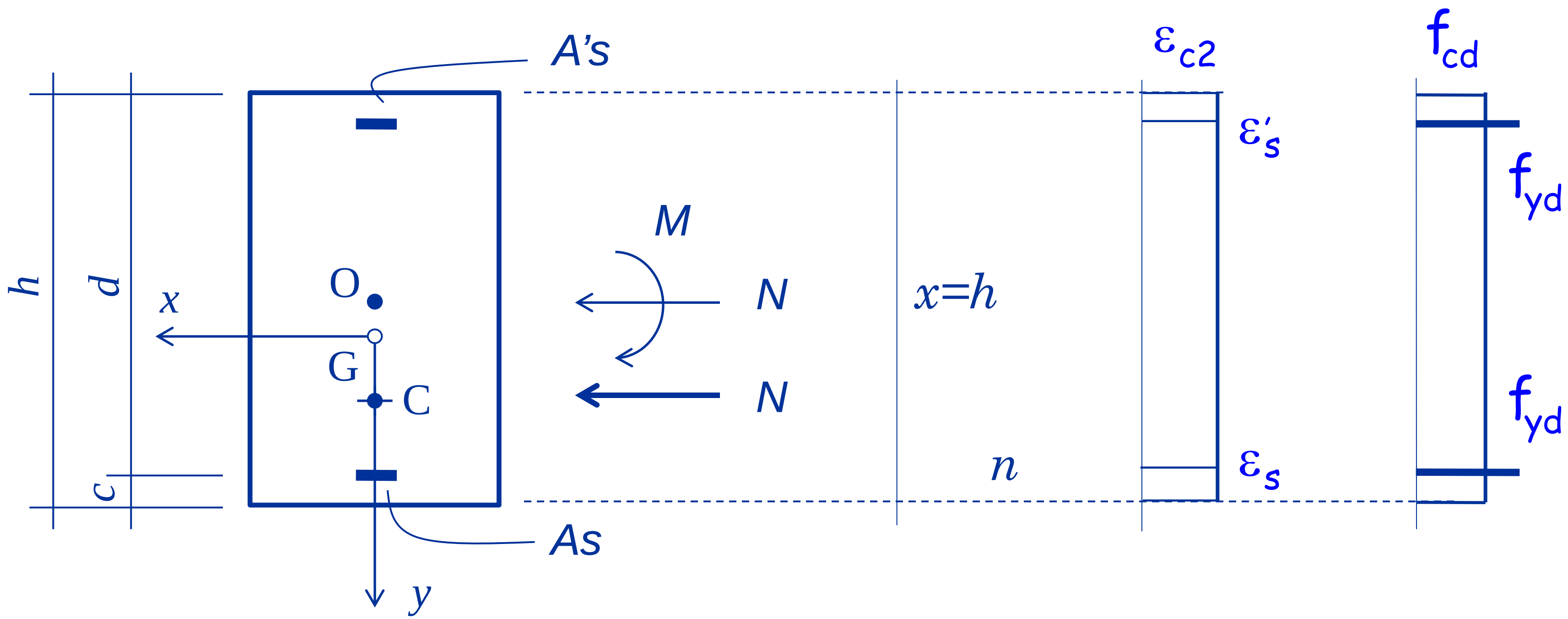


Per gli usuali valori di copriferro, l'armatura sup. è snervata mentre quella inf. è elastica.

$$N = 0.810\, b\, h\, f_{cd} - \left(A_s \frac{c}{h} \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} + A_s^{'} \right) f_{yd}$$

$$M = 0.0680\, b\, h^2 f_{cd} + \left(-A_s \frac{c}{d} \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} + A_s^{'} \right) \left(\frac{h}{2} - c \right) f_{yd}$$

Diagramma E



$$N = -b\,h\,f_{cd} - \left(A_s + A_s^{'}\right) f_{yd}$$

$$M = -\left(A_s - A_s^{'}\right)\left(\frac{h}{2} - c\right) f_{yd}$$

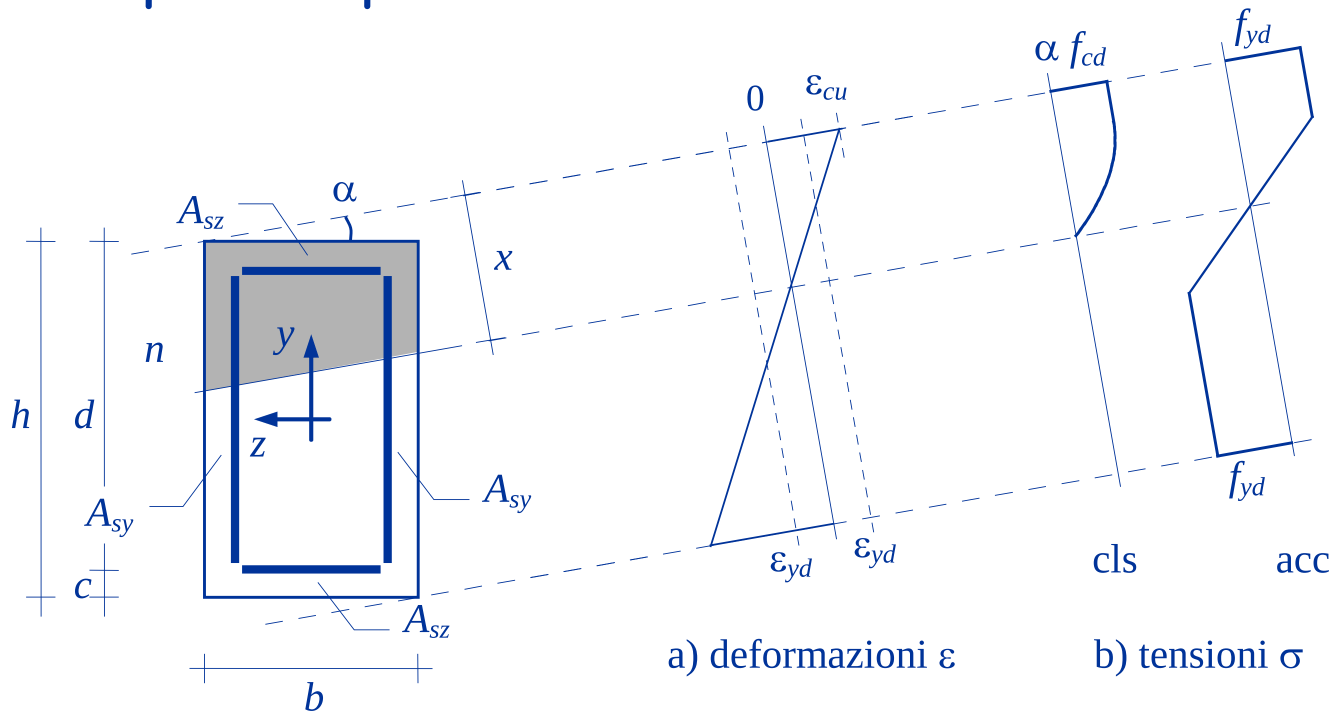
Nota:
Se le armature sono eguali il momento flettente è nullo.
Il punto di coordinate N-M giace sull'asse N.

Domini M-N
per flessione composta deviata

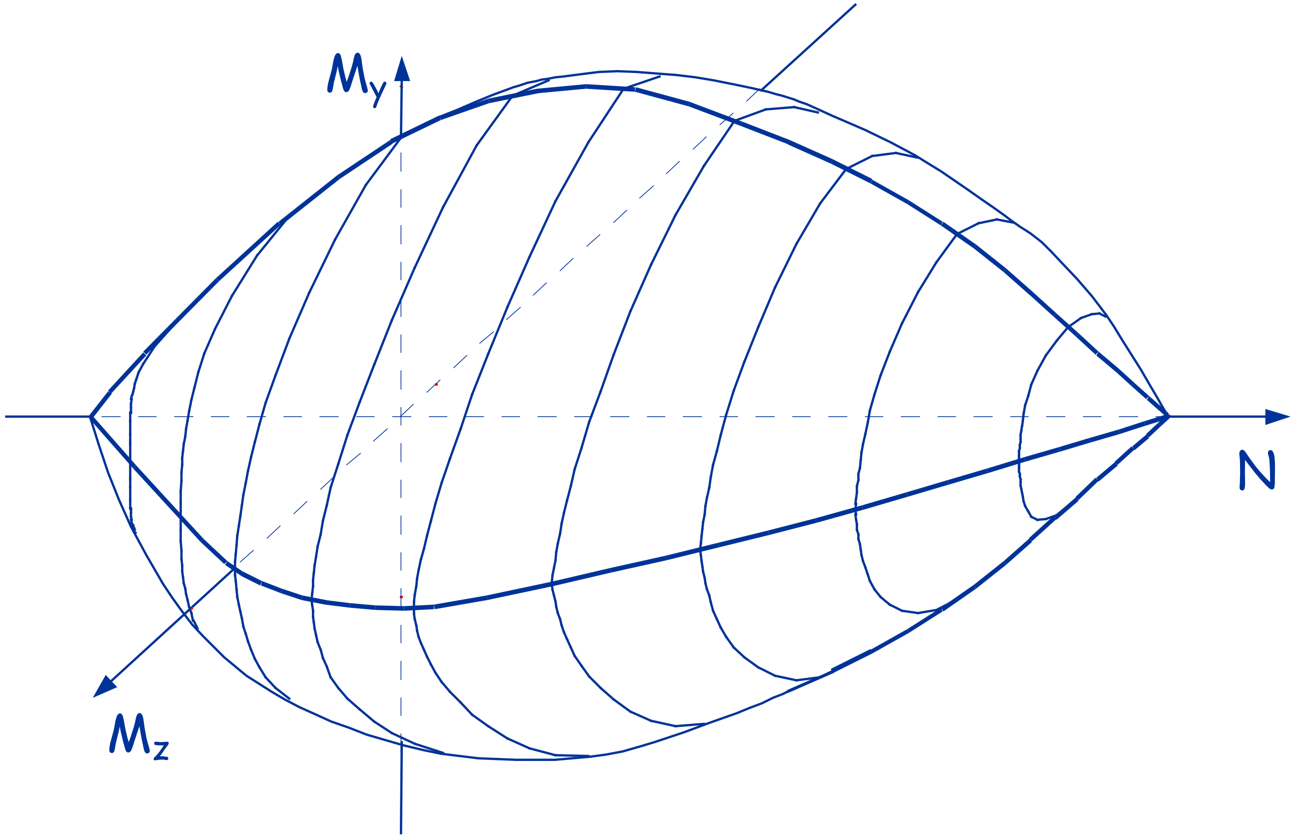
Pressoflessione deviata

Procedimento per la costruzione del dominio M_y-M_z-N

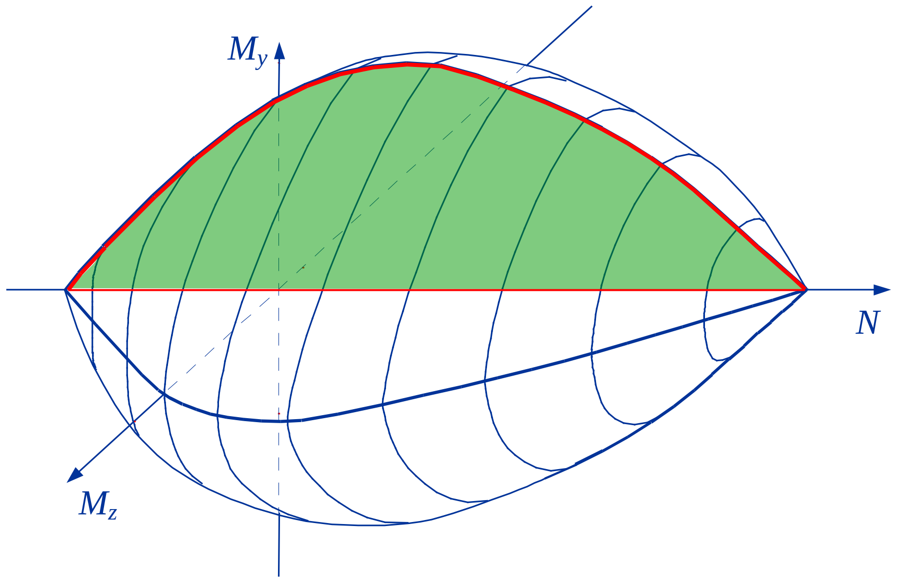
- analogo a quello descritto per pressoflessione retta
- più complicato per l'inclinazione dell'asse neutro

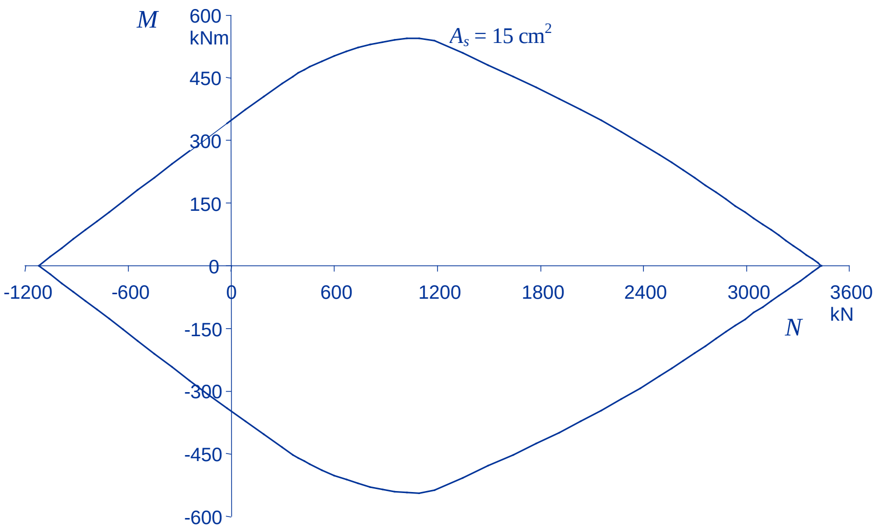


Dominio allo SLU

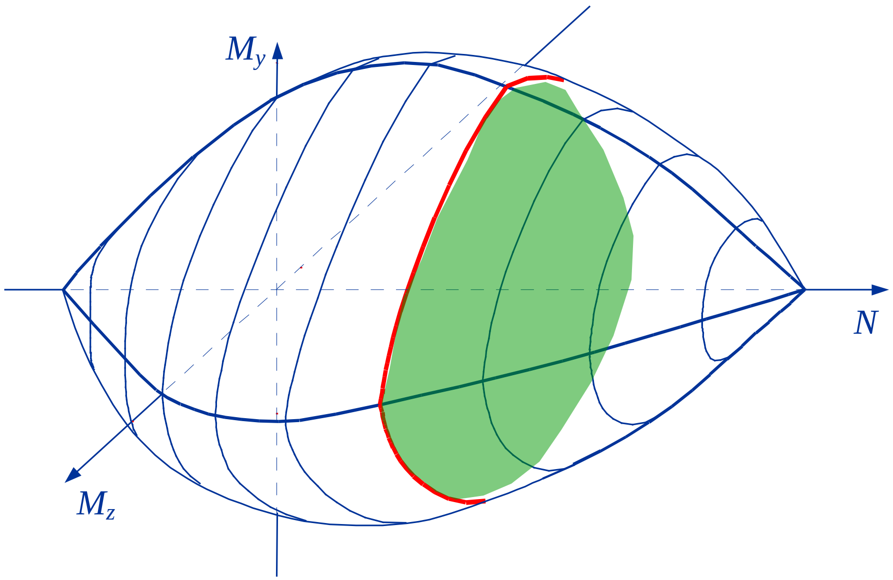


Dominio allo SLU





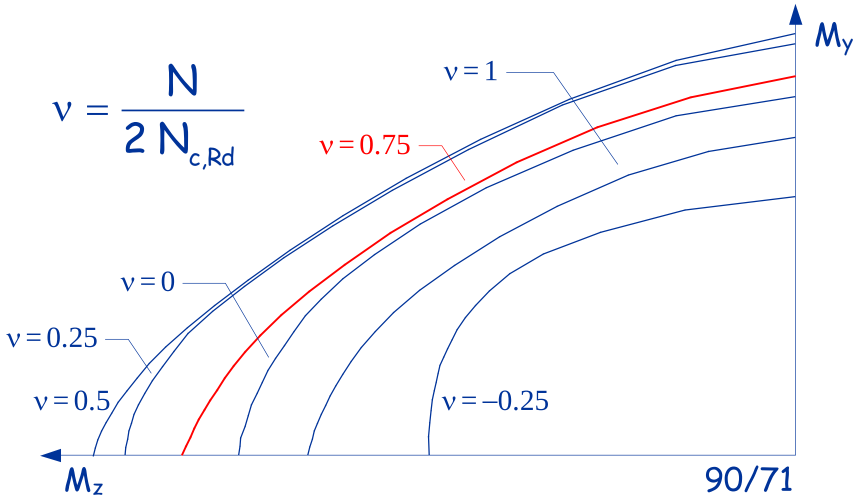
Dominio allo SLU



$$\left(\frac{M_z}{M_{z,Rd}}\right)^p + \left(\frac{M_y}{M_{y,Rd}}\right)^q = 1$$

Consiglio:
usare p = q = 1.5

$$\nu = \frac{N}{2\,N_{c,Rd}}$$



Nota: per N≅0 si può usare un esponente maggiore, fino a 2

FINE