

# Lezione

Tecnica delle Costruzioni

# La flessione composta

# Verifica di sezioni soggette a flessione composta

# Flessione composta

## 1° stadio (Formule di Scienza delle Costruzioni)

Con riferimento alla sezione omogeneizzata vale la formula di Scienza delle Costruzioni

$$\sigma = E(\varepsilon_G + \chi_x x + \chi_y y)$$

Pertanto:

$$N = E \varepsilon_G \int dA + E \chi_x \int x dA + E \chi_y \int y dA = E \varepsilon_G A \neq 0$$

$$M_x = E \varepsilon_G \int y dA + E \chi_x \int x y dA + E \chi_y \int y^2 dA = E \chi_y I_x \neq 0$$

$$M_y = E \varepsilon_G \int x dA + E \chi_x \int x^2 dA + E \chi_y \int x y dA = - E \chi_x I_y \neq 0$$

essendo  $\int x dA = \int y dA = 0$  e  $\int x y dA = 0$

# Flessione composta

## 1° stadio (Formule di Scienza delle Costruzioni)

Con riferimento alla sezione omogeneizzata vale la formula di Scienza delle Costruzioni

$$\sigma = E \left( \varepsilon_G + \chi_x x + \chi_y y \right)$$

Curvatura nel piano x-z

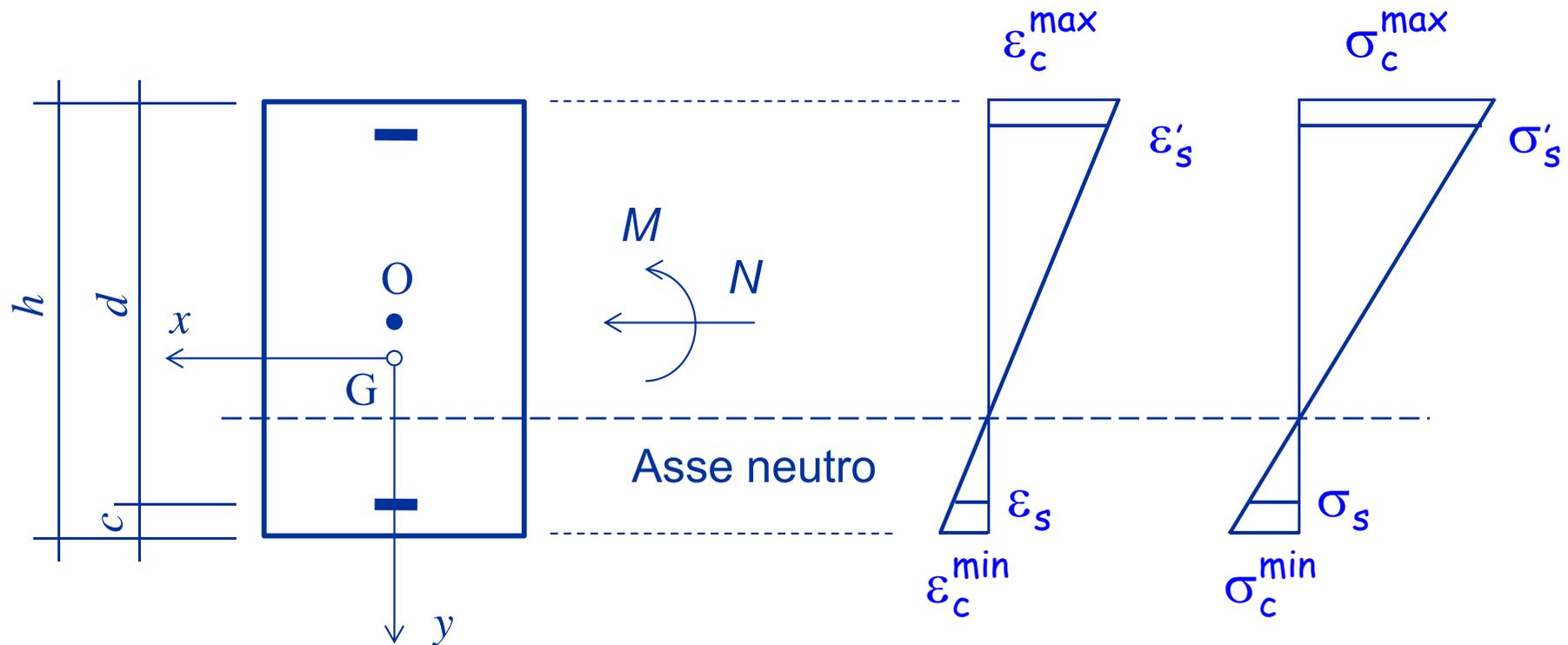
Curvatura nel piano y-z

ovvero

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_y}{I_y} x + \frac{M_x}{I_x} y$$

# Flessione composta

## 1° stadio (Calcolo delle tensioni)



Nota 1: l'asse neutro non passa per il baricentro  $G$  della sezione omogen.

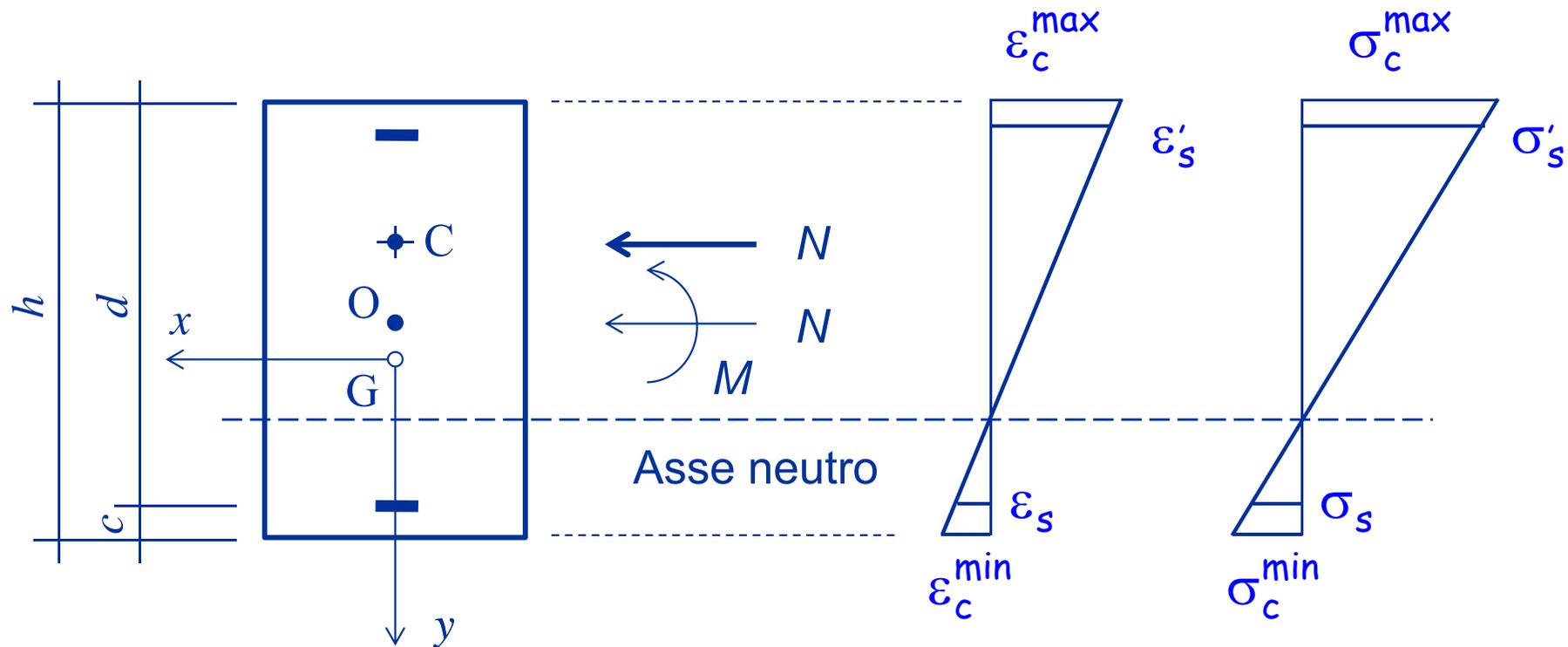
Nota 2: lo sforzo normale si intende applicato nel baricentro  $O$  della sezione in calcestruzzo

$$\sigma_c = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y$$

$$\sigma_s = n \left( \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y \right)$$

# Flessione composta

## 1° stadio (Calcolo delle tensioni)



Le azioni di sforzo normale e momento flett. equivalgono ad uno sforzo normale con eccentricità

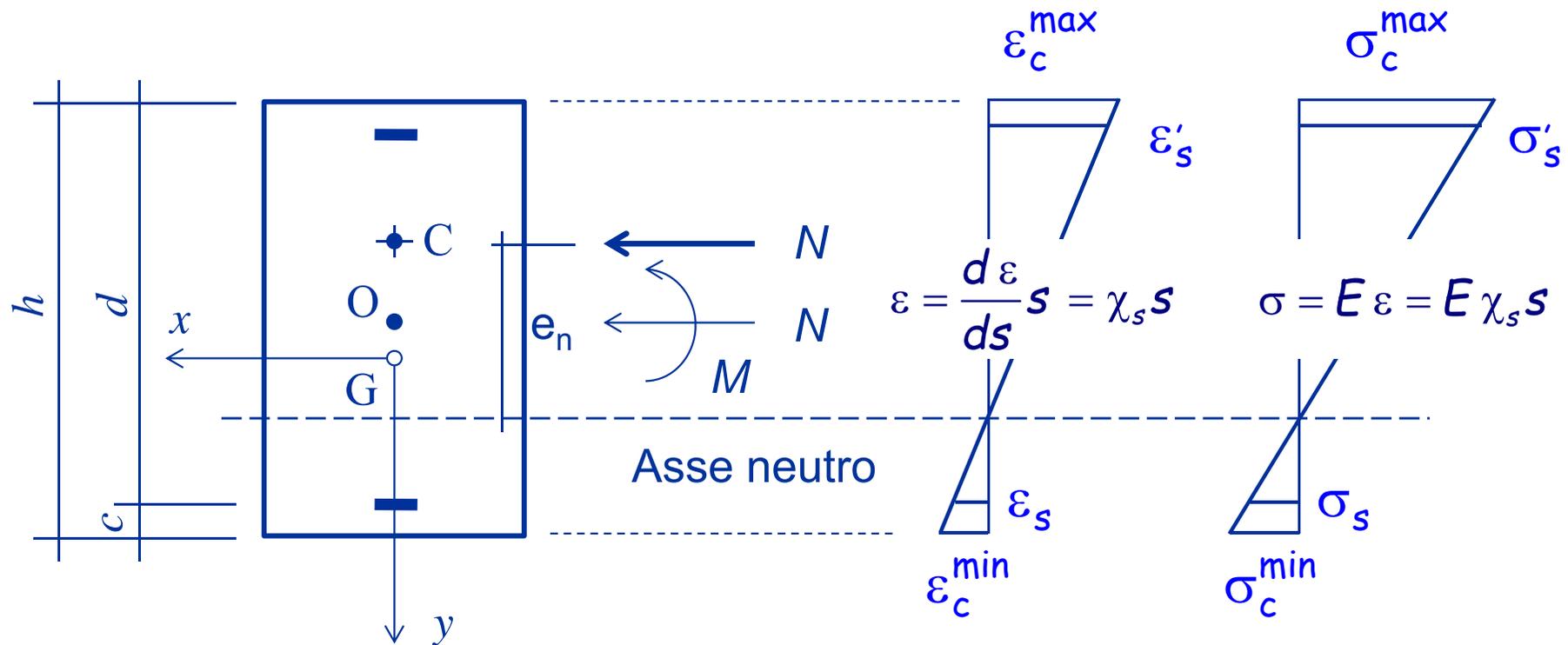
$$e_x = \frac{M_x}{N} \quad e_y = -\frac{M_y}{N}$$

Il punto di applicazione dello sforzo normale eccentrico è detto

**CENTRO DI SOLLECITAZIONE**

# Flessione composta

## 1° stadio (Calcolo delle tensioni)



$$N = \int \sigma dA = E \chi_s \int s dA = E \chi_s S_n$$

$$M_n = N e_n = \int \sigma s dA = E \chi_s \int s^2 dA = E \chi_s I_n$$

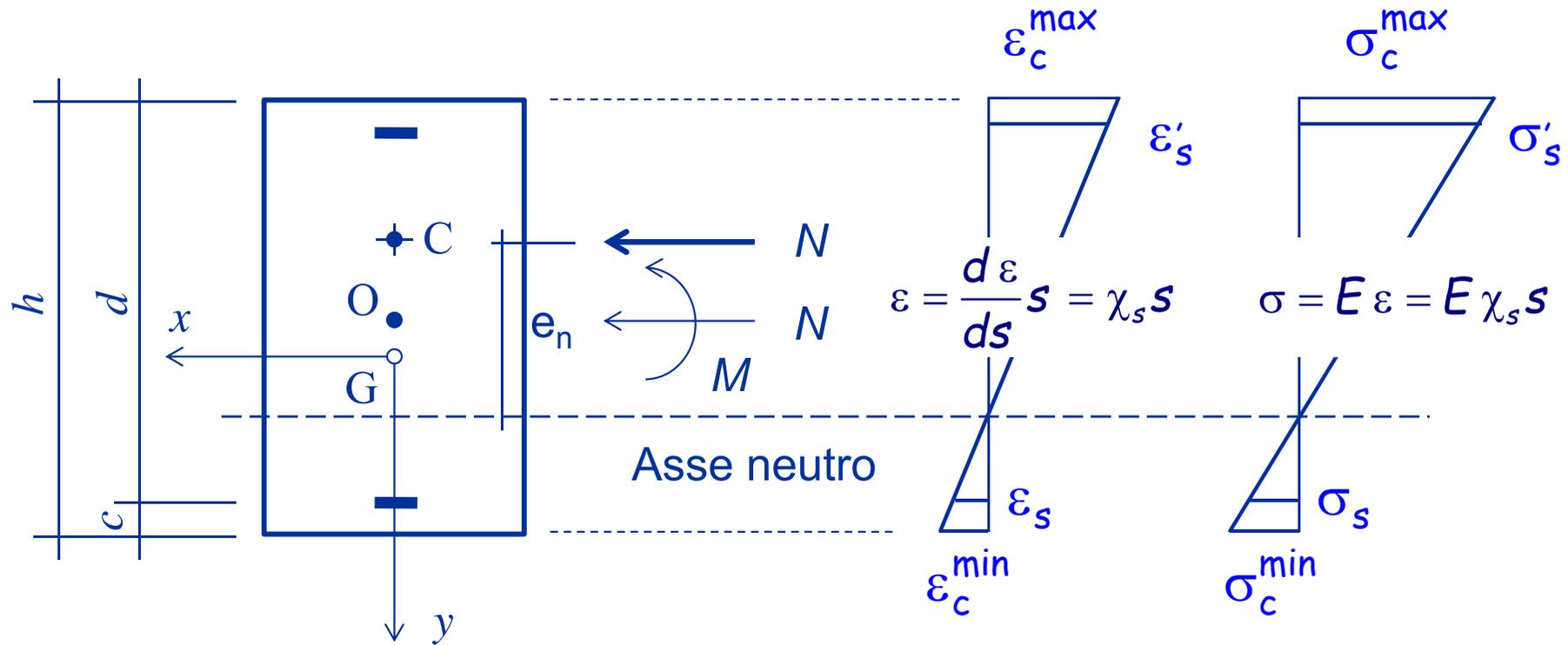
$$M_s = \int \sigma n dA = E \chi_s \int s n dA = 0$$



$$e_n = \frac{I_n}{S_n}$$

# Flessione composta

## 1° stadio (Calcolo delle tensioni)



$$N = \int \sigma dA = E \chi_s \int s dA = E \chi_s S_n$$

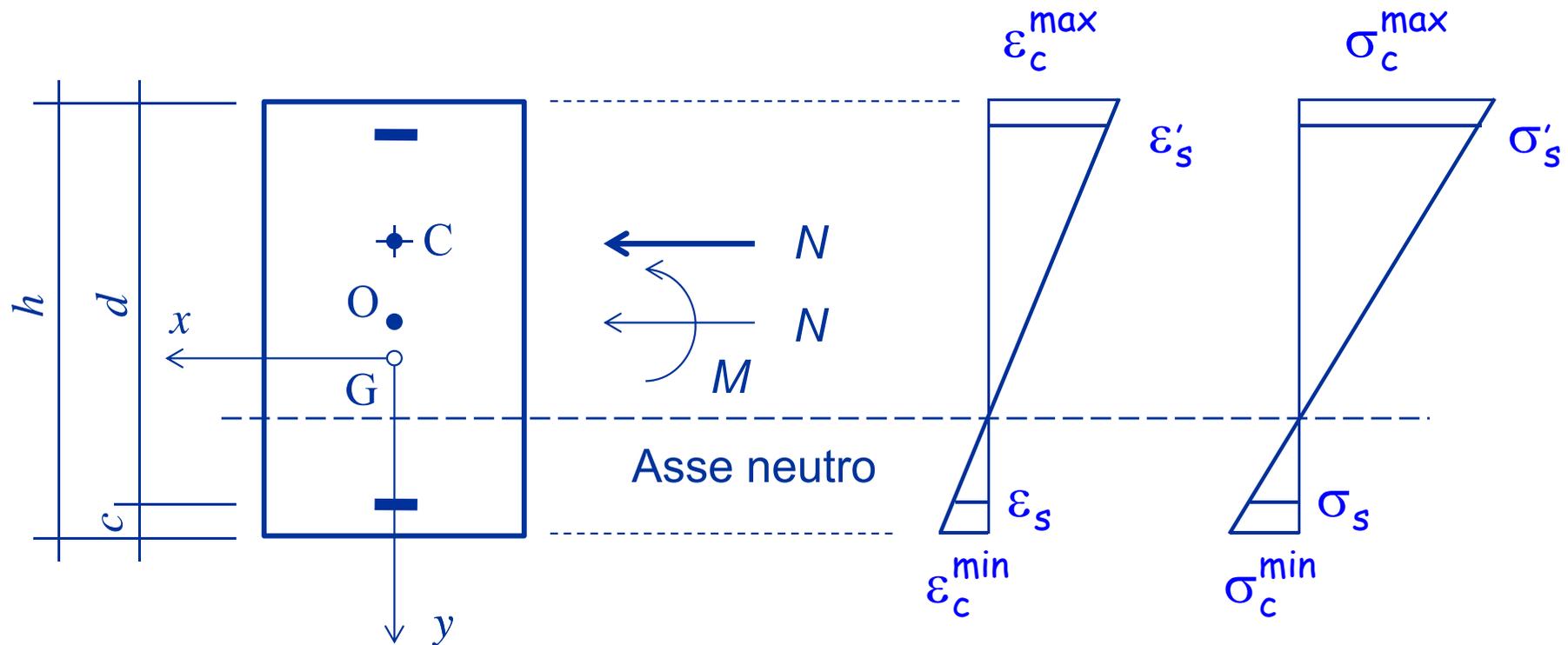
$$M_n = N e_n = \int \sigma s dA = E \chi_s \int s^2 dA = E \chi_s I_n$$

$$M_s = \int \sigma n dA = E \chi_s \int s n dA = 0$$

$$\sigma = \frac{N}{S_n} s$$

# Flessione composta

1° stadio



Dati:

- Geometria della sezione
- Armature
- Coppia M-N

Incognite:

Tensioni massime

# Flessione composta

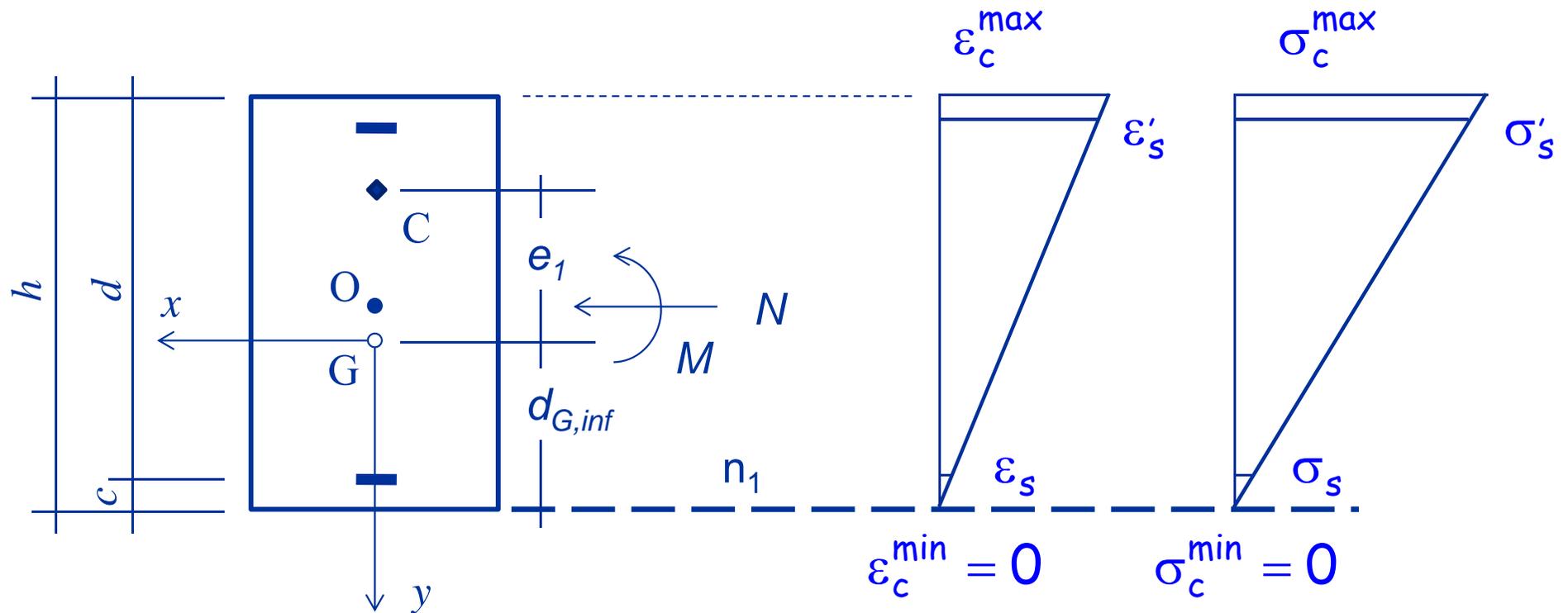
1° stadio

Se il centro di sollecitazione  $C$  è :

- |   |   |  |
|---|---|--|
| 1. sul contorno<br>del nocciolo d'inerzia | ➔ | l'asse neutro<br>è tangente alla sezione |
| 2. interno<br>al nocciolo d'inerzia       | ➔ | l'asse neutro<br>è esterno alla sezione  |
| 3. esterno<br>al nocciolo d'inerzia       | ➔ | l'asse neutro<br>è interno alla sezione  |

# Flessione composta

## Estremi del nocciolo d'inertia



$$\sigma_c^{\min} = \frac{N}{A} + \frac{-N e_1}{I_x} d_{G,inf} = 0$$

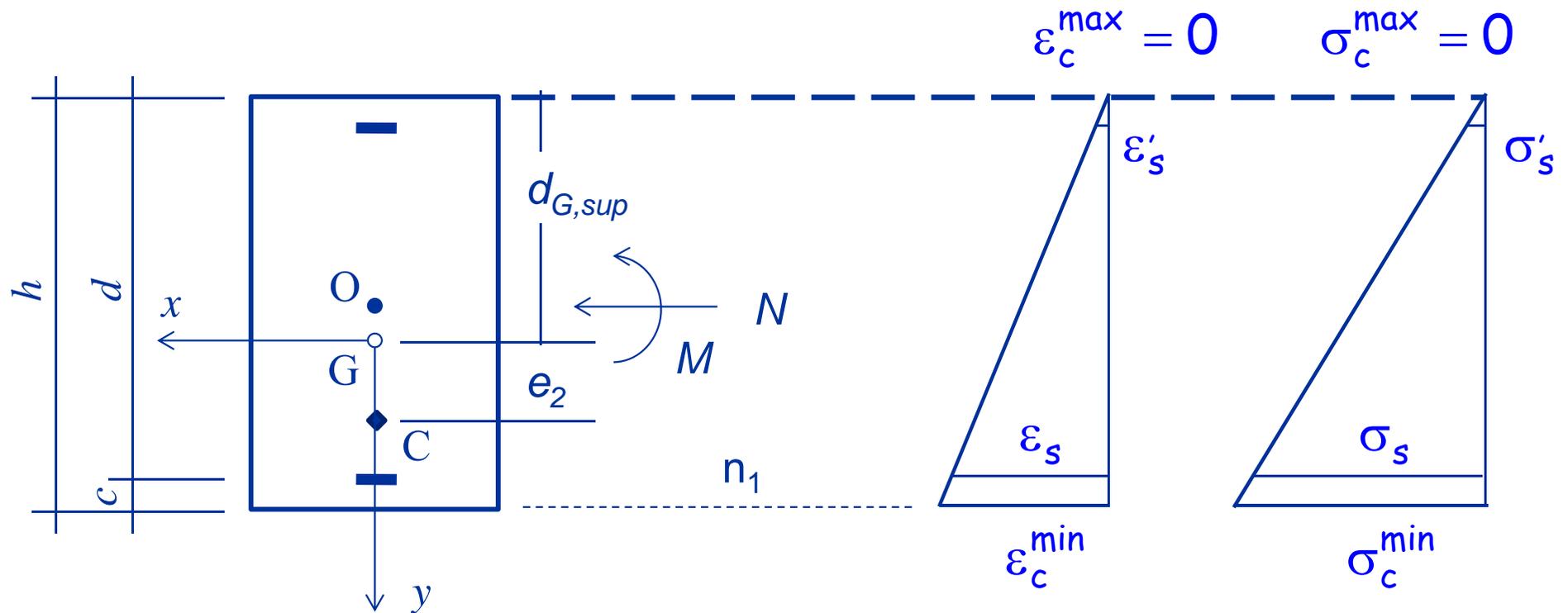


$$e_1 = \frac{I_x}{A d_{G,inf}}$$

( $e_1$  e  $d_{G,inf}$  sono in valore assoluto)

# Flessione composta

## Estremi del nocciolo d'inerzia



$$\sigma_c^{\max} = \frac{N}{A} + \frac{N e_2}{I_x} (-d_{G,sup}) = 0$$

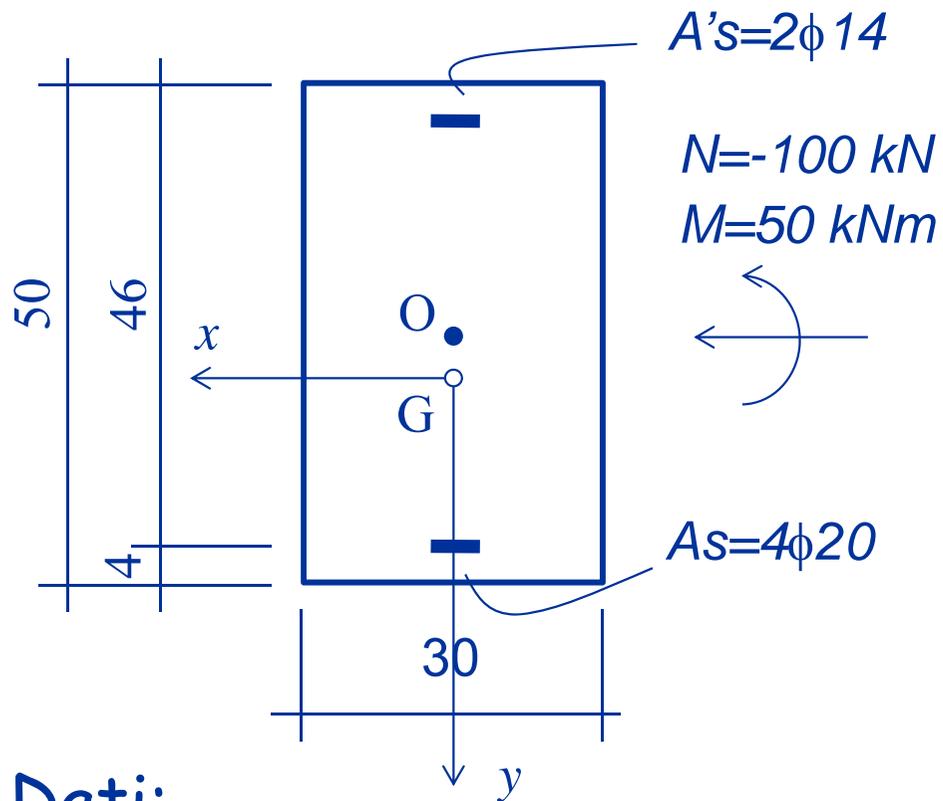


$$e_2 = \frac{I_x}{A d_{G,sup}}$$

( $e_2$  e  $d_{G,sup}$  sono in valore assoluto)

# Esempio n.1

1° stadio



Dati:

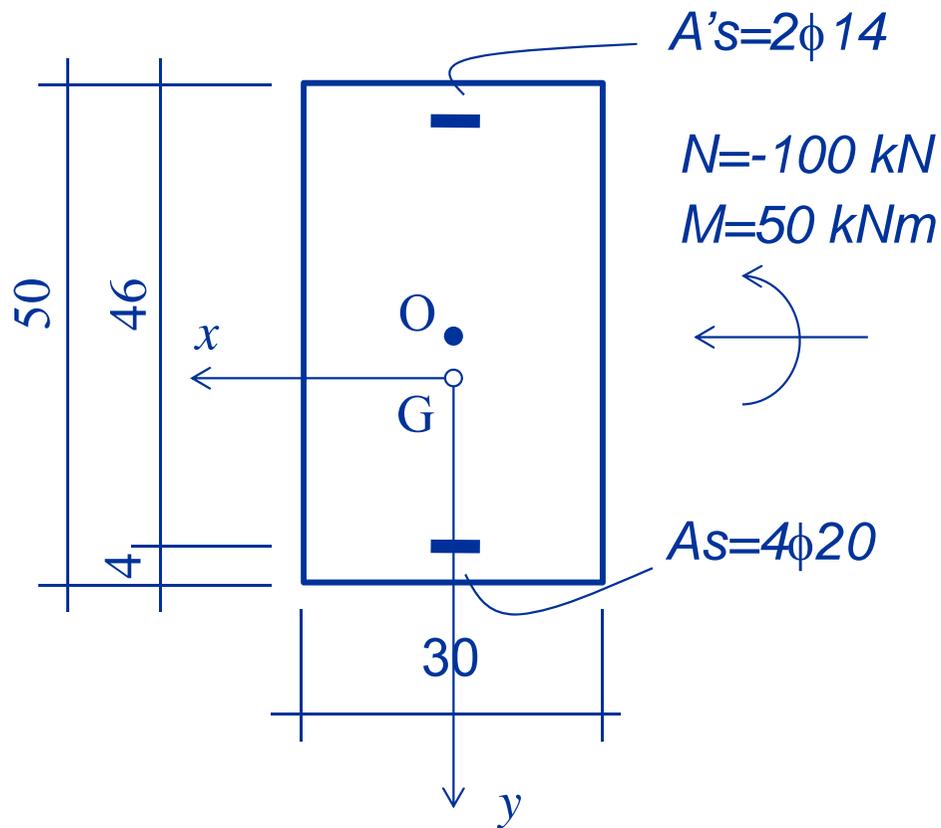
- Geometria della sezione
- Armature
- Coppia M-N

Incognite:

Tensioni massime

# Esempio n.1

1° stadio

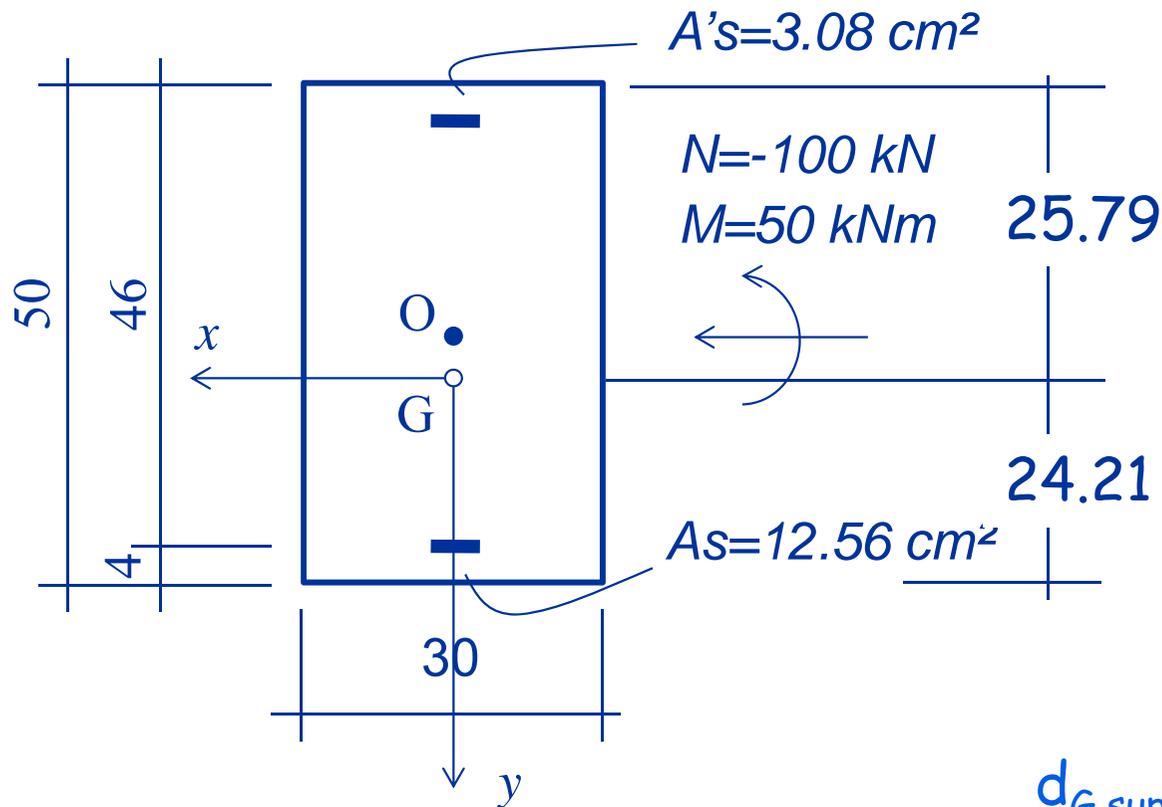


Procedura:

1. Individuazione dell'asse neutro
2. Determinazione del momento d'inertia
3. Calcolo delle tensioni

# Esempio n.1

1° stadio



Come già mostrato con riferimento alla flessione semplice:

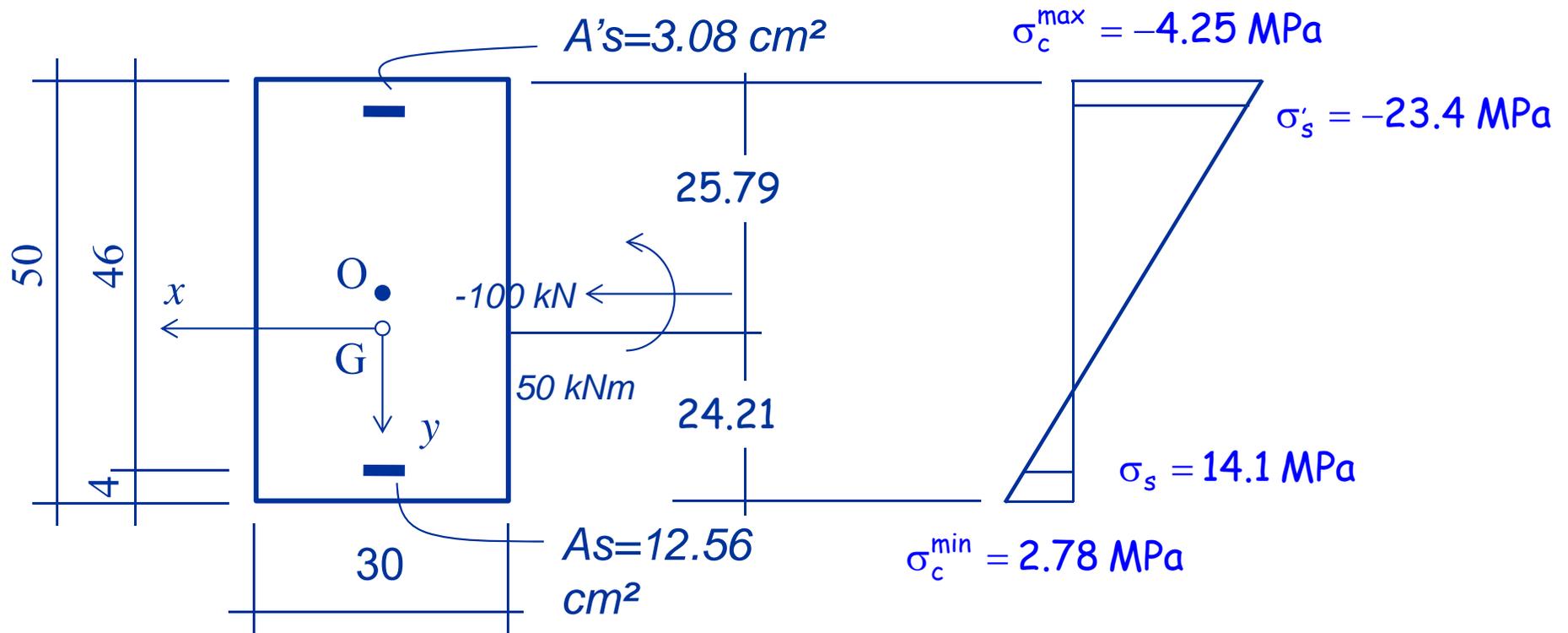
$$d_{G,\text{sup}} = S/A = 25.79 \text{ cm}$$

$$d_{G,\text{inf}} = h - d_{G,\text{sup}} = 24.21 \text{ cm}$$

$$I = 355298 \text{ cm}^4$$

# Esempio n.1

1° stadio



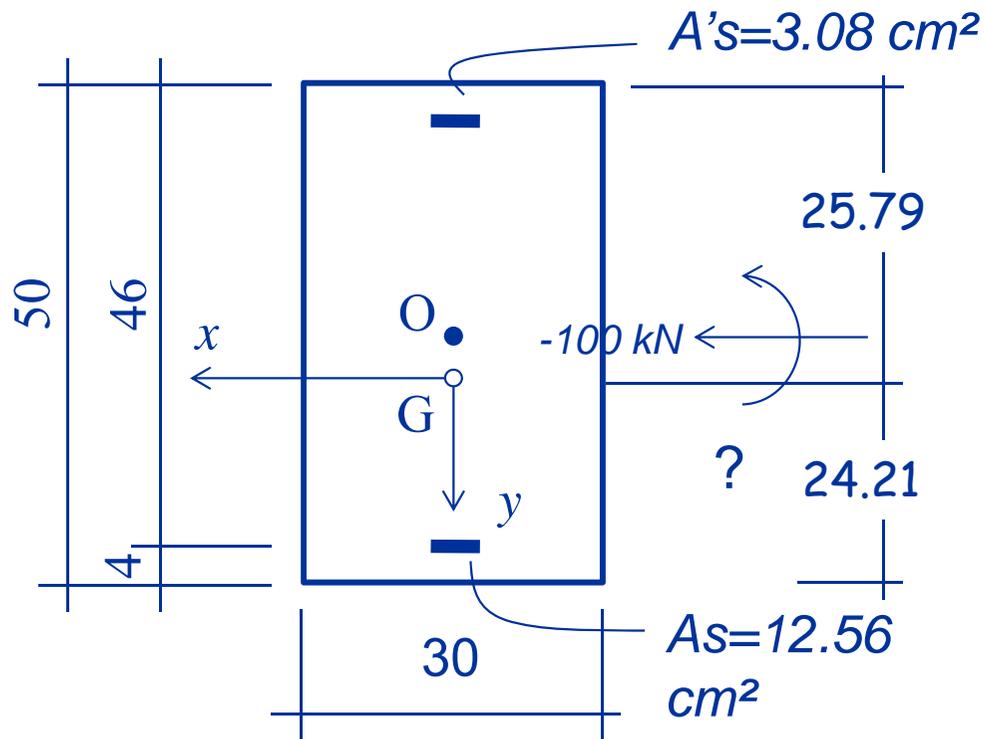
$$\sigma_{c,\text{inf}} = \frac{-100 \cdot 10^3}{1599.3 \cdot 10^2} + \frac{50 \cdot 10^6}{355298 \cdot 10^4} 24.21 \cdot 10 = 2.78 \text{ MPa} > f_{cfk} = 2.16 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{c,\text{sup}} = \frac{-100 \cdot 10^3}{1599.3 \cdot 10^2} + \frac{50 \cdot 10^6}{355298 \cdot 10^4} (-25.79 \cdot 10) = -4.25 \text{ MPa}$$

*La sezione è  
fessurata*

# Esempio n.2

1° stadio



Calcolo del momento di prima fessurazione

$$\sigma_c = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} d_{G,\text{inf}} = f_{\text{cfk}}$$

con

$$f_{\text{cfk}} = 2.16 \text{ MPa}$$

$$M_f = \left( f_{\text{cfk}} - \frac{N}{A} \right) \frac{I}{d_{G,\text{inf}}} = \left( 2.16 - \frac{-100 \cdot 10^3}{1599.3 \cdot 10^2} \right) \frac{355298 \cdot 10^2}{24.21 \cdot 10} 10^{-6} = 40.9 \text{ kNm}$$

# Flessione composta

## 2° stadio

Nel secondo stadio di comportamento  
NON è nota la sezione reagente.

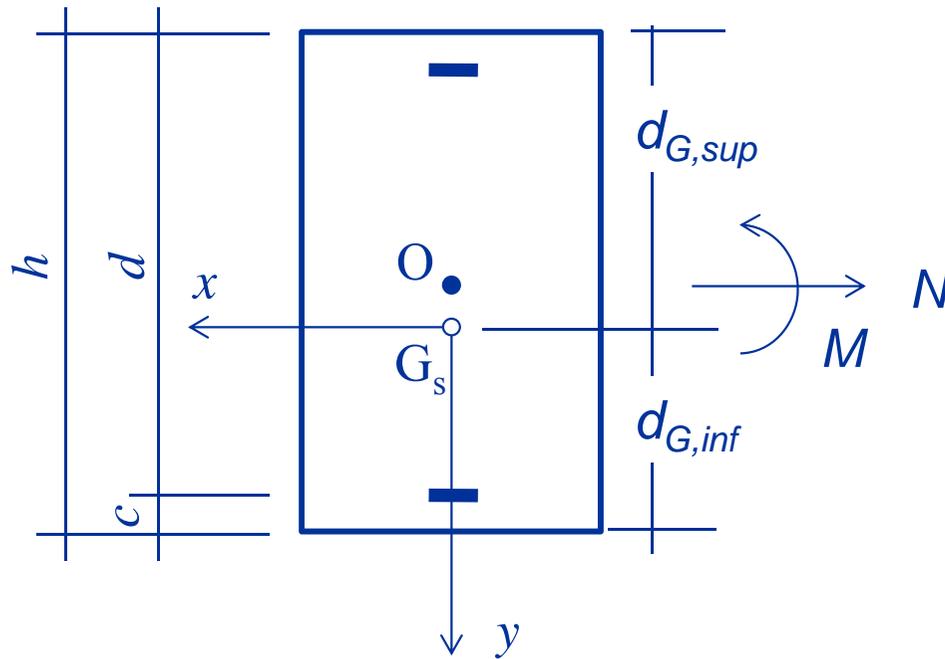
Le formule per il calcolo della coppia N-M resistente sono diverse a seconda che la sezione reagente sia costituita da sole armature, solo calcestruzzo oppure da armature e calcestruzzo.

Per tale motivo saranno separatamente considerati i casi :

1. Sforzo normale di trazione  
interno al nocciolo centrale d'inerzia
2. Sforzo normale di compressione  
interno al nocciolo centrale d'inerzia
3. Casi rimanenti

# Flessione composta

2° stadio (Sforzo normale di trazione interno al nocciolo)



**1° caso:** sforzo normale di trazione interno al nocciolo centrale delle sole armature.

In tale caso, solo le armature reagiscono.

$$d_{G,sup} = \frac{S}{A} = \frac{A_s d + A'_s c}{A_s + A'_s}$$

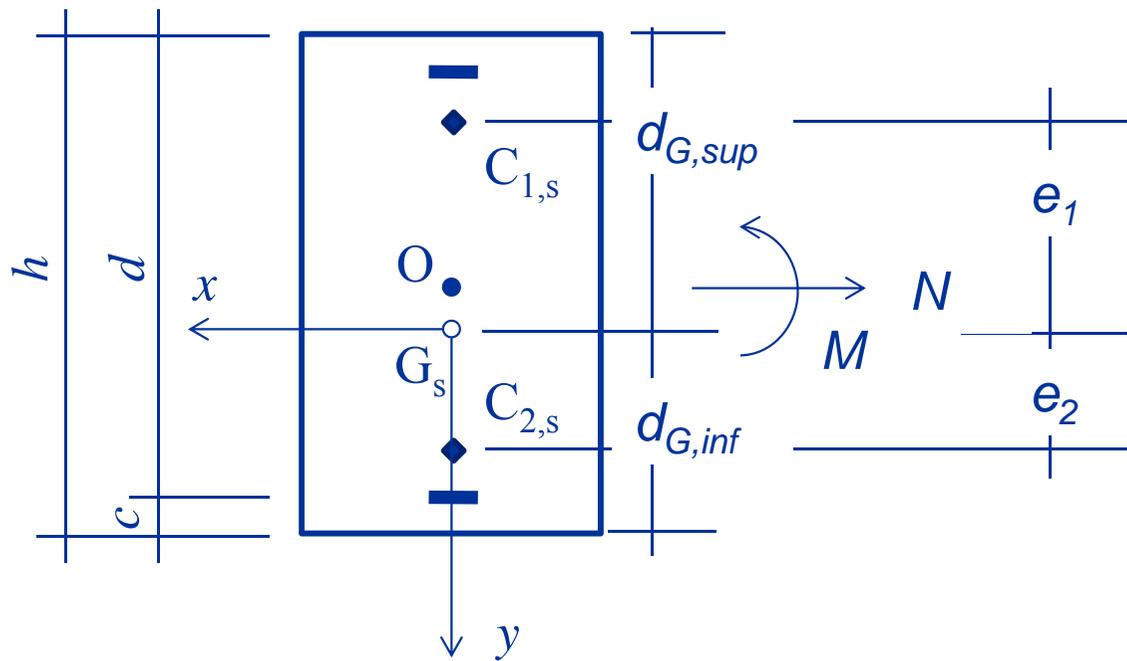
$$d_{G,inf} = h - d_{G,sup}$$

e

$$I_x = \frac{A_s A'_s}{A_s + A'_s} (d - c)^2$$

# Flessione composta

2° stadio (Sforzo normale di trazione interno al nocciolo)



*Nota: gli estremi del nocciolo centrale d'inerzia delle sole armature non coincidono con le posizioni delle armature*

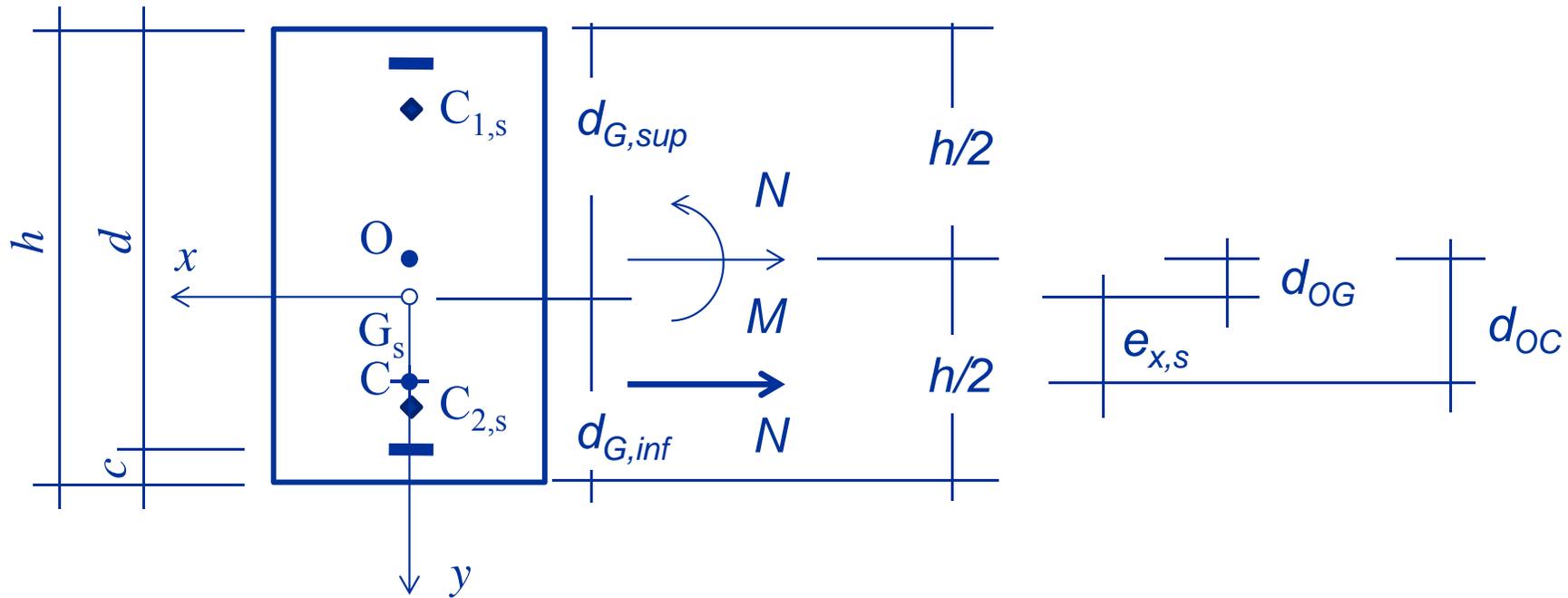
$$e_1 = \frac{I_x}{A d_{G,inf}} = \frac{A_s A'_s (d-c)^2}{A_s + A'_s A_s c + A'_s d}$$

$$e_2 = \frac{I_x}{A d_{G,sup}} = \frac{A_s A'_s (d-c)^2}{A_s + A'_s A_s d + A'_s c}$$

$$\text{se } A_s = A'_s \dots e_1 = e_2 = \frac{(d-c)^2}{2h}$$

# Flessione composta

2° stadio (Sforzo normale di trazione interno al nocciolo)



$$\sigma_s = \frac{N}{A} + \frac{N e_{x,s}}{I_x} y$$

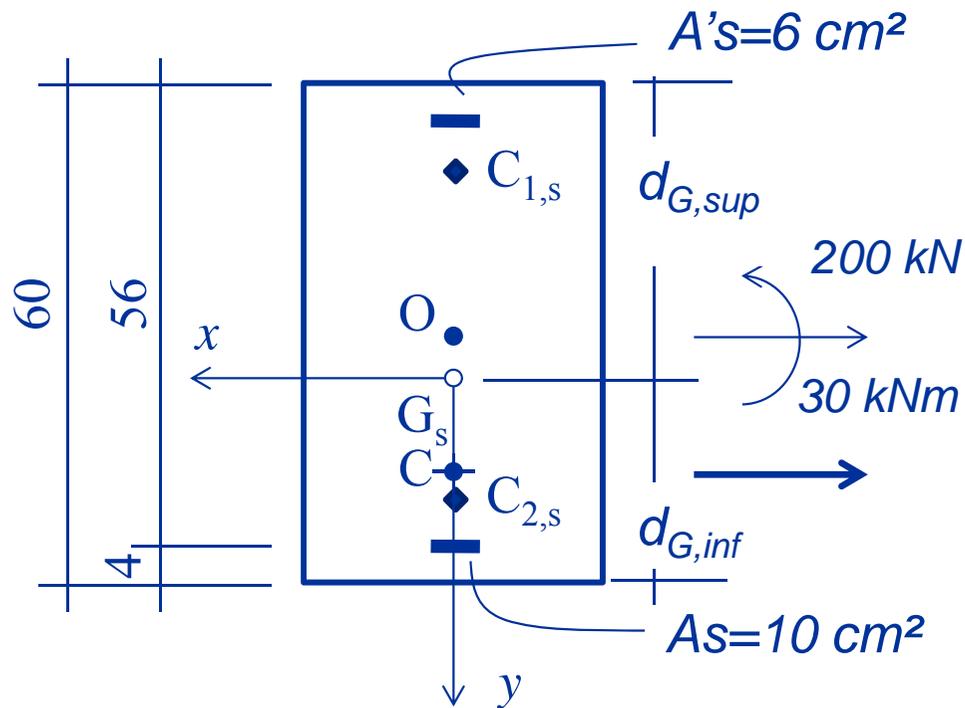
dove

$$e_{x,s} = \frac{M_x}{N} - \left( \frac{h}{2} - d_{G,inf} \right)$$

$\begin{array}{c} | \\ d_{OC} \end{array}$ 
 $\begin{array}{c} | \\ d_{OG} \end{array}$

# Esempio n.3

2° stadio (Sforzo normale di trazione interno al nocciolo)



$$A = (10+6) 10^{-4} = 0.0016 \text{ m}^2$$

$$S = 10 \cdot 10^{-4} 0.56 + 6 \cdot 10^{-4} 0.04 \\ = 0.000584 \text{ m}^3$$

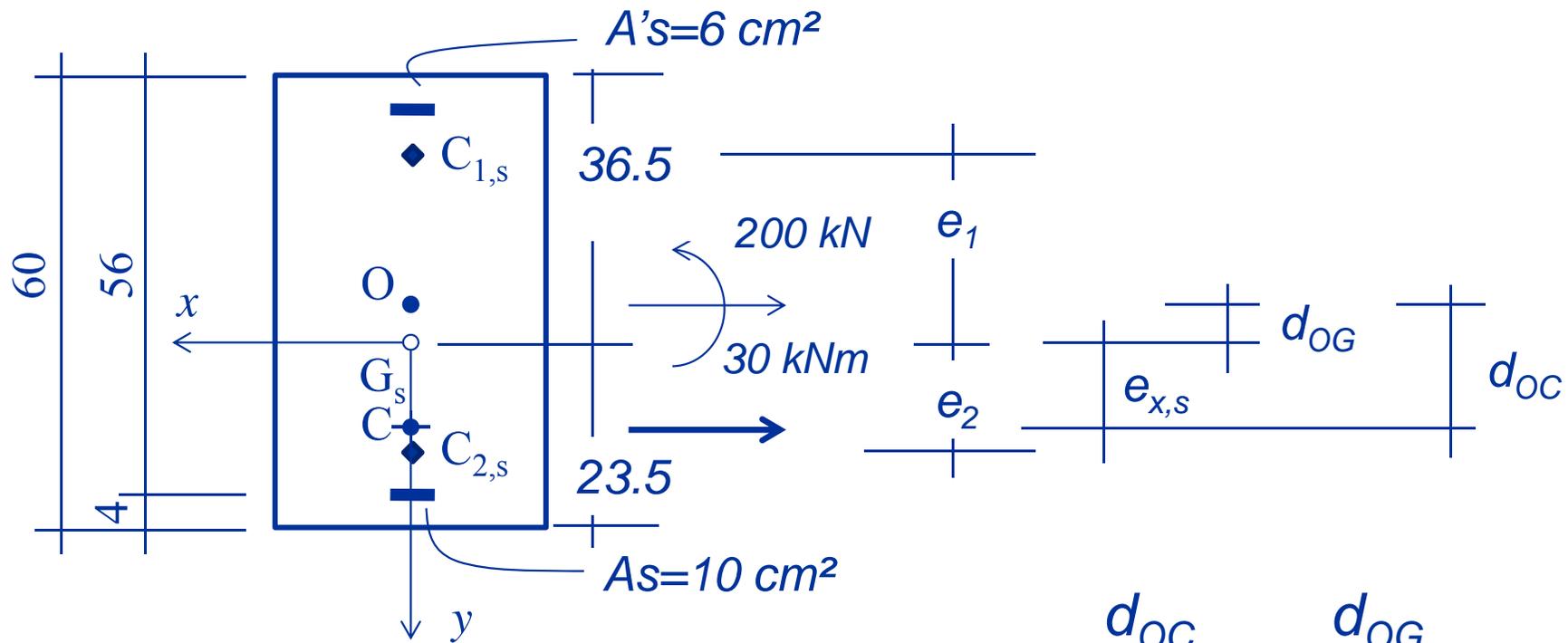
$$d_{G,sup} = \frac{0.000584}{0.0016} = 0.365 \text{ m}$$

$$d_{G,inf} = 0.6 - 0.365 = 0.235 \text{ m}$$

$$I = 10 \cdot 10^{-4} (0.235 - 0.04)^2 + 6 \cdot 10^{-4} (0.365 - 0.04)^2 = 0.0001014 \text{ m}^4$$

# Esempio n.3

2° stadio (Sforzo normale di trazione interno al nocciolo)



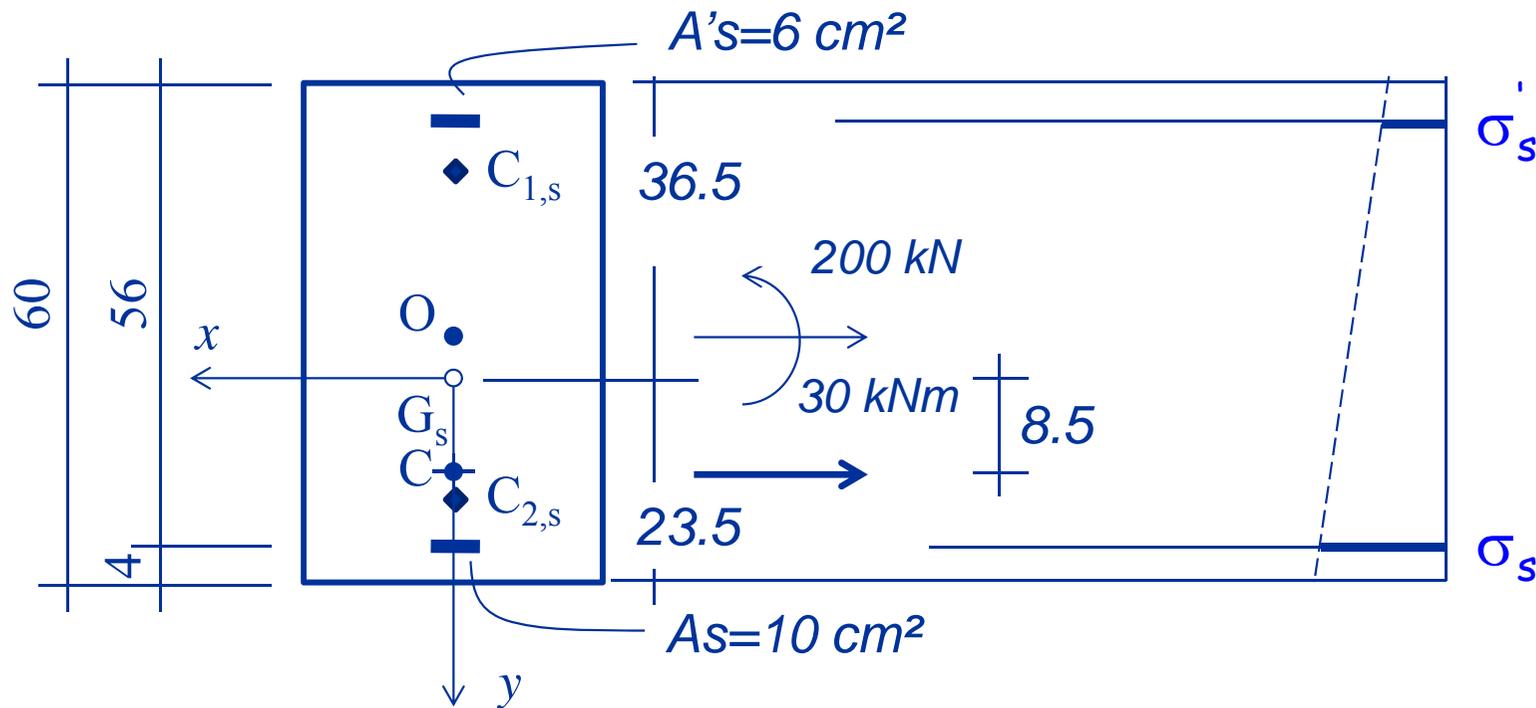
$$e_1 = \frac{I_x}{A d_{G,\text{inf}}} = \frac{0.0001014}{0.0016 \cdot 0.235} = 0.2697 \text{ m}$$

$$e_2 = \frac{I_x}{A d_{G,\text{sup}}} = \frac{0.0001014}{0.0016 \cdot 0.365} = 0.1736 \text{ m}$$

$$e_{x,s} = \frac{d_{OC}}{d_{OG}} \left( \frac{M_x}{N} - (h/2 - d_{G,\text{inf}}) \right) = \frac{30/200 - (0.30 - 0.235)}{0.085} = 0.085 \text{ m}$$

# Esempio n.3

2° stadio (Sforzo normale di trazione interno al nocciolo)

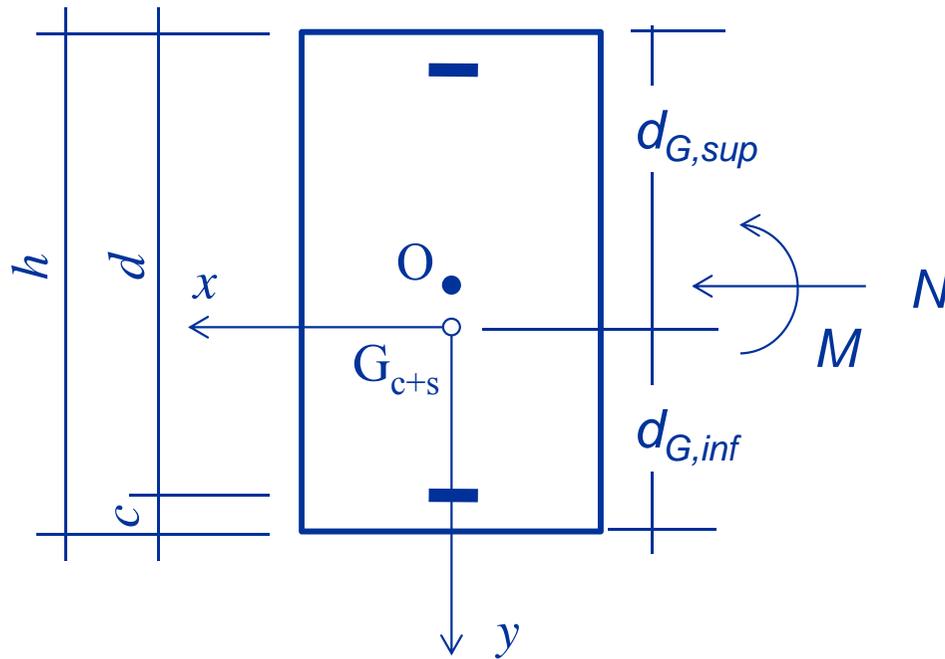


$$\sigma_s = \frac{200 \cdot 10^3}{0.0016 \cdot 10^6} + \frac{200 \cdot 10^3 \cdot 0.0085 \cdot 10^3}{0.0001014 \cdot 10^{12}} (0.235 - 0.04) 10^3 = 157.7 \text{ MPa}$$

$$\sigma'_s = \frac{200 \cdot 10^3}{0.0016 \cdot 10^6} + \frac{200 \cdot 10^3 \cdot 0.0085 \cdot 10^3}{0.0001014 \cdot 10^{12}} (0.365 - 0.04) 10^3 = 70.5 \text{ MPa}$$

# Flessione composta

2° stadio (Sforzo normale di compress. interno al nocciolo)



**2° caso:** sforzo normale di compressione interno al nocciolo centrale del calcestruzzo più armature.

In tale caso, sia il calcestruzzo che le armature reagiscono.

$$A = b \cdot h + n(A_s + A'_s)$$

$$S = \frac{b \cdot h^2}{2} + n(A_s d + A'_s c)$$

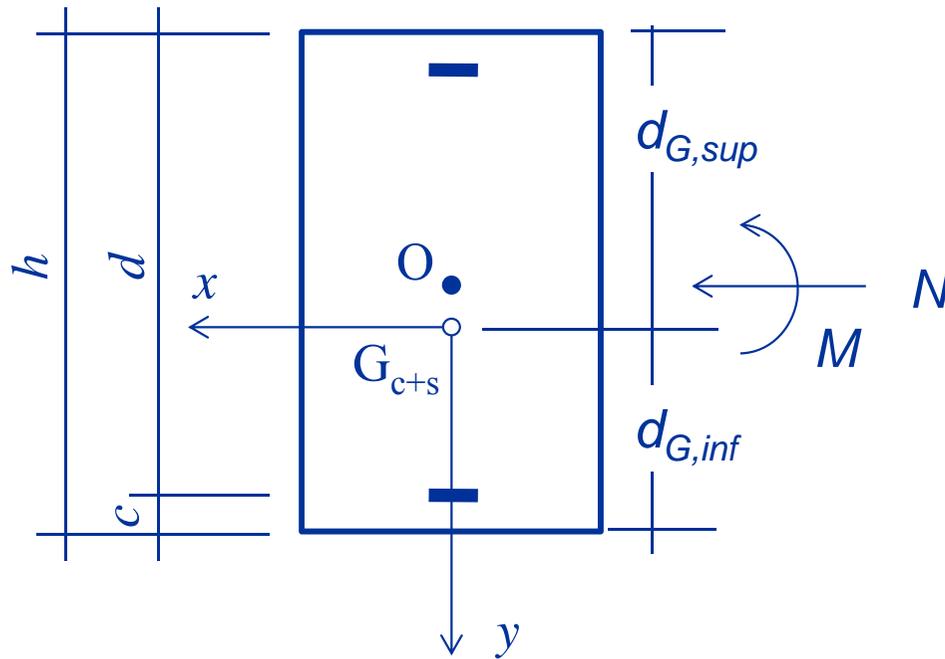
quindi

$$d_{G,sup} = S/A$$

$$d_{G,inf} = h - d_{G,sup}$$

# Flessione composta

2° stadio (Sforzo normale di compress. interno al nocciolo)



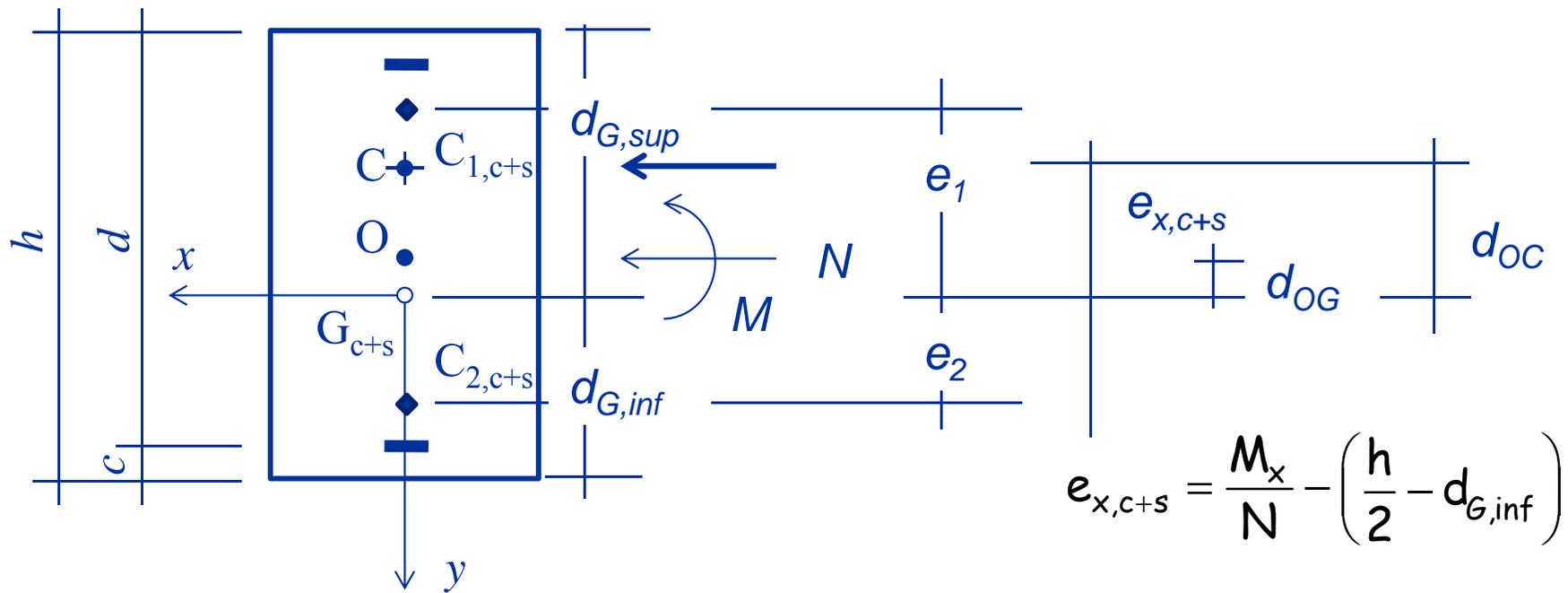
**2° caso:** sforzo normale di compressione interno al nocciolo centrale del calcestruzzo più armature.

In tale caso, sia il calcestruzzo che le armature reagiscono.

$$I_x = b \cdot h \left( d_{G,sup} - \frac{h}{2} \right)^2 + \frac{bh^3}{12} + nA_s (d_{G,inf} - c)^2 + nA'_s (d_{G,sup} - c)^2$$

# Flessione composta

2° stadio (Sforzo normale di compress. interno al nocciolo)



$$e_1 = \frac{I_x}{A d_{G,inf}}$$

$$e_2 = \frac{I_x}{A d_{G,sup}}$$

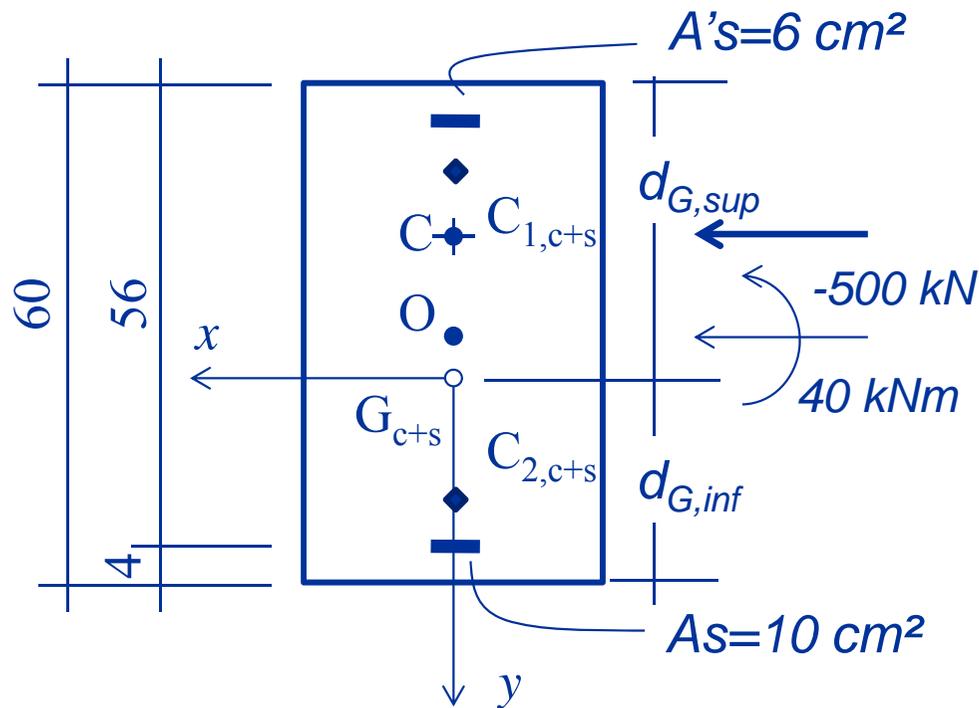
$e \dots$

$$\sigma_c = \frac{N}{A} + \frac{N e_{x,c+s}}{I_x} y$$

$$\sigma_s = n \sigma_c$$

# Esempio n.4

2° stadio (Sforzo normale di compress. interno al nocciolo)



$$A = 0.3 \cdot 0.6 + 15 \cdot (10+6) 10^{-4} = 0.204 \text{ m}^2$$

$$S = \frac{0.30 \cdot 0.60^2}{2} + 15(10 \cdot 10^{-4} \cdot 0.56 + 6 \cdot 10^{-4} \cdot 0.04) = 0.06276 \text{ m}^3$$

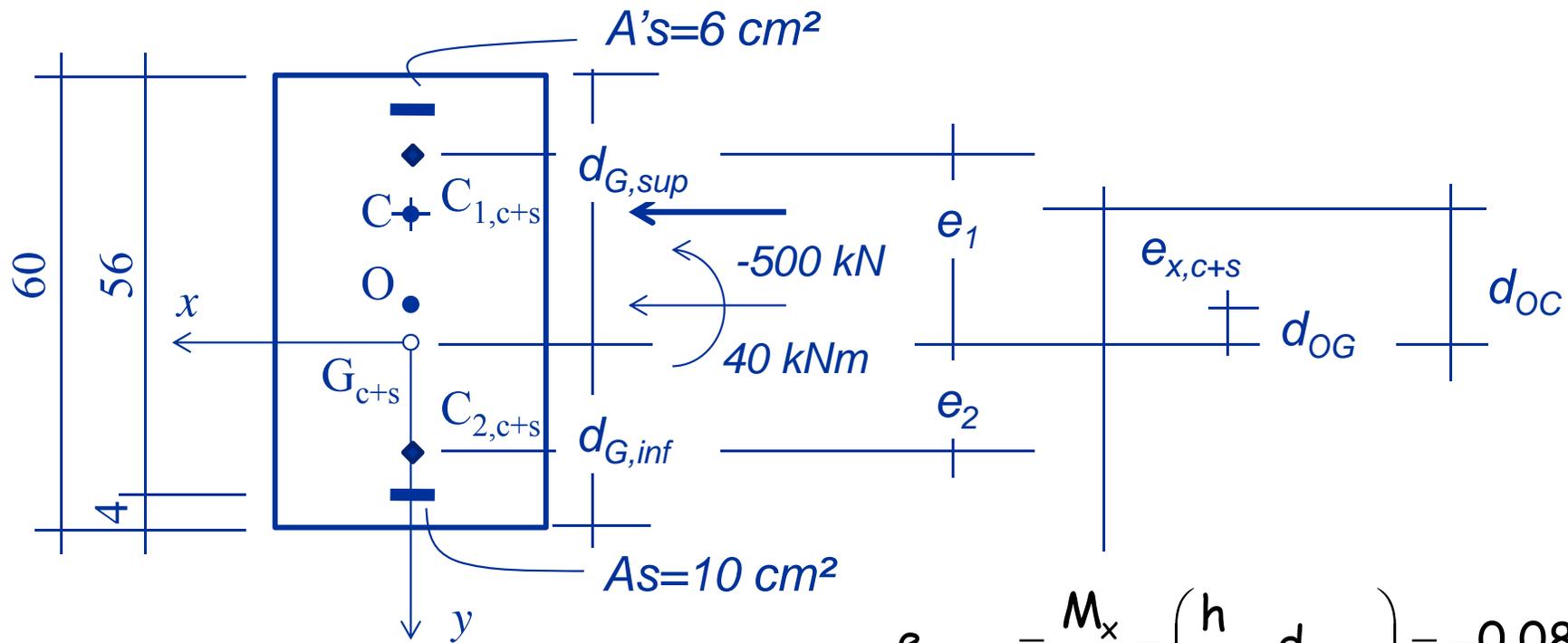
$$d_{G,sup} = \frac{0.06276}{0.204} = 0.3076 \text{ m}$$

$$d_{G,inf} = 0.6 - 0.3076 = 0.2924 \text{ m}$$

$$I = 0.30 \cdot 0.60 \cdot (0.3076 - 0.30)^2 + \frac{0.30 \cdot 0.60^3}{12} + 15(\dots) = 0.007010 \text{ m}^4$$

# Esempio n.4

2° stadio (Sforzo normale di compress. interno al nocciolo)



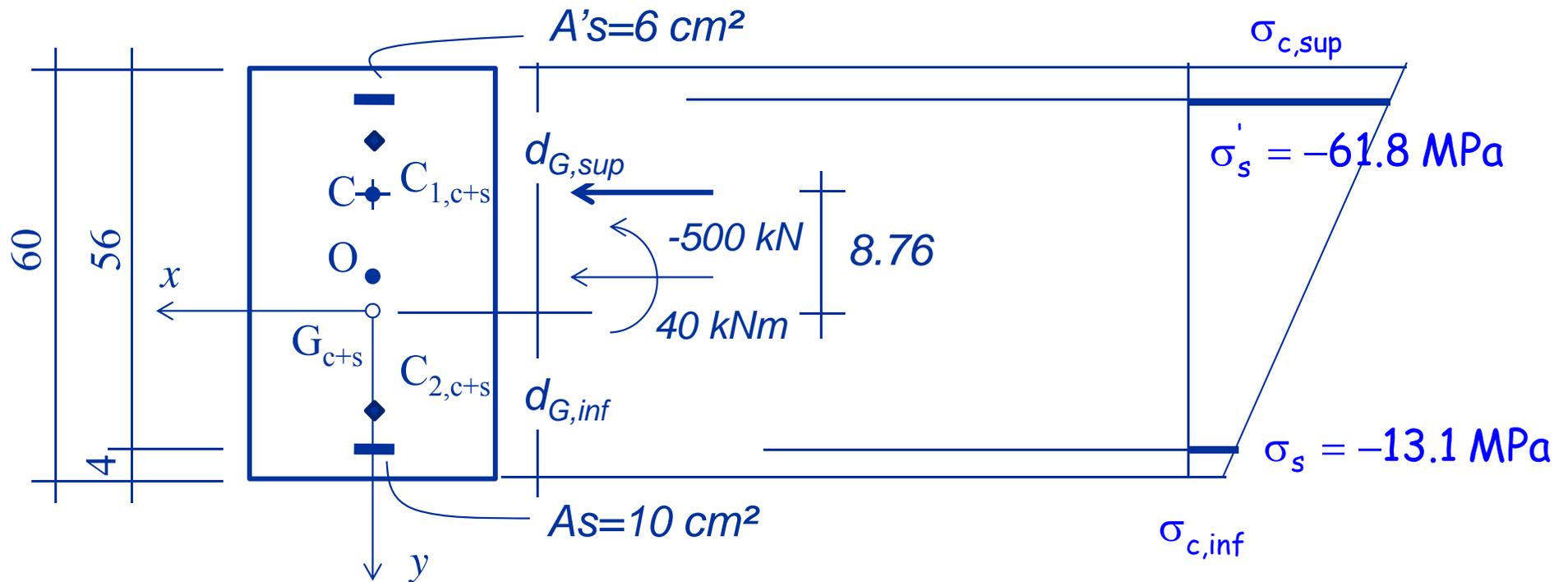
$$e_{x,c+s} = \frac{M_x}{N} - \left( \frac{h}{2} - d_{G,inf} \right) = -0.0876 \text{ m}$$

$$e_1 = \frac{0.007010}{0.204 \cdot 0.2924} = 0.1175 \text{ m}$$

$$e_2 = \frac{0.007010}{0.204 \cdot 0.3076} = 0.1117 \text{ m}$$

# Esempio n.4

2° stadio (Sforzo normale di compress. interno al nocciolo)

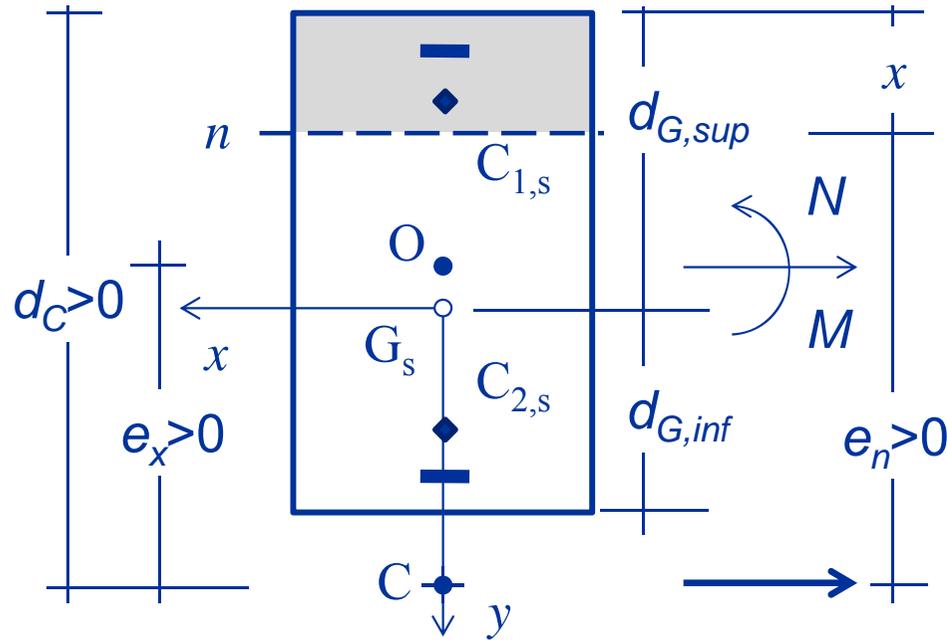


$$\sigma_{c,sup} = \frac{-500 \cdot 10^3}{0.204 \cdot 10^6} + \frac{-500 \cdot 10^3 (-0.0876 \cdot 10^3)}{0.007010 \cdot 10^{12}} (-0.3076 \cdot 10^3) = -4.37 \text{ MPa}$$

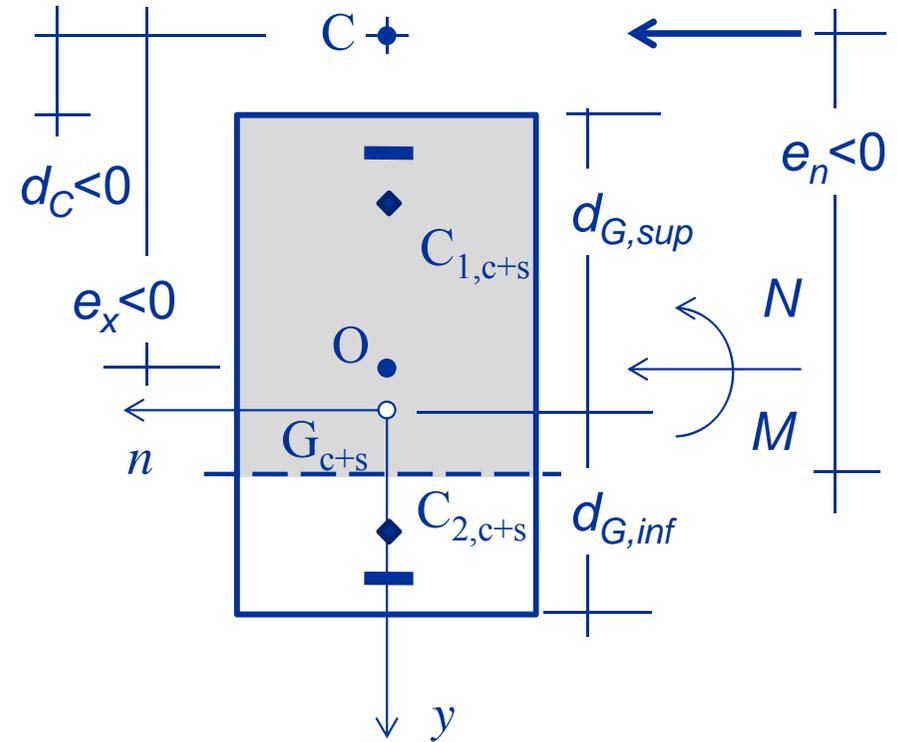
$$\sigma_{c,inf} = \frac{-500 \cdot 10^3}{0.204 \cdot 10^6} + \frac{-500 \cdot 10^3 (-0.0876 \cdot 10^3)}{0.007010 \cdot 10^{12}} (0.2924 \cdot 10^3) = -0.62 \text{ MPa}$$

# Flessione composta

## 2° stadio (Sforzo normale esterno al nocciolo)



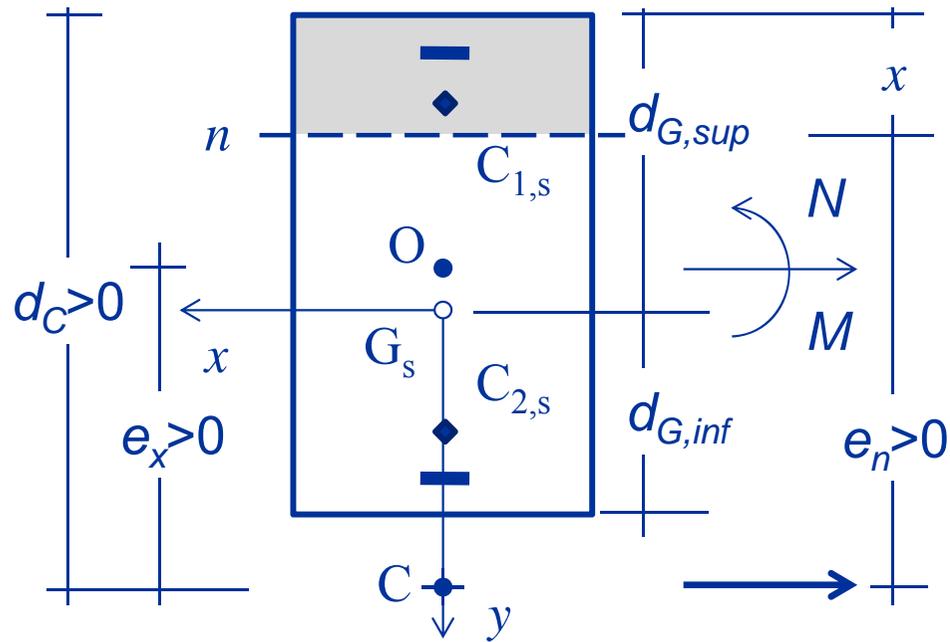
**3° caso:** sforzo normale di trazione esterno al nocciolo centrale delle sole armature.



**3° caso:** sforzo normale di compressione esterno al nocciolo centrale del calcestruzzo più armature.

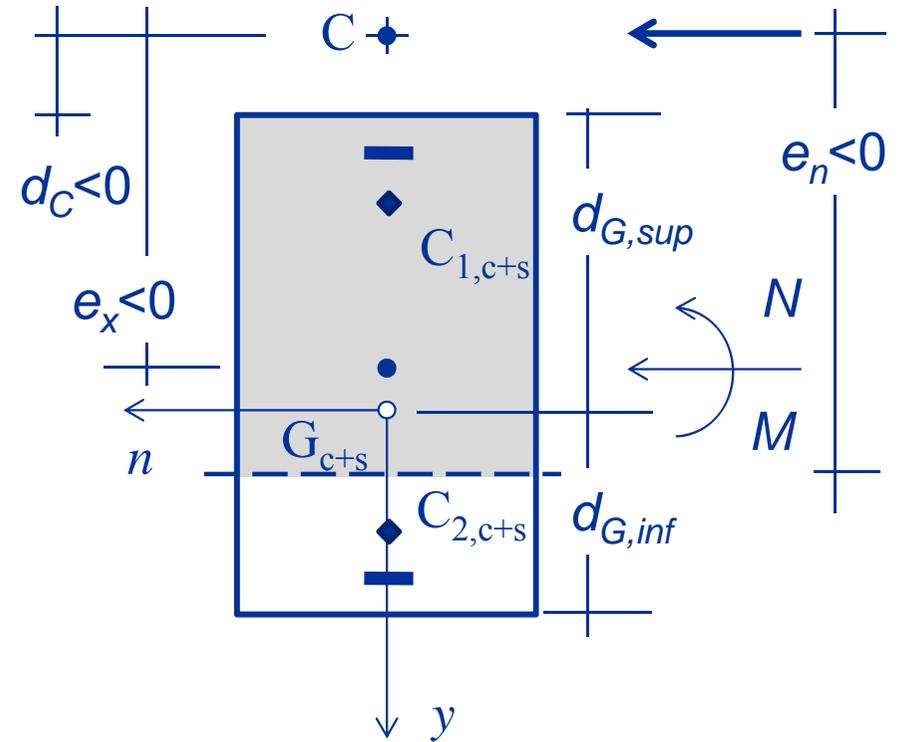
# Flessione composta

2° stadio (Sforzo normale esterno al nocciolo)



distanza del centro di sollecitazione dall'asse neutro

$$e_n = d_c - x$$

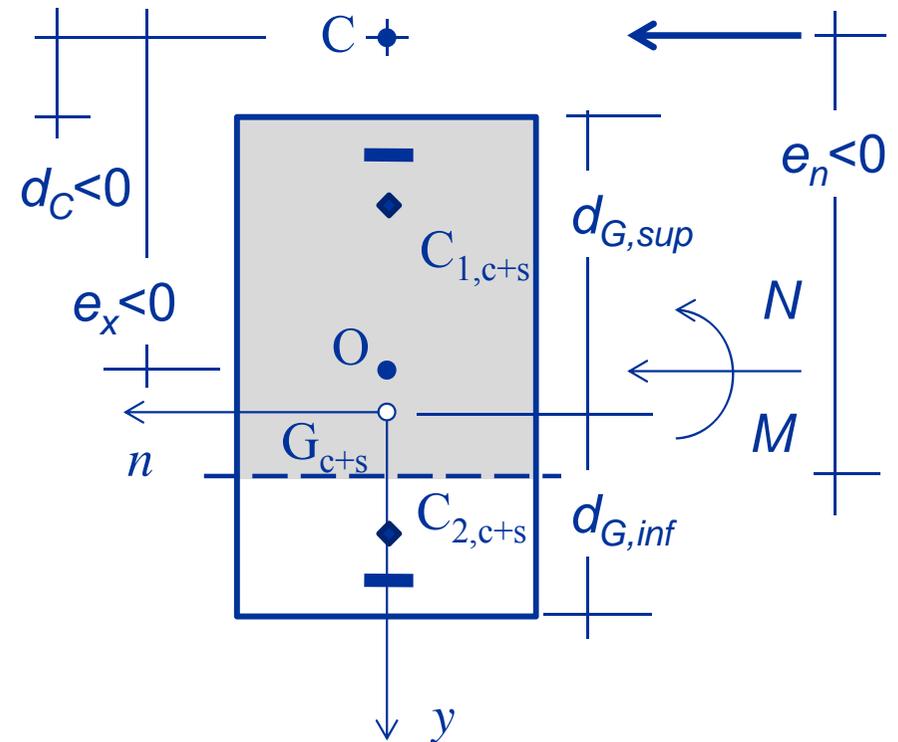
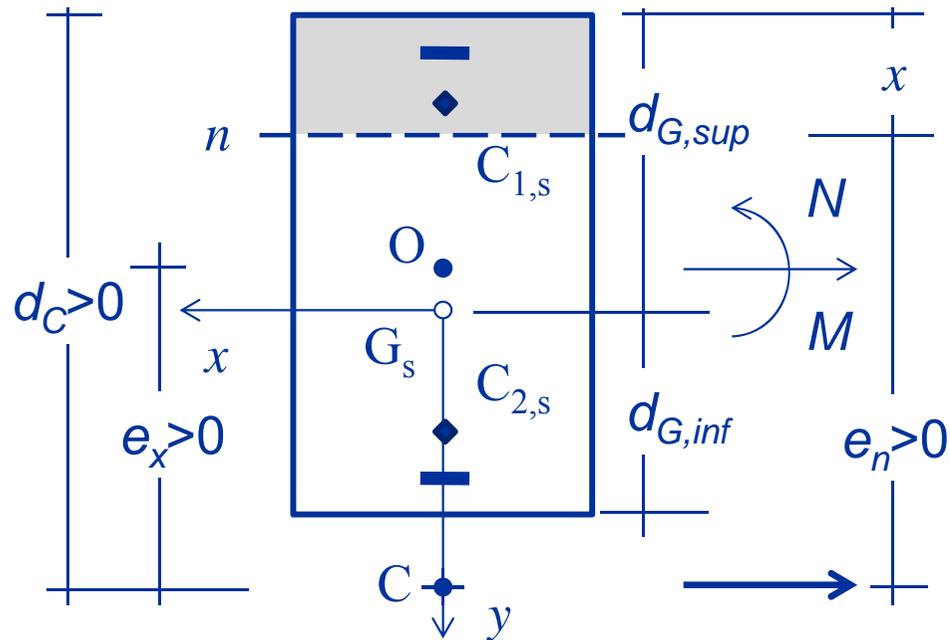


distanza del centro di sollecitazione dal bordo superiore

$$d_c = e_x + \frac{h}{2}$$

# Flessione composta

2° stadio (Sforzo normale esterno al nocciolo)



1. Determinazione dell'asse neutro

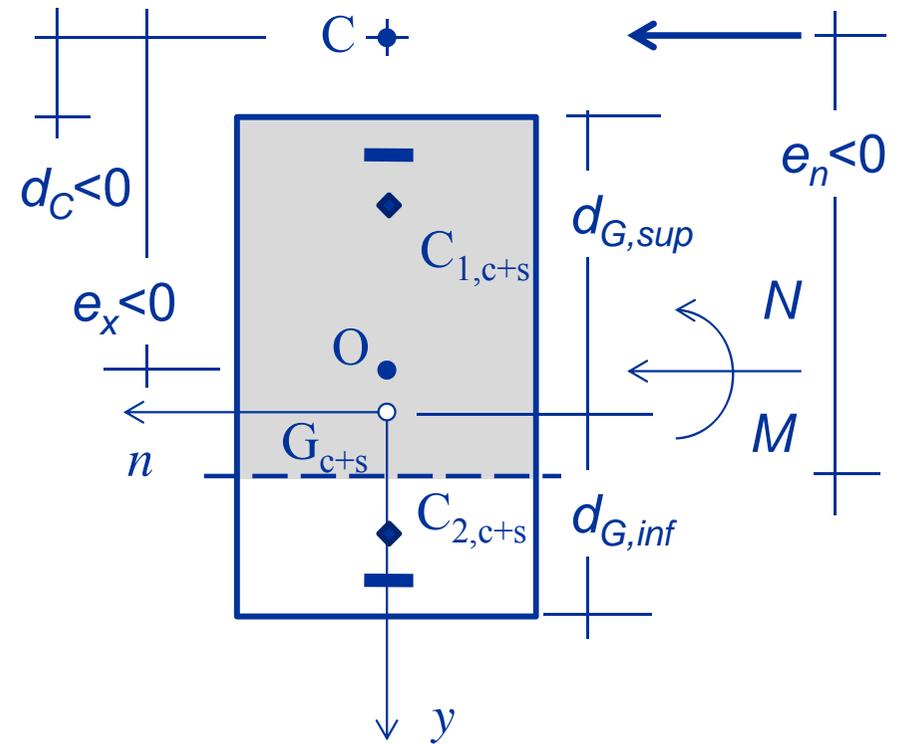
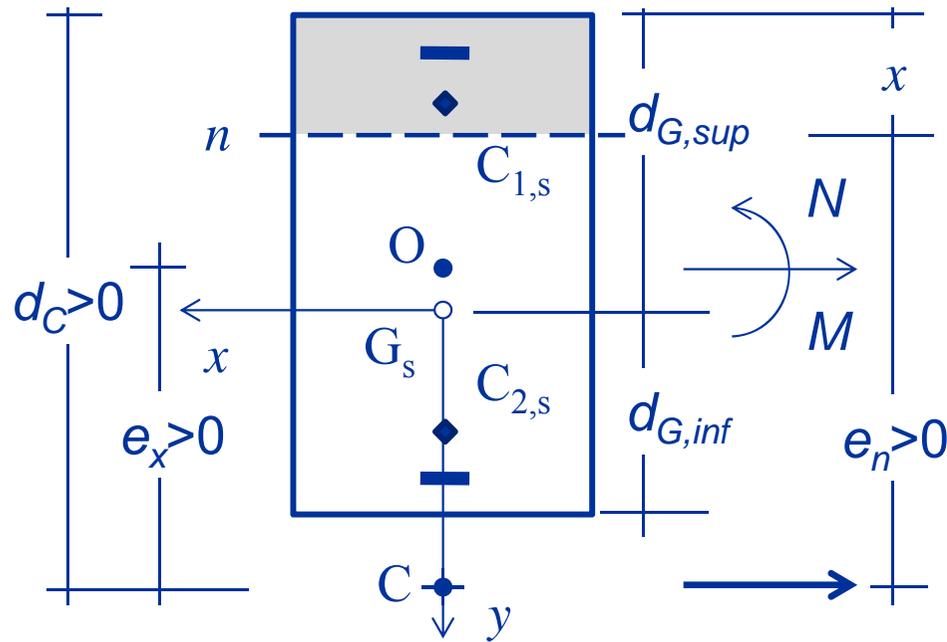
$$S_n e_n = I_n$$

oppure

$$S_n (d_c - x) = I_n$$

# Flessione composta

2° stadio (Sforzo normale esterno al nocciolo)



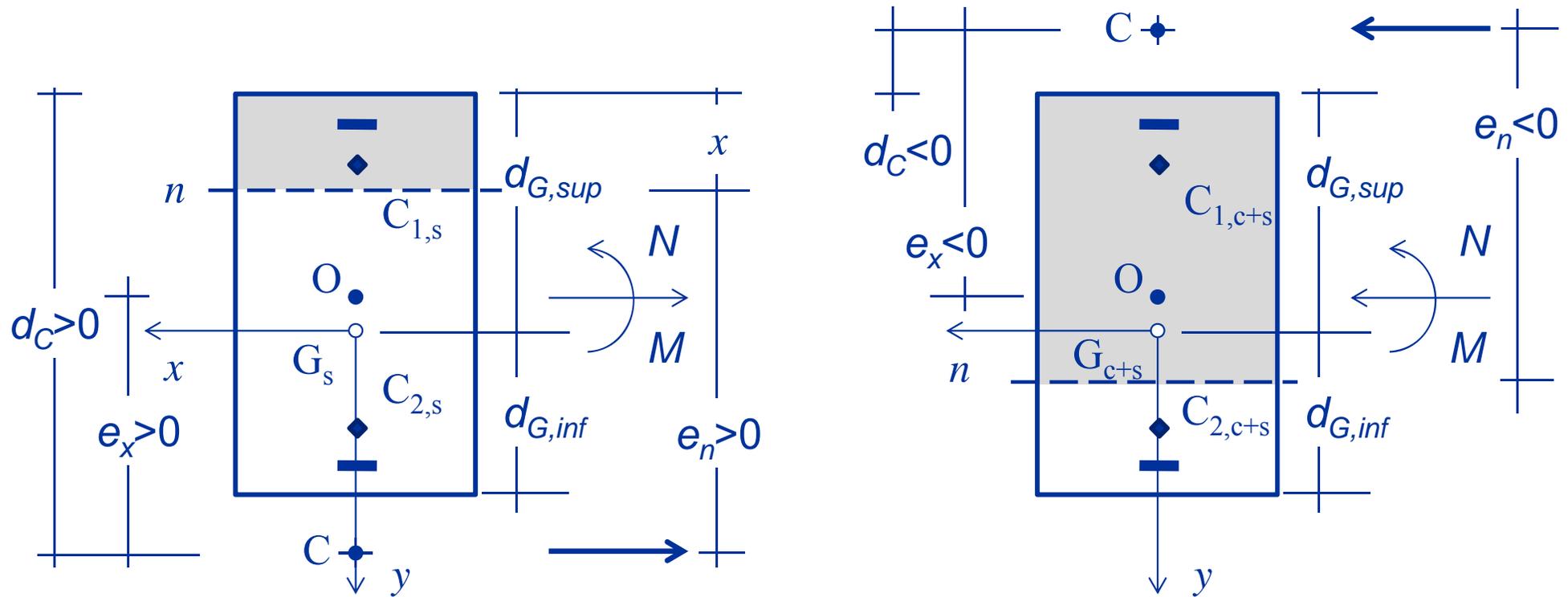
$$S_n = -\frac{bx^2}{2} - nA'_s(x-c) + nA_s(d-x)$$

$$I_n = \frac{bx^3}{3} + nA'_s(x-c)^2 + nA_s(d-x)^2$$

da cui ...

# Flessione composta

2° stadio (Sforzo normale esterno al nocciolo)

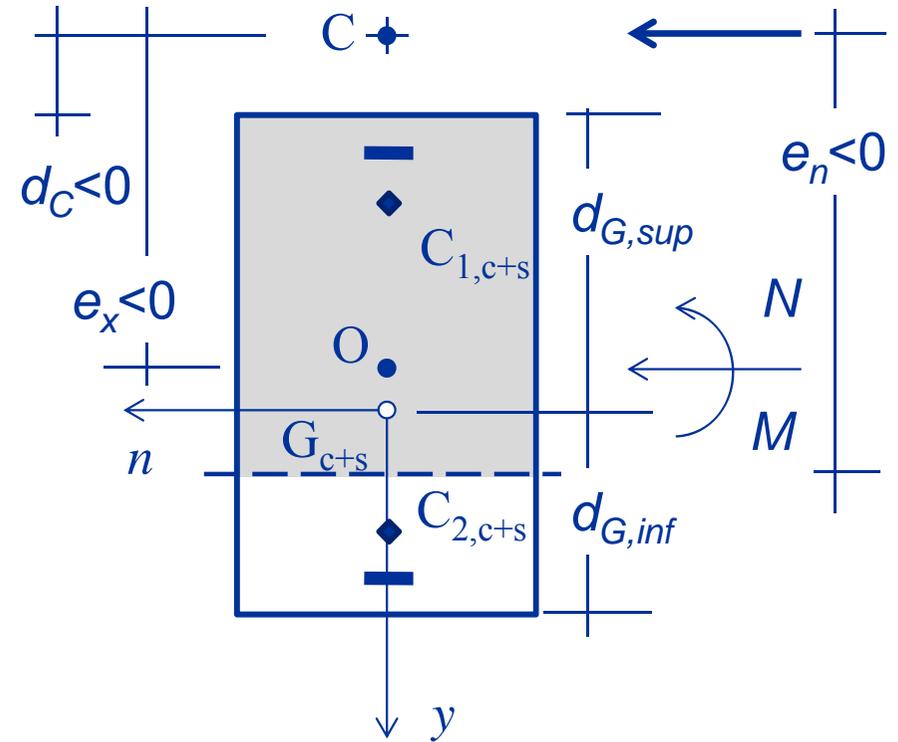
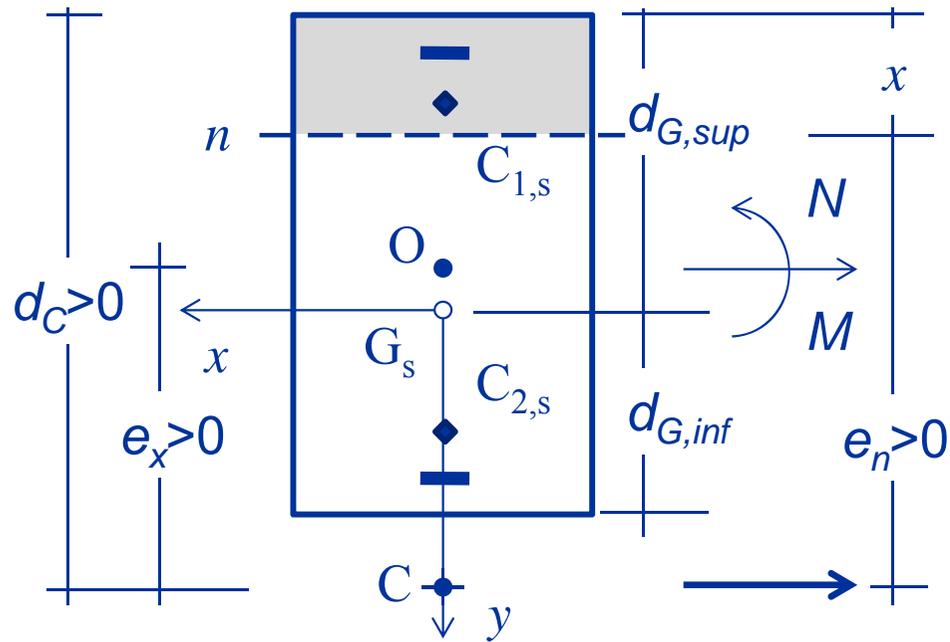


La posizione dell'asse neutro si ottiene dalla risoluzione della seguente equazione di terzo grado

$$x^3 - 3d_c x^2 + \frac{6n}{b} [A_s (d - d_c) + A'_s (c - d_c)] x - \frac{6n}{b} [A_s d (d - d_c) + A'_s c (c - d_c)] = 0$$

# Flessione composta

2° stadio (Sforzo normale esterno al nocciolo)

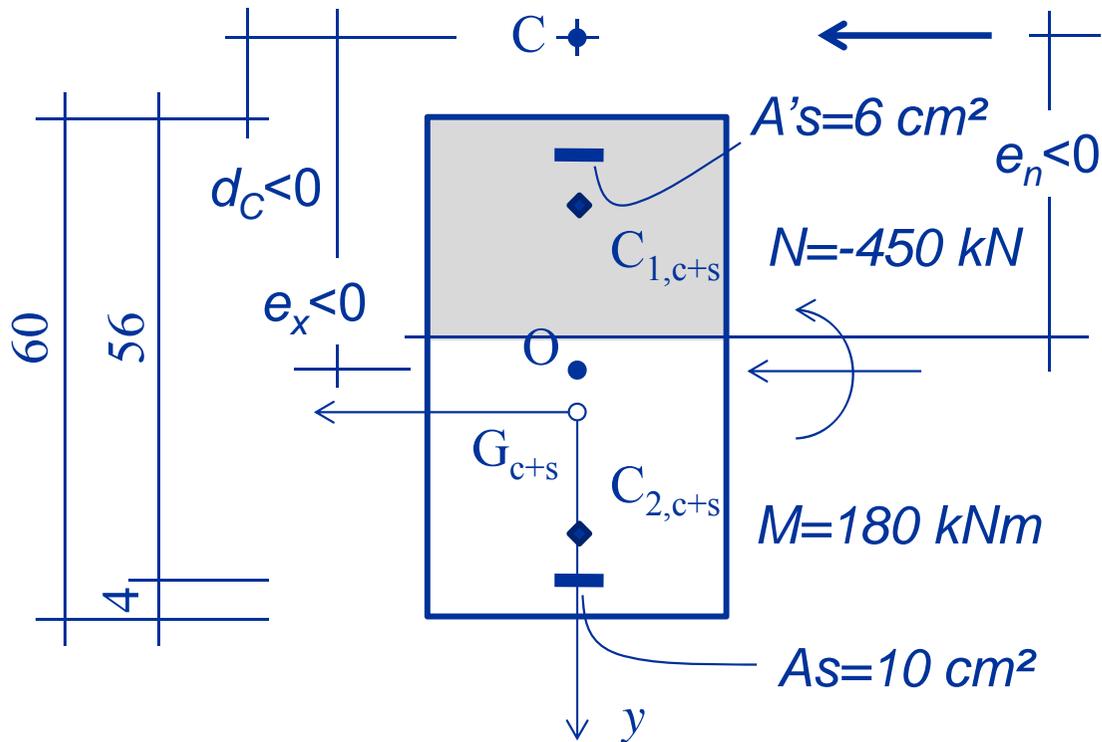


2. Calcolo delle tensioni

$$\sigma_c = \frac{N}{S_n} s \quad \text{e} \quad \sigma_s = n \frac{N}{S_n} s$$

# Esempio n.5

2° stadio (Sforzo normale esterno al nocciolo)



$$d_c = e_x + \frac{h}{2} = \frac{180}{-450} + \frac{0.60}{2} = -0.10 \text{ m}$$

Dalla risoluzione dell'equazione di terzo grado si ha:

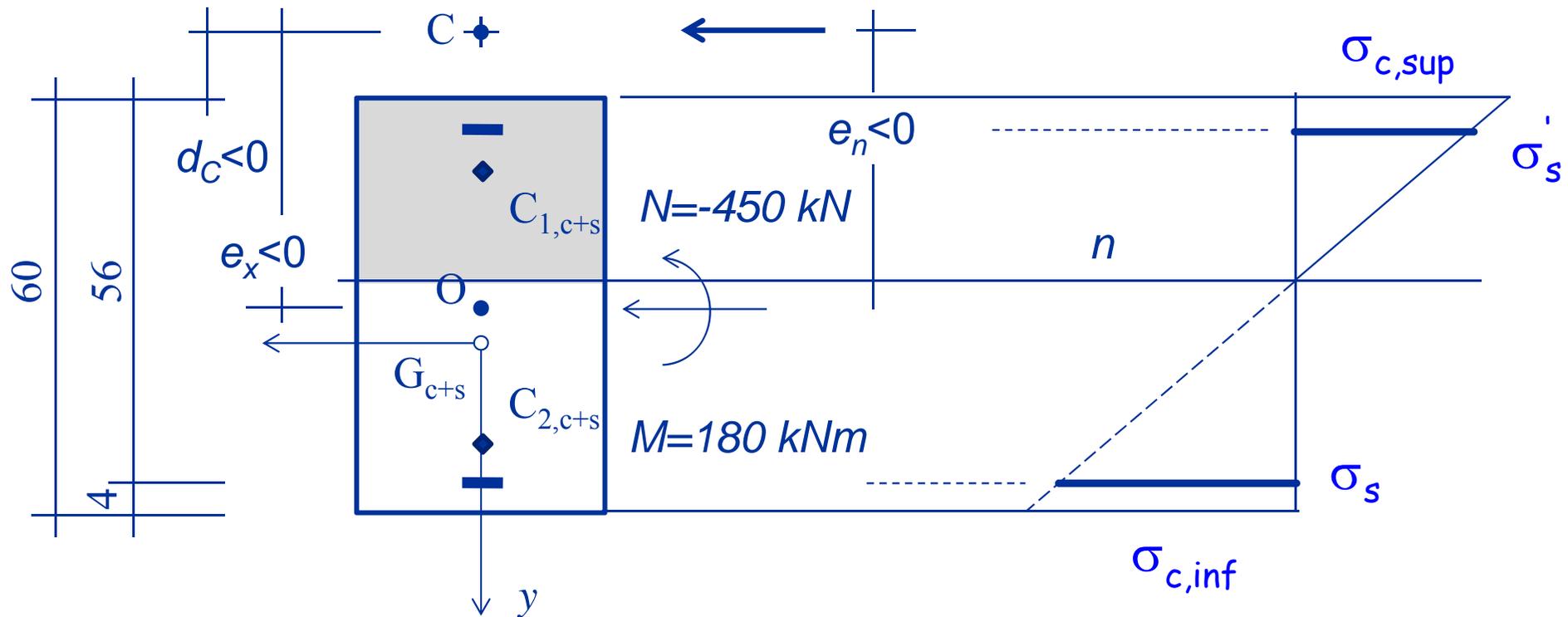
$$x = 0.2862 \text{ m}$$

$$S_n = -\frac{bx^2}{2} - nA'_s(x-c) + nA_s(d-x)$$

$$S_n = \frac{0.30 \cdot 0.2862^2}{2} - 15 \cdot 6 \cdot 10^{-4} \cdot (0.2862 - 0.04) + 15 \cdot 10 \cdot 10^{-4} \cdot (0.56 - 0.2862) = -0.010395 \text{ m}^3$$

# Esempio n.5

2° stadio (Sforzo normale esterno al nocciolo)

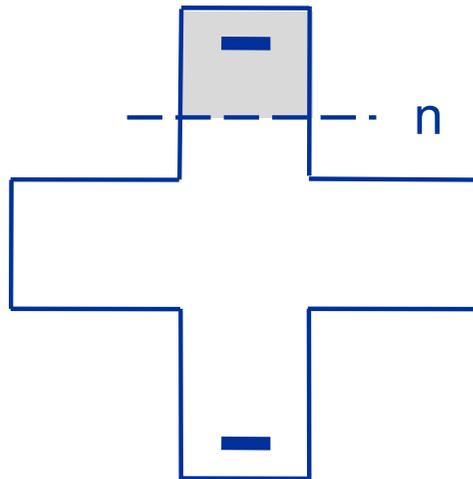


$$\sigma_{c,sup} = \frac{-450 \cdot 10^3}{-0.01039 \cdot 10^9} (-0.2862 \cdot 10^3) = -12.39 \text{ MPa}$$

$$\sigma_s = 15 \frac{-450 \cdot 10^3}{-0.01039 \cdot 10^9} (0.56 - 0.2862) \cdot 10^3 = 177.8 \text{ MPa}$$

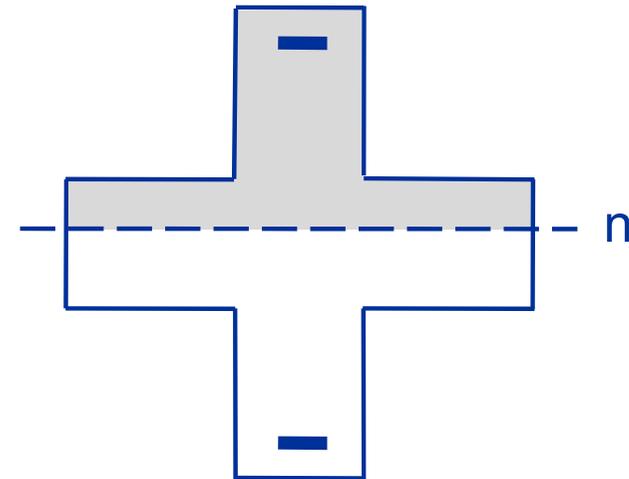
# Sezioni non rettangolari

2° stadio



Se la parte compressa  
è rettangolare ....

la sezione può essere trattata come  
rettangolare

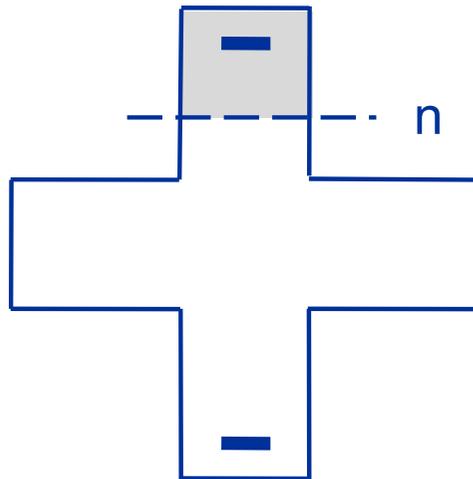


Se la parte compressa  
non è rettangolare ....

la sezione NON può essere trattata  
come rettangolare

# Sezioni non rettangolari

2° stadio



In presenza di una sezione rettangolare a tratti si può fare inizialmente l'ipotesi che la parte compressa sia rettangolare (nel caso in figura, che l'asse neutro tagli l'anima superiore).

Si determina la posizione dell'asse neutro con la formula:

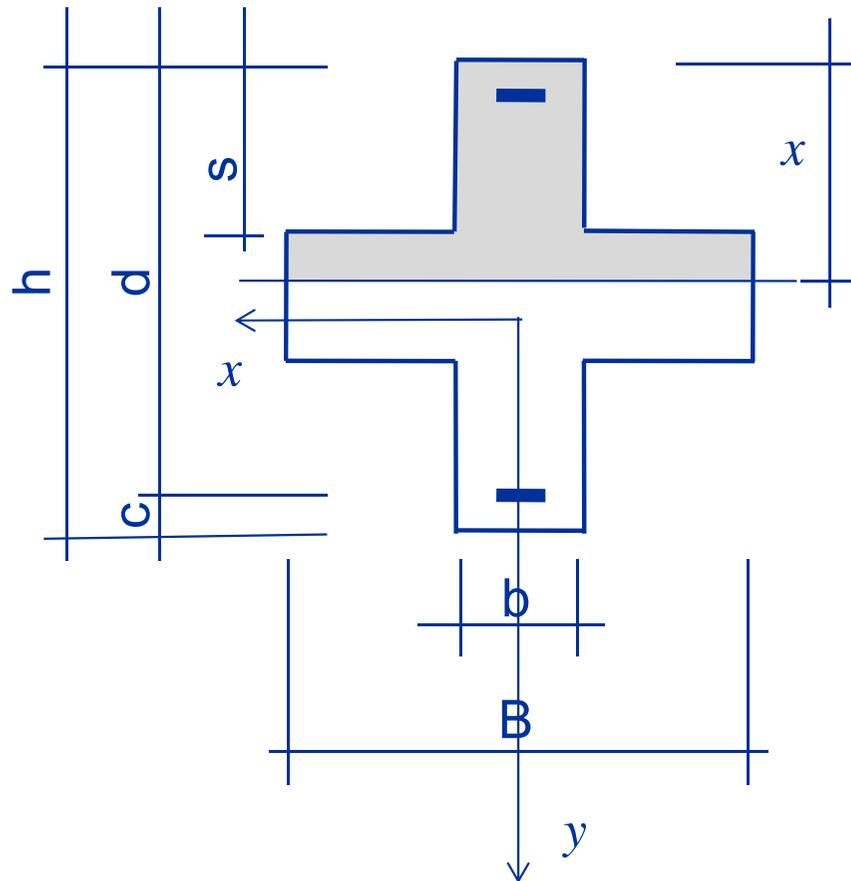
$$S_n e_n = I_n$$

Se l'asse neutro taglia l'anima superiore

la posizione dell'asse neutro è corretta e il momento d'inerzia della sezione reagente omogeneizzata può essere calcolato con le formule della sezione rettangolare.

# Sezioni non rettangolari

## 2° stadio



Se l'asse neutro non taglia l'anima superiore

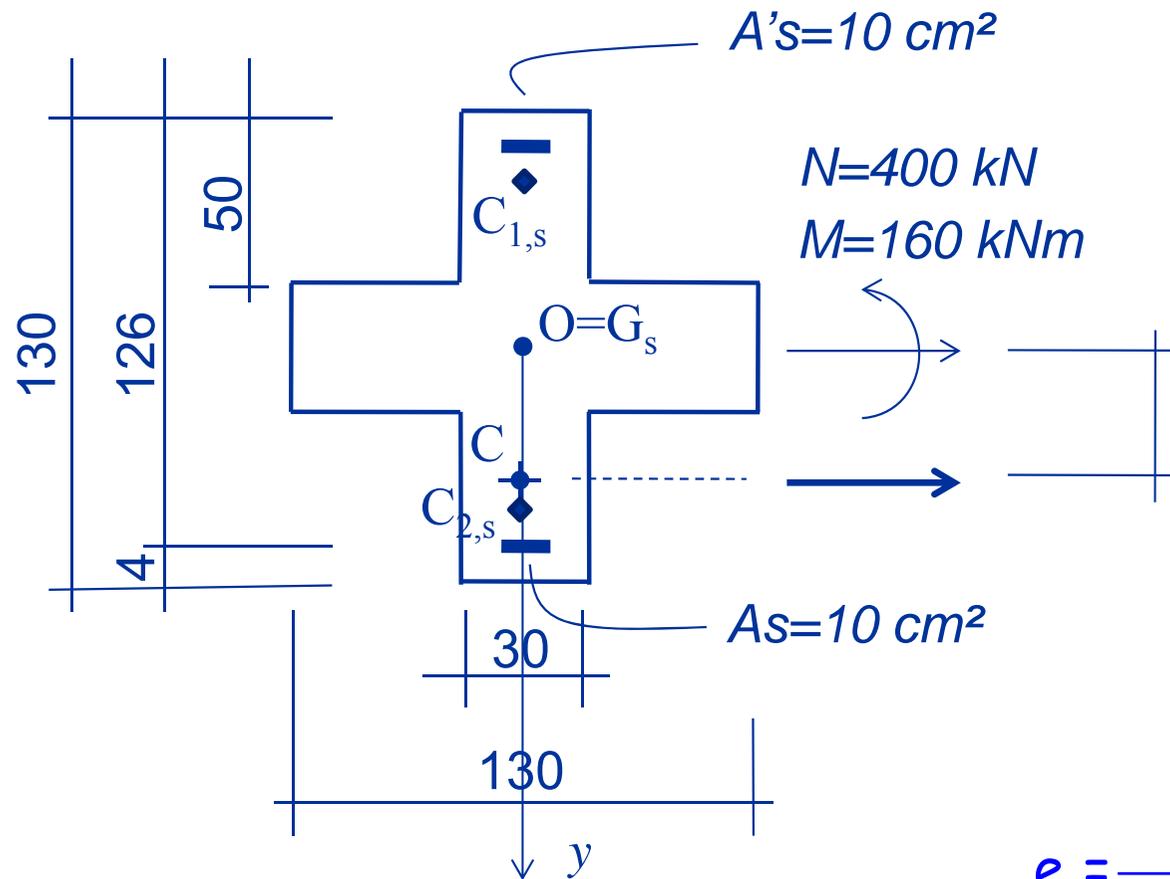
la posizione calcolata dell'asse neutro è errata. La posizione dell'asse neutro deve essere rivalutata ipotizzando che l'asse neutro tagli l'ala. La nuova posizione dell'asse neutro può essere calcolata imponendo

$$S_n e_n = I_n$$

dove  $S_n$  e  $I_n$  sono definiti in funzione della forma non rettangolare della parte compressa.

# Esempio n. 8

2° stadio



Centro di sollecitazione  
interno al nocciolo delle  
sole armature:

**SEZIONE TUTTA TESA**

$$e_x = 0.40 \text{ m}$$

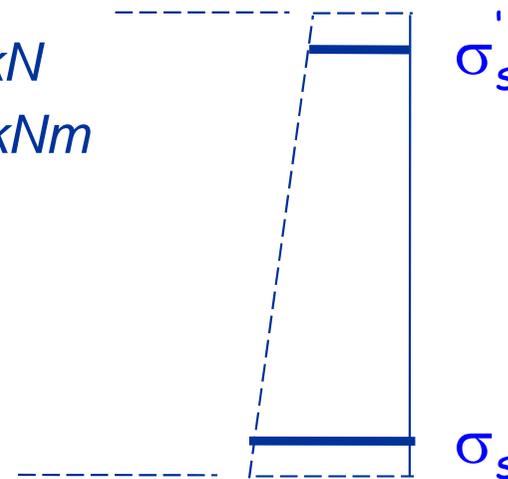
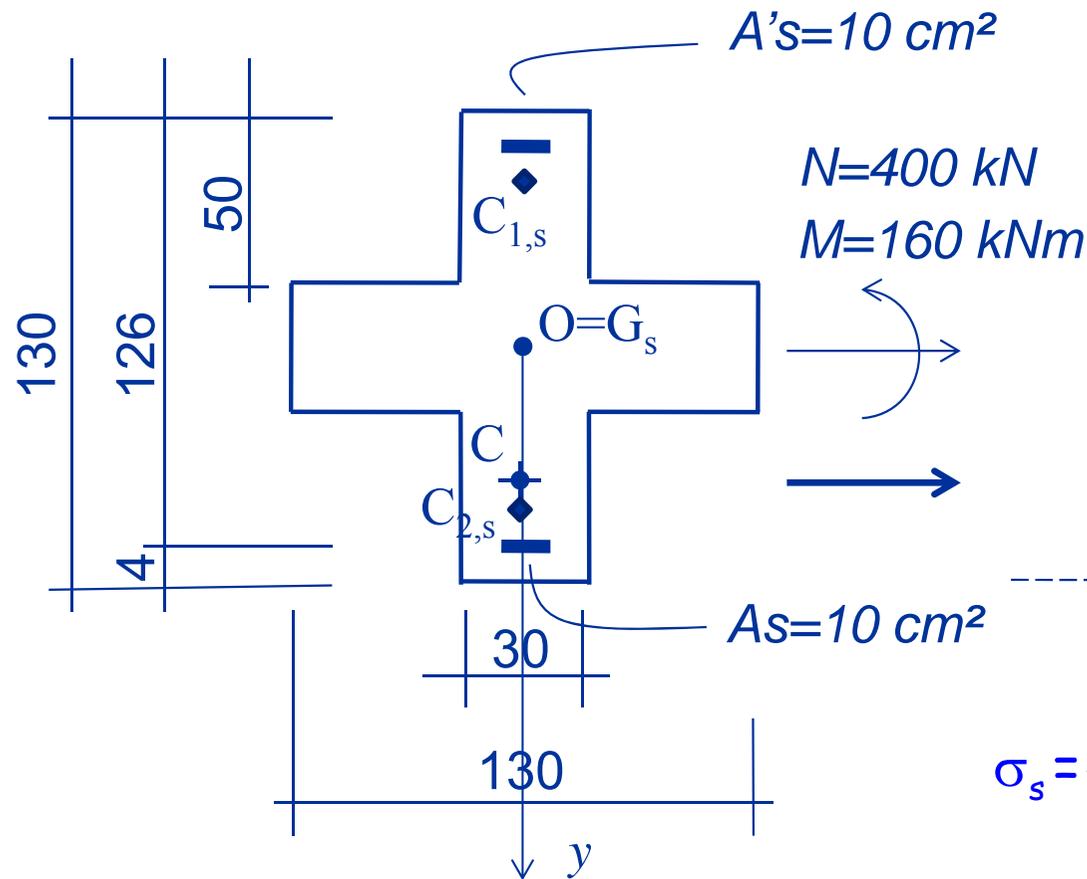
$$e_x = \frac{M_x}{N} = \frac{160}{400} = 0.40 \text{ m}$$

$$e_1 = \frac{I_x}{A d_{G,\text{inf}}} = \frac{74420}{20 \cdot 65} = 57.25 \text{ cm}$$

$$e_2 = e_1$$

# Esempio n. 8

2° stadio



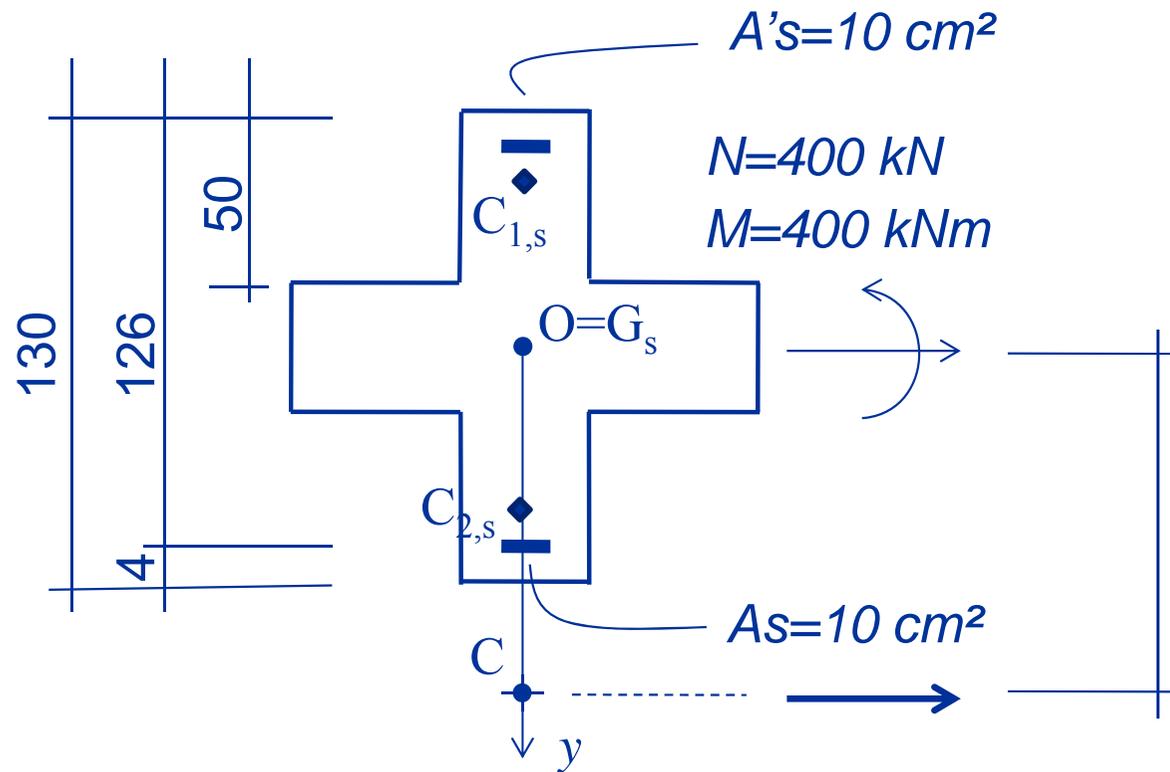
$$\sigma_s = \frac{400 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^2} + \frac{160 \cdot 10^6}{74420 \cdot 10^4} (61 \cdot 10)$$

$$= 331.1 \text{ MPa}$$

$$\sigma'_s = 200 + 0.215(-610) = 68.9 \text{ MPa}$$

# Esempio n. 9

2° stadio



Centro di sollecitazione  
esterno al nocciolo delle  
sole armature:

**SEZIONE PARZIALIZZATA**

$$e_x = 1 \text{ m}$$

$$e_x = \frac{M_x}{N} = \frac{400}{400} = 1 \text{ m}$$

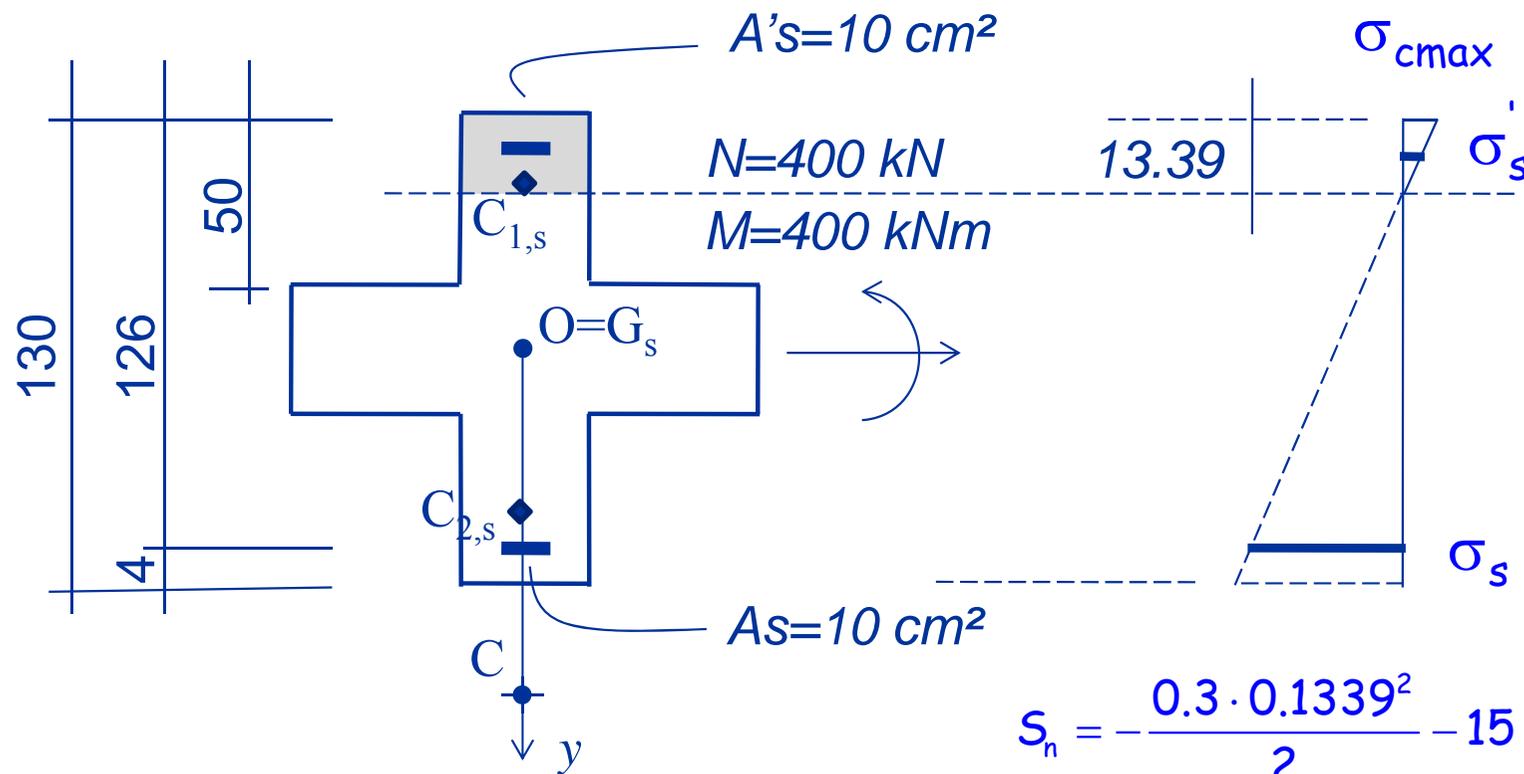
$$x^3 - 4.95x^2 - 0.60x - 0.16674 = 0$$



$$x = 13.39 \text{ cm}$$

# Esempio n. 9

2° stadio



$$\sigma_{cmax} = \frac{400 \cdot 10^3}{0.01279 \cdot 10^9} (-0.01339 \cdot 10^3)$$

$$= -4.19 \text{ MPa}$$

$$S_n = -\frac{0.3 \cdot 0.1339^2}{2} - 15 \cdot 10^{-4} \cdot 0.0939 +$$

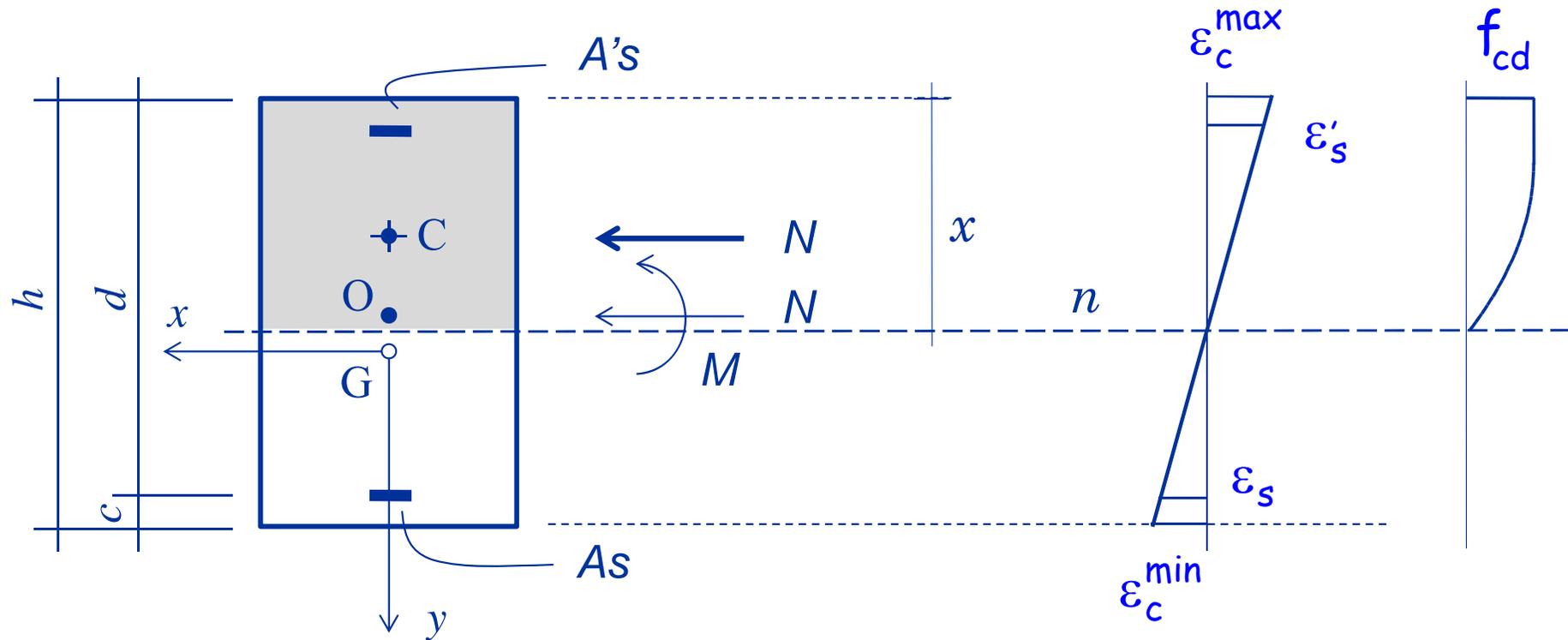
$$15 \cdot 10^{-4} \cdot (1.26 - 0.1339) = 0.01279 \text{ m}^3$$

$$\sigma_s = 15 \cdot 0.03127 (1260 - 133.9)$$

$$= 528.2 \text{ MPa}$$

# Flessione composta

3° stadio



Dati:

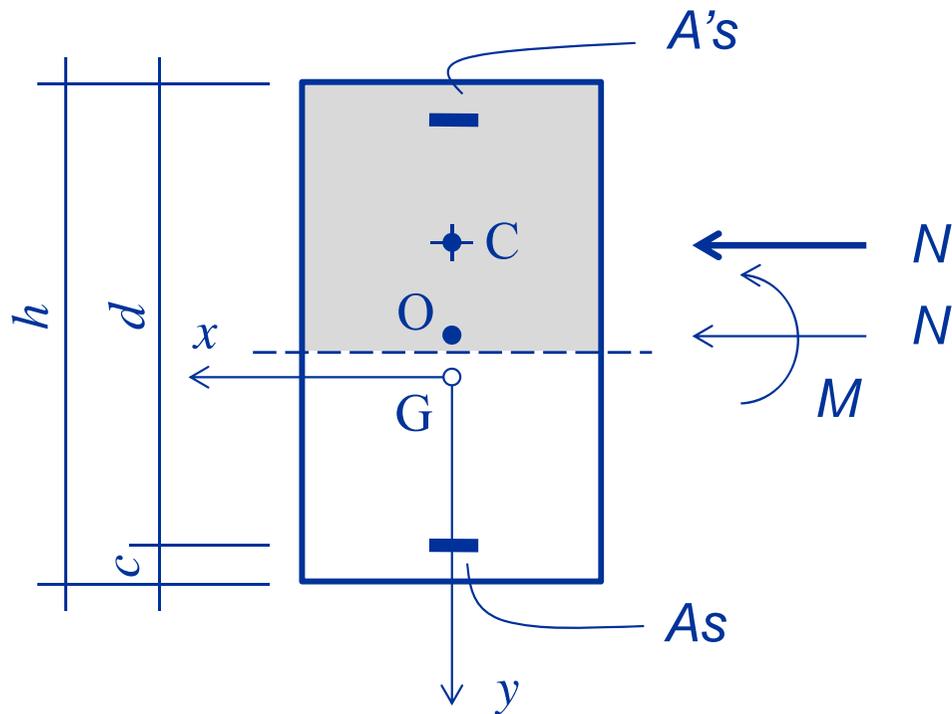
- Geometria della sezione
- Armature
- Coppia  $M_{Ed}-N_{Ed}$

Incognite:

Momento resistente  $M_{Rd}$   
corrispondente a  $N_{Ed}$

# Flessione composta

3° stadio

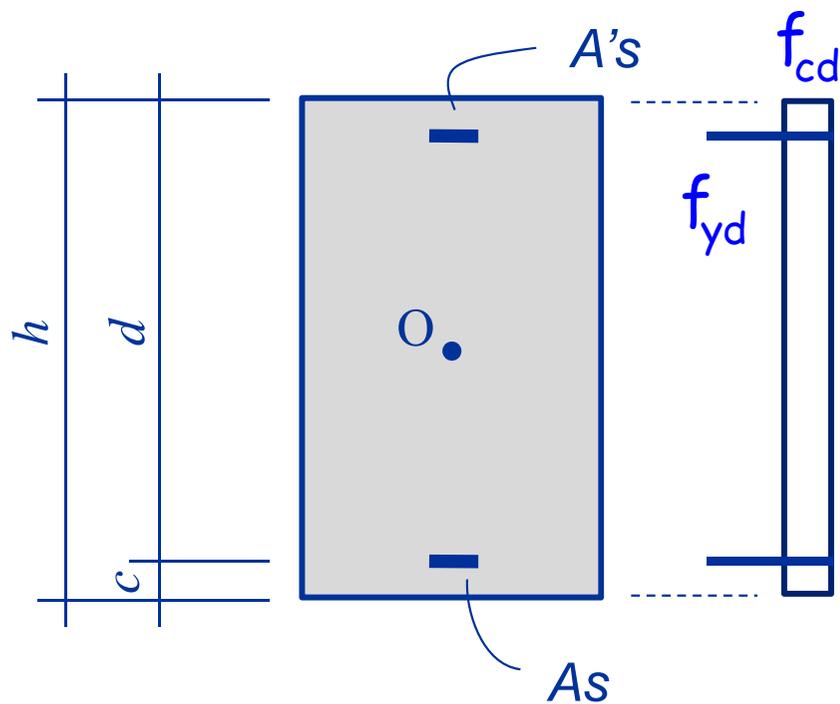


Procedura:

1. Individuazione dell'asse neutro
2. Calcolo delle tensioni
3. Calcolo del momento resistente

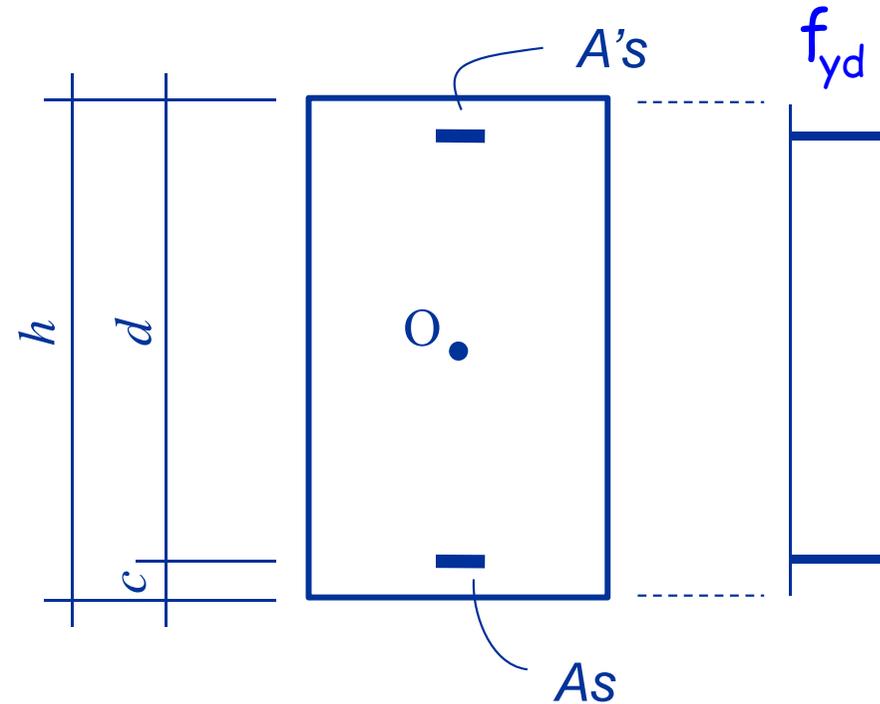
# Massimo sforzo normale

3° stadio



Massimo sforzo di compressione

$$N_{Rd} = - (A_c f_{cd} + A_{s,tot} f_{yd})$$



Massimo sforzo di trazione

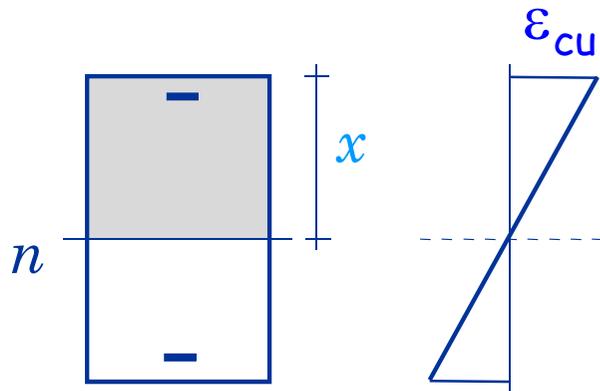
$$N_{Rd} = A_{s,tot} f_{yd}$$

# Individuazione asse neutro

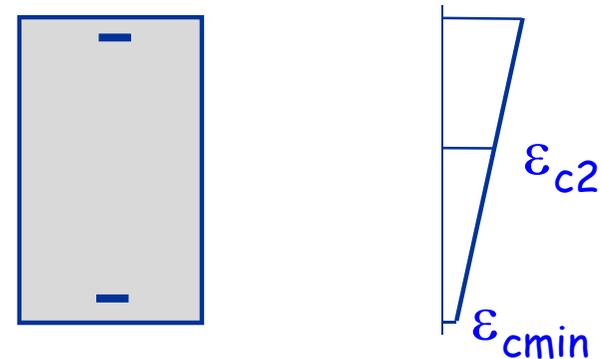
3° stadio

Avendo posto solo un limite alla deformazione massima del calcestruzzo, esistono due possibilità relativamente ai diagrammi di deformazione :

Sezione parzializzata

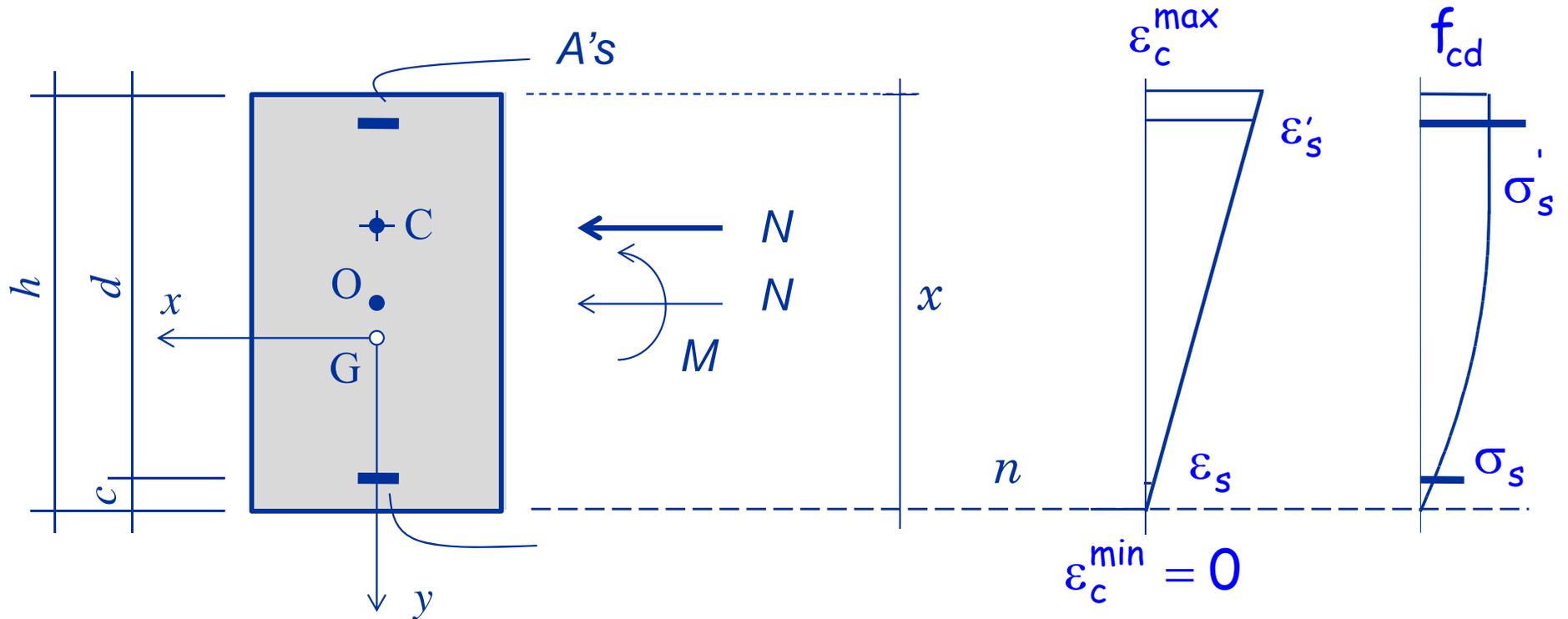


Sezione tutta compressa



# Individuazione asse neutro

3° stadio

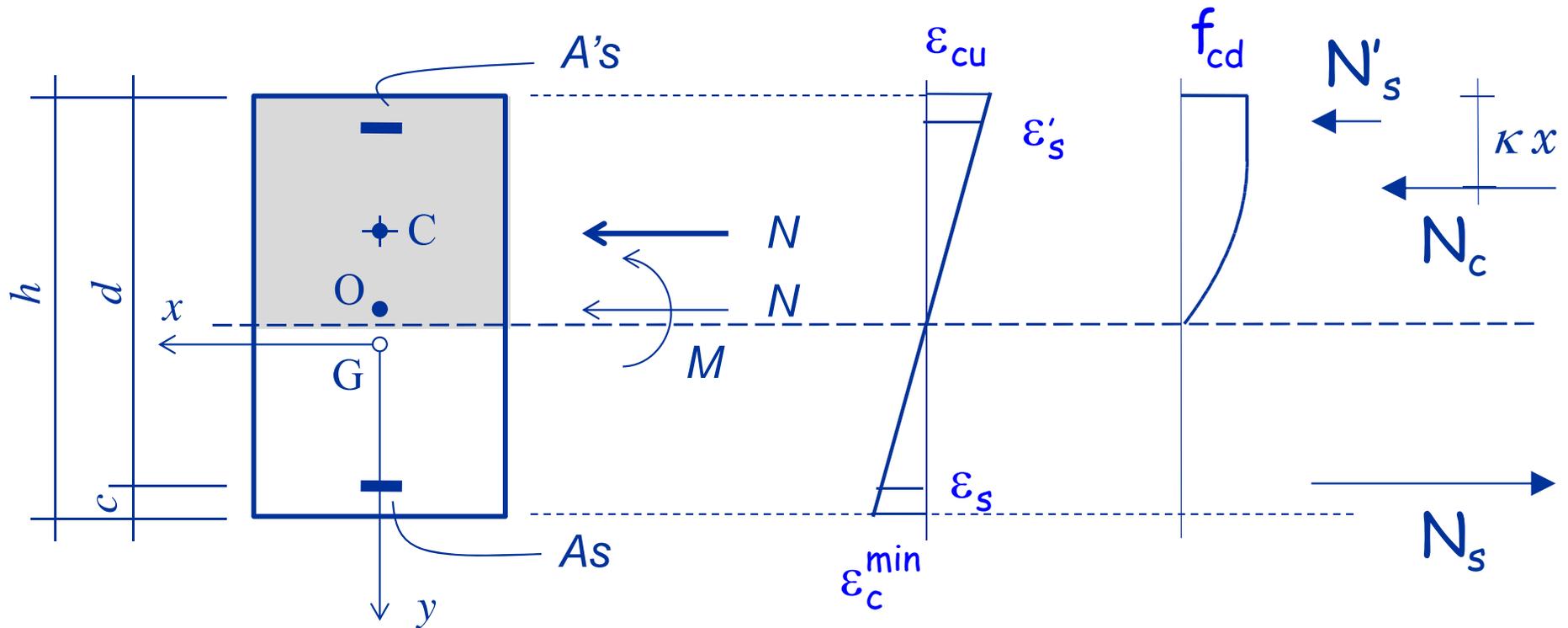


Lo sforzo normale corrispondente al diagramma di passaggio tra sezioni parzializzate e tutte compresse è:

$$N_{Rd} = -\beta A_c f_{cd} + \sum A_{s,i} \sigma_{s,i}$$

# Individuazione asse neutro

3° stadio (sezione parzializzata)



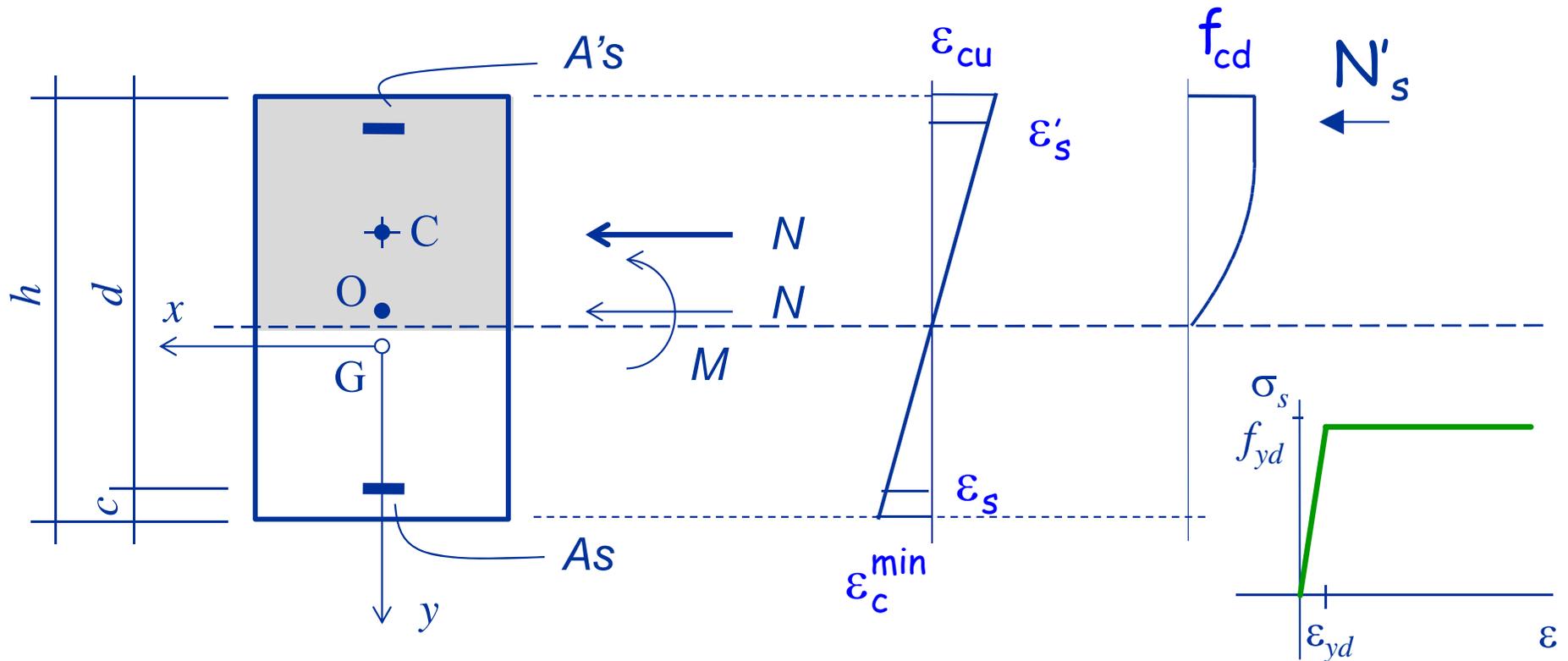
1. Individuazione dell'asse neutro:

$$N_c + N'_s + N_s = N_{Ed}$$

(equilibrio alla traslazione)

# Risultante delle tensioni

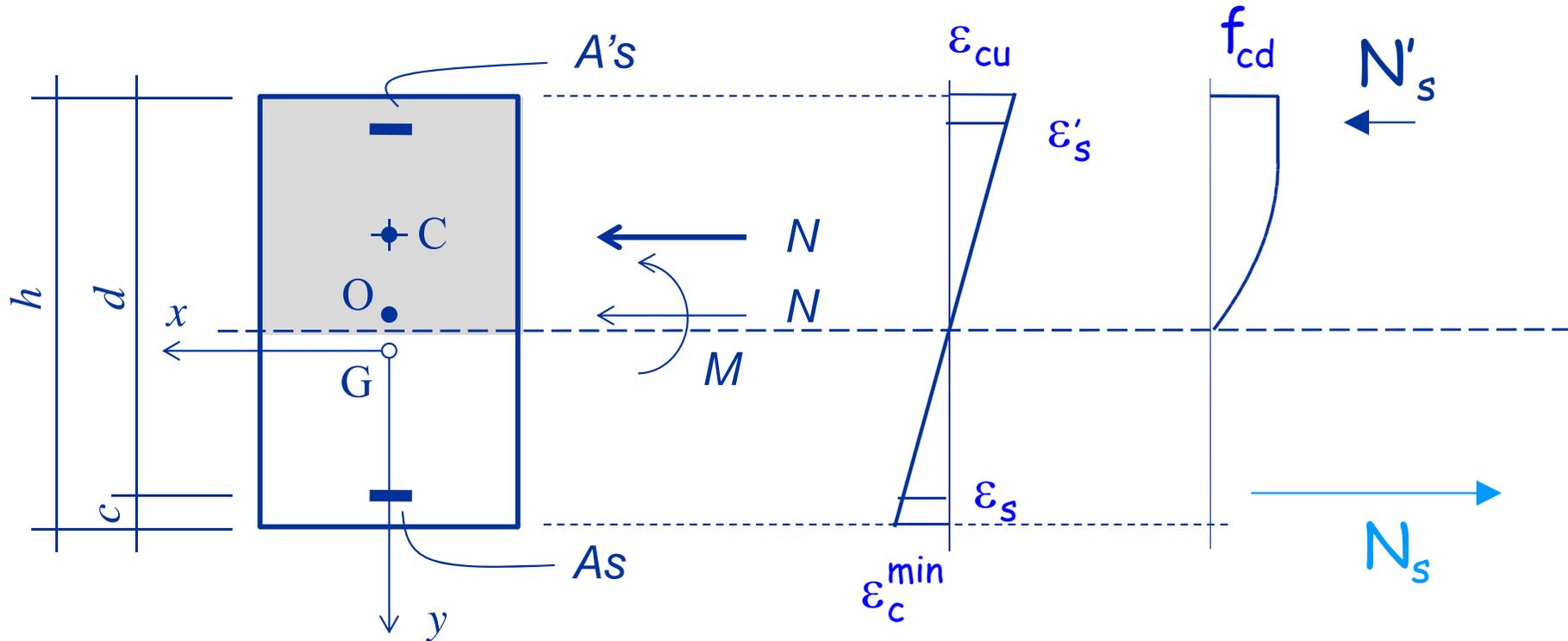
armatura compressa (sezione parzializzata)



$$\epsilon'_s = \frac{x - c}{x} \epsilon_{cu} \begin{cases} \text{se } \epsilon'_s > \epsilon_{yd} & \Rightarrow \sigma'_s = f_{yd} & \Rightarrow N'_s = A'_s f_{yd} \\ \text{se } \epsilon'_s \leq \epsilon_{yd} & \Rightarrow \sigma'_s = \frac{\epsilon'_s}{\epsilon_{yd}} f_{yd} & \Rightarrow N'_s = A'_s \sigma'_s \end{cases}$$

# Risultante delle tensioni

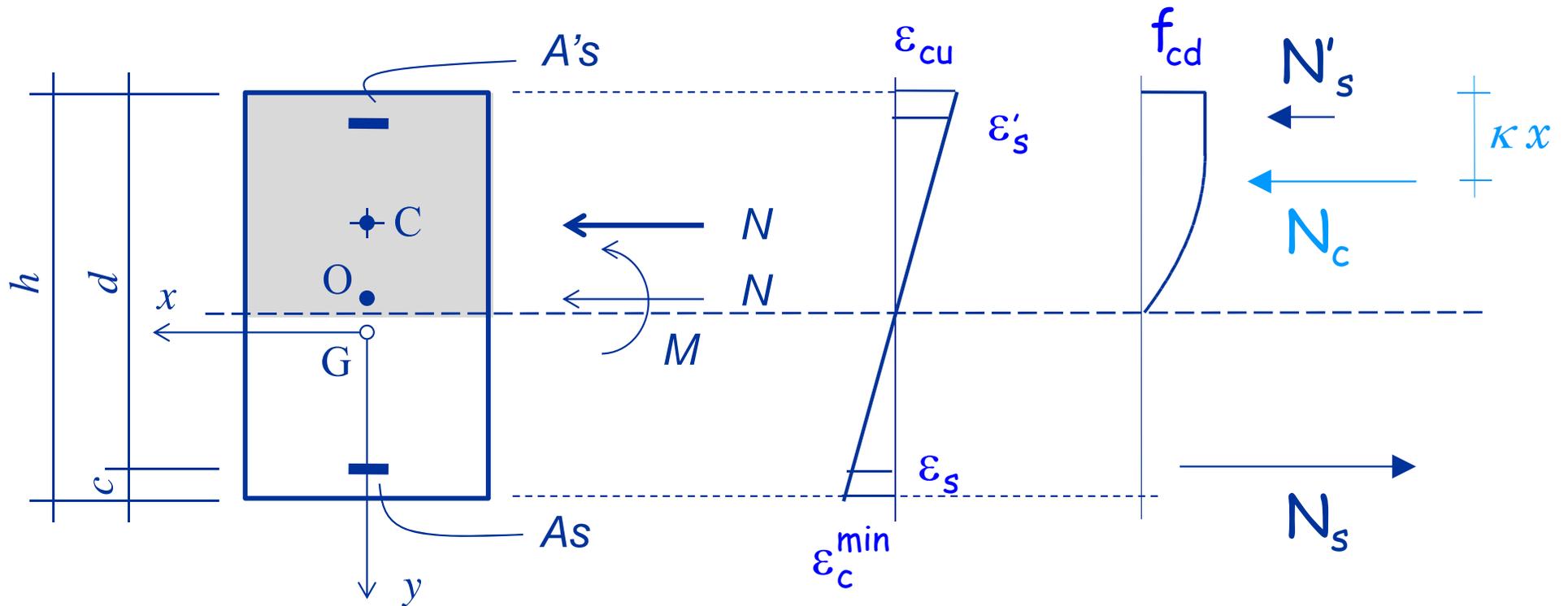
armatura compressa (sezione parzializzata)



$$\epsilon_s = \frac{d-x}{x} \epsilon_{cu} \begin{cases} \text{se } \epsilon_s > \epsilon_{yd} & \Rightarrow \sigma_s = f_{yd} & \Rightarrow N_s = A_s f_{yd} \\ \text{se } \epsilon_s \leq \epsilon_{yd} & \Rightarrow \sigma_s = \frac{\epsilon_s}{\epsilon_{yd}} f_{yd} & \Rightarrow N_s = A_s \sigma_s \end{cases}$$

# Risultante delle tensioni

armatura compressa (sezione parzializzata)



$$N_c = \beta b x f_{cd}$$

per sezione rettangolare,  $\beta = 0.810$

# Calcolo dell'asse neutro

Sezione rettangolare parzializzata

Per sezione parzializzata e con armature snervate,  
si ottiene un'equazione di primo grado che ha come  
soluzione

$$x = \frac{(A_s - A'_s) f_{yd} - N_{Ed}}{\beta b f_{cd}}$$

$N_{Ed}$  positivo se trazione

Una volta trovata la profondità dell'asse neutro  
occorre verificare che le armature siano snervate.  
Se ciò accade la soluzione trovata è corretta.

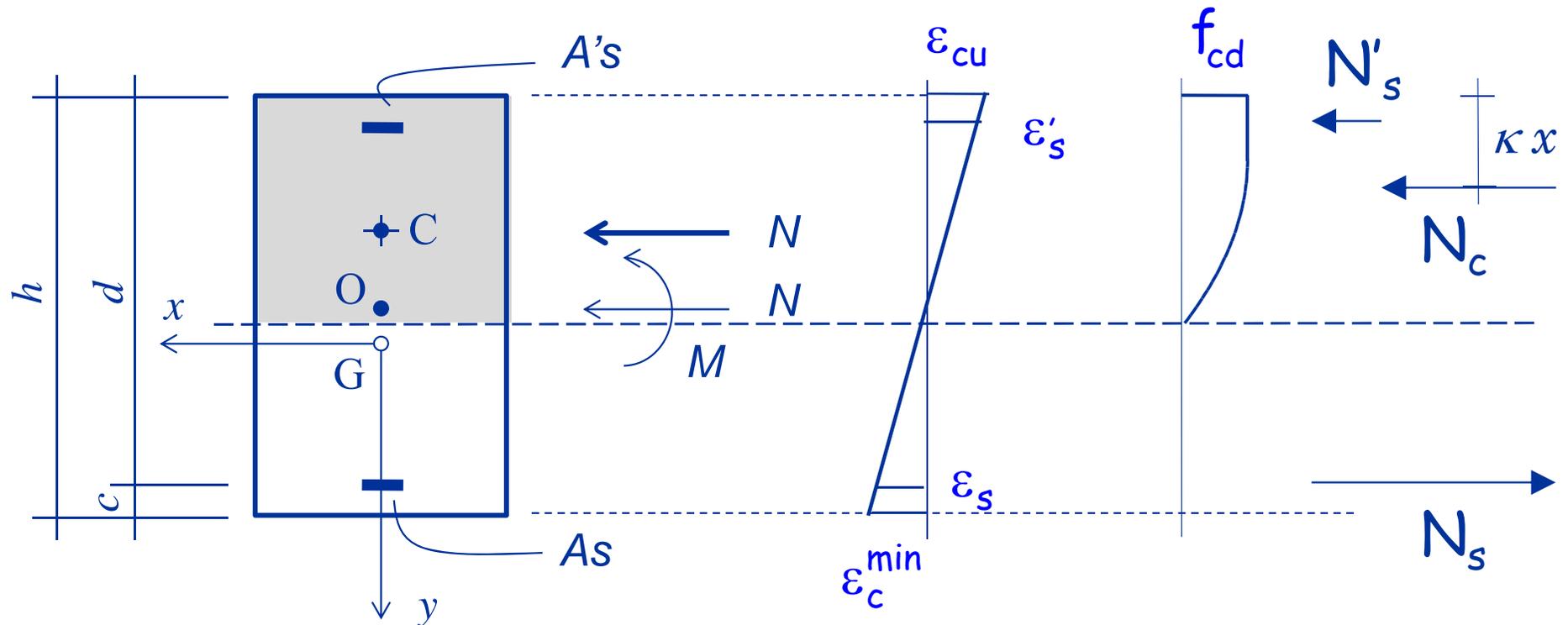
# Calcolo dell'asse neutro

## Sezione rettangolare parzializzata

Se almeno una delle armature non è snervata,  
la soluzione dell'equazione va ricercata per tentativi,  
ossia fissando valori della profondità dell'asse neutro  
e verificando il soddisfacimento dell'equilibrio alla  
traslazione longitudinale:

$$N_c + N'_s + N_s = N_{Ed}$$

# Momento resistente



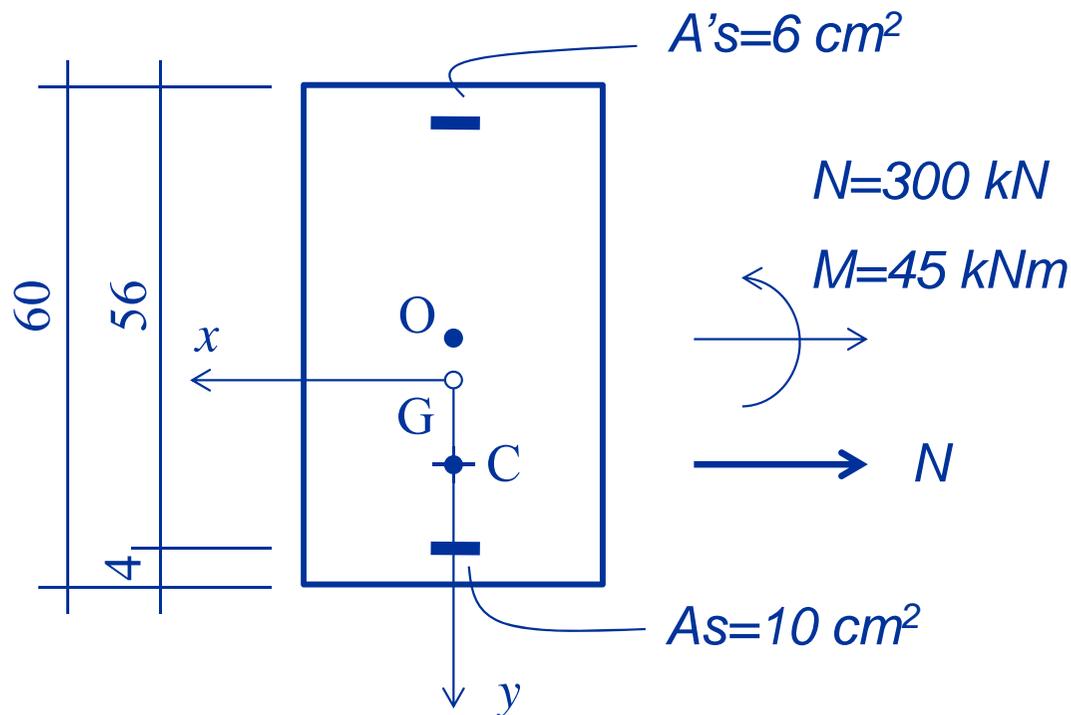
**3. Calcolo del momento resistente**  
(rispetto al baricentro della sezione)

$$M_{Rd} = (N_s - N'_s) (h/2 - c) - N_c (h/2 - \kappa x)$$

per sezione rettangolare,  $\kappa = 0.416$

# Esempio N.16

## Sezione rettangolare tensoinflessa



Poiché  $N$  è di trazione la sezione è parzializzata

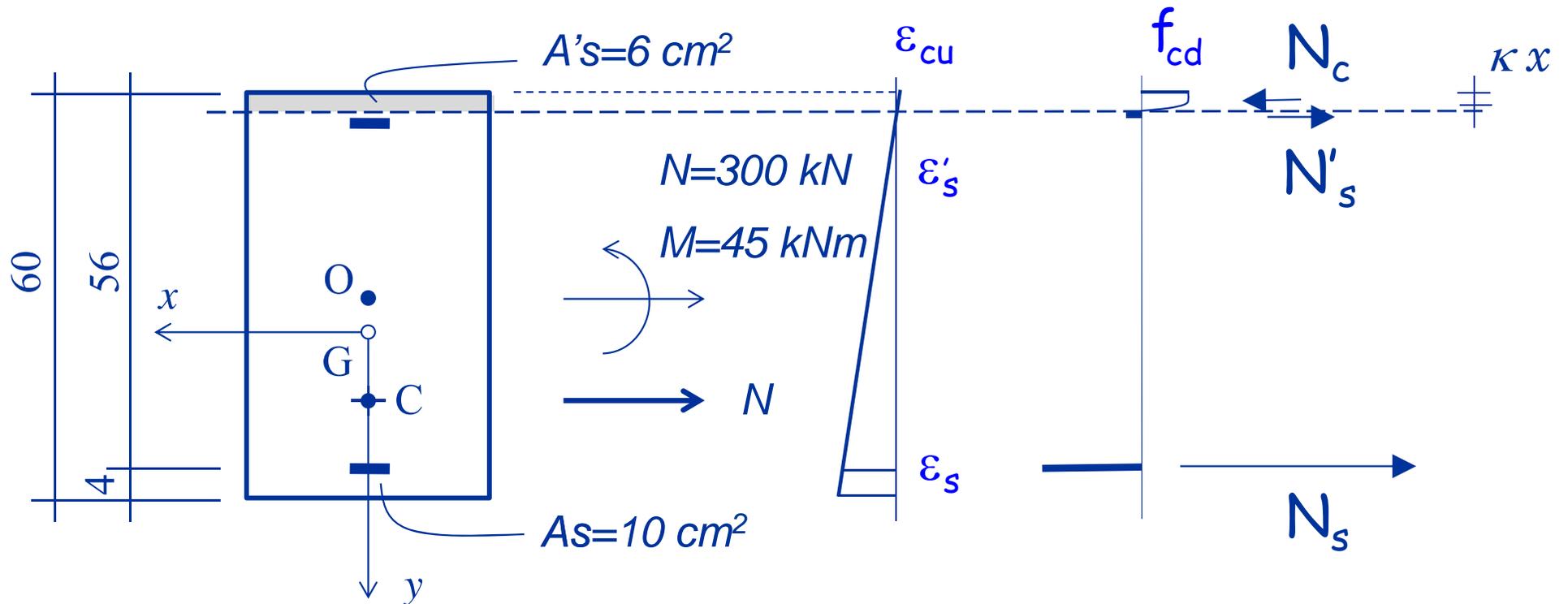
Se entrambe le armature fossero snervate sarebbe

$$x = \frac{(A_s - A'_s) f_{yd} - N_{Ed}}{\beta b f_{cd}} = -4.18 \text{ cm}$$

ma questo valore non è accettabile (è negativo)

# Esempio N.16

## Sezione rettangolare tensoinflessa



L'equilibrio alla traslazione longitudinale è rispettato se  $x = 3.69 \text{ cm}$

$$\epsilon_s = 0.04966$$

$$\epsilon'_s = 0.00030$$

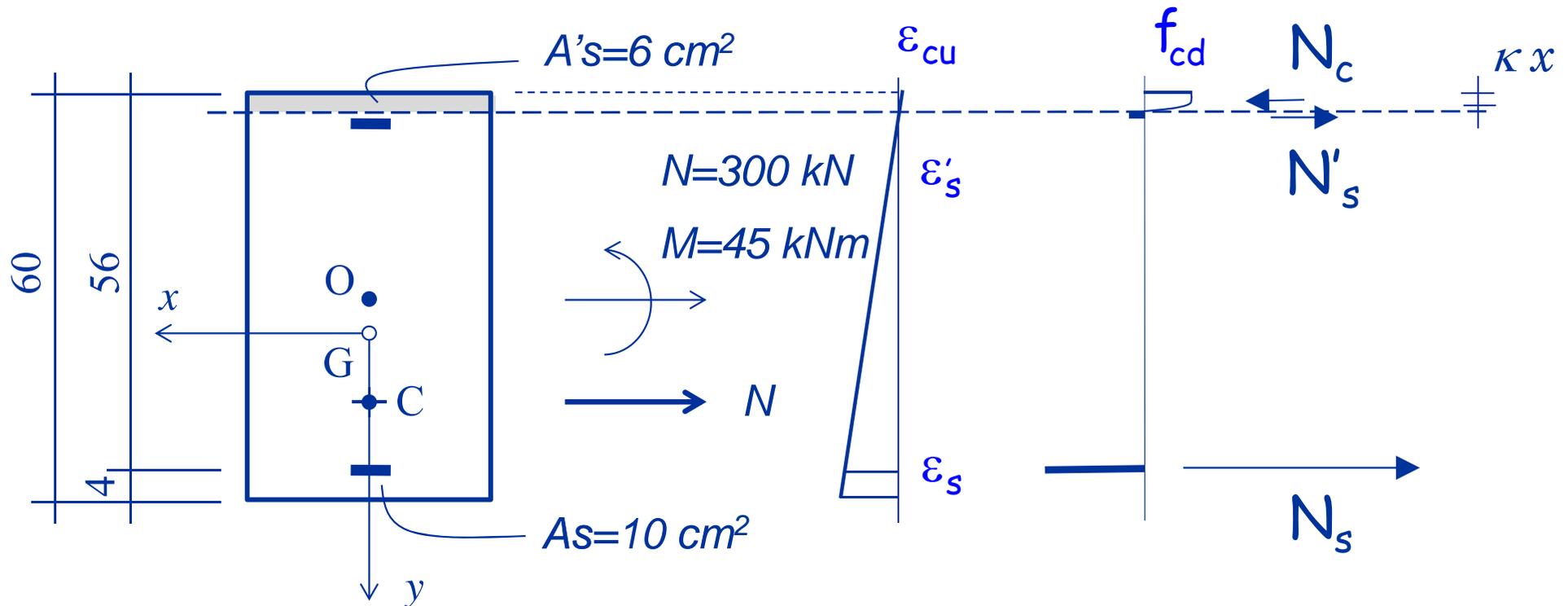
$$\sigma_s = 391.3 \text{ MPa}$$

$$\sigma'_s = 59.4 \text{ MPa}$$

$$N = \underbrace{391.3}_{N_s} + \underbrace{35.7}_{N'_s} - \underbrace{127.0}_{N_c} = -300 \text{ kN}$$

# Esempio N.16

## Sezione rettangolare tensoinflessa



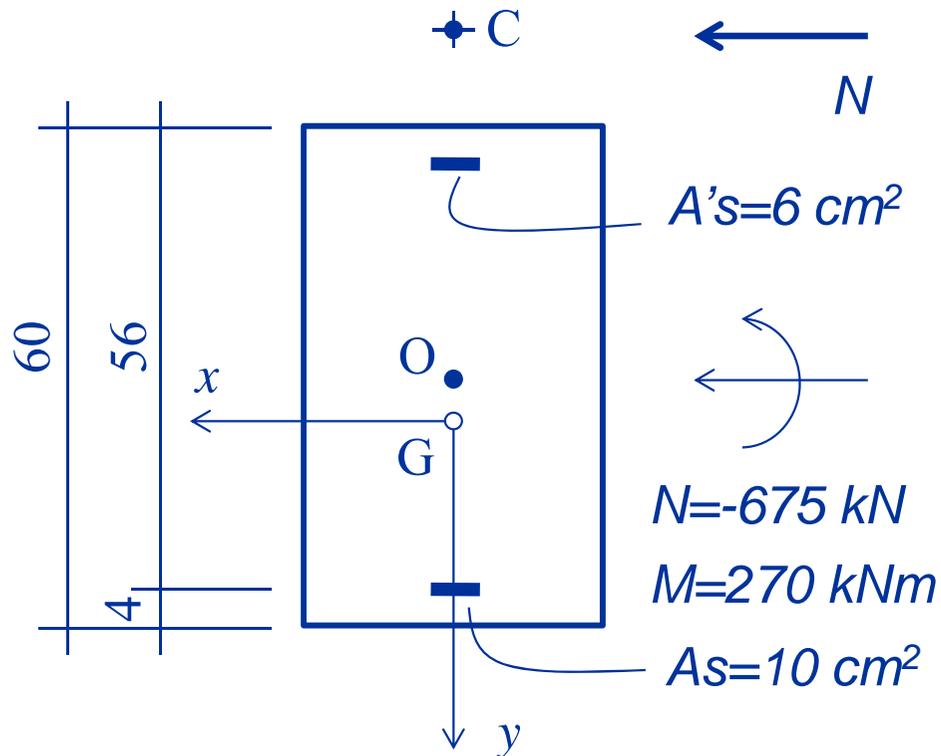
L'equilibrio alla rotazione intorno ad O fornisce il momento resistente

$$M_{Rd} = (N_s - N'_s) (h/2 - c) - N_c (h/2 - \kappa x)$$

$$M_{Rd} = [(391.3 - 35.7) \cdot 26 - (-127) \cdot (30 - 0.416 \cdot 3.69)] 10^{-2} = 128.6 \text{ kNm}$$

# Esempio N.17

## Sezione rettangolare pressoinflessa



Se si immagina  $x=h$  si ha:

$$\varepsilon_s = -0.00023$$

$$\varepsilon_s' = -0.00327$$

$$\sigma_s = -46.7 \text{ MPa}$$

$$\sigma_s' = -391.3 \text{ MPa}$$

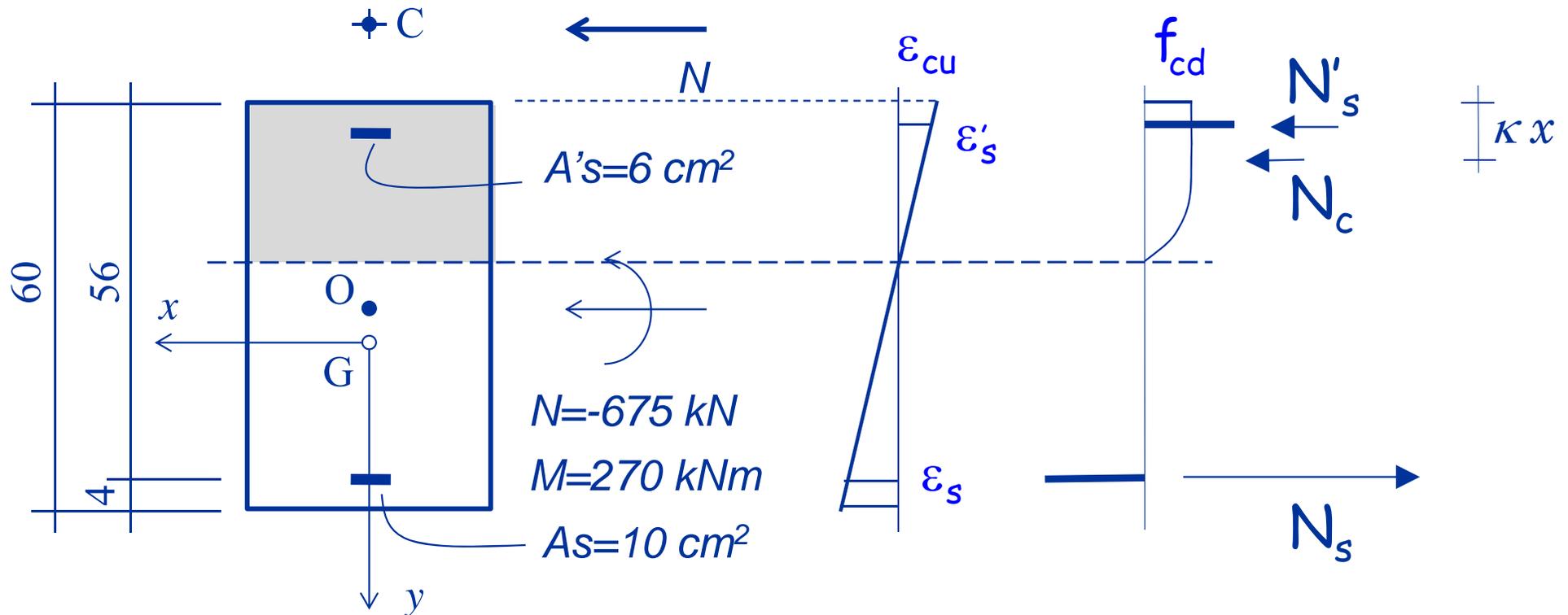
Lo sforzo normale di compressione è inferiore. Pertanto, la sezione è parzializzata

$$N = -46.7 - 234.8 - 2066.0 = -2347.5 \text{ kN}$$

$$N_s \quad N_s' \quad N_c$$

# Esempio N.17

## Sezione rettangolare pressoinflessa

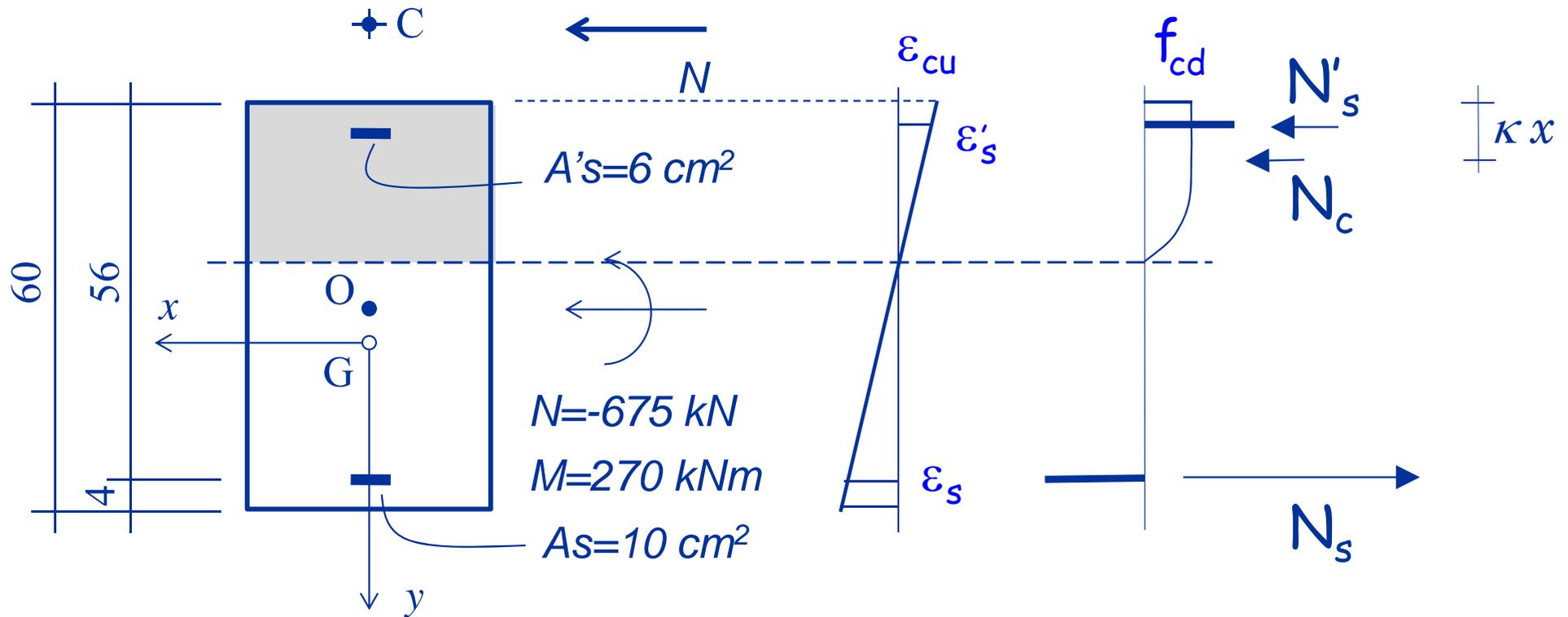


L'equilibrio alla traslazione longitudinale è rispettato se  $x = 24.15 \text{ cm}$

$$N = \underbrace{N_s}_{391.3} - \underbrace{N'_s}_{234.8} - \underbrace{N_c}_{831.5} = -675.0 \text{ kN}$$

# Esempio N.17

## Sezione rettangolare pressoinflessa



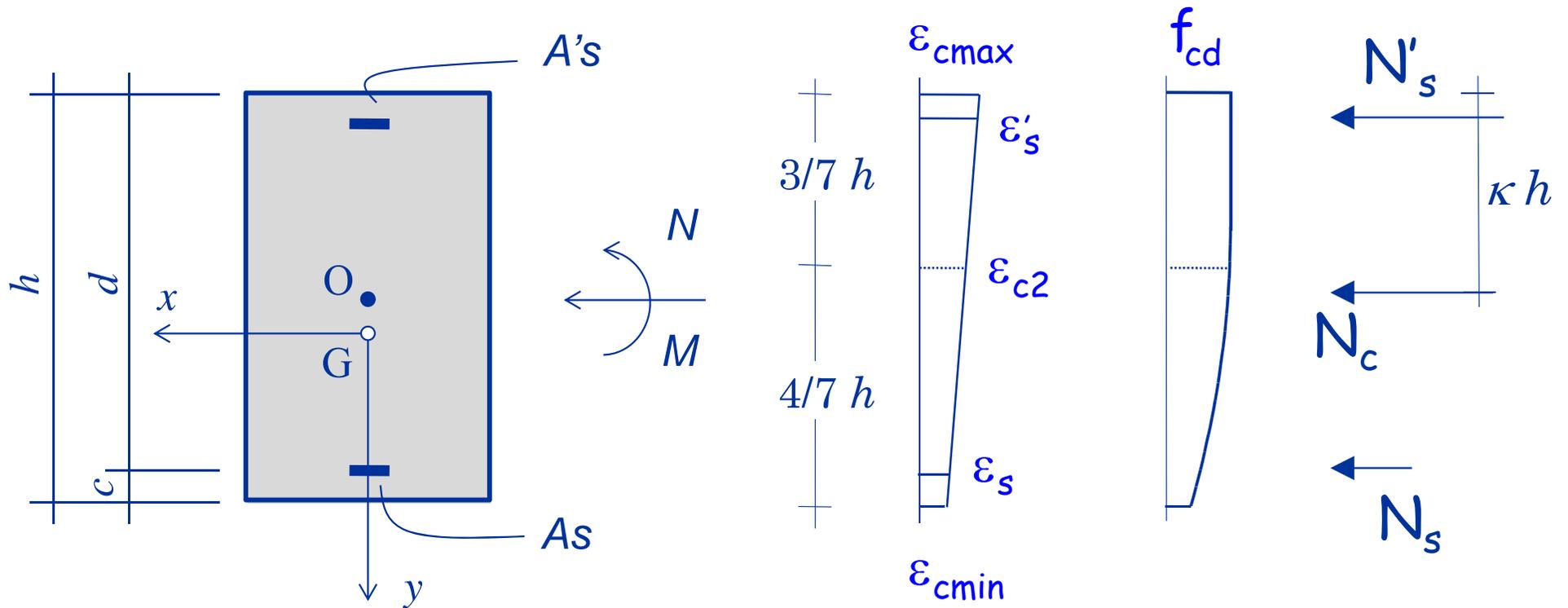
L'equilibrio alla rotazione intorno ad  $O$  fornisce il momento resistente

$$M_{Rd} = (N_s - N'_s) (h/2 - c) - N_c (h/2 - \kappa x)$$

$$M_{Rd} = [(391.3 + 234.8) \cdot 26 - (-831.5) \cdot (30 - 0.416 \cdot 24.15)] 10^{-2} = 328.7 \text{ kNm}$$

# Calcolo dell'asse neutro

Sezione rettangolare tutta compressa



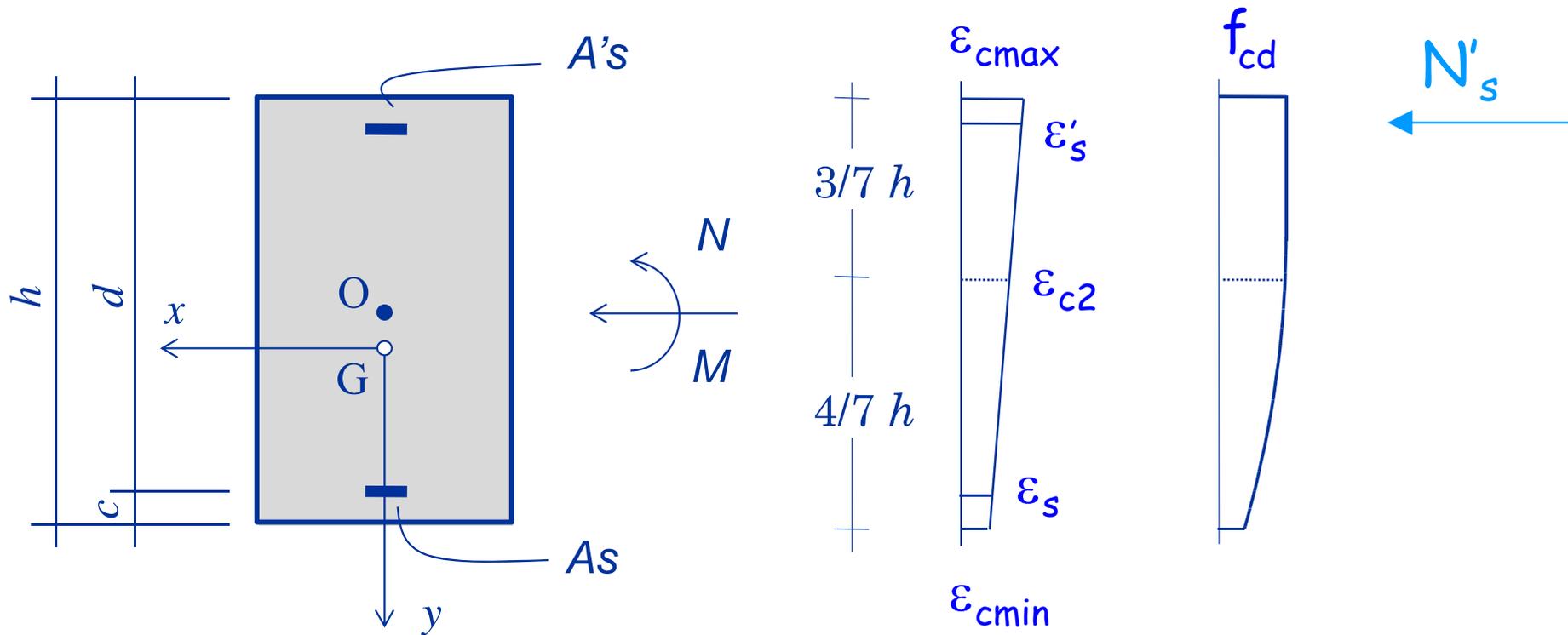
1. Individuazione dell'asse neutro:

$$N_c + N'_s + N_s = N_{Ed}$$

(equilibrio alla traslazione)

# Risultante delle tensioni

armatura superiore (sezione tutta compressa)

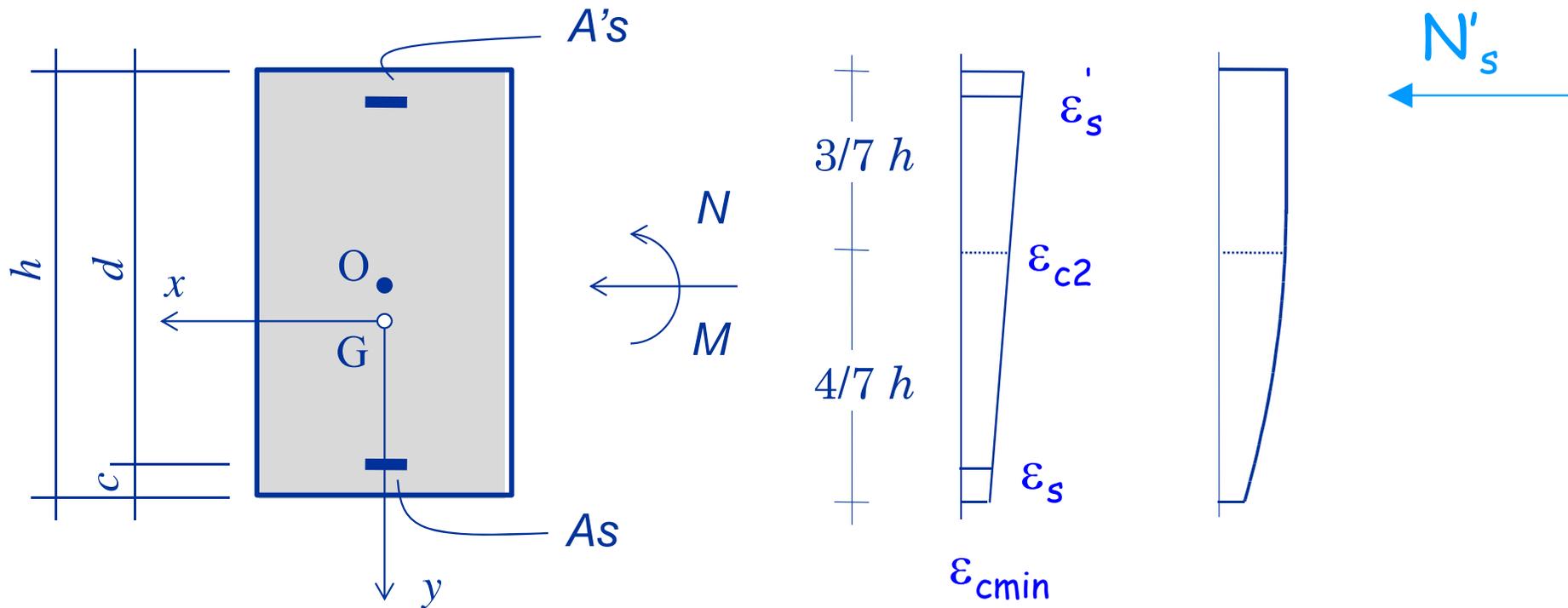


$$\varepsilon'_s = \varepsilon_{c2} \left[ \frac{d}{4/7 h} (1 - \eta_{\min}) + \eta_{\min} \right]$$

dove  $\eta_{\min} = \frac{\varepsilon_{c,\min}}{\varepsilon_{c2}}$

# Risultante delle tensioni

armatura superiore (sezione tutta compressa)



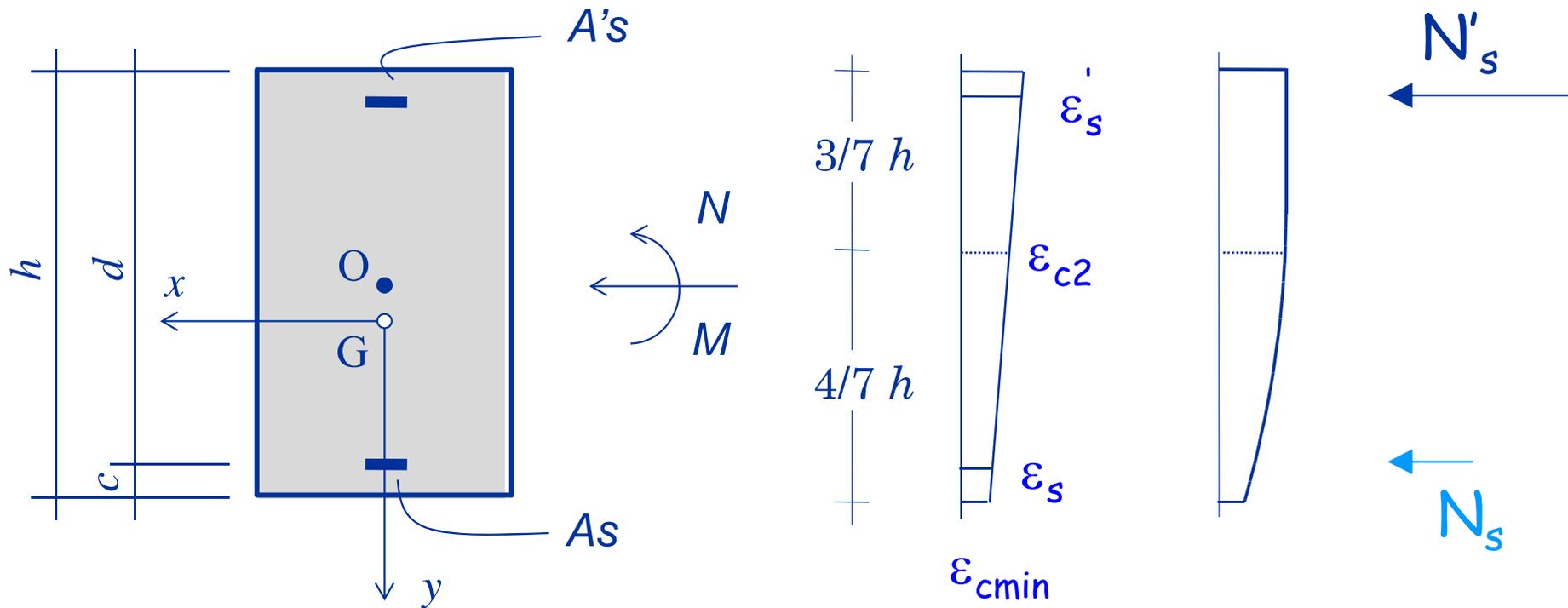
noto  $\epsilon'_s \Rightarrow$

se  $\epsilon'_s < \epsilon_{yd} \Rightarrow \sigma'_s = \frac{\epsilon'_s}{\epsilon_{yd}} f_{yd} \Rightarrow N'_s = A'_s \sigma'_s$

se  $\epsilon'_s \geq \epsilon_{yd} \Rightarrow \sigma'_s = f_{yd} \Rightarrow N'_s = A'_s \sigma'_s$

# Risultante delle tensioni

armatura inferiore (sezione tutta compressa)

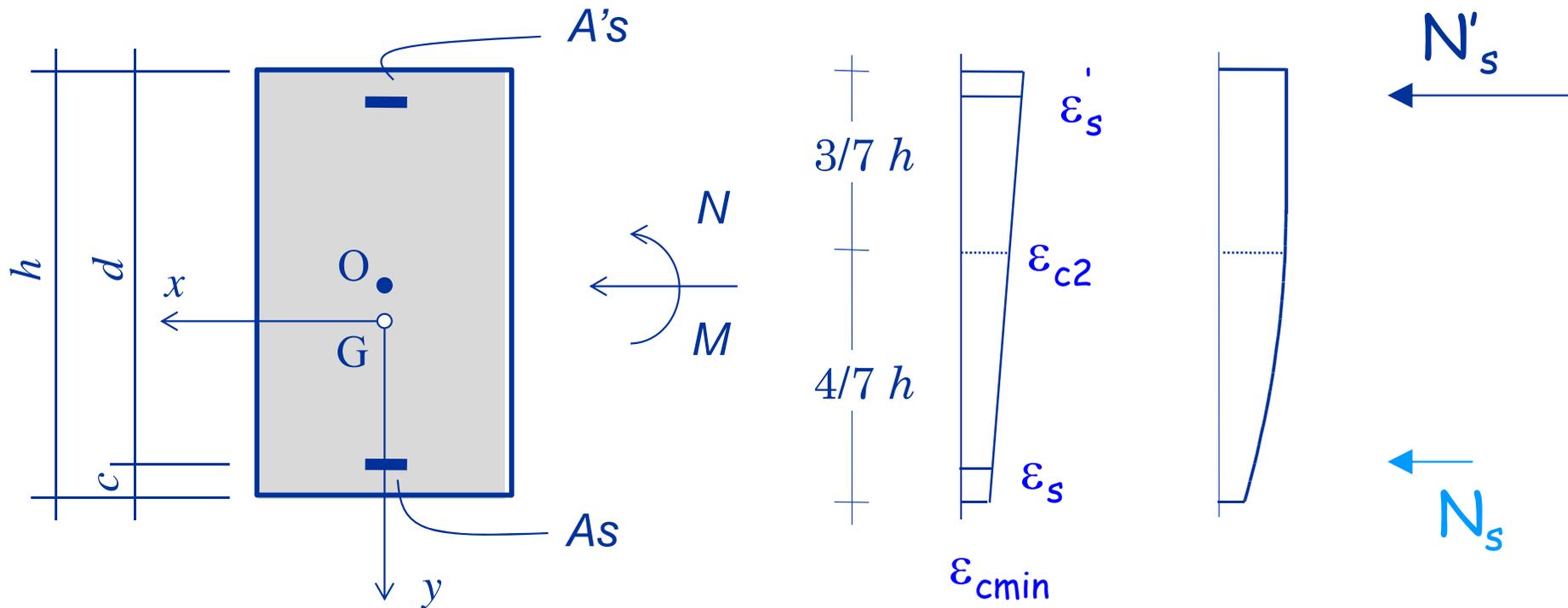


$$\epsilon_s = \epsilon_{c2} \left[ \frac{c}{4/7 h} (1 - \eta_{\min}) + \eta_{\min} \right]$$

dove  $\eta_{\min} = \frac{\epsilon_{c,\min}}{\epsilon_{c2}}$

# Risultante delle tensioni

armatura inferiore (sezione tutta compressa)



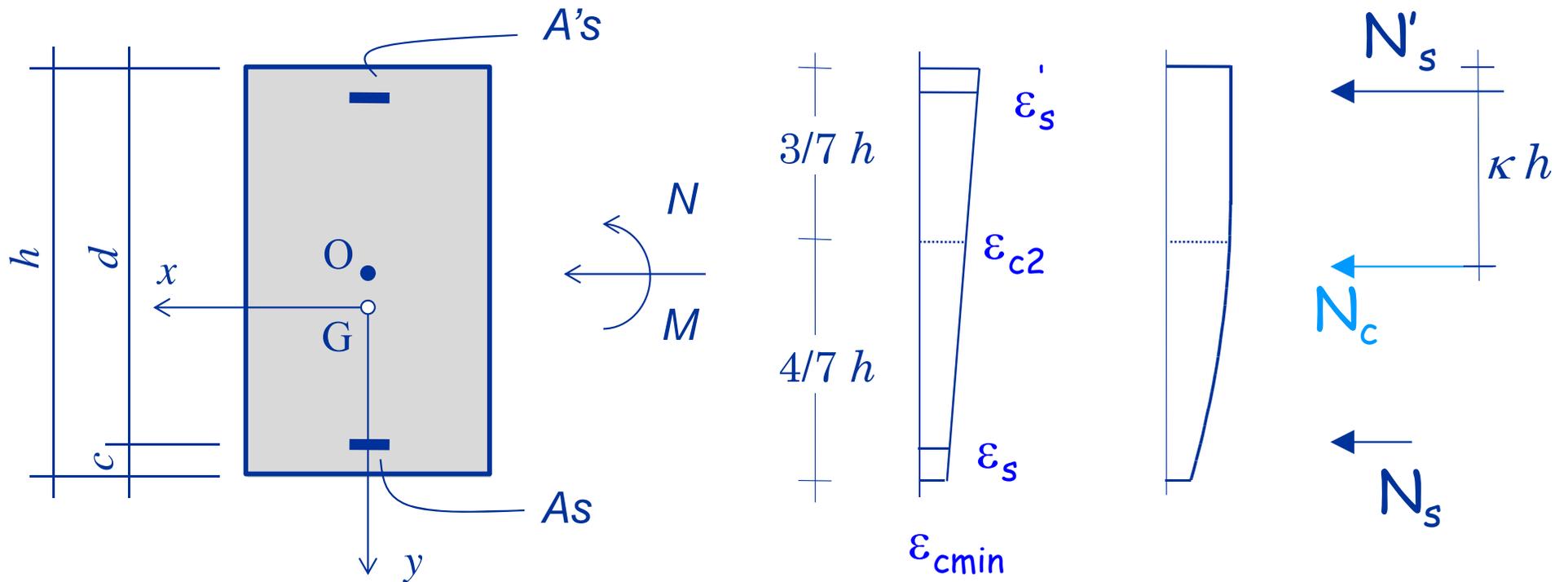
noto  $\epsilon_s \Rightarrow$

se  $\epsilon_s < \epsilon_{yd} \Rightarrow \sigma_s = \frac{\epsilon_s}{\epsilon_{yd}} f_{yd} \Rightarrow N_s = A_s \sigma_s$

se  $\epsilon_s \geq \epsilon_{yd} \Rightarrow \sigma_s = f_{yd} \Rightarrow N_s = A_s \sigma_s$

# Risultante delle tensioni

calcestruzzo (sezione tutta compressa)



$$N_c = \beta b h f_{cd}$$

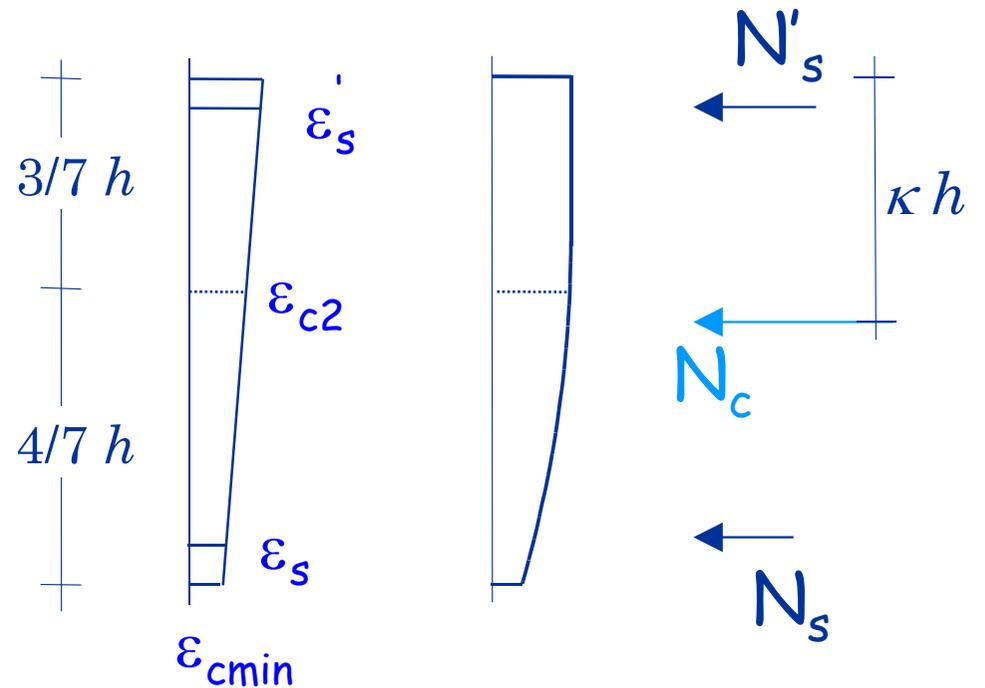
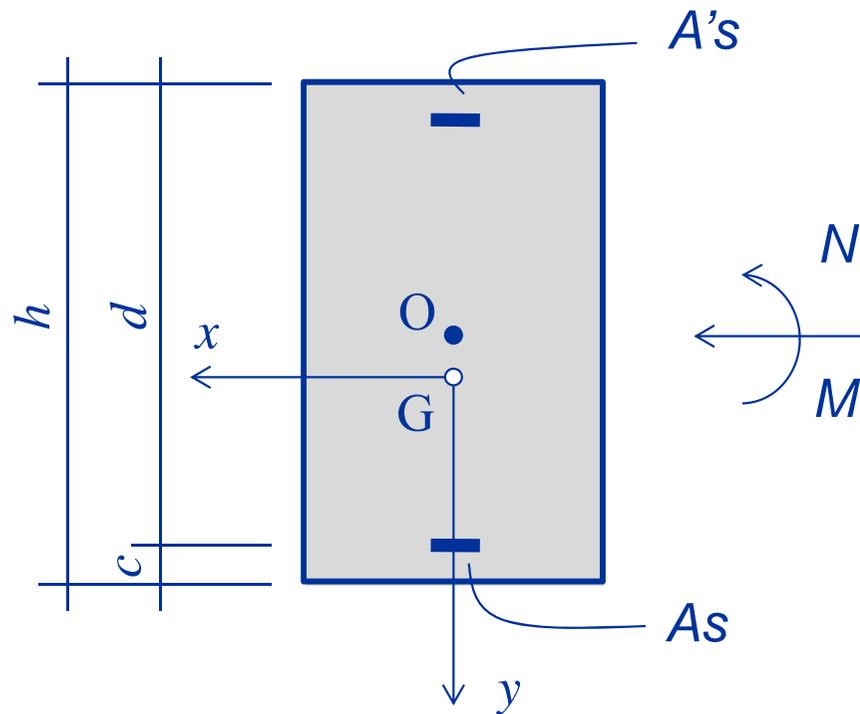
In questo caso  $\beta$  dipende da  $\eta_{\min}$

per sezione rettangolare: 
$$\beta = 1 - \frac{4}{21} (1 - \eta_{\min})$$

# Valori di $\beta$ per sezione rettangolare

$\eta_{min}$	$\beta$
0.0	0.810
0.1	0.846
0.2	0.878
0.3	0.907
0.4	0.931
0.5	0.952
0.6	0.970
0.7	0.983
0.8	0.992
0.9	0.998
1.0	1.000

# Momento resistente



$$M_{Rd} = (N_s - N'_s) (h/2 - c) - N_c (h/2 - \kappa h)$$

per sezione rettangolare:

$$\kappa = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - 16/49 (1 - \eta_{\min})^2}{1 - 4/21 (1 - \eta_{\min})^2}$$

## 2. Calcolo del momento resistente

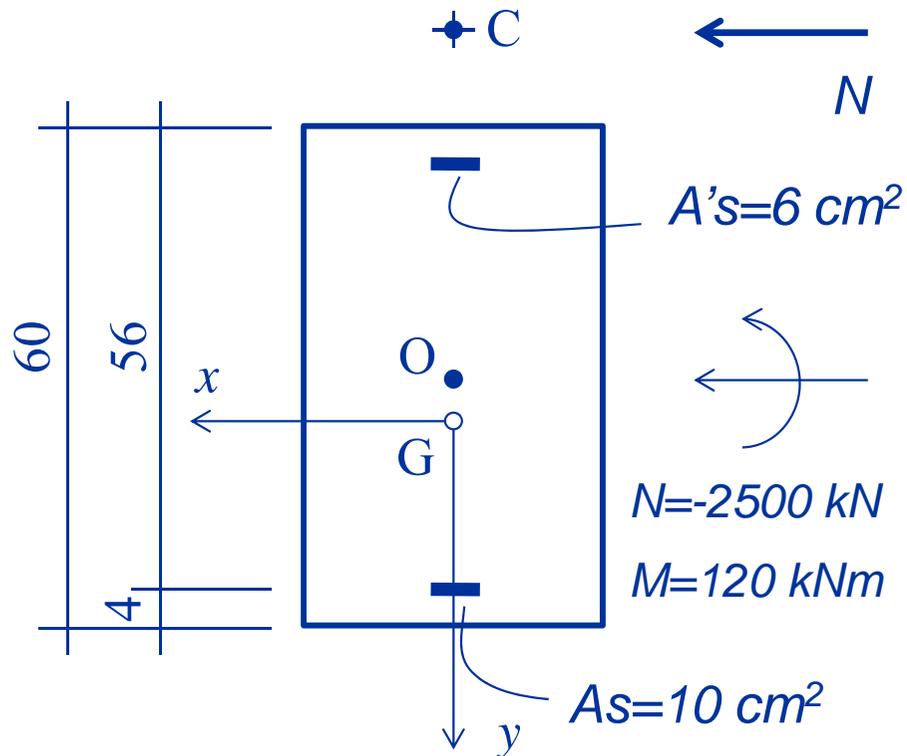
(rispetto al baricentro O della sezione)

# Valori di $\beta$ e $\kappa$ per sezione rettangolare

$\eta_{\min}$	$\beta$	$\kappa$
0.0	0.810	0.416
0.1	0.846	0.435
0.2	0.878	0.450
0.3	0.907	0.463
0.4	0.931	0.474
0.5	0.952	0.482
0.6	0.970	0.489
0.7	0.983	0.494
0.8	0.992	0.497
0.9	0.998	0.499
1.0	1.000	0.500

# Esempio N.18

## Sezione rettangolare pressoinflessa

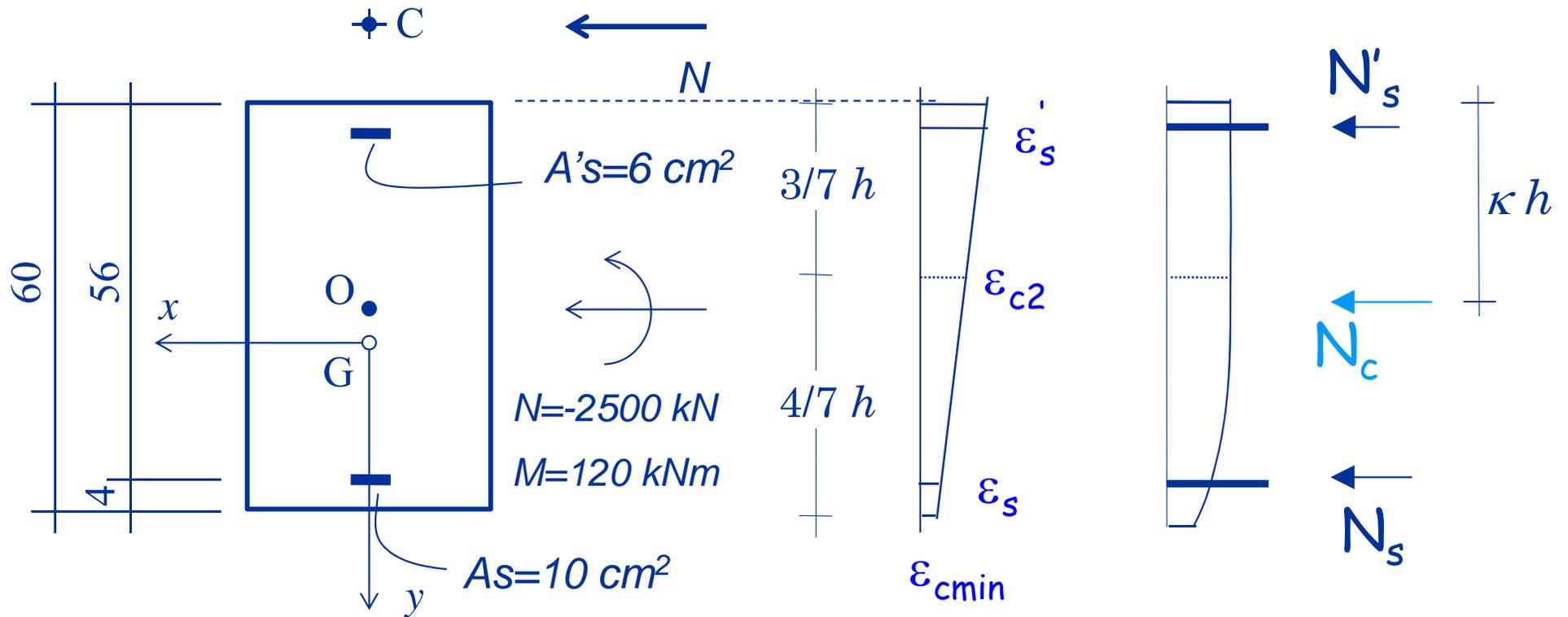


Lo sforzo normale di compressione (-2500 kN) è superiore a quello relativo a  $x=h$  (-2347.5 kN).

Pertanto, la sezione è completamente compressa

# Esempio N.18

## Sezione rettangolare pressoinflessa



Se si immagina  $\eta = 0.1215 h$

$$\epsilon_s = -\epsilon_{c2} \left[ \frac{c}{4/7 h} (1 - \eta_{min}) + \eta_{min} \right]$$

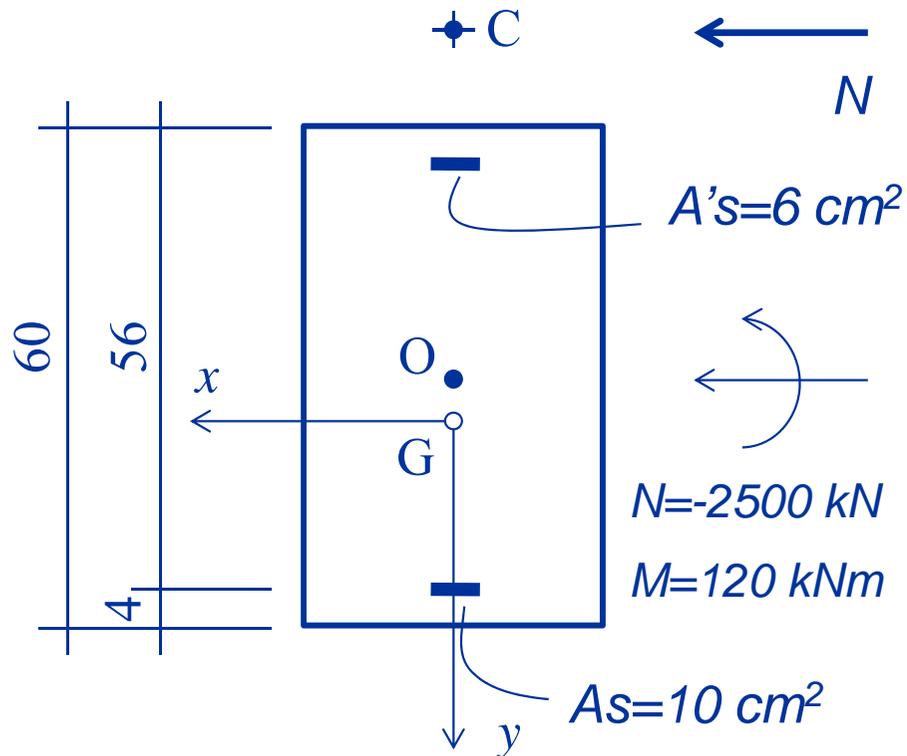
$$= -0.0004479$$

$$\epsilon_s = -\epsilon_{c2} \left[ \frac{d}{4/7 h} (1 - \eta_{min}) + \eta_{min} \right] =$$

$$-0.00311$$

# Esempio N.18

## Sezione rettangolare pressoinflessa



Se si immagina  $\eta = 0.1215 h$

$$N_c = -0.853 \cdot 30 \cdot 60 \cdot 14.17 \cdot 10^{-3} \\ = -2175.6 \text{ kN}$$

$$N_s = 200000 \cdot 10 \cdot 0.0004479 \cdot 10^{-1} \\ = -89.6 \text{ kN}$$

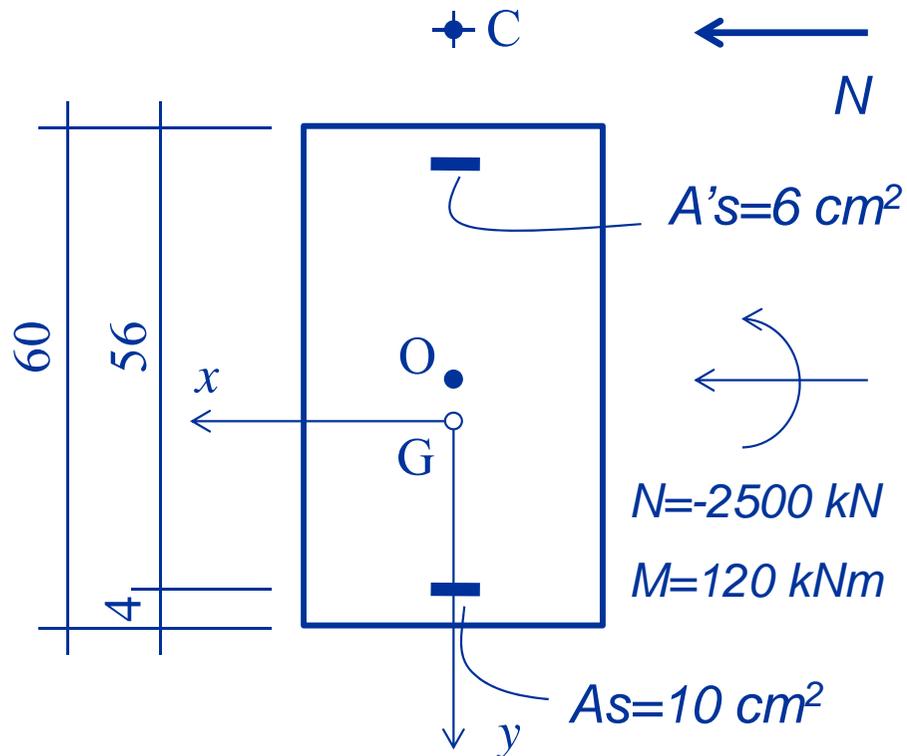
$$N_s' = 391.3 \cdot 6 \cdot 10^{-1} = -234.8 \text{ kN}$$

$$N_s \quad N_s' \quad N_c$$

$$N = -89.6 - 234.8 - 2175.6 \\ = -2500 \text{ kN}$$

# Esempio N.18

## Sezione rettangolare pressoinflessa



**Attenzione:** la sezione non è verificata perché il momento resistente (118.8 kNm) è inferiore al momento agente (120 kNm)

$$\kappa = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - 16/49(1 - \eta_{\min})^2}{1 - 4/21(1 - \eta_{\min})^2} = 0.4384$$

L'equilibrio alla rotazione intorno ad O fornisce il momento resistente

$$M_{Rd} = (N_s - N'_s) (h/2 - c) - N_c (h/2 - \kappa x)$$

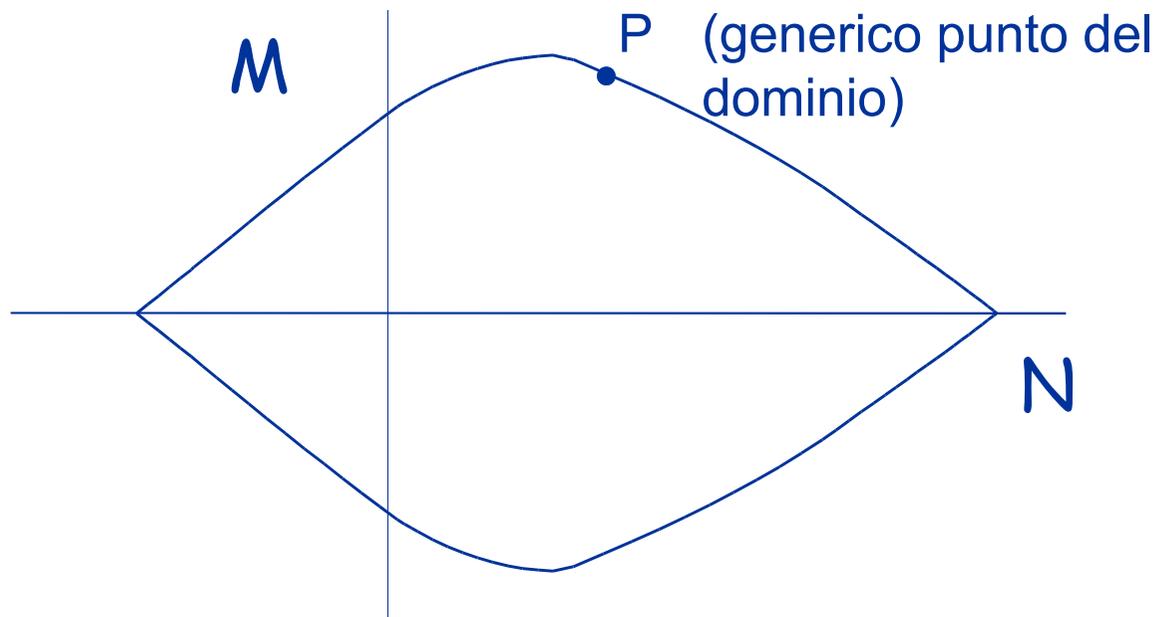
$$M_{Rd} = [(-89.6 + 234.8) \cdot 26 - (-2175.6) \cdot (30 - 0.4384 \cdot 60)] 10^{-2} = 118.1 \text{ kNm}$$

Domini M-N  
per flessione composta retta

# Domini di resistenza

Stato limite ultimo

Dominio di resistenza, o curva di interazione = insieme delle coppie M-N per cui  $\varepsilon_{\max}$  è uguale a  $\varepsilon_{cu}$



# Domini di resistenza

Stato limite ultimo

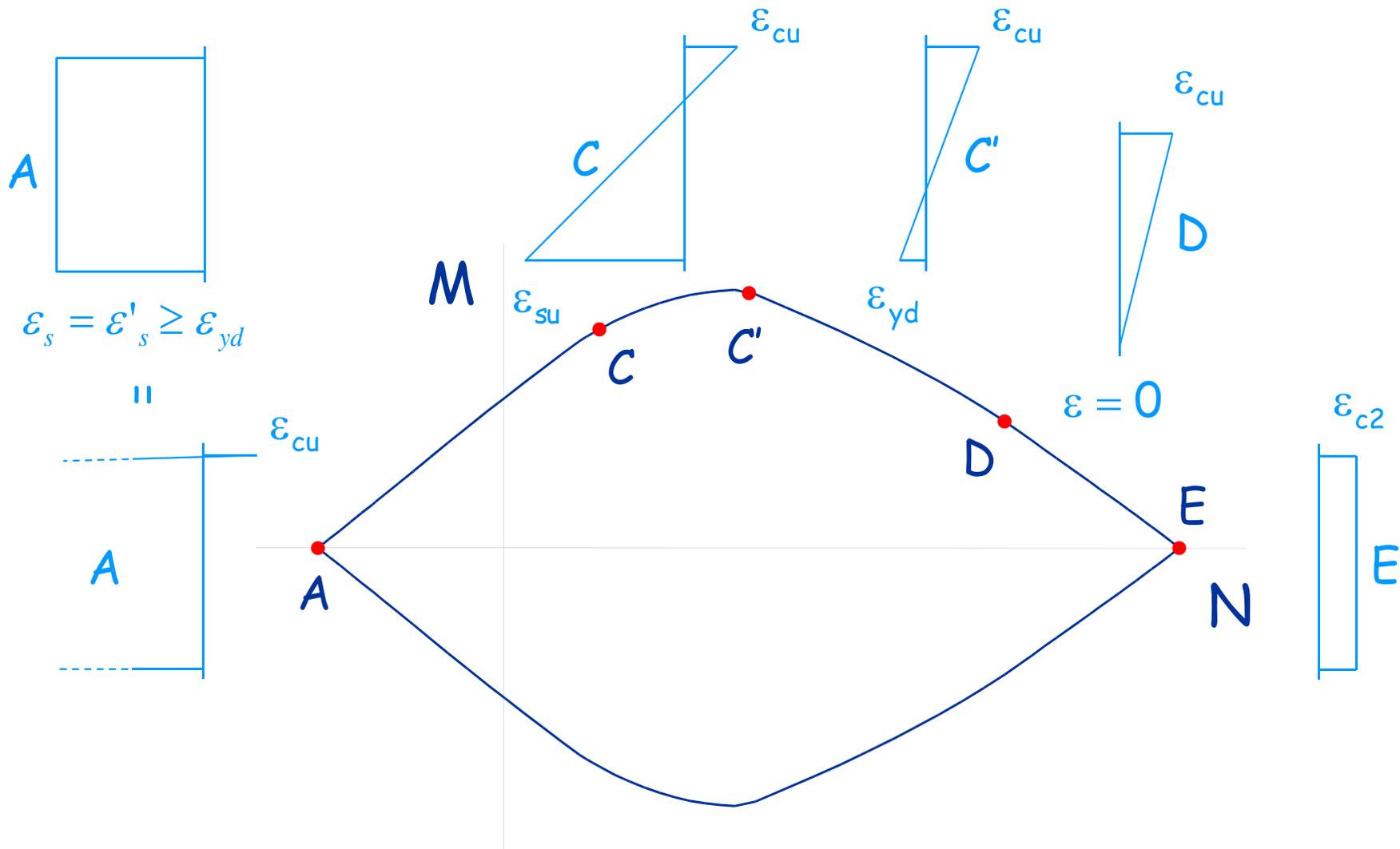
Per ricavare una coppia M-N del dominio

1. Si definisce la retta limite di deformazione
2. Si calcolano le tensioni e le risultanti delle tensioni
3. Si calcolano le caratteristiche N ed M tramite equilibrio alla traslazione ed alla rotazione

$$N = \int \sigma dA$$
$$M = \int \sigma y dA$$

# Domini di resistenza

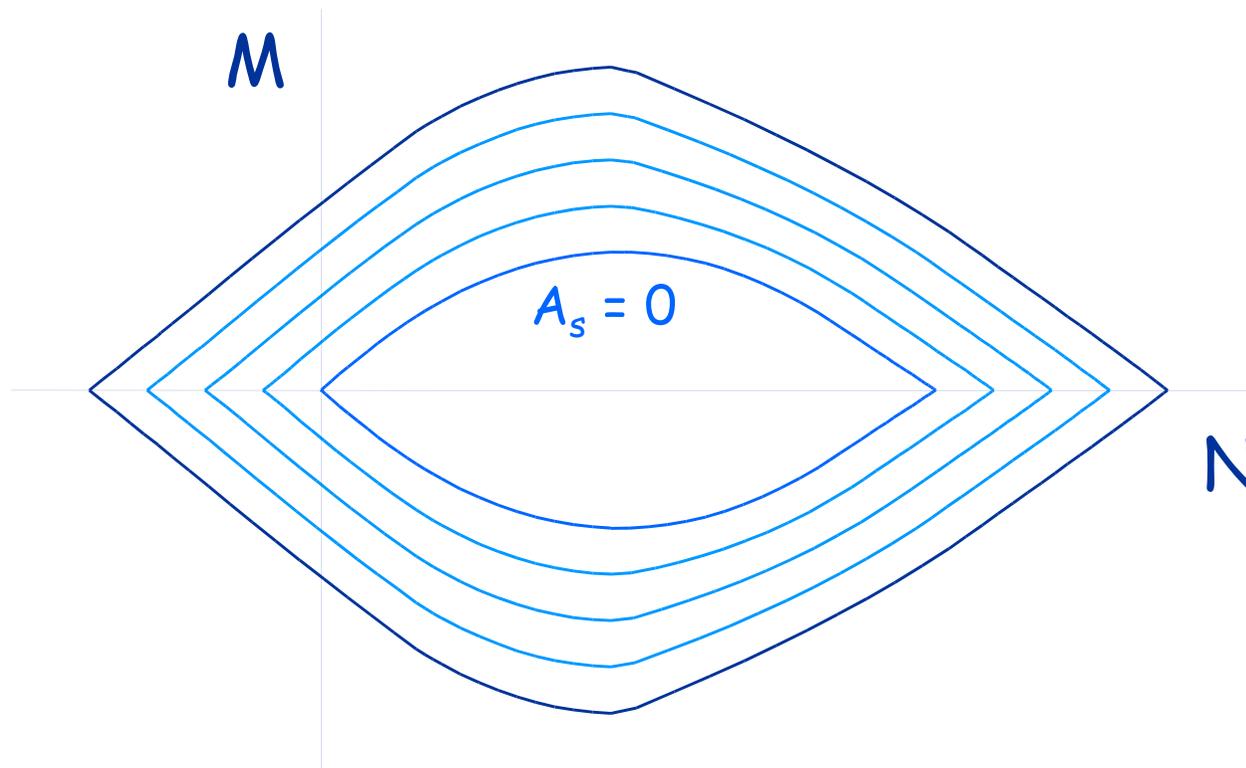
Stato limite ultimo



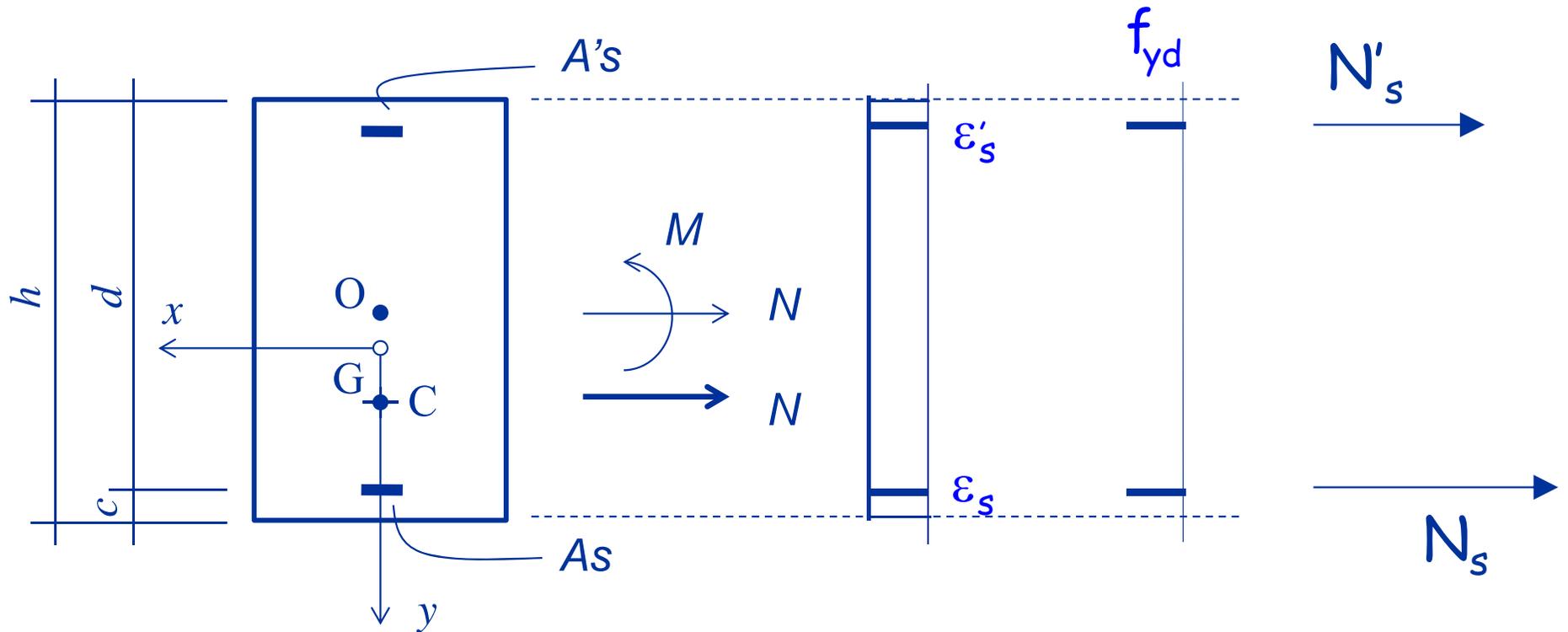
# Domini di resistenza

Stato limite ultimo

Cambiando l'armatura, si ottengono tanti diagrammi



# Diagramma A



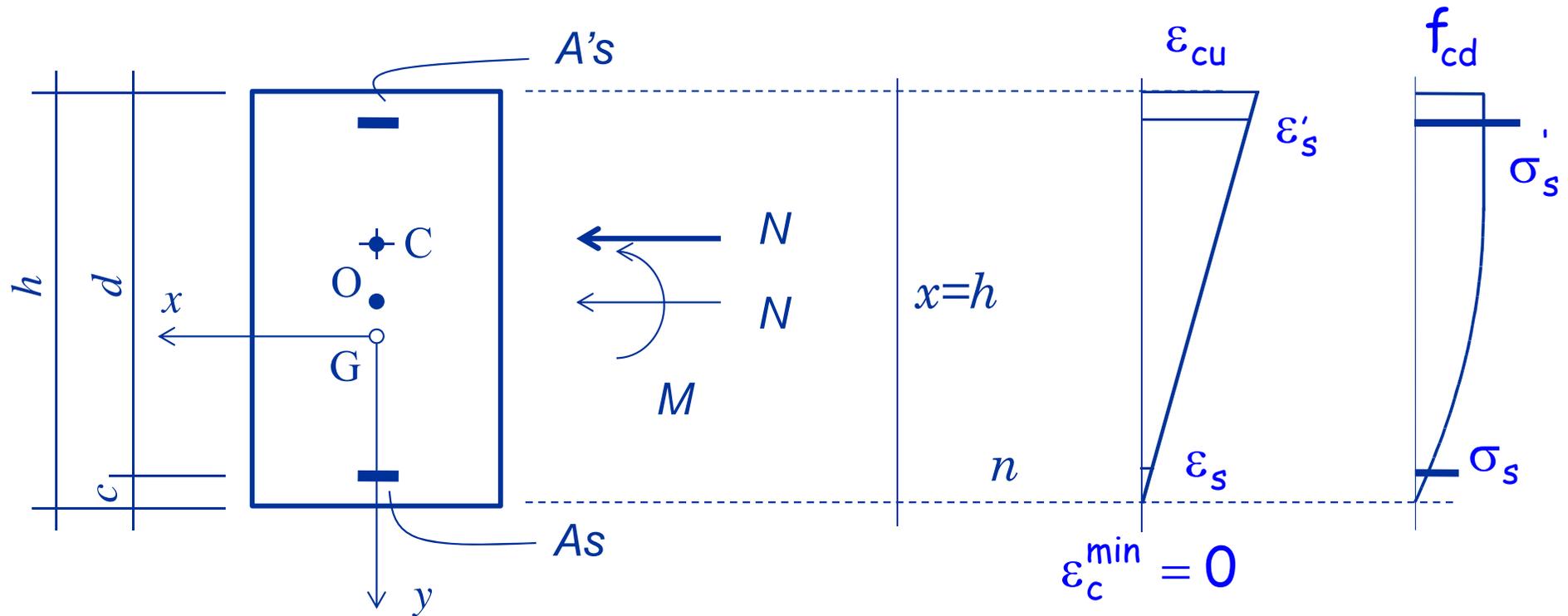
$$N = (A_s + A'_s) f_{yd}$$

$$M = (A_s - A'_s) \left( \frac{h}{2} - c \right) f_{yd}$$

Nota:

Se le armature sono eguali il momento flettente è nullo. Il punto di coordinate N-M giace sull'asse N.

# Diagramma D

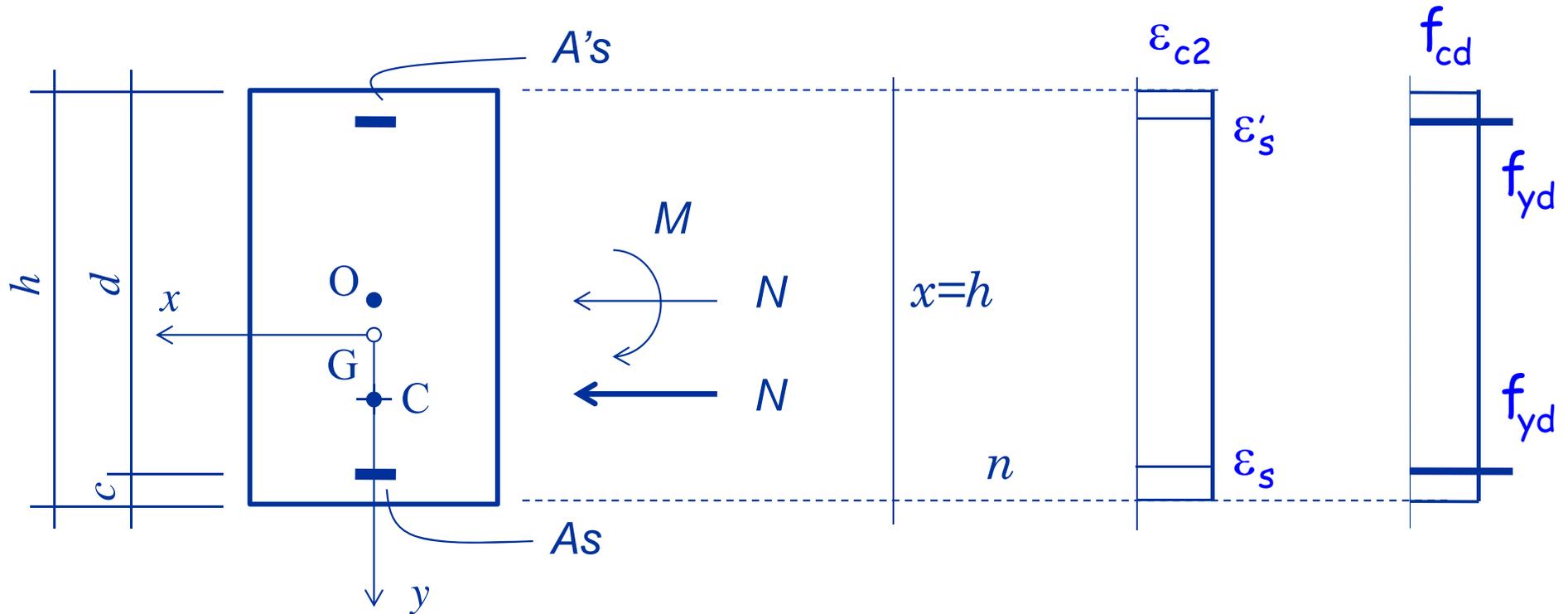


Per gli usuali valori di copriferro, l'armatura sup. è snervata mentre quella inf. è elastica.

$$N = 0.810 b h f_{cd} - \left( A_s \frac{c}{h} \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{yd}} + A'_s \right) f_{yd}$$

$$M = 0.0680 b h^2 f_{cd} + \left( -A_s \frac{c}{d} \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{yd}} + A'_s \right) \left( \frac{h}{2} - c \right) f_{yd}$$

# Diagramma E



$$N = -bh f_{cd} - (A_s + A'_s) f_{yd}$$

$$M = -(A_s - A'_s) \left( \frac{h}{2} - c \right) f_{yd}$$

Nota:

Se le armature sono eguali il momento flettente è nullo.

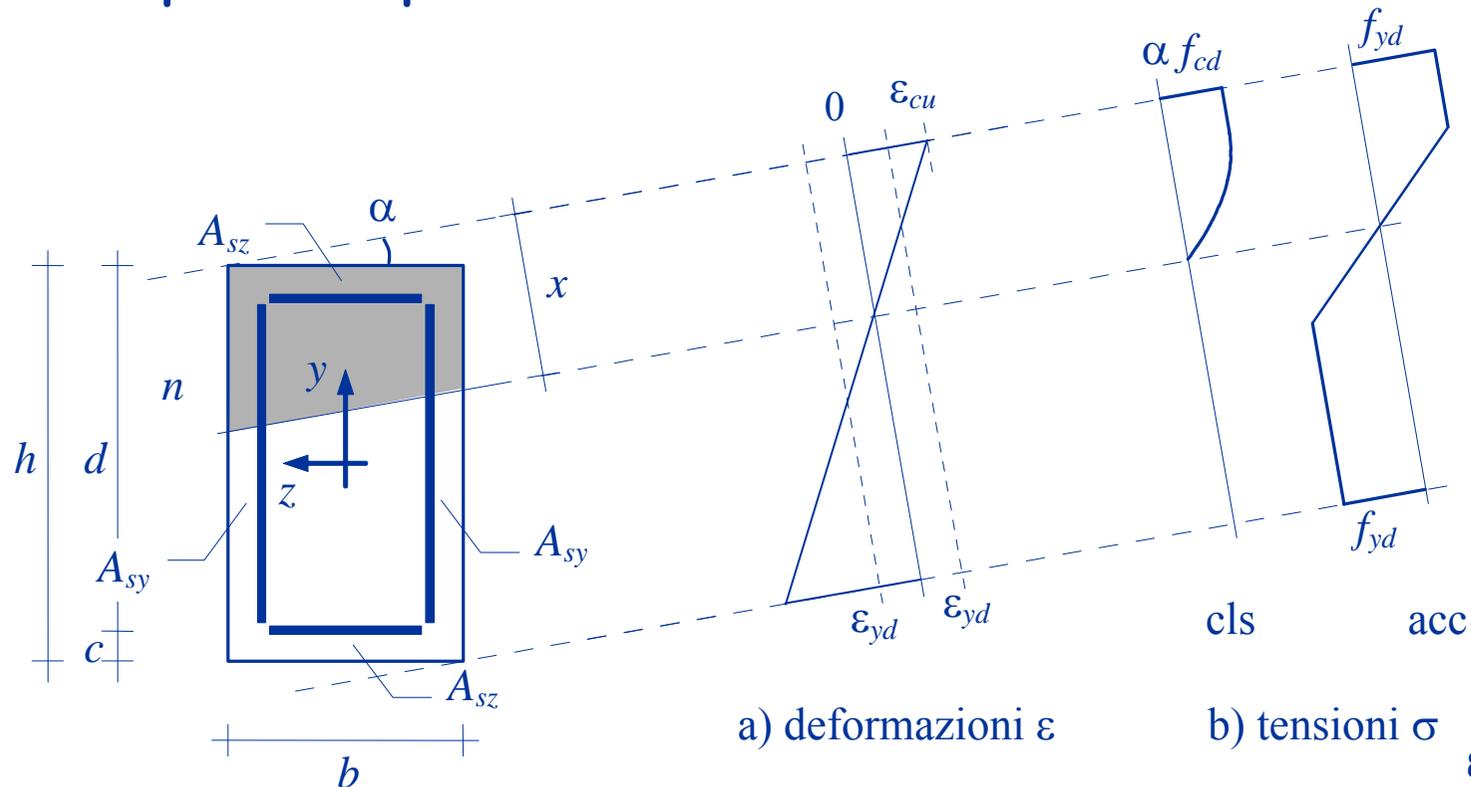
Il punto di coordinate N-M giace sull'asse N.

Domini M-N  
per flessione composta deviata

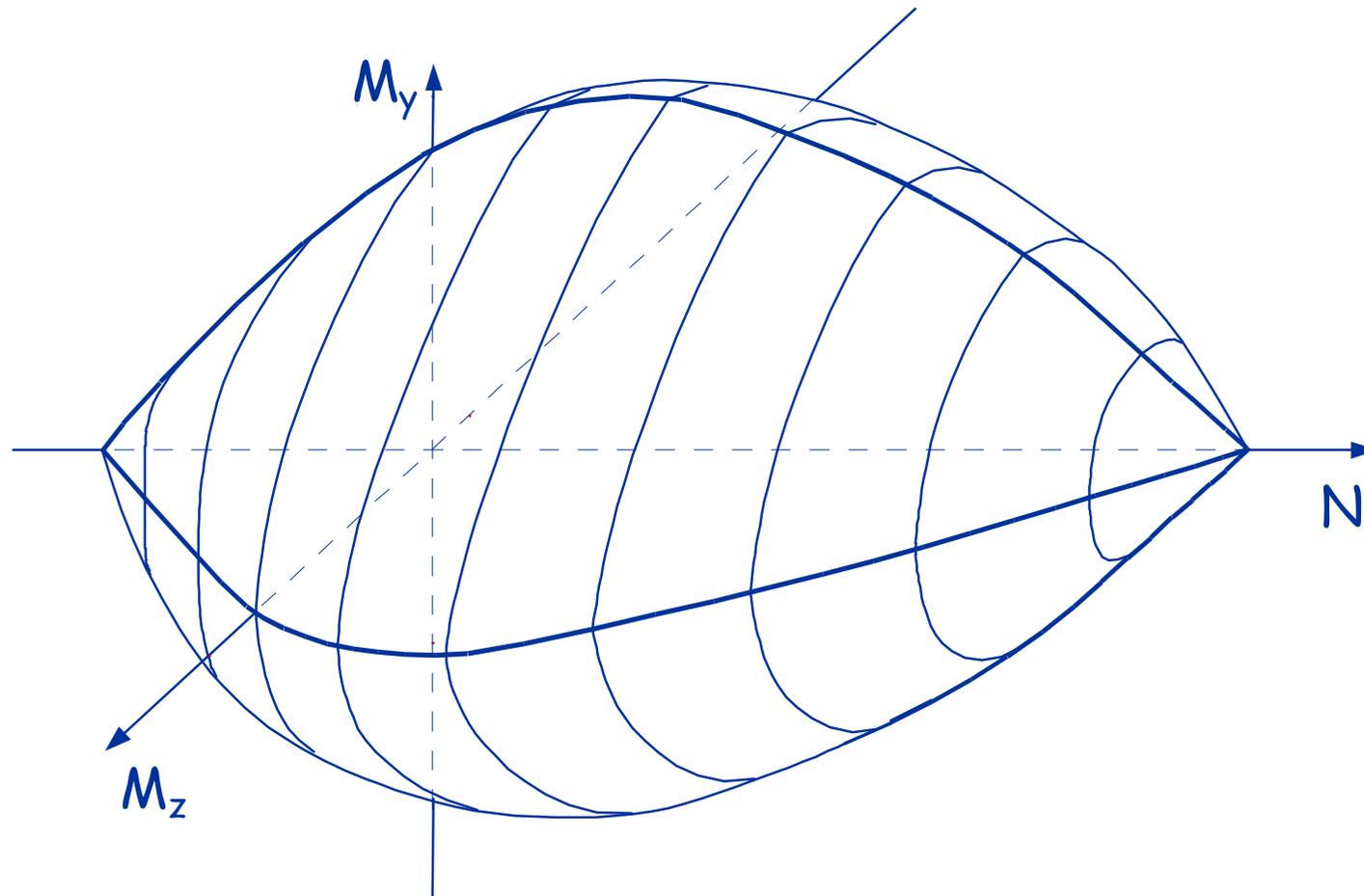
# Pressoflessione deviata

Procedimento per la costruzione del dominio  $M_y-M_z-N$

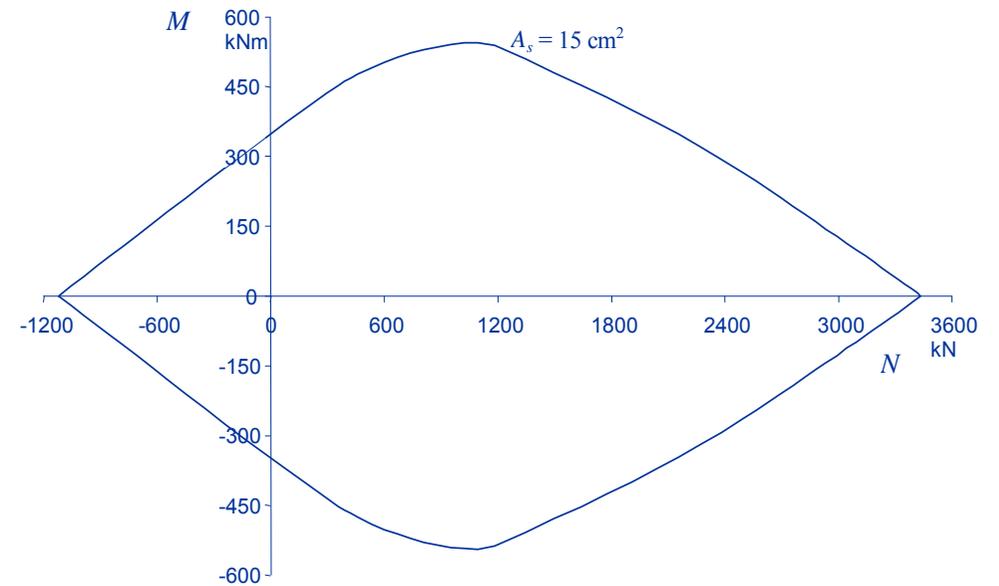
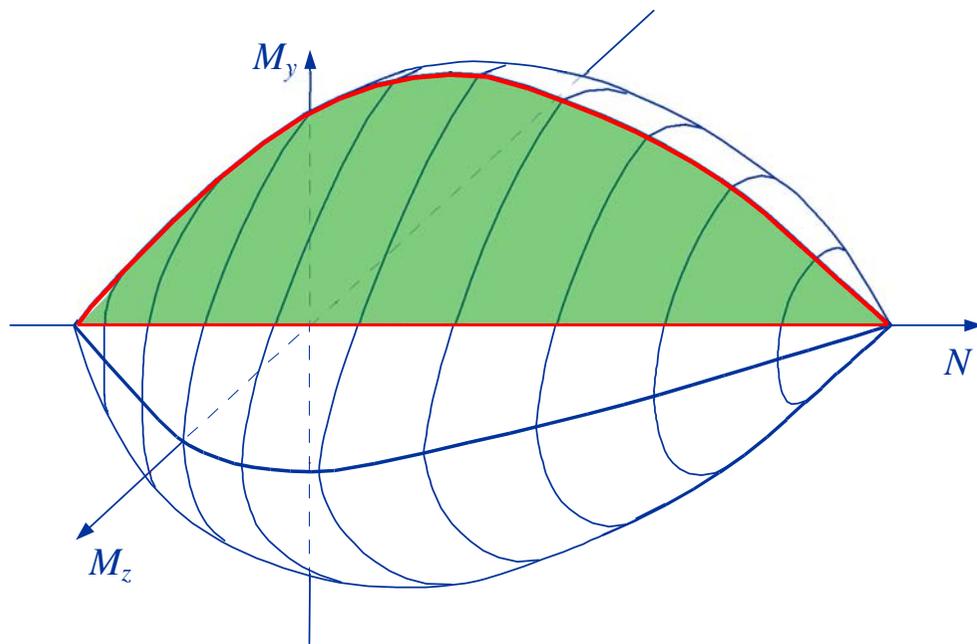
- analogo a quello descritto per pressoflessione retta
- più complicato per l'inclinazione dell'asse neutro



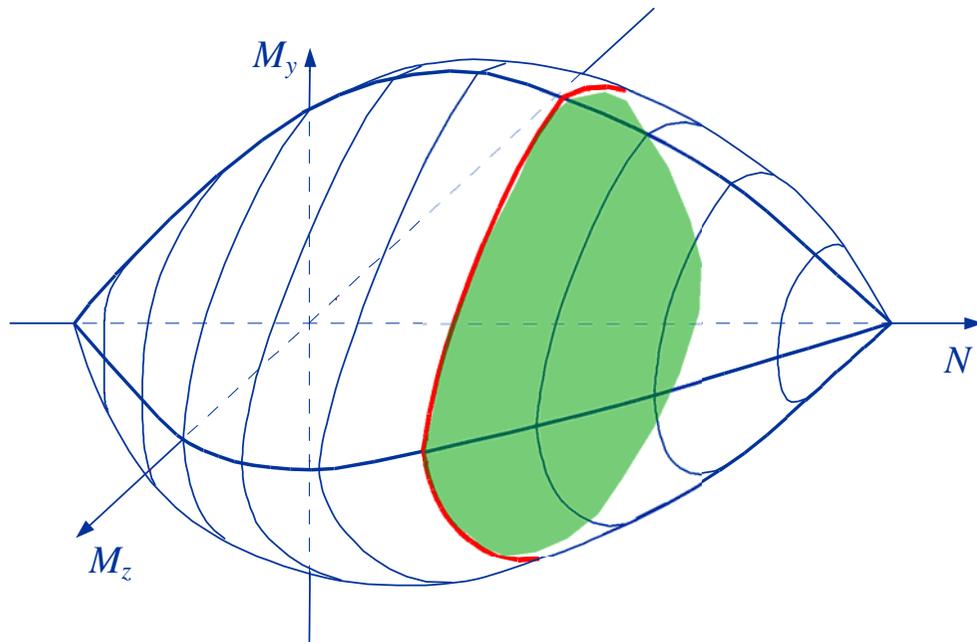
# Dominio allo SLU



# Dominio allo SLU



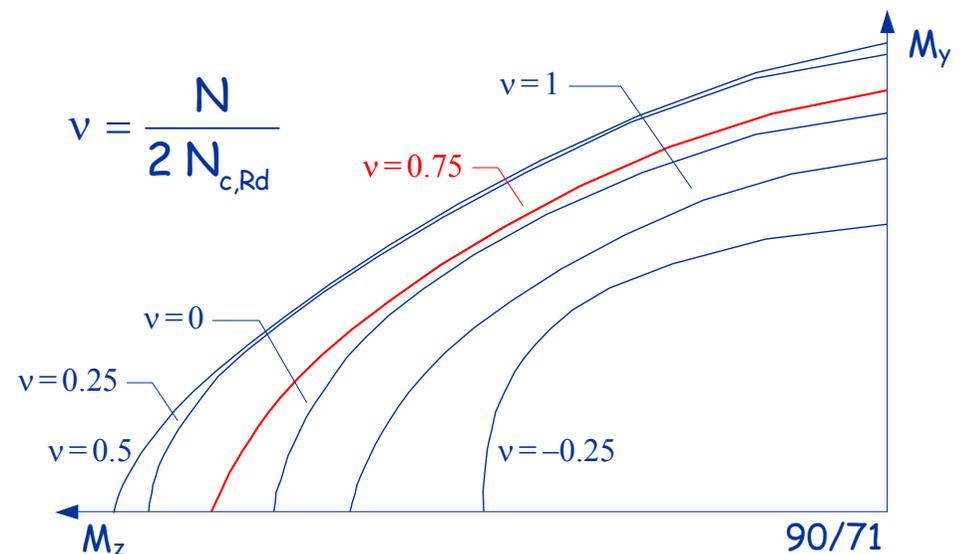
# Dominio allo SLU



Nota: per  $N \geq 0$  si può usare un esponente maggiore, fino a 2

$$\left( \frac{M_z}{M_{z,Rd}} \right)^p + \left( \frac{M_y}{M_{y,Rd}} \right)^q = 1$$

Consiglio:  
usare  $p = q = 1.5$



FINE