

# Lezione

Tecnica delle Costruzioni

La torsione

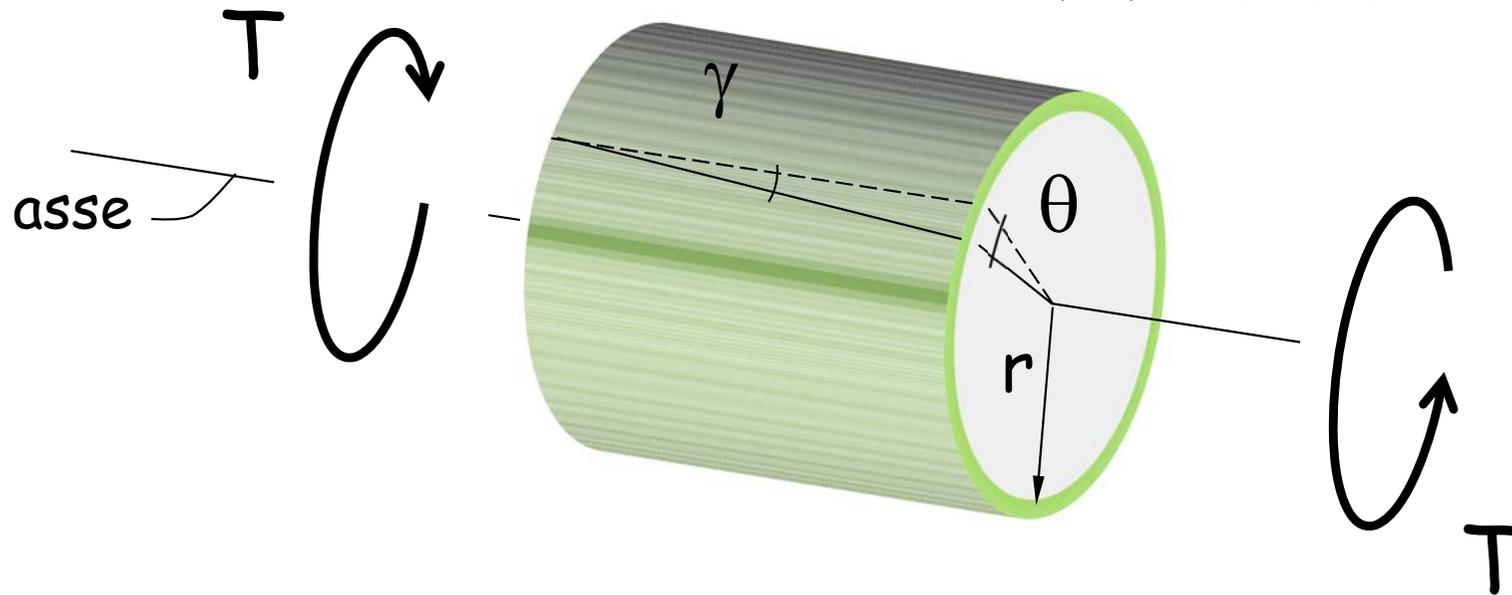
# CONSIDERAZIONI PRELIMINARI

- **TORSIONE PER EQUILIBRIO**  
allorché le forze esterne possono essere equilibrate unicamente attraverso l'attivazione di una resistenza a torsione.
- **TORSIONE PER CONGRUENZA**  
allorché le forze esterne possono essere equilibrate anche a seguito di una variazione del vincolo mutuo e quindi attraverso caratteristiche della sollecitazione diverse dalla torsione.

# Torsione

Sezione anulare di materiale omogeneo

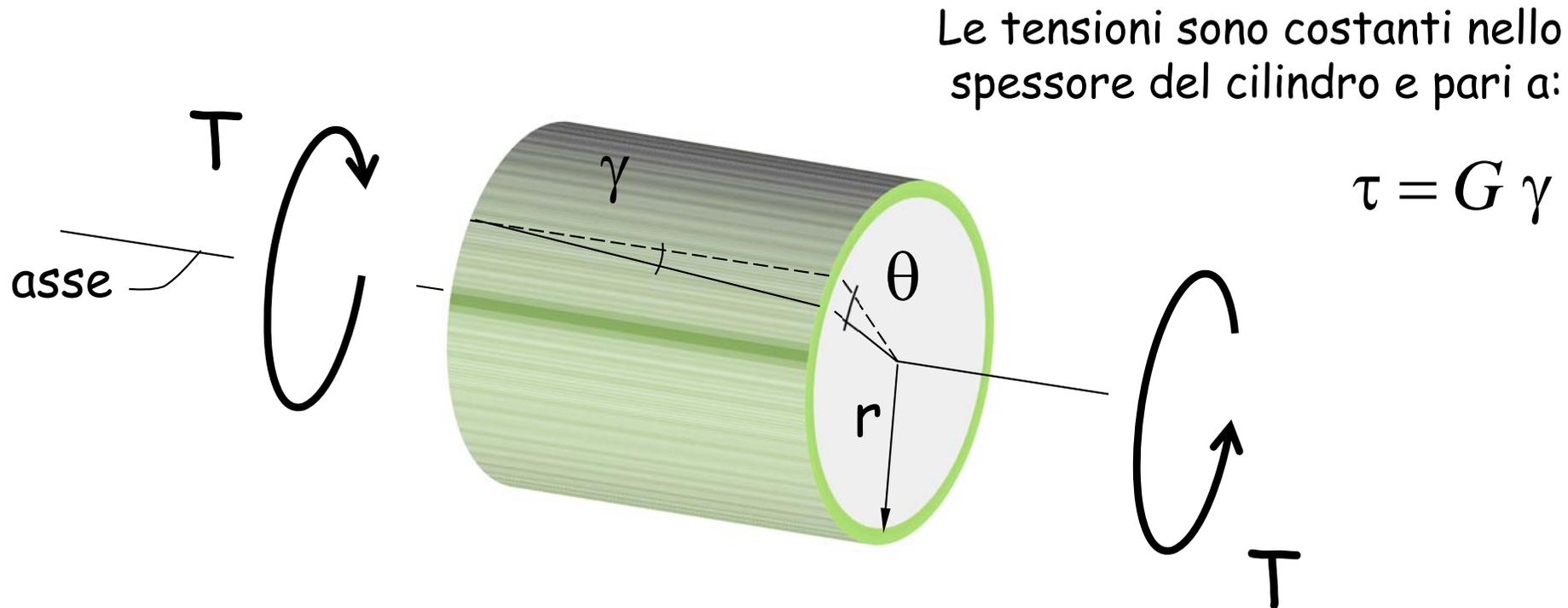
Se un elemento a sezione anulare di piccolo spessore e' soggetto a un momento torcente ...



L'asse dell'asta rimane rettilineo e le fibre anulari ruotano rigidamente. Le fibre longitudinali si deformano trasformandosi in eliche che si avvolgono lungo il cilindro.

# Torsione

Sezione anulare di materiale omogeneo



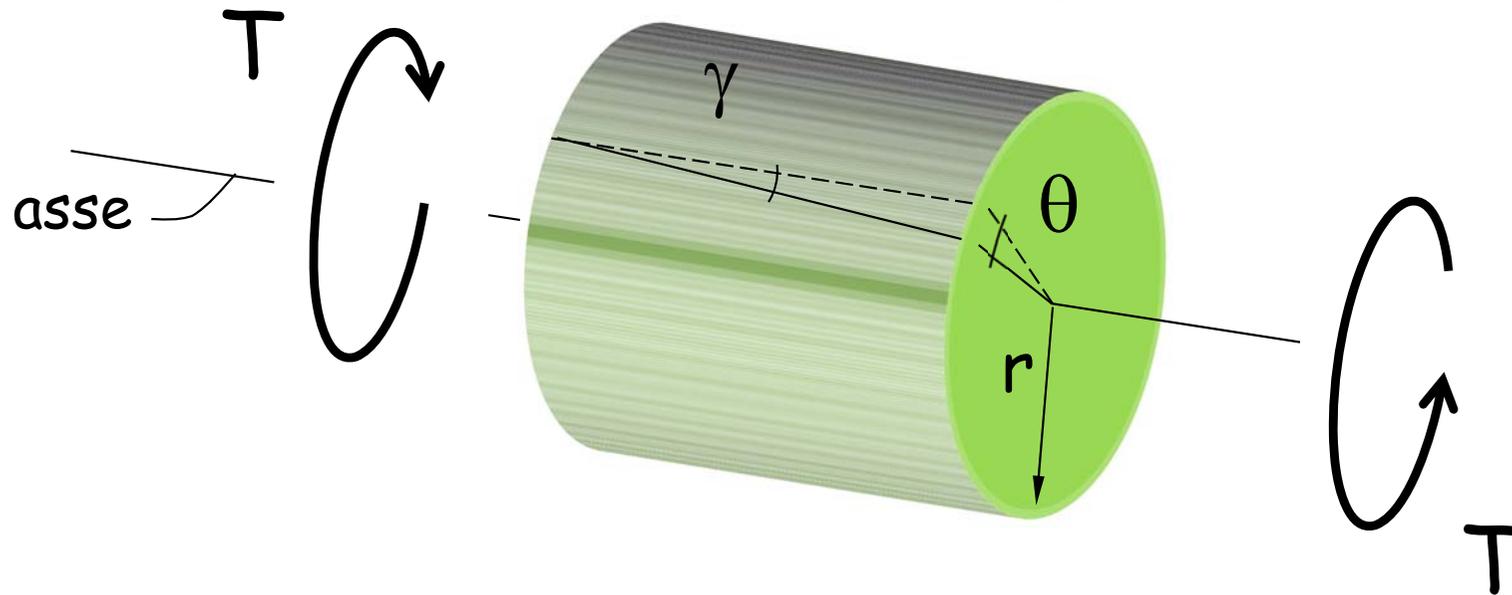
L'angolo unitario di rotazione  $\theta$   
(rotazione relativa tra due facce a distanza unitaria)  
è:

$$\theta = \gamma / r$$

# Torsione

Sezione circolare di materiale omogeneo

Se un elemento a sezione circolare piena e' soggetto a un momento torcente ...

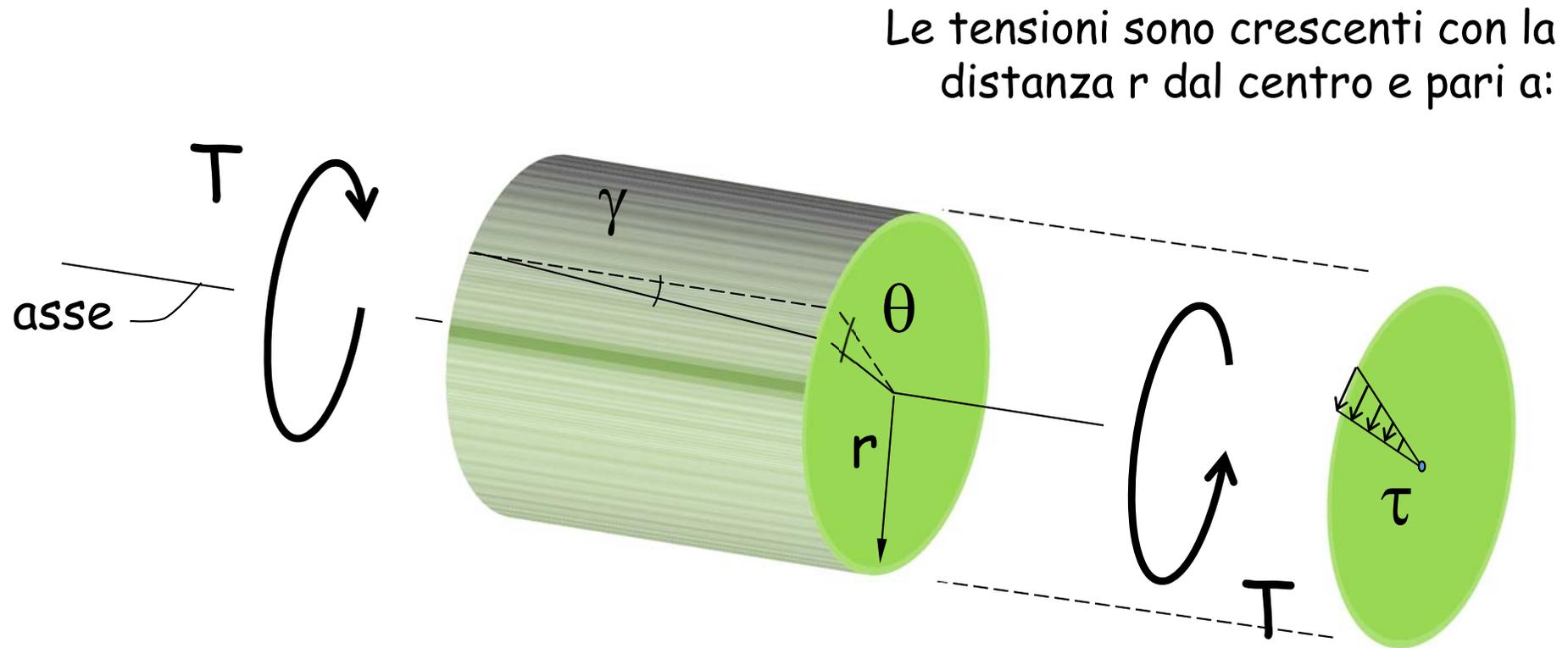


L'asse dell'asta rimane rettilineo e le fibre anulari ruotano rigidamente.

Le fibre longitudinali subiscono uno scorrimento  $\gamma$  crescente con  $r$ .

# Torsione

Sezione circolare di materiale omogeneo



L'asse dell'asta rimane rettilineo e le fibre anulari ruotano rigidamente.

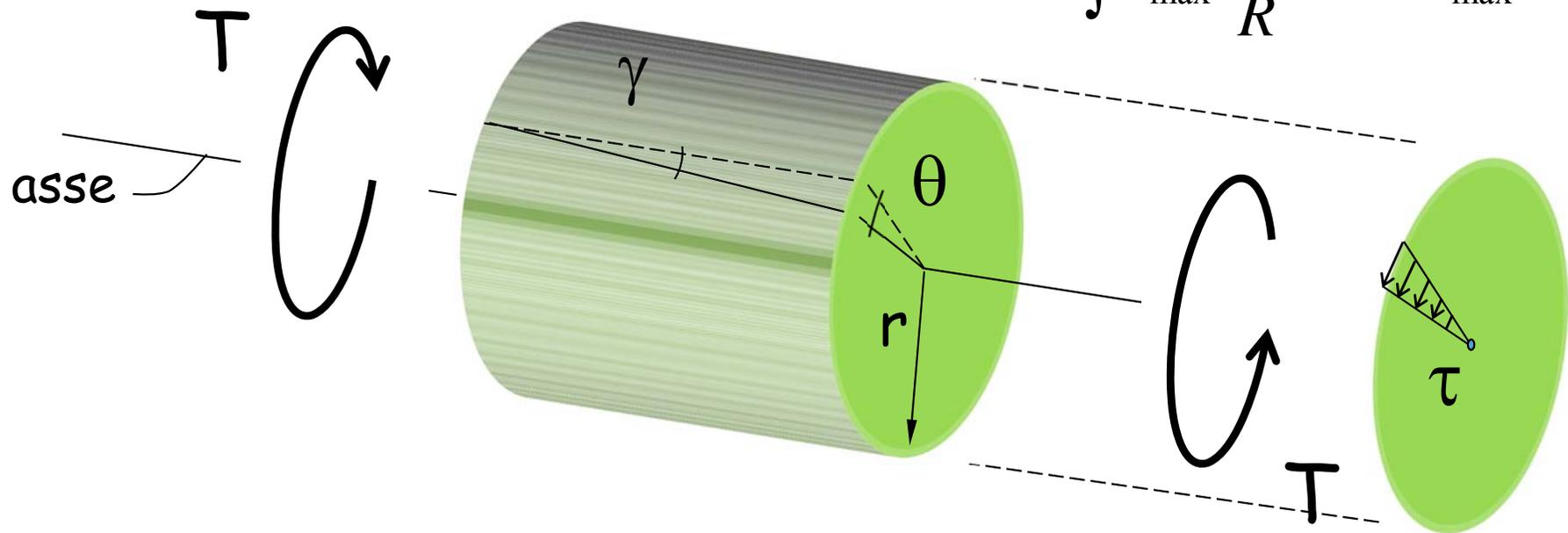
Le fibre longitudinali subiscono uno scorrimento  $\gamma$  crescente con  $r$ .

# Torsione

Sezione circolare di materiale omogeneo

Imponendo l'equilibrio alla rotazione si ha :

$$T = \int \tau_{\max} \frac{r^2}{R} dA = \tau_{\max} R I_p$$



dove  $I_p$  e' il momento polare della sezione, che nel caso di una sezione circolare vale :

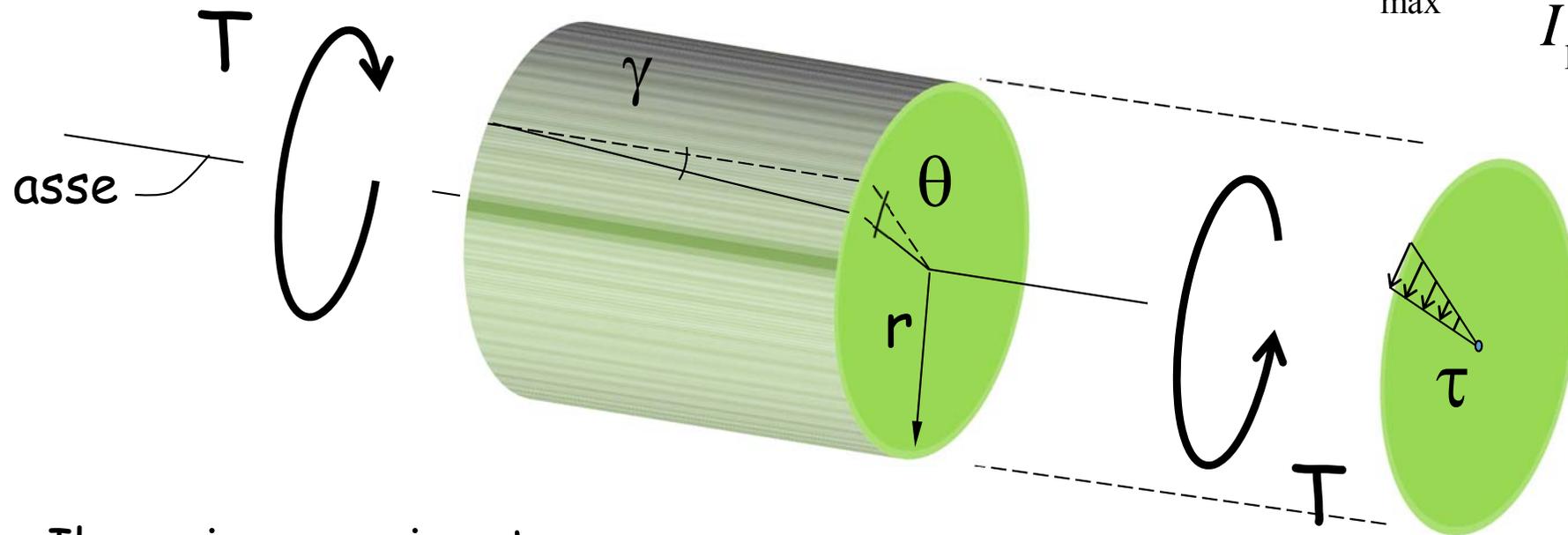
$$I_p = \frac{\pi R^4}{2}$$

# Torsione

Sezione circolare di materiale omogeneo

La massima tensione tangenziale vale :

$$\tau_{\max} = \frac{T R}{I_p}$$



Il massimo scorrimento e l'angolo unitario di rotazione valgono :

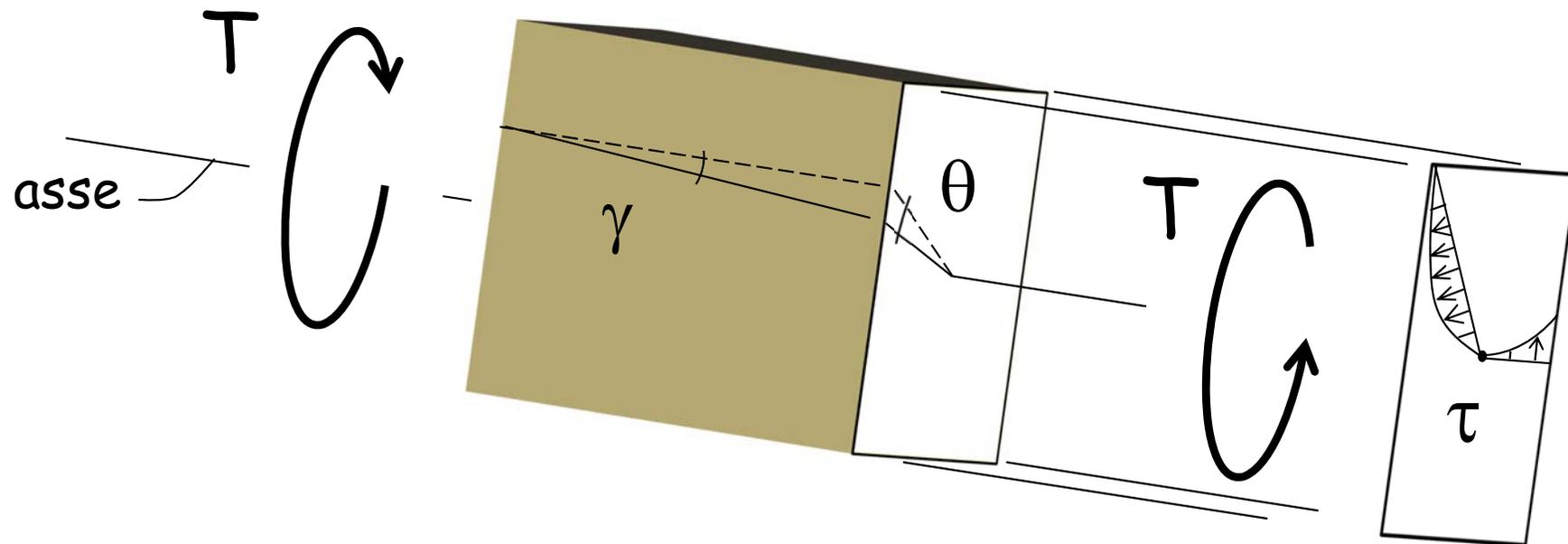
$$\gamma_{\max} = \frac{T R}{G I_p}$$

$$\theta = \frac{T}{G I_p}$$

# Torsione

Sezione rettangolare di materiale omogeneo

La tensione tangenziale deve essere parallela al contorno e quindi nulla agli spigoli

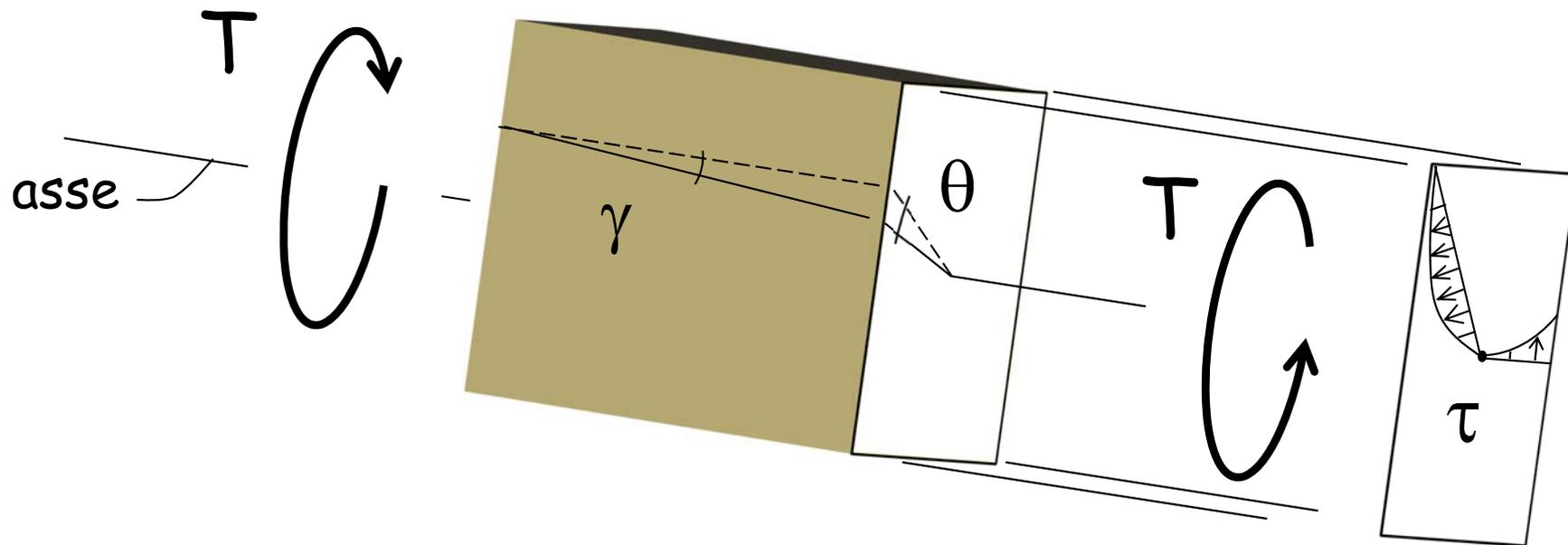


La sezione trasversale,  
oltre a ruotare nel proprio piano,  
deve presentare deformazioni fuori piano  
(ingobbimento)

# Torsione

Sezione rettangolare di materiale omogeneo

La tensione tangenziale deve essere parallela al contorno  
e quindi nulla agli spigoli



Il valore massimo della tensione tangenziale e' :

$$\tau_{\max} = \psi \frac{T R}{a b^2}$$

dove

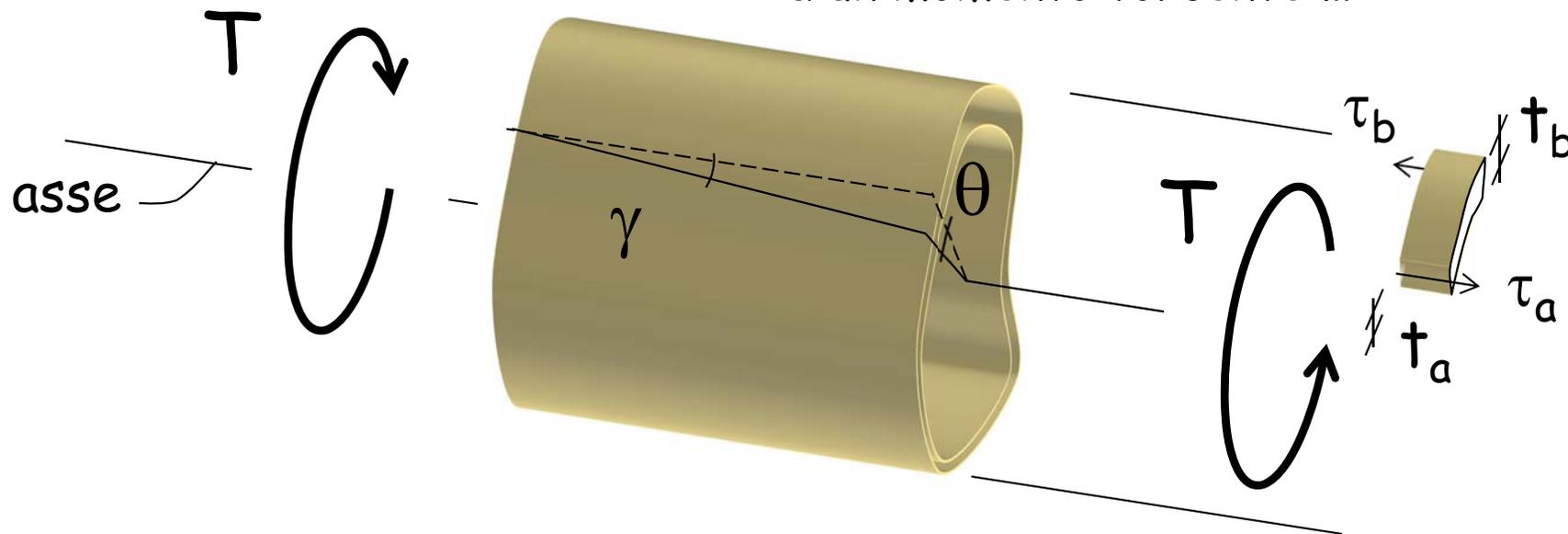
$$\psi = 3 + \frac{2.6}{0.45 + a/b}$$

a dim. lato maggiore  
b dim. lato minore

# Torsione

Sezione sottile a spessore variabile di materiale omogeneo

Se un elemento a sezione sottile di spessore piccolo e variabile e' soggetto a un momento torcente ...



Per l'equilibrio, il prodotto  $\tau \cdot t$  è costante  
(essendo  $t$  lo spessore della corda)

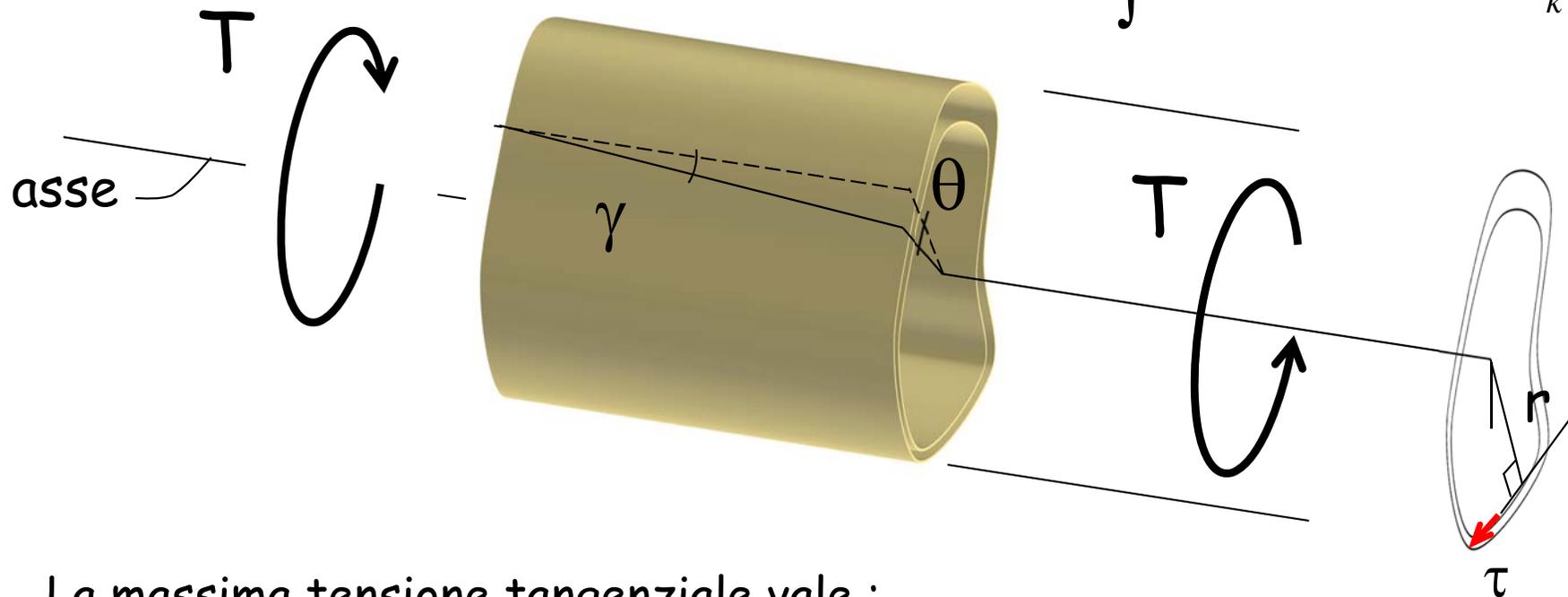
ovvero 
$$\tau_a t_a = \tau_b t_b$$

# Torsione

Sezione sottile a spessore variabile di materiale omogeneo

Imponendo l'equilibrio alla rotazione si ha :

$$T = \int \tau t r ds = 2 \tau t A_k$$



La massima tensione tangenziale vale :

$$\tau_{\max} = \frac{T}{2 A_k t_{\min}}$$

essendo  $A_k$  l'area settoriale racchiusa dalla linea media

# Torsione

Elementi in conglomerato armato

## **I° stadio di comportamento**

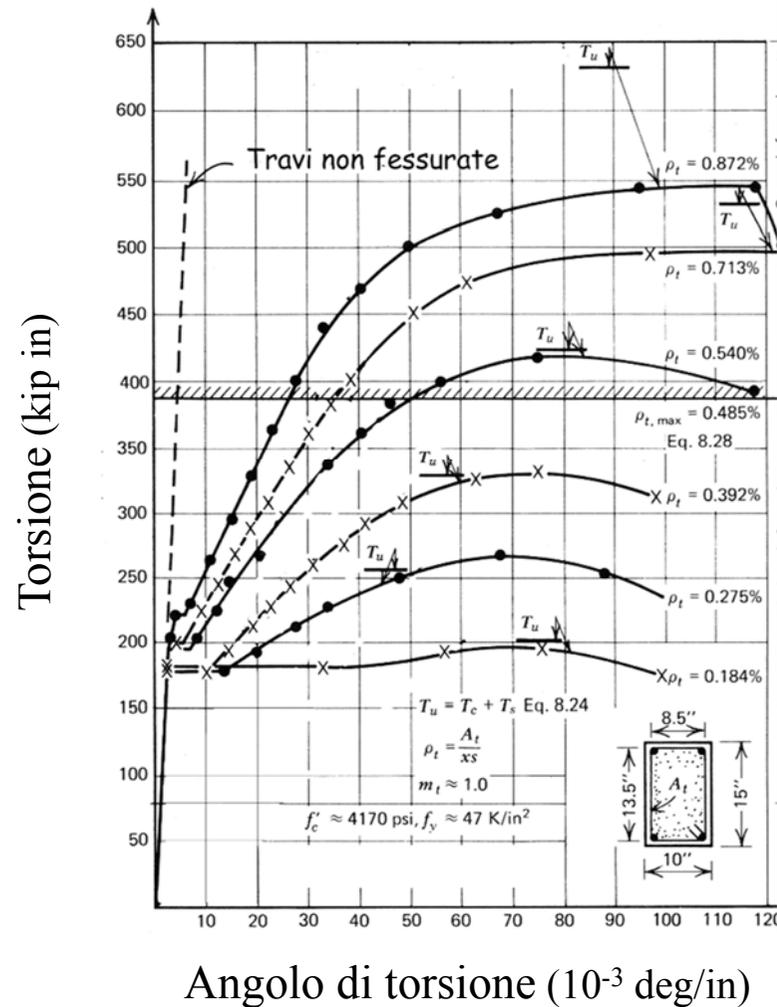
1. La torsione, fin quando l'elemento in c.a. non è fessurato, è fronteggiata dallo stato tensionale che si sviluppa nel calcestruzzo. Le armature non partecipano efficacemente alla resistenza strutturale.

## **II° stadio di comportamento**

2. Quando le tensioni principali di trazione nel calcestruzzo attingono il valore di rottura, subentra una radicale modifica del meccanismo resistente, con l'instaurarsi di un quadro fessurativo specifico, e con l'intervento diretto delle armature metalliche.

# Torsione

## Elementi in conglomerato armato



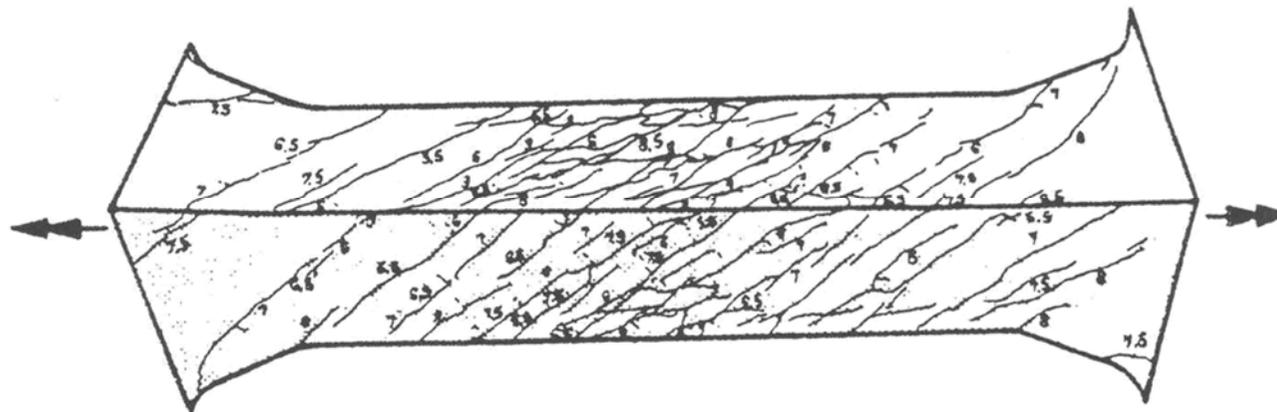
(tratto da R. Park and T. Paulay: Reinforced Concrete Structures)

# Torsione

Elementi in conglomerato armato

## II° stadio di comportamento

3. L'evidenza sperimentale ha mostrato che le fessure nel calcestruzzo risultano inclinate di un angolo pari all'incirca a  $45^\circ$ , e si sviluppano con un andamento a spirale lungo la superficie del solido.



(tratto da F. Leonhardt: calcolo di progetto e tecniche costruttive)

# Torsione

Elementi in conglomerato armato

## **II° stadio di comportamento**

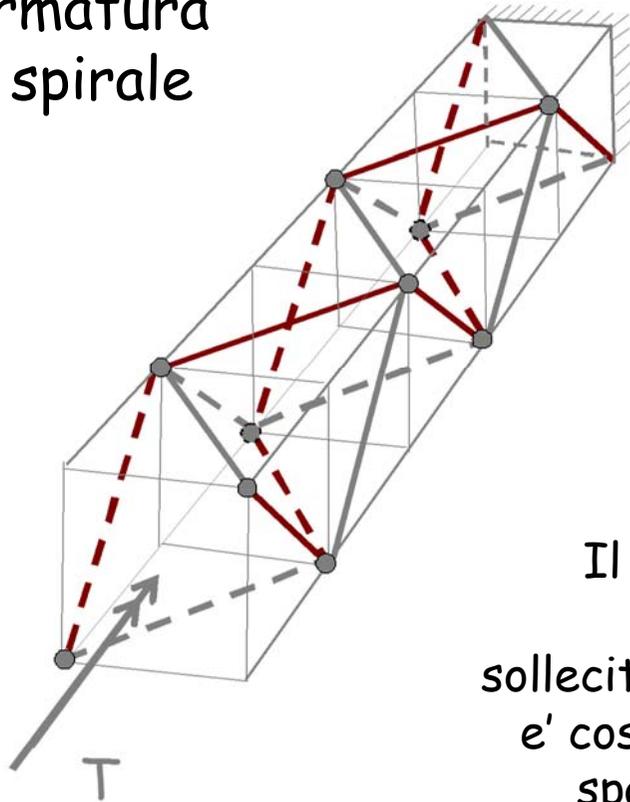
4. Inoltre, solo uno strato di calcestruzzo, vicino alla superficie esterna dell'elemento e relativamente poco spesso, partecipa alla resistenza torsionale

5. Su ogni parete della trave può essere ipotizzato un traliccio del tutto analogo a quello di Mörsch, costituito da bielle di conglomerato inclinate di  $45^\circ$  rispetto all'asse della trave, ivi tangenti alle isostatiche di compressione, ed armature contenute nello spessore  $t$  della parete tubolare fittizia, che possono essere costituite da un'elica inclinata a  $45^\circ$  rispetto all'asse della trave e tangenti alle isostatiche di trazione, o da barre parallele all'asse della trave e a staffe ad esse normali.

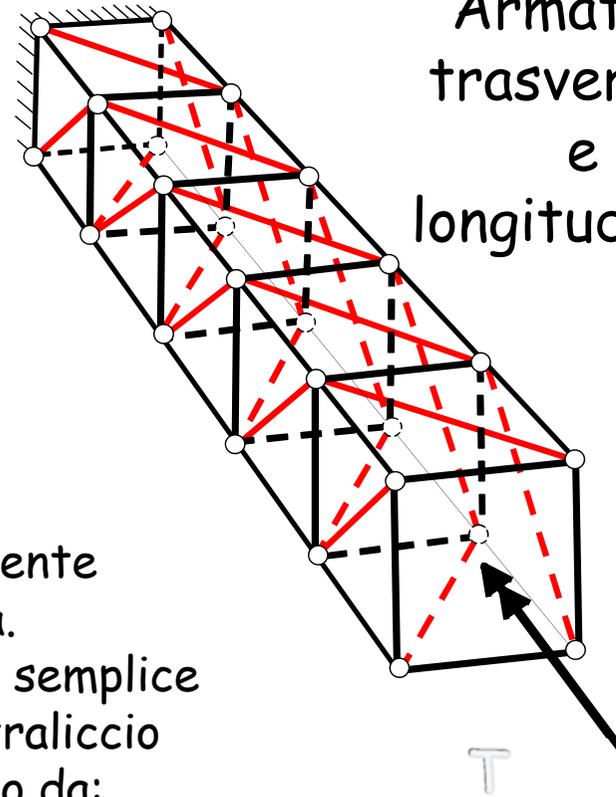
Il traliccio tubolare (modello di Rausch) si ipotizza isostatico.

# IL MODELLO DI RAUSCH

Armatura a spirale



Armatura trasversale e longitudinale



Il modello resistente di travi in c.a. sollecitate a torsione semplice e' costituito da un traliccio spaziale composto da:

correnti longitudinali  
diagonali tese (armatura a spirale)  
diagonali compresse (calcestruzzo)

correnti longitudinali (staffe) montanti tesi (calcestruzzo) diagonali compresse

(ispirata a F. Leonhardt: calcolo di progetto e tecniche costruttive)

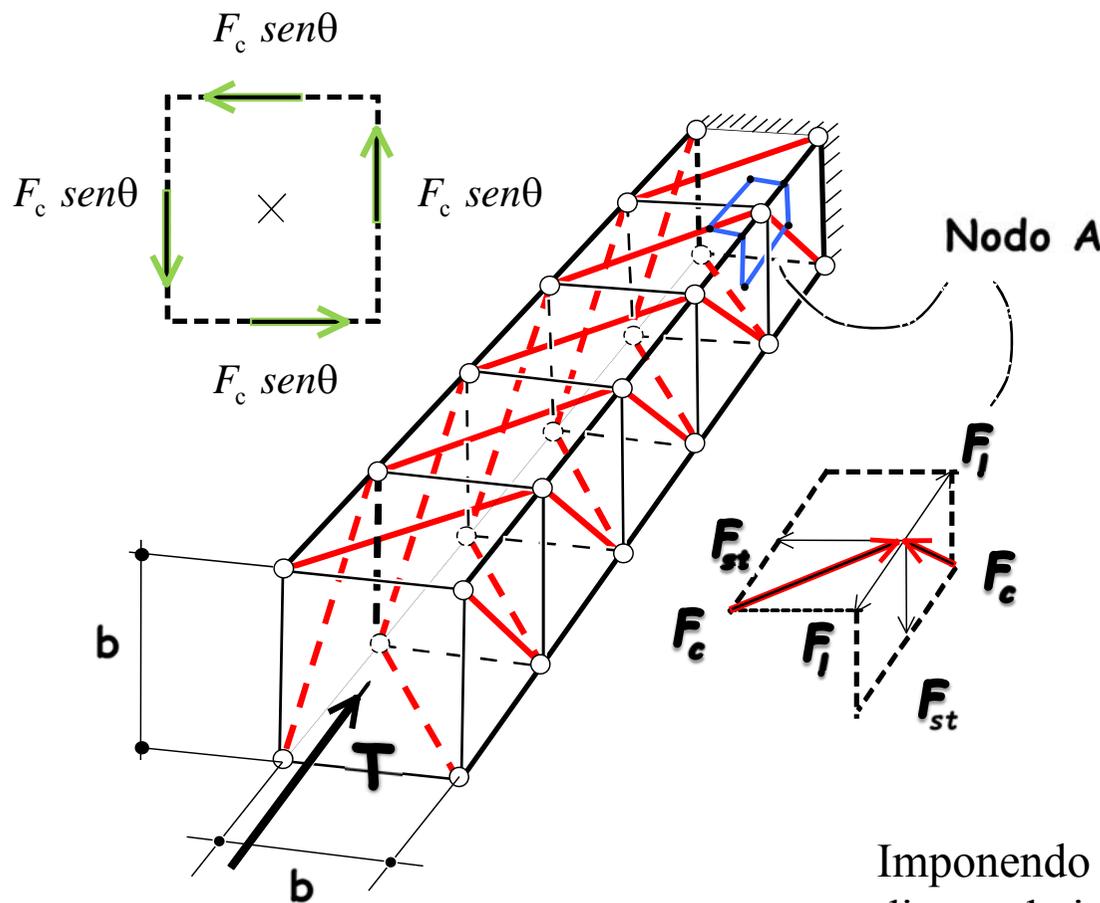
# VERIFICHE DI SICUREZZA

Nella logica degli stati limite la verifica di sicurezza strutturale viene ricondotta alla verifica dei quattro stati limite ultimi:

- Rottura per compressione delle bielle di calcestruzzo;
- Snervamento delle staffe;
- Snervamento dell'armatura longitudinale;
- Cedimenti degli ancoraggi o di nodi dell'elemento strutturale.

# Il modello resistente in presenza di staffe e ferri longitudinali ( $\theta=45^\circ$ )

Sezione trasversale



Dall'equilibrio alla traslazione del nodo A si ha:

$$F_c \operatorname{sen}\theta = F_{st} \quad F_c \cos\theta = F_l$$

Dall'equilibrio alla rotazione del generico tronco si ha:

$$4 F_c \operatorname{sen}\theta \cdot \frac{b}{2} = T \quad \text{quindi } F_c = \frac{T}{2 \operatorname{sen}\theta b}$$

La tensione di compressione della diagonale in calcestruzzo vale:

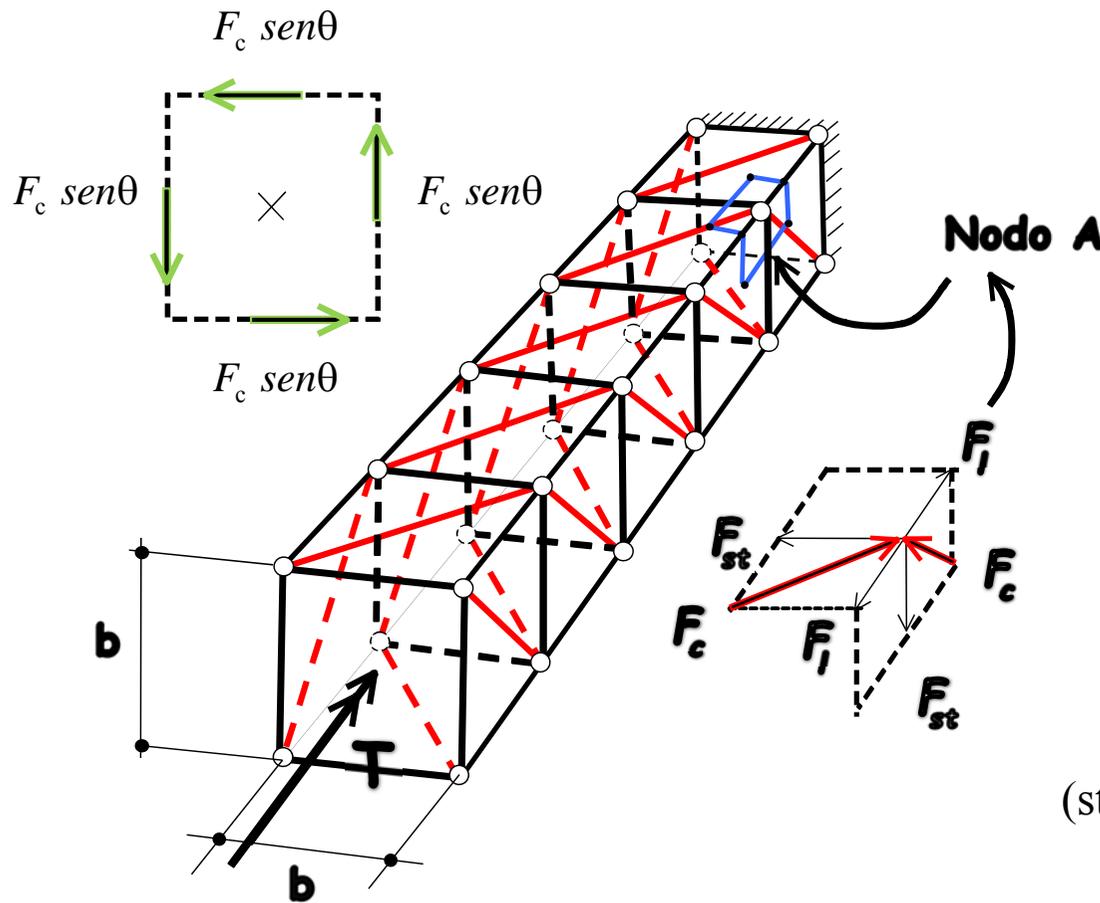
$$\sigma_c = \frac{T}{2 \operatorname{sen}\theta b} \cdot \frac{1}{b t \cos\theta} = \frac{T(1 + \cot^2 \theta)}{2 t A_k \cot\theta}$$

Imponendo per la tensione di compressione della diagonale in calcestruzzo il suo valore ultimo si ha:

$$T_{Rd,max} = \frac{2 v f_{cd} t A_k \cot\theta}{1 + \cot^2 \theta}$$

# Il modello resistente in presenza di staffe e ferri longitudinali ( $\theta=45^\circ$ )

Sezione trasversale



La tensione nelle staffe e nell'armatura longitudinale vale:

(staffe) 
$$\sigma_{st} = \frac{T \Delta x}{2 b^2 \cot \theta A_{st}}$$

(arm. longitudinale) 
$$\sigma_1 = \frac{2 T \cot \theta u_k}{2 b^2 A_{sl}}$$

Imponendo per la tensione di trazione dell'armatura il suo valore di snervamento si ha:

(staffe) 
$$T_{Rd,s(st)} = 2 A_k f_{ywd} \frac{A_{st}}{\Delta x} \cot \theta$$

(arm. long.) 
$$T_{Rd,s(l)} = \frac{2 A_k f_{yld} A_{lw}}{u_k \cot \theta}$$

# Metodi di calcolo a torsione

Eurocodice 2

Il momento torcente di calcolo deve soddisfare le due condizioni seguenti:

$$T_{Ed} \leq T_{Rd,max}$$

$$T_{Ed} \leq T_{Rd,s}$$

$T_{Rd,max}$  massimo momento torcente che può essere sopportato dalle bielle compresse

$T_{Rd,s}$  massimo momento torcente che può essere sopportato dall'armatura

# Metodi di calcolo a torsione

Eurocodice 2

Il momento resistente portato dalle bielle compresse si valuta

$$T_{Rd,max} = 2 v f_{cd} t A_k / (\cot \theta + \tan \theta)$$

$t$  spessore di parete equivalente  $\leq A / u$

$A$  area totale della sezione retta racchiusa dal perimetro esterno

$u$  perimetro esterno

$A_k$  area compresa all'interno della linea media della sezione trasversale a pareti sottili

$\theta$  angolo tra le bielle di calcestruzzo e l'asse longitudinale della trave

# Metodi di calcolo a torsione

Eurocodice 2

Il momento resistente portato dalle bielle compresse si valuta

$$T_{Rd,max} = 2 v f_{cd} t A_k / (\cot \theta + \tan \theta)$$

essendo:

$$v = 0.7 * (0.7 - f_{ck} / 200) \geq 0.35 \quad (f_{ck} \text{ in N/mm}^2)$$

Questo valore di  $v$  si applica se ci sono staffe solo lungo il perimetro esterno dell'elemento. Se si dispongono staffe chiuse su entrambi le facce di ciascun elemento della sezione cava equivalente, o di ciascun elemento di una sezione a cassone:

$$v = (0.7 - f_{ck}/200) \geq 0.5 \quad (f_{ck} \text{ in N/mm}^2)$$

# Metodi di calcolo a torsione

Eurocodice 2

$$T_{Rd,s} = \min \left\{ \begin{array}{l} 2A_k f_{ywd} \frac{A_{sw}}{s} \cot \theta \\ \frac{2A_k f_{yld} A_{sl}}{u_k \cot \theta} \end{array} \right.$$

$u_k$  è il perimetro dell'area  $A_k$ ;

$s$  è il passo delle staffe;

$f_{ywd}$  è la tensione di snervamento di calcolo delle staffe;

$f_{yld}$  è la tensione di snervamento di calcolo dell'armatura longitudinale  $A_{sl}$ ;

$A_{sw}$  è l'area della sezione trasversale delle staffe;

$A_{sl}$  è l'area aggiuntiva di acciaio longitudinale richiesta per la torsione.

# Metodi di calcolo a torsione

Eurocodice 2

Dalla relazione

$$T_{Rd,s} = \min \left\{ \begin{array}{l} 2A_k f_{ywd} \frac{A_{sw}}{s} \cot \theta \\ \frac{2A_k f_{yld} A_{lw}}{u_k \cot \theta} \end{array} \right.$$

posto  $T_{Sd} = T_{Rd,s}$ , le aree aggiuntive di staffe e di barre longitudinali per torsione sono fornite dalle equazioni:

$$\frac{A_{sw}}{s} = \frac{T_{Ed}}{2A_k f_{ywd} \cot \theta}$$

$$A_{lw} = \frac{T_{Ed} u_k \cot \theta}{2A_k f_{yld}}$$

# Limiti per la torsione nelle travi

Eurocodice 2

## ARMATURE A TORSIONE

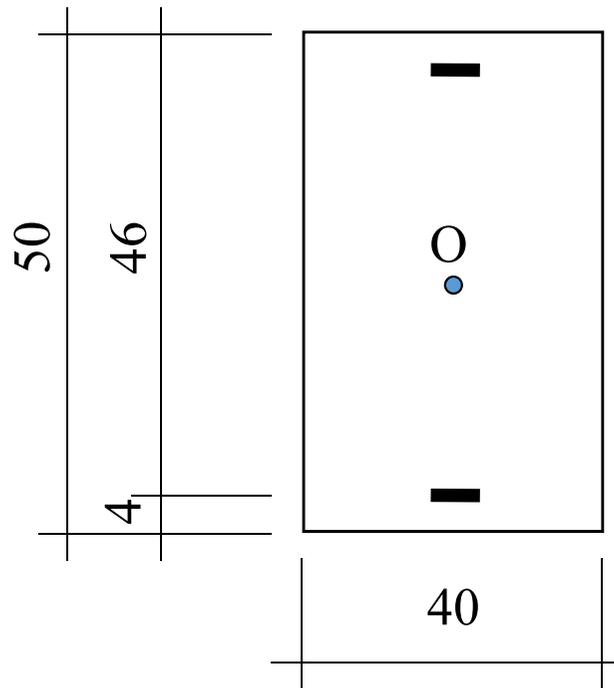
Le staffe per la torsione devono di regola essere o chiuse e ancorate per sovrapposizione e formare un angolo di  $90^\circ$  con l'asse dell'elemento strutturale.

La distanza longitudinale fra le staffe di torsione non deve di regola essere maggiore di  $| u_k/8 |$

Le barre longitudinali devono di regola essere disposte in modo tale che ci sia almeno una barra per angolo, essendo le rimanenti uniformemente distribuite lungo il perimetro delle staffe e distanti fra loro non più di  $| 350 \text{ mm} |$ .

# Esempio n. 5

3° stadio di comportamento



Lo spessore della sezione tubolare è :

$$T = 35 \text{ kNm} \quad t = \max \begin{cases} 2c = 8 \text{ cm} \\ A/u = 2400/200 = 12 \text{ cm} \end{cases}$$

Dunque :

$$a_k = 60 - 12 = 48 \text{ cm}$$

$$b_k = 40 - 12 = 28 \text{ cm}$$

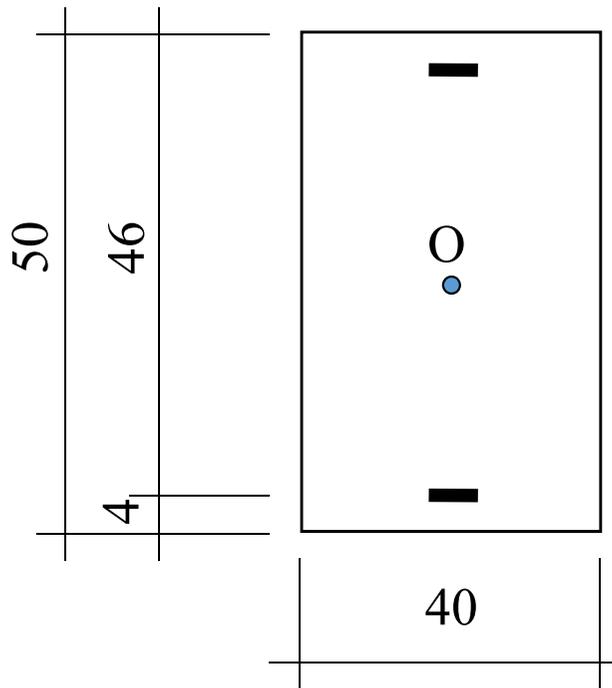
$$A_k = 48 \times 28 = 1344 \text{ cm}^2$$

$$T_{Rd,max} = \frac{2 \cdot 0.5 \cdot 14.17 \cdot 12 \cdot 1344 \cdot \cot \theta}{1 + \cot^2 \theta} \cdot 10^{-3} = 228.5 \frac{\cot \theta}{1 + \cot^2 \theta}$$

Quindi :  $T_{Rd,max} = 114.3 \text{ kNm}$  se  $\cot \theta = 1$  e  $T_{Rd,max} = 78.8 \text{ kNm}$  se  $\cot \theta = 2.5$

# Esempio n. 6

3° stadio di comportamento



$T = 35 \text{ kNm}$   
←←

L'armatura necessaria a torsione ( $\cot\theta=1$ ) è :

$$A_{st} = \frac{35 \cdot 100}{2 \cdot 1344 \cdot 391.3 \cdot 1} \cdot 10^3 = 3.33$$

$$A_{s,lon} = \frac{35 \cdot 152 \cdot 1}{2 \cdot 1344 \cdot 391.3} \cdot 10^3 = 5.06$$

Se si dispongono staffe  $\phi 8/20$  ( $>u/8$ ) e si impone :

$$T_{Rd,s(st)} = 2A_k f_{yd} \frac{A_{st}}{s} \cot\theta = T_{Ed}$$

$$\cot\theta = \frac{T_{Ed} s}{2A_k f_{yd} A_{st}} = \frac{35 \cdot 100}{2 \cdot 1344 \cdot 391.3 \cdot 2.5} \cdot 10^3 = 1.331$$

$$A_{s,lon} = \frac{35 \cdot 152 \cdot 1.331}{2 \cdot 1344 \cdot 391.3} \cdot 10^3 = 6.73 \text{ cm}^2$$

# EFFETTI COMBINATI

## Procedimento generale

Si usa lo stesso procedimento descritto per la torsione pura per definire una sezione chiusa equivalente a pareti sottili. Le tensioni normali e tangenziali in tale sezione si determinano con i metodi di calcolo convenzionali elastico o plastico.

Quando siano state calcolate le tensioni, l'armatura necessaria in ogni punto della sezione a pareti sottili può essere determinata con le formule per lo stato di tensione biassiale. Analogamente può essere determinata la tensione del calcestruzzo.

L'armatura così trovata, se non è praticamente realizzabile, può essere sostituita con un'altra disposizione staticamente equivalente, a condizione che gli effetti di tale modifica siano presi in conto nelle zone vicine a fori e alle estremità della trave.

# EFFETTI COMBINATI

## Procedimento generale

La tensione nel calcestruzzo risultante da taglio e torsione combinati nelle singole pareti della sezione equivalente a pareti sottili non deve, di regola, essere maggiore di  $\sigma_c = v f_{cd}$ .

Per sezioni a cassone, con armatura su entrambe le facce di ogni parete, nel caso di tensioni tangenziali originate da taglio e torsione combinati  $v$  può essere assunto pari a

$$v = (0,7 - f_{ck}/200) \geq 0,5.$$

# EFFETTI COMBINATI

## Torsione combinata con flessione e/o forze longitudinali

Le armature longitudinali richieste per flessione e torsione devono, di regola, essere determinate separatamente.

Si applicano inoltre le seguenti regole:

- nella zona tesa per flessione, l'armatura longitudinale di torsione va di regola aggiunta a quella richiesta per resistere alla flessione e alle forze assiali;
- nella zona compressa per flessione, se la tensione di trazione dovuta alla torsione è minore della tensione di compressione nel calcestruzzo dovuta alla flessione, non è necessaria armatura longitudinale aggiuntiva per torsione.

# EFFETTI COMBINATI

## Torsione combinata con flessione e/o forze longitudinali

Nelle zone in cui la torsione è combinata con un momento flettente significativo possono insorgere tensioni principali critiche nella zona di compressione, in particolare nelle travi a cassone. In tali casi la tensione principale di compressione non deve di regola essere maggiore di  $f_{cd}$ , essendo tale tensione ricavata dalla compressione longitudinale media per flessione e dalla tensione tangenziale dovuta alla torsione, assunta pari a

$$\tau_{Sd} = \frac{T_{Sd}}{2 A_k t}$$

# EFFETTI COMBINATI

## Torsione combinata con taglio

Il momento torcente di calcolo e il taglio di calcolo applicato,  $T_{Ed}$  e  $V_{Ed}$  rispettivamente, devono di regola soddisfare la seguente condizione:

$$\frac{T_{Ed}}{T_{Rd,max}} + \frac{V_{Ed}}{V_{Rd,max}} \leq 1$$

$T_{Rd,max}$  è il momento resistente torcente di calcolo,

$V_{Rd,max}$  è il taglio resistente di calcolo relativo a una biella inclinata di un angolo  $\theta$

# EFFETTI COMBINATI

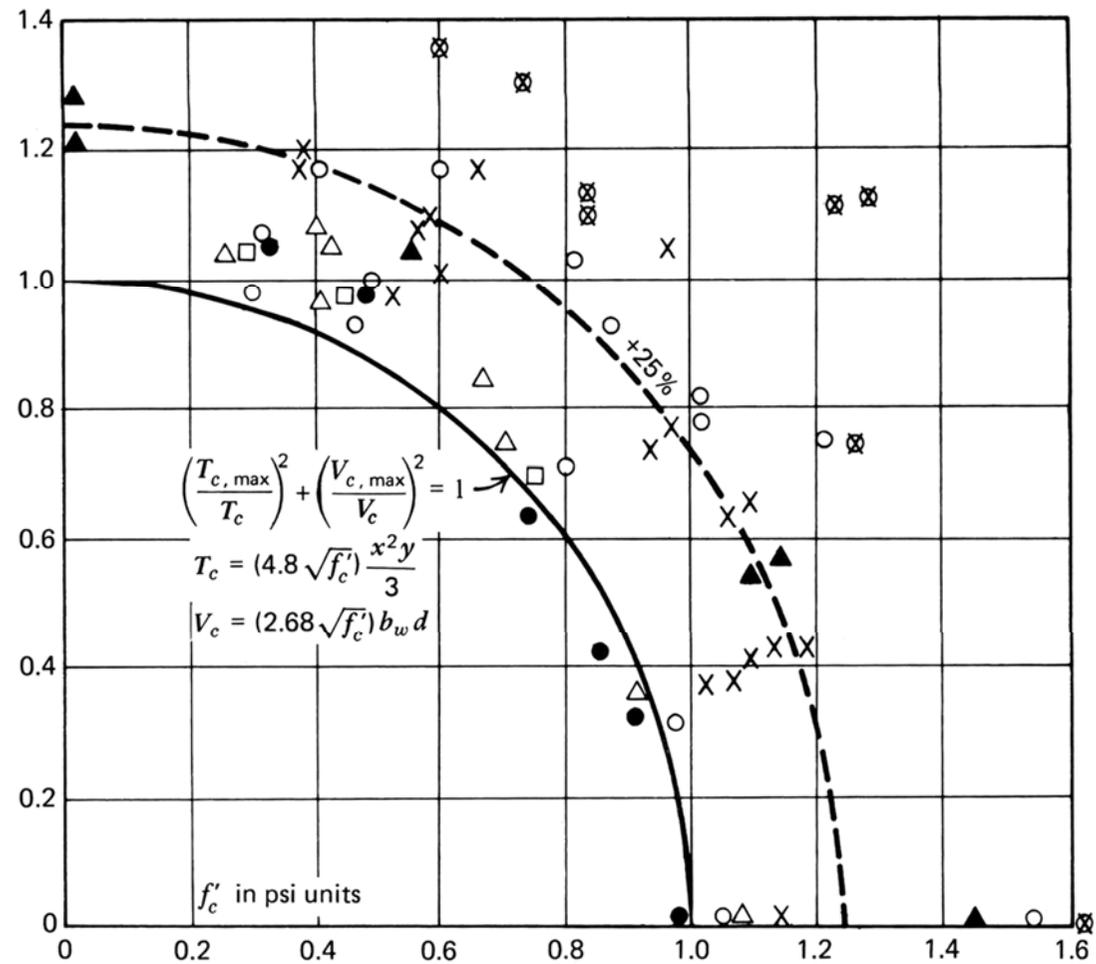
## Torsione combinata con taglio

I calcoli per il progetto delle staffe possono essere effettuati separatamente, per la torsione secondo e per il taglio.

L'angolo  $\theta$  delle bielle equivalenti di calcestruzzo è lo stesso sia per la torsione che per il taglio.

# EFFETTI COMBINATI

Torsione - taglio



(tratto da R. Park and T. Paulay: Reinforced Concrete Structures)

Fine