Lezione

Tecnica delle Costruzioni

Stati limite di esercizio

Stati limite di esercizio

Classificazione

STATO LIMITE DI FESSURAZIONE

STATO LIMITE DI TENSIONE

STATO LIMITE DI DEFORMAZIONE

Stato limite di tensione in esercizio

Limitazione delle tensioni

Considerazioni di base

Tensioni di compressione elevate nel calcestruzzo in presenza di carichi di esercizio possono favorire la formazione di fessure longitudinali e determinare o microfessurazioni nel calcestruzzo o livelli di viscosità maggiori di quelli previsti.

Elevate tensioni nell'acciaio possono condurre a fessure ampie e permanentemente aperte.

Tali fenomeni possono ridurre la durabilità delle opere.

I valori delle tensioni del calcestruzzo e dell'acciaio, da confrontare con i corrispondenti valori limite, debbono tener conto, se del caso, degli stati coattivi.

Stato limite di tensioni

Valori limite delle tensioni

La verifica si esegue per:

- combinazione dei carichi rara
- combinazione di carico quasi permanente

Valori limite delle tensioni in esercizio

Materiale	Comb. di carico rara	Comb. di carico quasi perm.
Calcestruzzo	$\sigma_c < 0.6\ f_{ck}$	$\sigma_c < 0.45\ f_{ck}$
Acciaio	$\sigma_s < 0.8\ f_{yk}$	

NTC08, punto 4.1.2.2.5

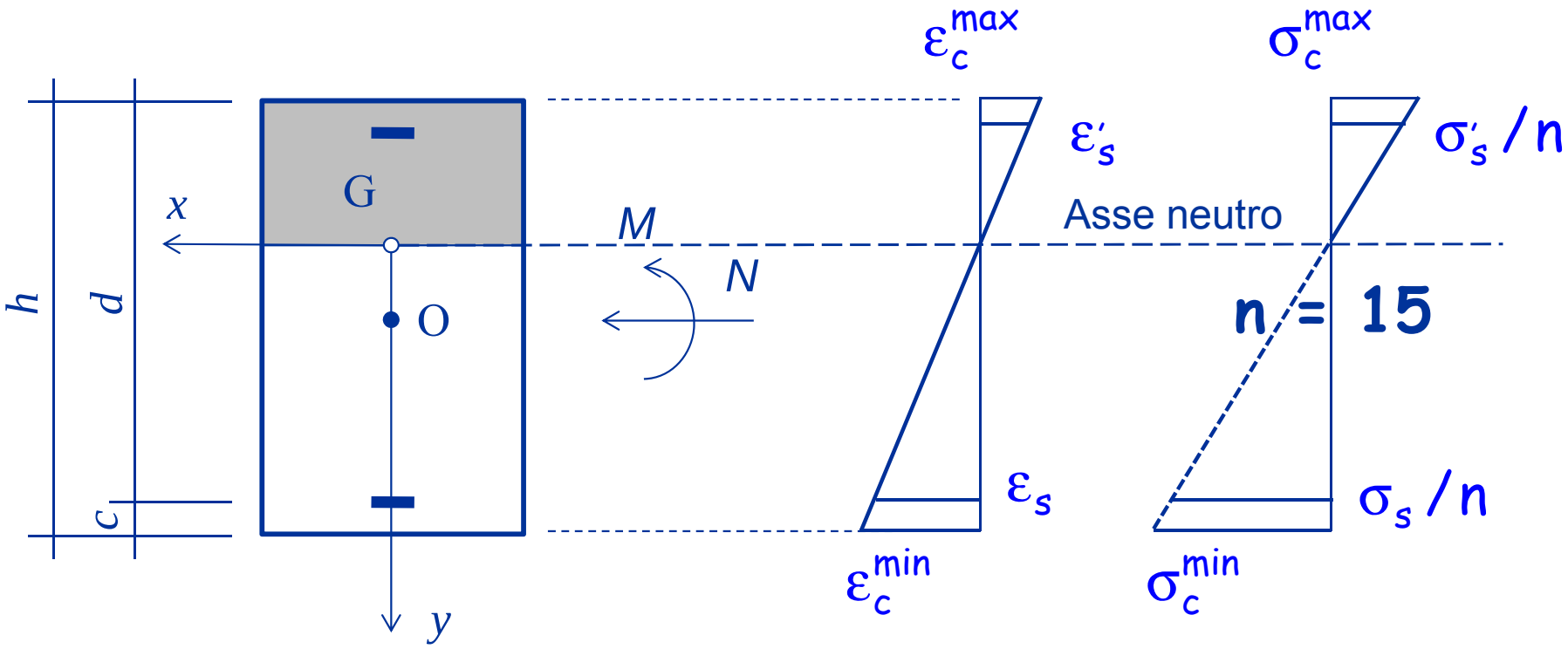
Calcolo delle tensioni in esercizio

Le tensioni nel calcestruzzo e nell'acciaio
si calcolano assumendo:

- legame σ-ε elastico lineare non resistente a trazione per il calcestruzzo
- legame σ-ε elastico lineare per l'acciaio
- coefficiente di omogeneizzazione $n = 15$

Calcolo delle tensioni in esercizio

Flessione semplice



Dati:

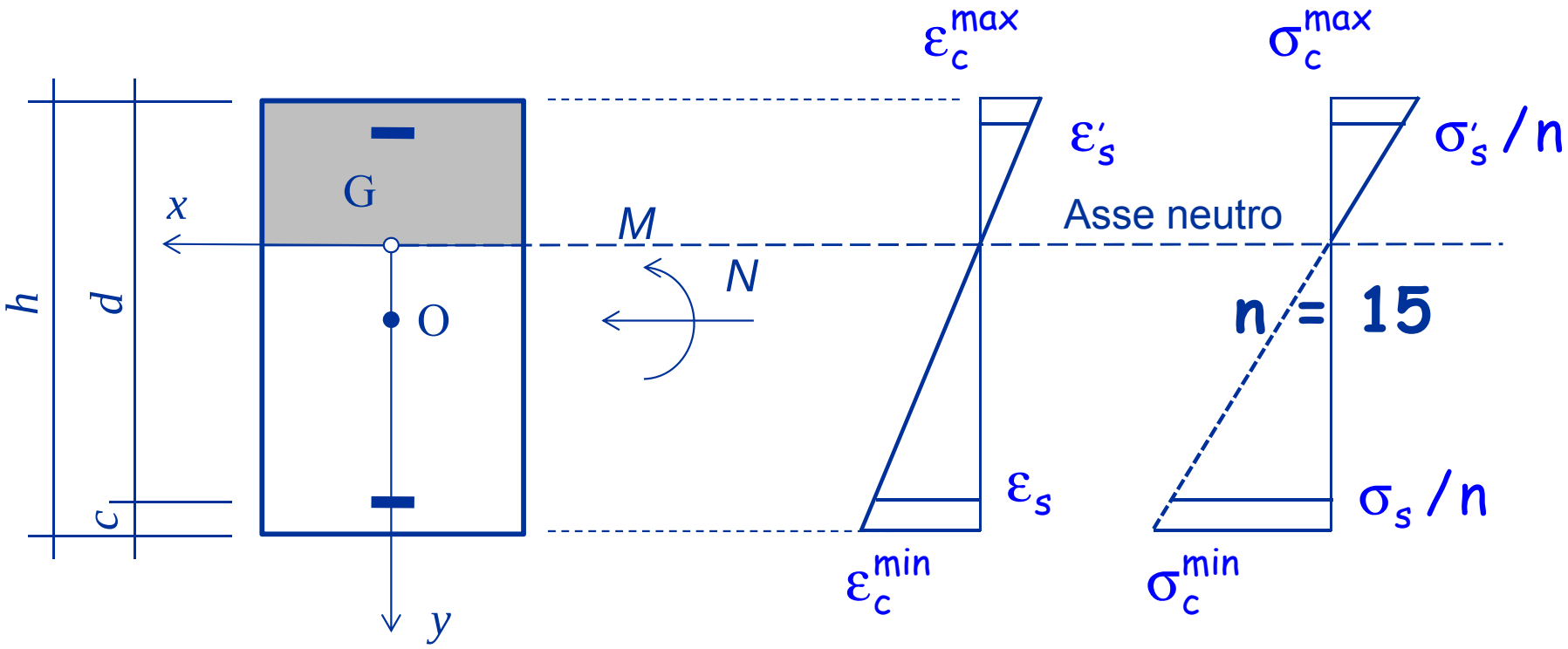
Geometria della sezione
Armature
Momento M_{Ed}

Incognite:

Posizione dell'asse neutro
Tensioni massime

Calcolo delle tensioni in esercizio

Flessione semplice



Per trovare l'asse neutro:

$S_n = 0$
(l'asse neutro è baricentrico)

Calcolo delle tensioni in esercizio

Flessione semplice

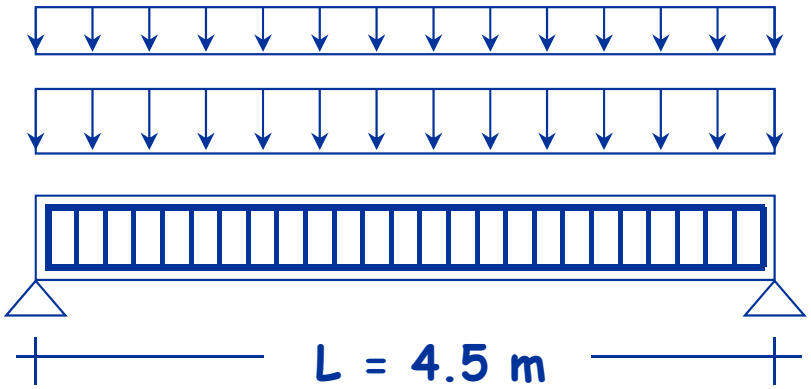
Equazione di secondo grado, con soluzione:

$$x = \frac{n\,(A_s + A'_s)}{b}\left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2\,b\,(A_s d + A'_s c)}{n\,(A_s + A'_s)^2}}\right]$$

e poi: $$\sigma_c = -\frac{M_{Ed}}{I}\,y$$

con: $$I = \frac{b\,x^3}{3} + n\,A'_s(x - c)^2 + n\,A_s(d - x)^2$$

Struttura per esempi numerici



$Q_k = 19.5 \ \text{kN/m}$

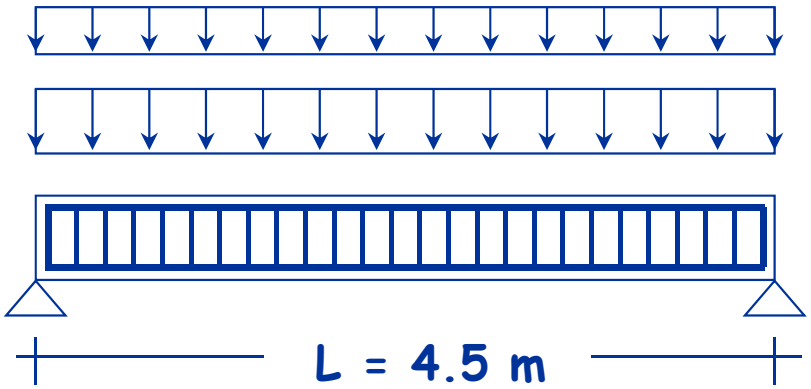
$G_{1k} = 26.2 \ \text{kN/m}$

Comb. di carico per SLU

$$\gamma_{G1} G_{1k} + \gamma_Q Q_k = 1.3 \times 26.2 + 1.5 \times 19.5 = 63.31 \ \text{kN/m}$$

$$M_{Ed} = M_{max} = \frac{q L^2}{8} \quad \Rightarrow \quad M_{Ed} = 160.2 \ \text{kNm}$$

Struttura per esempi numerici



$Q_k = 19.5 \ \text{kN/m}$

$G_{1k} = 26.2 \ \text{kN/m}$

Comb. di carico rara

$$G_{1k} + Q_k = 26.2 + 19.5 = 45.70 \ \text{kN/m}$$

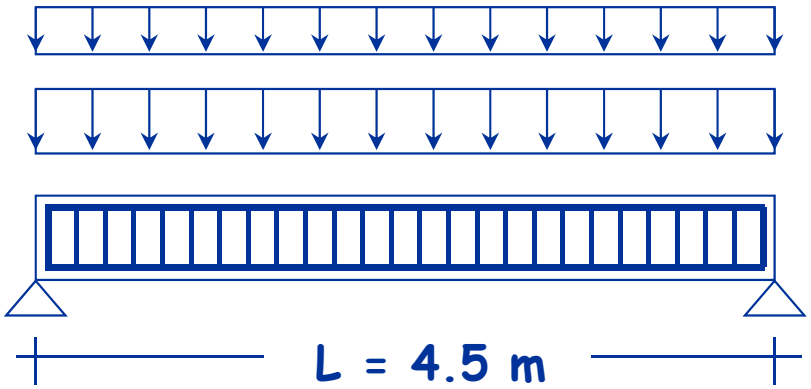
Comb. di carico frequente

$$G_{1k} + \psi_1 Q_k = 26.2 + 0.5 \times 19.5 = 35.95 \ \text{kN/m}$$

Comb. di carico quasi permanente

$$G_{1k} + \psi_2 Q_k = 26.2 + 0.3 \times 19.5 = 32.05 \ \text{kN/m}$$

Struttura per esempi numerici



$Q_k = 19.5 \ \text{kN/m}$

$G_{1k} = 26.2 \ \text{kN/m}$

$$M_{Ed} = M_{max} = \frac{q\,L^2}{8}$$

Comb. di carico rara

$G_{1k} + Q_k = 26.2 + 19.5 = 45.70 \ \text{kN/m}$ ➡ $M_{Ed} = 115.7 \ \text{kNm}$

Comb. di carico frequente

$G_{1k} + \psi_1 Q_k = 26.2 + 0.5 \times 19.5 = 35.95 \ \text{kN/m}$ ➡ $M_{Ed} = 91.0 \ \text{kNm}$

Comb. di carico quasi permanente

$G_{1k} + \psi_2 Q_k = 26.2 + 0.3 \times 19.5 = 32.05 \ \text{kN/m}$ ➡ $M_{Ed} = 81.1 \ \text{kNm}$

Esempio n. 1

Verifica di sezione rettangolare

Dati:

Sezione	30x50
Armature	A_s =3∅20+1∅14
	A'_s =2∅14

Comb.di carico rara

M_{Ed} = 115.7 kNm

Calcestruzzo	C25/30
Acciaio	B450C

Procedura:

1 - individuazione dell'asse neutro

2 - determinazione del momento d'inerzia della sezione reagente omogeneizzata

3 - calcolo delle tensioni massime di calcestruzzo ed acciaio

Esempio n. 1

Calcolo asse neutro e momento d'inerzia

Per una sezione rettangolare la posizione dell'asse neutro è fornita dalla seguente espressione:

$$x = \frac{n\,(A_s + A'_s)}{b}\left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2\,b\,(A_s d + A'_s c)}{n\,(A_s + A'_s)^2}}\right]$$

... e vale x = 16.6 cm

Il momento d'inerzia della sezione reagente omogeneizzata è fornito dalla:

$$I = \frac{b\,x^3}{3} + n\,A'_s\,(x - c)^2 + n\,A_s\,(d - x)^2$$

... e vale I = 184558 cm^4

Esempio n.1

Verifica delle tensioni in esercizio

La tensione massima (in valore assoluto) nel calcestruzzo vale:

$$\sigma_c = \frac{M_{Ed}}{I} x = \frac{115.7}{184558} \times 16.6 \times 10^3 =$$

$$= 10.4 \text{ MPa} \le 0.6\, f_{ck} = 0.6 \times 25.0 = 15.0 \text{ MPa}$$

$$\frac{\sigma_c}{0.6\, f_{ck}} = 0.69$$

La tensione dell'armatura tesa vale:

$$\sigma_s = n \frac{M_{Ed}}{I} (d - x) = 15 \times \frac{115.7}{184558} \times (45 - 16.6) \times 10^3 =$$

$$= 267.1 \text{ MPa} \le 0.8\, f_{yk} = 0.8 \times 450.0 = 360.0 \text{ MPa}$$

$$\frac{\sigma_s}{0.8\, f_{yk}} = 0.74$$

La verifica è soddisfatta

Esempio n. 1

Verifica di sezione rettangolare

Dati:

Sezione	30x50
Armature	A_s =3∅20+1∅14
	A'_s =2∅14

Comb. di carico quasi perm.

M_{Ed} = 81.1 kNm

Calcestruzzo	C25/30
Acciaio	B450C

- La posizione dell'asse neutro x ed il momento d'inerzia I non cambiano.
- Bisogna solo ricalcolare la tensione massima del calcestruzzo e confrontarla con il valore limite pertinente.

Verifica sulle tensioni in esercizio

Combinazione di carico quasi permanente

La tensione massima (in valore assoluto) nel calcestruzzo vale:

$$\sigma_c = \frac{M_{Ed}}{I} x = \frac{81.1}{184558} \times 16.6 \times 10^3 =$$

$$= 7.3 \text{ MPa} \leq 0.45\, f_{ck} = 0.45 \times 25.0 = 11.2 \text{ MPa}$$

$$\frac{\sigma_c}{0.45\, f_{ck}} = 0.65$$

La verifica è soddisfatta

Esempio n. 2

Verifica di sezione rettangolare

Dati:

Sezione	30x40
Armature	A_s =4∅20+1∅14
	A'_s =2∅20+1∅14

Comb. di carico rara

M_{Ed} = 115.7 kNm

Calcestruzzo	C25/30
Acciaio	B450C

$$x = \frac{n\,(A_s + A'_s)}{b}\left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2\,b\,(A_s d + A'_s c)}{n\,(A_s + A'_s)^2}}\right] = 14.6\ \text{cm}$$

$$I = \frac{b\,x^3}{3} + n\,A'_s\,(x - c)^2 + n\,A_s\,(d - x)^2 = 129950\ \text{cm}^4$$

Verifica sulle tensioni in esercizio

Combinazione di carico rara

La tensione massima (in valore assoluto) nel calcestruzzo vale:

$$\sigma_c = \frac{M_{Ed}}{I} x = \frac{115.7}{129950} \times 14.6 \times 10^3 =$$

$$= 13.0 \text{ MPa} \leq 0.6\, f_{ck} = 0.6 \times 25.0 = 15.0 \text{ MPa}$$

prima era 0.69 $\quad \frac{\sigma_c}{0.6\, f_{ck}} = 0.87$

La tensione dell'armatura tesa vale:

$$\sigma_s = n \frac{M_{Ed}}{I} (d - x) = 15 \times \frac{115.7}{129950} \times (35 - 14.6) \times 10^3 =$$

$$= 272.5 \text{ MPa} \leq 0.8\, f_{yk} = 0.8 \times 450.0 = 360.0 \text{ MPa}$$

prima era 0.74 $\quad \frac{\sigma_s}{0.8\, f_{yk}} = 0.76$

La verifica è soddisfatta

ma il margine si è ridotto

Verifica sulle tensioni in esercizio

Combinazione di quasi permanente

La tensione massima (in valore assoluto) nel calcestruzzo vale:

$$\sigma_c = \frac{M_{Ed}}{I} x = \frac{81.1}{129950} \times 14.6 \times 10^3 =$$

$$= 9.1 \text{ MPa} \leq 0.45\, f_{ck} = 0.45 \times 25.0 = 11.2 \text{ MPa}$$

$$\frac{\sigma_c}{0.45\, f_{ck}} = 0.74$$ **prima era 0.65**

La verifica è soddisfatta ma il margine si è ridotto

Verifica tensioni in esercizio

Commento

La verifica sulle tensioni in esercizio:

- è generalmente soddisfatta per sezioni progettate allo stato limite ultimo
- potrebbe non essere soddisfatta quando si sfrutta pesantemente l'effetto positivo dell'armatura compressa

Stato limite di fessurazione

Stati limite di fessurazione

Campo di validità delle prescrizioni

La fessurazione è quasi inevitabile in strutture di calcestruzzo armato soggette a flessione, taglio, torsione o a trazioni indotte da carichi diretti o da deformazioni impresse impedite.

Le fessure possono anche svilupparsi per altre cause, come ritiro plastico o reazioni chimiche espansive all'interno del calcestruzzo indurito.

Stati limite di fessurazione

Considerazioni generali

La fessurazione deve essere limitata a un livello tale da non pregiudicare il corretto funzionamento della struttura o da renderne inaccettabile l'aspetto.

In alternativa, si può o permettere la formazione delle fessure senza nessun tentativo di limitarne la larghezza, o invece impedirla con provvedimenti quali la predisposizione di giunti che consentano il movimento, a condizione che non venga pregiudicato il funzionamento della struttura.

Stati limite di fessurazione

Per evitare o limitare la formazione di fessure si eseguono verifiche per i tre seguenti stati limite

- Stato limite di decompressione
- Stato limite di formazione delle fessure
- Stato limite di apertura controllata delle fessure

Si prendono in considerazione due combinazioni di carico:

- Combinazione frequente
- Combinazione quasi permanente

NTC08, punti 4.1.2.2.4.1 e 4.1.2.2.4.2

Stati limite di fessurazione

Per evitare o limitare la formazione di fessure si eseguono verifiche per i tre seguenti stati limite

- Stato limite di decompressione
- Stato limite di formazione delle fessure
- Stato limite di apertura controllata delle fessure

Si deve tenere conto delle condizioni ambientali:

- Ordinarie
- Aggressive
- Molto Aggressive

NTC08, punto 4.1.2.2.4.3

Condizioni ambientali

Condizioni ambientali	Classe di esposizione
Ordinarie	X0, XC1, XC2, **XC3**, XF1
Aggressive	XC4, XD1, XS1, XA1, XA2, XF2, XF3
Molto aggressive	XD2, XD3, XS2, XS3, XA3, XF4

NTC08, punto 4.1.2.2.4.3

Stati limite di fessurazione

Per evitare o limitare la formazione di fessure si eseguono verifiche per i tre seguenti stati limite

- Stato limite di decompressione
- Stato limite di formazione delle fessure
- Stato limite di apertura controllata delle fessure

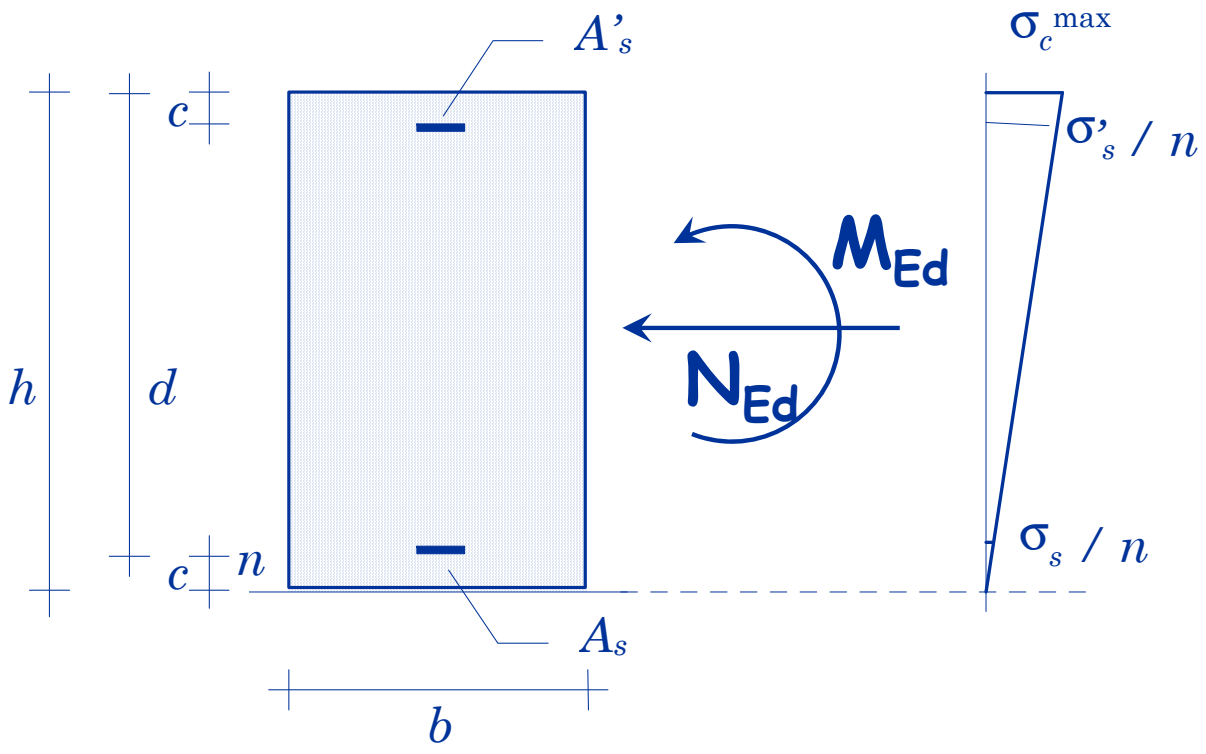
Infine si deve tenere conto della sensibilità delle armature alla corrosione:

- Armature sensibili
- Armature poco sensibili (per c.a. ordinario)

NTC08, punto 4.1.2.2.4.4

Stato limite di decompressione

Si raggiunge quando la tensione del bordo meno compresso è uguale a zero

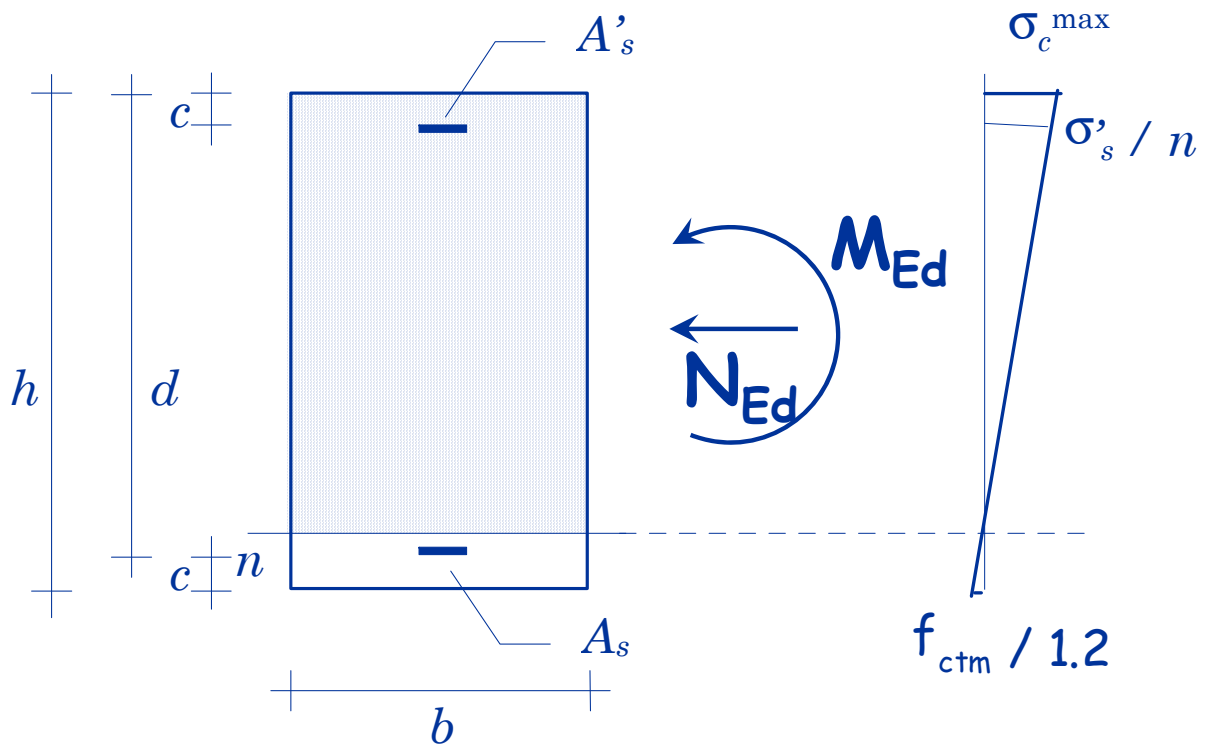


$$n = \frac{E_s}{E_c}$$

NTC08, punto 4.1.2.2.4.1

Stato limite di formazione delle fessure

Si raggiunge quando la tensione massima di trazione è pari al valore $f_{ctm}/1.2 \approx f_{cfk}$



$$n = \frac{E_s}{E_c}$$

NTC08, punto 4.1.2.2.4.1

Stato limite di apertura controllata delle fessure

Si raggiunge quando il valore di calcolo dell'ampiezza delle fessure w_d è pari a:

0.2 mm **0.3 mm** **0.4 mm**

Il valore limite dell'ampiezza delle fessure dipende da:

- **Combinazione di carico**
- **Condizioni ambientali**
- **Sensibilità delle armature**

NTC08, punto 4.1.2.2.4.1

Verifiche a fessurazione per strutture con armature poco sensibili

Cond. Amb.	Comb. carico	Stato limite	w_d
Ordinarie	Frequente	Ap. fessure	< 0.4 mm
	Quasi perm.	Ap. Fessure	< 0.3 mm
Aggressive	Frequente	Ap. Fessure	< 0.3 mm
	Quasi perm.	Ap. fessure	< 0.2 mm
Molto Aggr.	Frequente	Ap. Fessure	< 0.2 mm
	Quasi perm.	Ap. fessure	< 0.2 mm

NTC08, punto 4.1.2.2.4.1

Verifiche a fessurazione per strutture con armature sensibili

Cond. Amb.	Comb. carico	Stato limite	w_d
Ordinarie	Frequente	Ap. fessure	< 0.3 mm
	Quasi perm.	Ap. Fessure	< 0.2 mm
Aggressive	Frequente	Ap. Fessure	< 0.2 mm
	Quasi perm.	Decomp.	--
Molto Aggr.	Frequente	Form. Fessure	--
	Quasi perm.	Decomp.	--

NTC08, punto 4.1.2.2.4.1

Stati limite di fessurazione

Limiti di apertura delle lesioni (7.3.1)

Classe di esposizione	Elementi di calcestruzzo armato normale e precompresso con cavi non aderenti	Elementi precompressi con cavi aderenti
	Combinazione di carico quasi-permanente	Combinazione di carico frequente
X0, XC1	0.4 [1]	0.2
XC2, XC3, XC4	0.3	0.2 [2]
XD1, XD2, XS1, XS2, XS3		Decompressione

Nota 1 Per le classi di esposizione X0, XC1, l'ampiezza delle fessure non influenza la durabilità e questo limite è posto per garantire un aspetto accettabile. In assenza di requisiti relativi all'aspetto questo limite può essere mitigato.

Nota 2 Per queste classi di esposizione, inoltre, si raccomanda che la decompressione sia verificata sotto la combinazione di carico quasi-permanente.

Eurocodice 2 vers. 2005

Stati limite di fessurazione

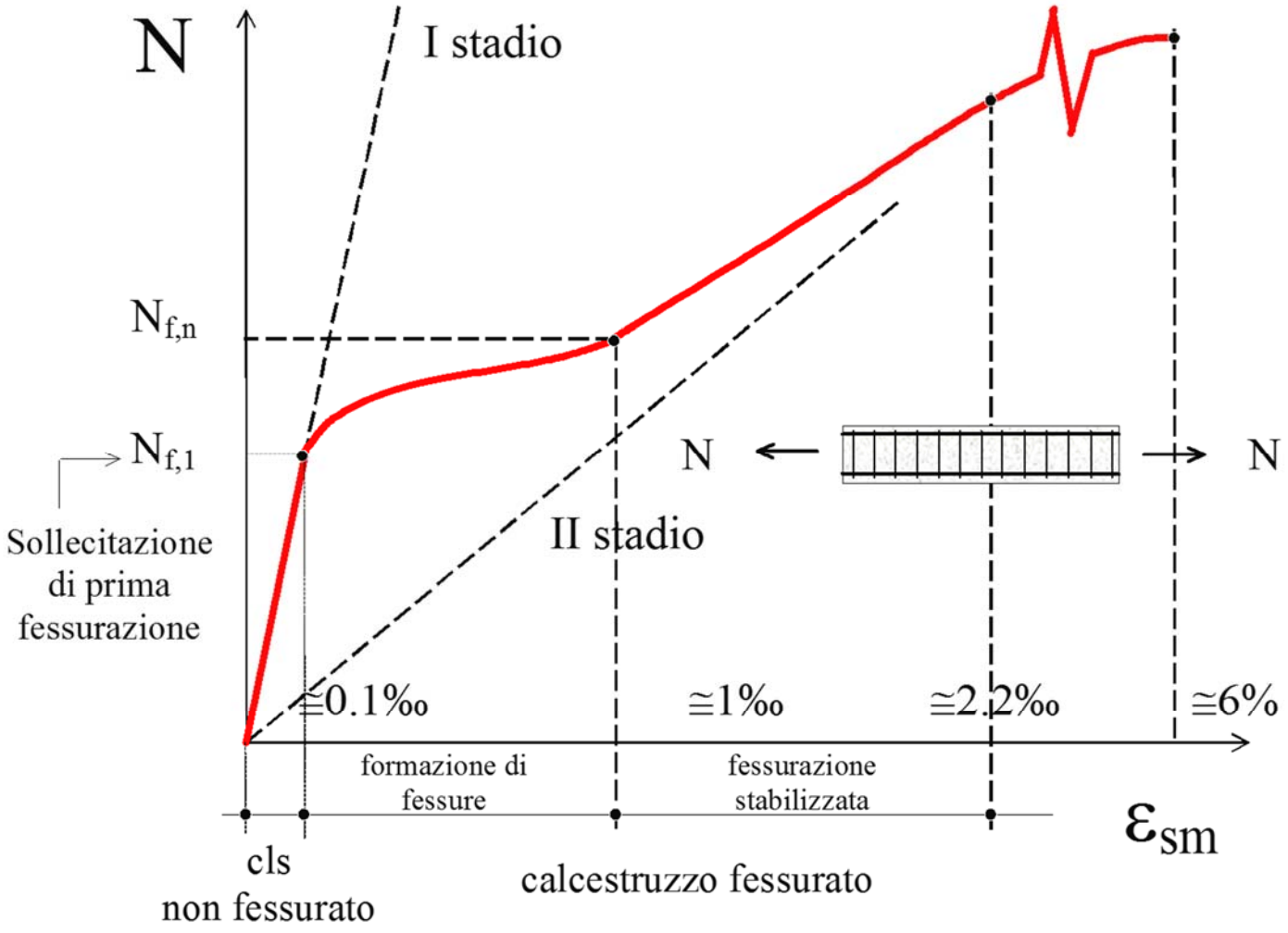
CONTROLLO DELLA FESSURAZIONE

Metodo semplificato

Calcolo diretto dell'ampiezza delle fessure

Calcolo diretto dell'ampiezza delle fessure

Comportamento allo stato fessurato



Prima della fessurazione

- Per bassi valori del carico si può ipotizzare una perfetta aderenza tra calcestruzzo e acciaio.

  In questa fase tutti i punti della sezione sono soggetti alla medesima deformazione ed il calcolo delle tensioni si svolge in base alle ipotesi del primo stadio di comportamento del conglomerato cementizio armato.

Formazione prima fessura

- La prima fessura si forma allorché la tensione di trazione nel calcestruzzo eguaglia la sua resistenza a trazione.

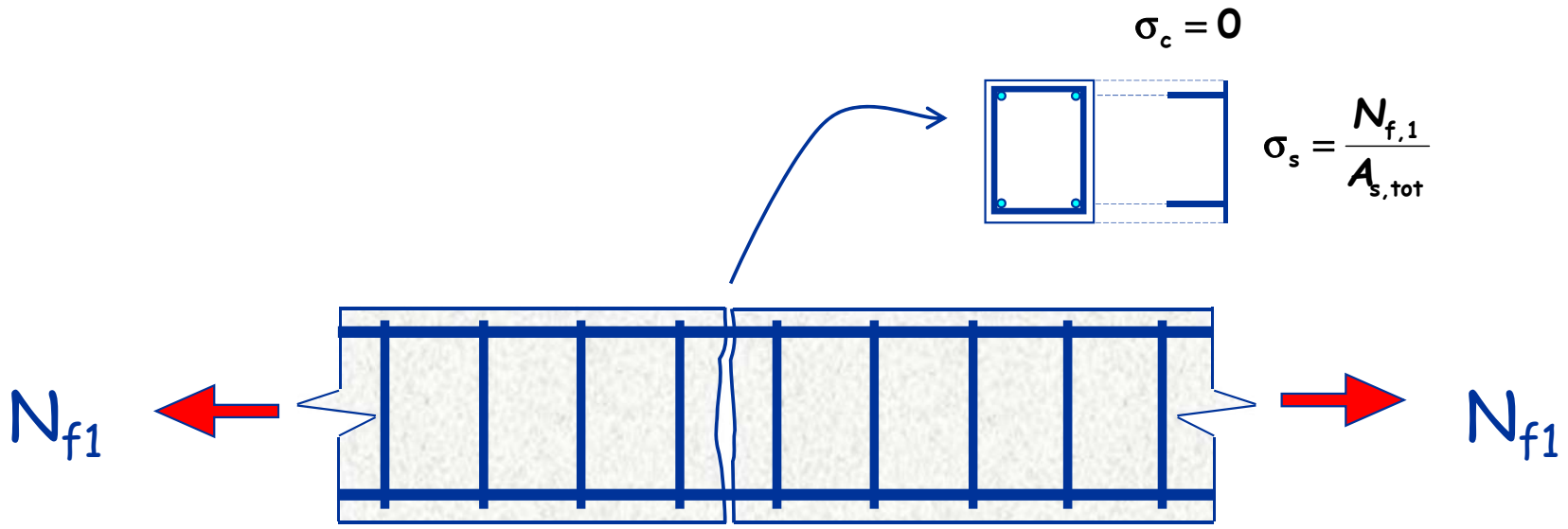
  Lo sforzo normale corrispondente alla fessurazione si definisce **sforzo normale di fessurazione**.

  Nella realtà, stante la disuniformità delle caratteristiche meccaniche del calcestruzzo nell'ambito dell'elemento considerato, la prima fessura ha luogo nella sezione con resistenza minima.

Formazione prima fessura

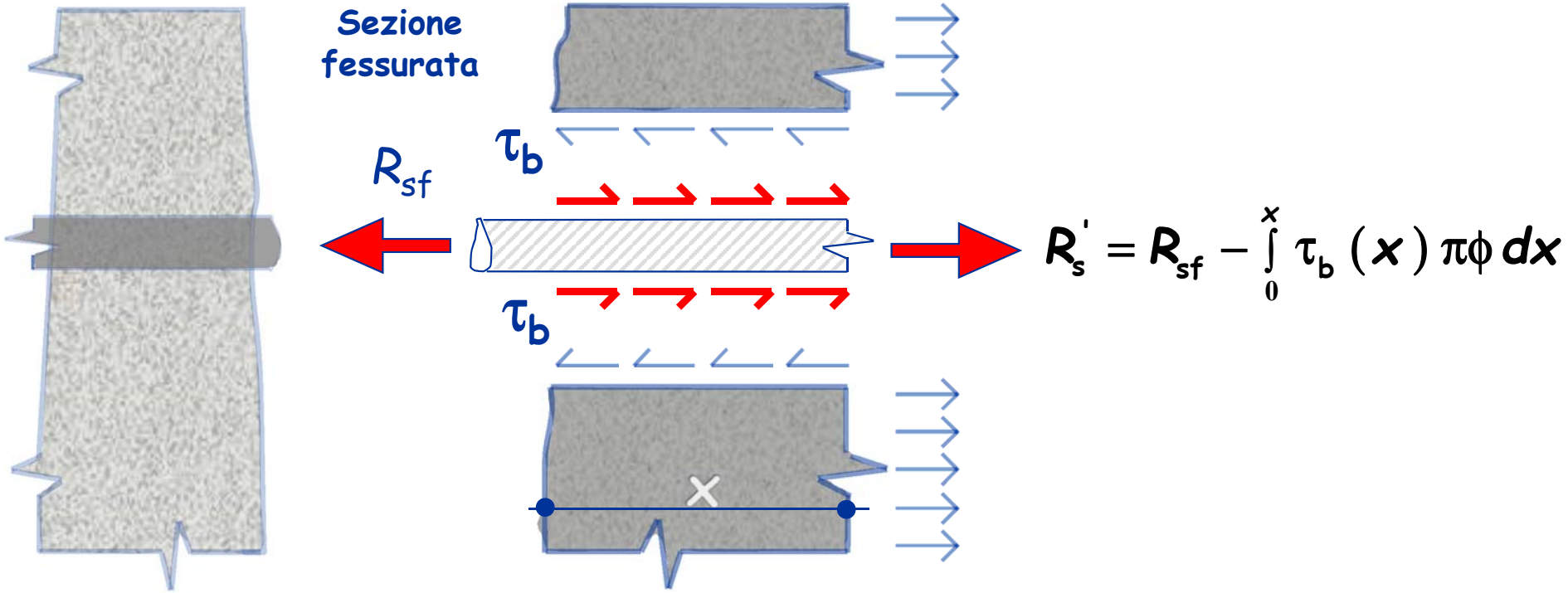
- Nelle sezioni fessurate il carico è assorbito interamente dalle armature.

  Lo stato tensionale in tali sezioni può essere calcolato sulla base delle ipotesi proprie del secondo stato di comportamento del conglomerato cementizio armato.



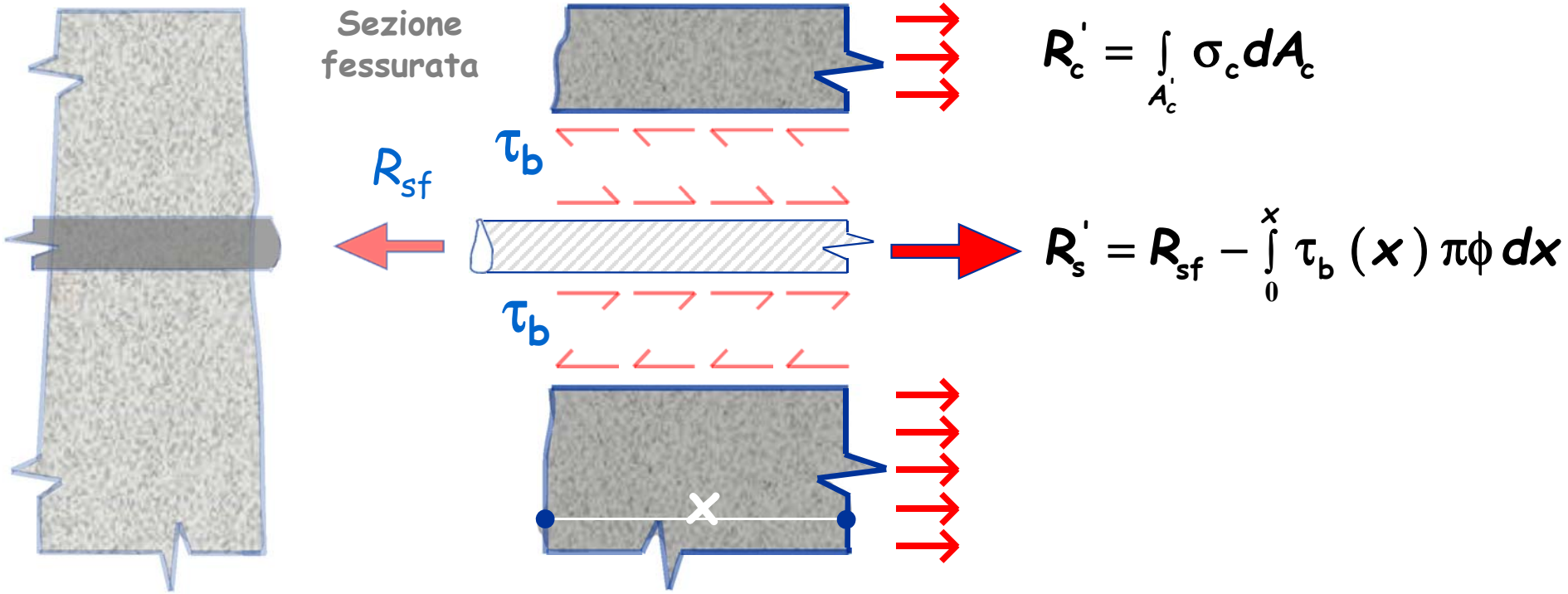
Meccanismo di trasmissione delle tensioni per aderenza

- Man mano che ci si allontana dalla sezione fessurata l'azione assiale di trazione nell'armatura diminuisce a causa dello sviluppo delle tensioni di aderenza tra acciaio e calcestruzzo.



Meccanismo di trasmissione delle tensioni per aderenza

- Per l'equilibrio alla traslazione lungo l'asse dell'elemento, la diminuzione dello sforzo di trazione nell'armatura deve essere accompagnata dallo sviluppo di tensioni di trazione nel calcestruzzo.



Lunghezza di trasmissione

- La distanza, calcolata a partire dalla sezione fessurata, alla quale corrisponde nel calcestruzzo una tensione costante pari alla resistenza a trazione del calcestruzzo viene definita :

lunghezza di trasmissione

Lunghezza di trasmissione

La lunghezza di trasmissione è calcolata imponendo il bilancio tra la risultante delle tensioni normali del calcestruzzo in corrispondenza dell'attingimento della valore resistente a trazione e le tensioni di aderenza che inducono tale stato di tensioni normali.

Questo calcolo è svolto ipotizzando che :

1. ad una distanza dalla lesione pari alla lunghezza di trasmissione le deformazioni del calcestruzzo siano eguali su tutta la sezione.

   In tali condizioni le tensioni di trazione del calcestruzzo possono essere considerate costanti.

2. la forza di aderenza sviluppata nella lunghezza di trasmissione sia espressa in funzione del valore medio delle tensioni di aderenza.

Lunghezza di trasmissione

- L'equazione di bilancio, tra la risultante delle tensioni di trazione del calcestruzzo in corrispondenza dell'attingimento del valore resistente a trazione e le tensioni di aderenza in grado di indurre tale tensioni normali, si scrive :

$$f_{ctk}\, A_{c,ef} = \int_0^{l_t} \tau_b\, \pi\phi\, dz = f_{bk}\, l_t\, \pi\, \phi$$

1° ipotesi: tensione di trazione costante nel calcestruzzo

2° ipotesi: forza di aderenza calcolata sulla base di un valore costante

Pertanto la lunghezza di trasmissione è uguale a:

$$l_t = \frac{f_{ctk}}{f_{bk}} \frac{A_{c,eff}}{\pi\phi}$$

Lunghezza di trasmissione

- Se si moltiplica e divide il secondo membro della precedente relazione per $\phi/4$ si ottiene:

$$l_t = \frac{f_{ctk}}{f_{bk}} \frac{A_{c,ef}}{\pi\phi^2/4} \cdot \frac{\phi}{4} = \frac{1}{4} k \frac{\phi}{\rho_{ef}}$$

dove:

$\rho_{ef} = A_s / A_{c,ef}$	è la percentuale d'armatura efficace ai fini dell'aderenza
$k = f_{ctk} / f_{bk}$	è un coefficiente dipendente dalle caratteristiche di aderenza delle barre d'armatura e dal tipo di sollecitazione

Lunghezza di trasmissione

L'esperienza ha tuttavia dimostrato che il meccanismo di trasmissione per aderenza non riflette che una parte della realtà.

A tal riguardo, Ferry-Borges ha proposto la seguente relazione della lunghezza di trasmissione:

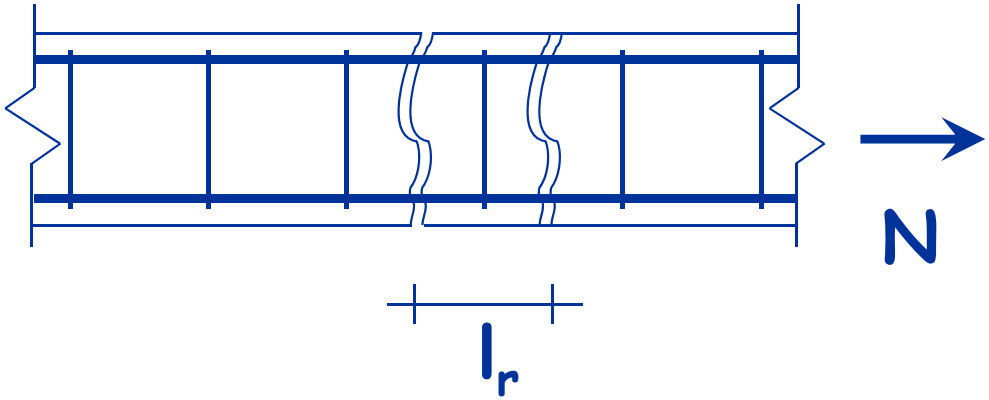
$$l_t = k_1 c + k_2 \frac{\phi}{\rho_{ef}}$$

dove sono presenti:

- ✓ un meccanismo di diffusione delle tensioni all'interno del calcestruzzo, senza che si produca scorrimento relativo tra calcestruzzo e armatura.
- ✓ un meccanismo di trasmissione per aderenza.

Apertura delle successive fessure

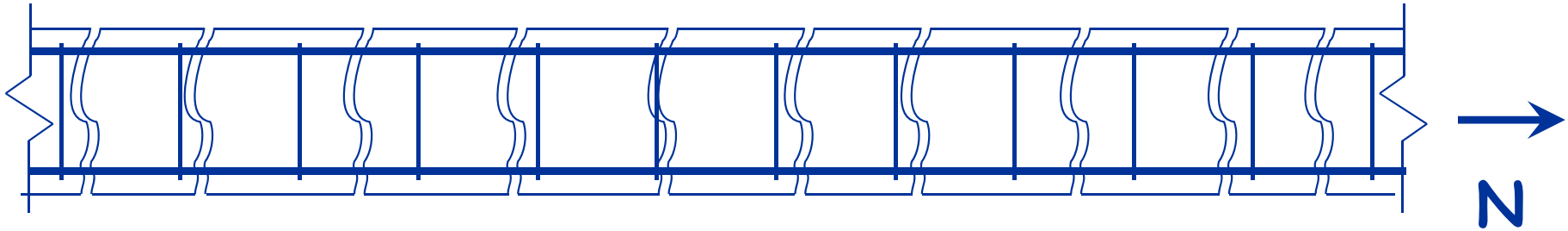
… e si apre un'altra fessura.



Distanza tra le fessure

Le fessure si propagano a sforzo normale praticamente costante.

La distanza s tra due fessure successive è sempre compresa tra l_r e $2l_r$.

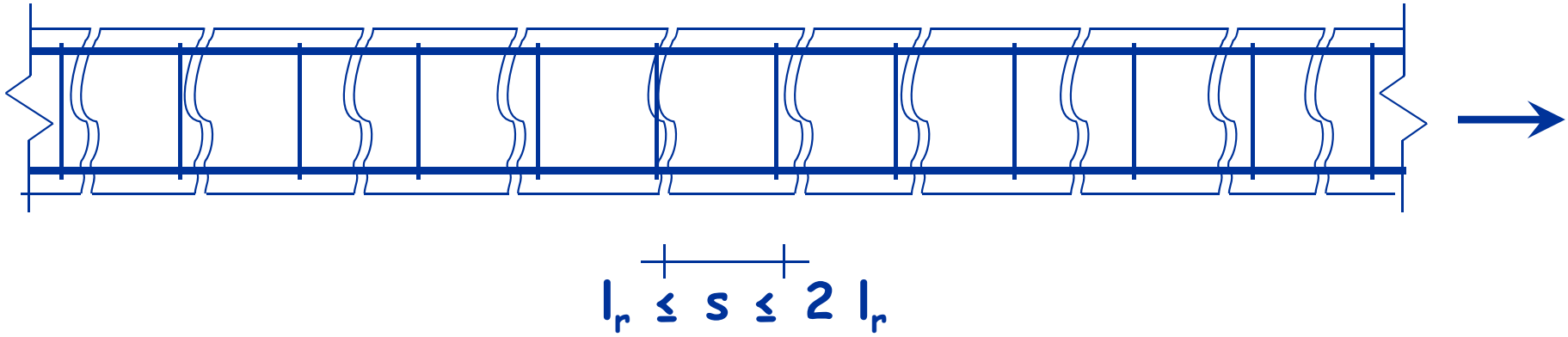


$$l_r \leq s \leq 2\,l_r$$

Distanza massima tra fessure ($s_{r,max}$)

Secondo l'EC2 si calcola come segue

$$s_{r,max} = k_3\, r + k_1\, k_2\, k_4\, \frac{\phi}{\rho_{eff}}$$



EC2, punto 7.3.4

Distanza massima tra fessure ($s_{r,max}$)

$$s_{r,max} = k_3\, r + k_1\, k_2\, k_4\, \frac{\phi}{\rho_{eff}} \qquad 2\,l_r = \frac{1}{2}\,\frac{f_{ct}}{f_b}\,\frac{\phi}{\rho_{eff}}$$

k_1 tiene conto dell'aderenza barre (corrisponde a f_{ct}/f_b):

= 0.8 per barre ad aderenza migliorata

= 1.6 per barre lisce.

k_2 tiene conto del diagramma delle deformazioni:

= 1.0 trazione

= 0.5 per flessione semplice

= valori tra 0.5 e 1.0 nel caso di tenso-flessione

k_3 = 3.4

k_4 = 0.425

EC2, punto 7.3.4

Diametro equivalente

Se l'armatura tesa è realizzata con barre di diametro diverso …

$$s_{r,max} = k_3\, r + k_1\, k_2\, k_4\, \frac{\phi_{eq}}{\rho_{eff}}$$

$$\phi_{eq} = \frac{n_1\, \phi_1^2 + n_2\, \phi_2^2}{n_1\, \phi_1 + n_2\, \phi_2}$$

ϕ_i **diametri delle barre usati per l'armatura tesa**

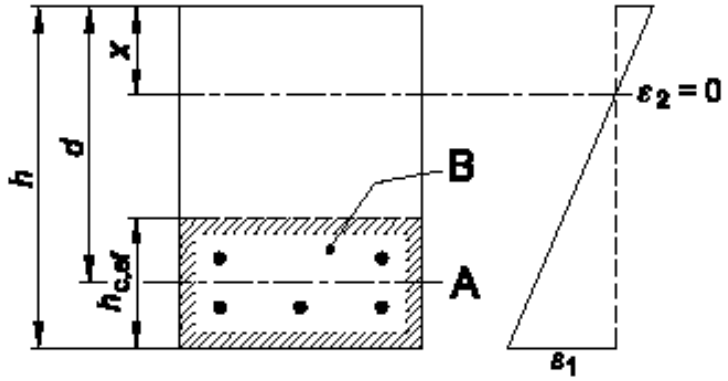
n_i **numero di barre di diametro** ϕ_i

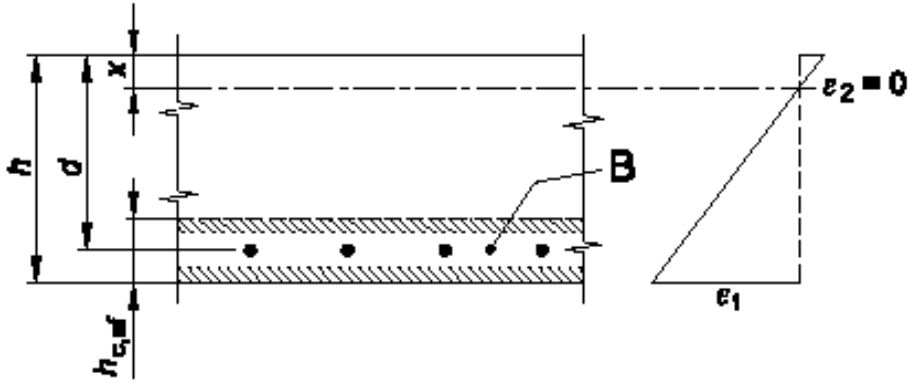
EC2, punto 7.3.4

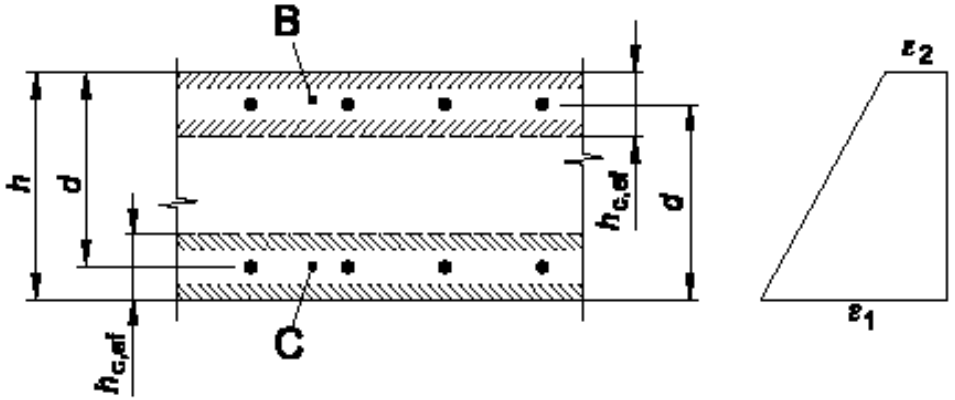
Area di calcestruzzo efficace ($A_{c,eff}$)

$A_{c,eff}$ è l'area di calcestruzzo attorno alle armatura di altezza:

$$h_{c,eff} = \min \begin{cases} 2.5\,c \\ \dfrac{h-x}{3} \\ \dfrac{h}{2} \end{cases}$$



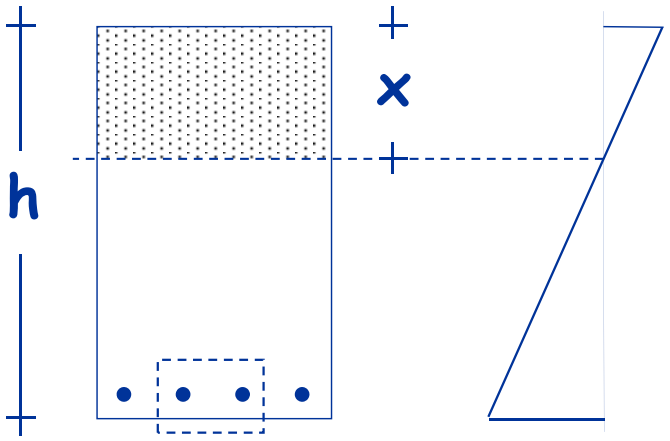


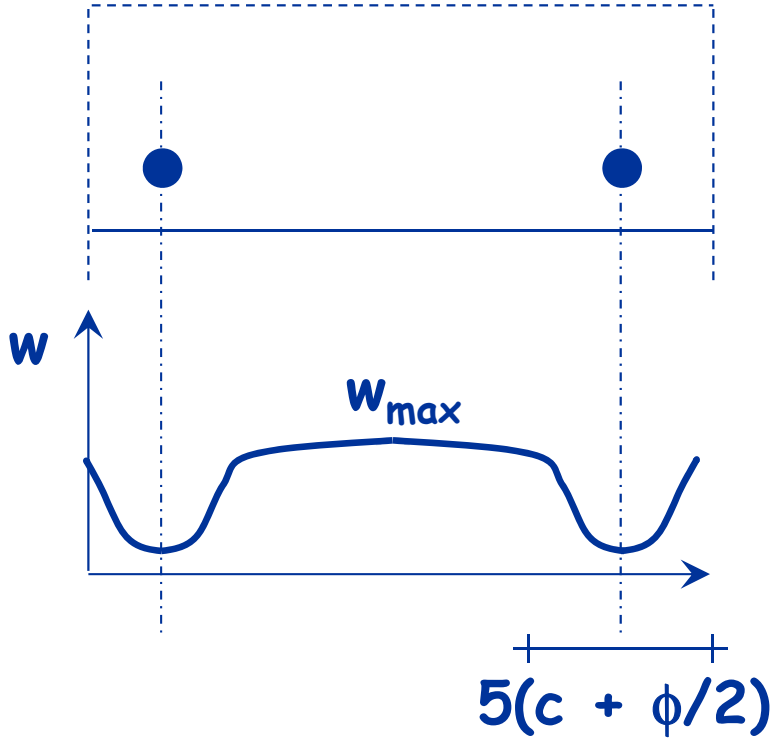


EC2, punto 7.3.4

Ampiezza della fessura tra le barre

L'ampiezza della fessura cresce con la distanza tra le barre e si stabilizza su un valore massimo quando la distanza tra le barre è maggiore di 5 (c + ϕ/2).



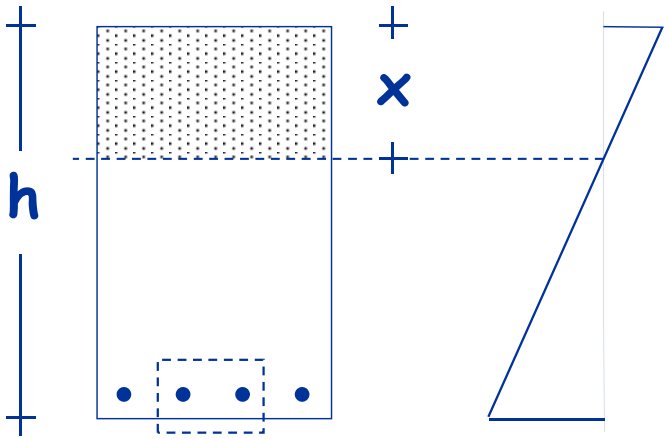


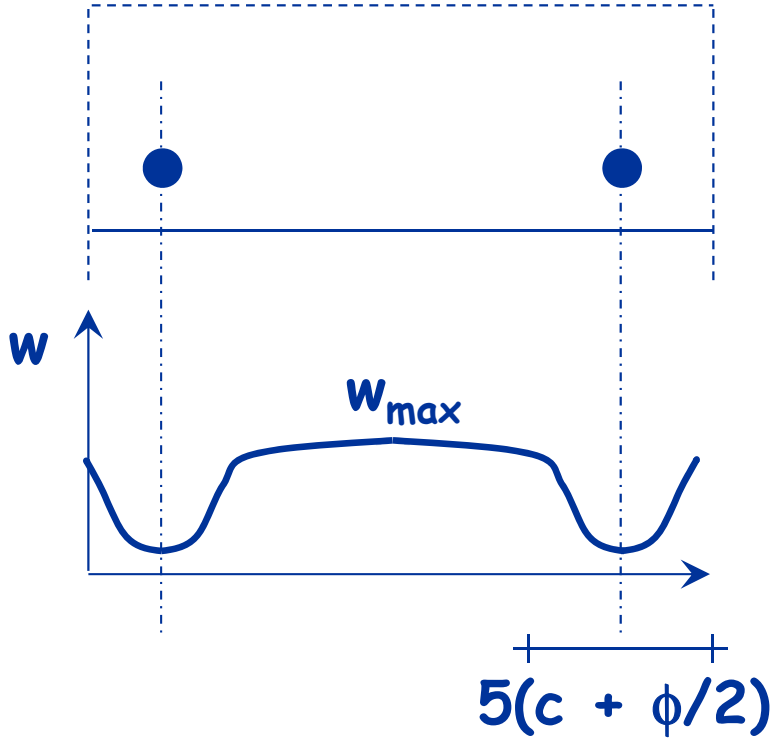
EC2, punto 7.3.4

Ampiezza della fessura tra le barre

Se la distanza tra le barre è maggiore di 5 (c + ϕ/2) si può stimare w_{max} assumendo:

$$s_{r,max} = 1.3\,(h - x)$$





EC2, punto 7.3.4

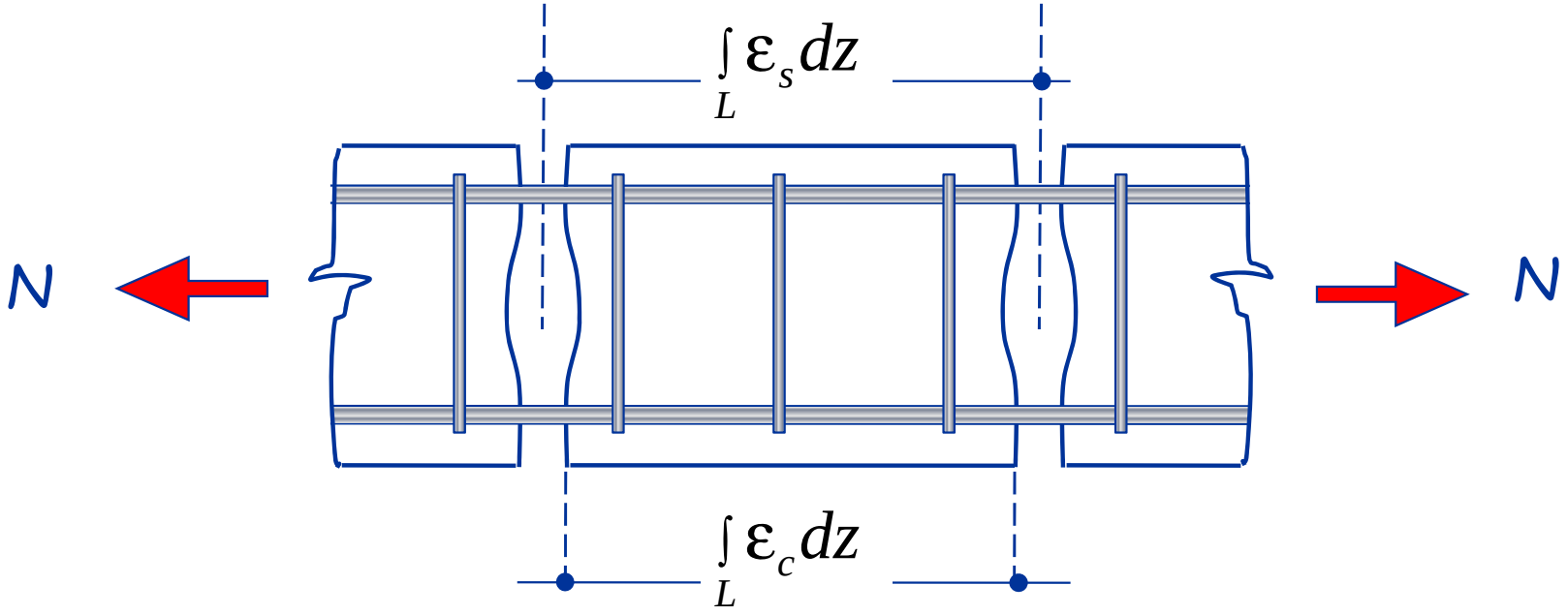
Verifica di fessurazione

Verifica allo stato limite di apertura delle fessure

Il valore medio di apertura delle fessure (w_m) è dato da:

$$w_m = \int_L (\varepsilon_s - \varepsilon_c)\, dz$$

dove L è la distanza tra due fessure consecutive



Verifica di fessurazione

Verifica allo stato limite di apertura delle fessure

Il valore medio di apertura delle fessure (w_m)
può essere calcolata attraverso la più semplice relazione:

$$w_m = (\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm})\Delta_{sm}$$

dove

ε_{sm} è il valore medio della deformazione della barra

ε_{cm} è il valore medio della deformazione nel calcestruzzo fra due fessure consecutive

Δ_{sm} è il passo medio tra le fessure

A fessurazione stabilizzata la deformazione media del conglomerato tra due fessure può essere trascurata rispetto a quella corrispondente dell'armatura. Per tal motivo, è spesso anche adottata la formulazione :

$$w_m = \varepsilon_{sm}\,\Delta_{sm}$$

Verifica di fessurazione

Verifica allo stato limite di apertura delle fessure

Stabilizzatesi le fessure, lungo l'asse dell'elemento coesistono :

- sezioni fessurate in cui gran parte dello sforzo di trazione necessario all'equilibrio è portato dall'armatura
- sezioni in cui il comportamento è assimilabile a quello di sezione interamente reagente.

L'analisi dello stato deformativo del concio compreso tra due fessure consecutive non può prescindere dalla considerazione che il calcestruzzo abbia resistenza a trazione.

Verifica di fessurazione

Verifica allo stato limite di apertura delle fessure

Osservazione : a fessurazione avvenuta, la deformazione media della barra (ε_{sm}) non coincide con quella della barra nuda.

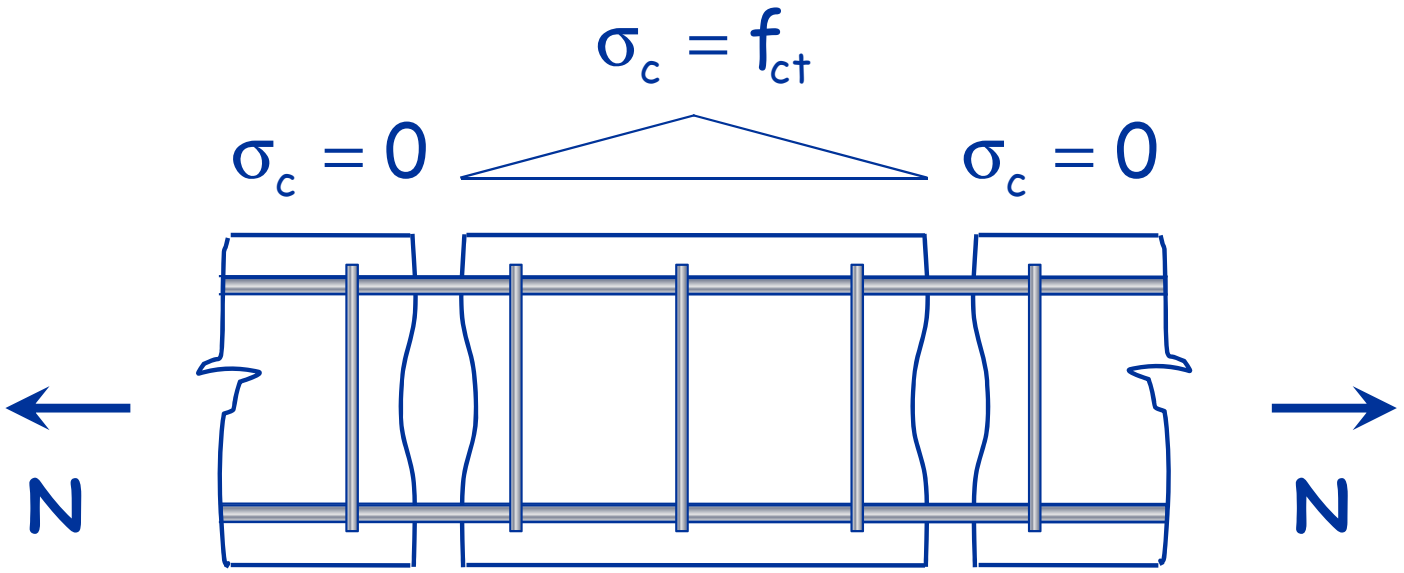
In particolare, per il calcolo della deformazione media della barra occorre tener conto dell'effetto irrigidente del calcestruzzo teso compreso tra due fessure consecutive.

Tale effetto prende il nome di :

Tension stiffening

Deformazione media del cls

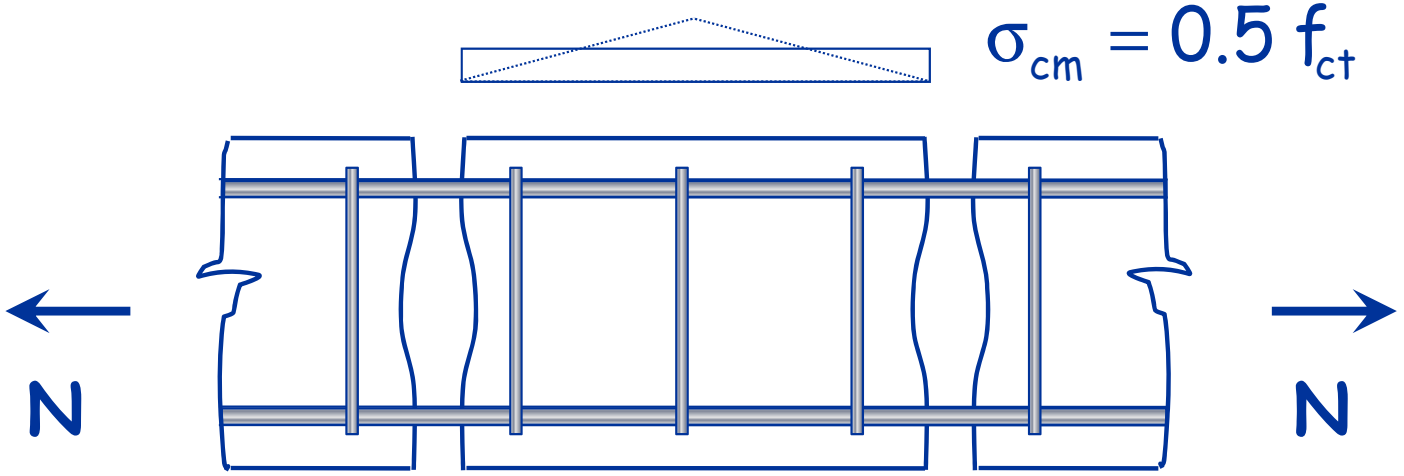
Le tensioni nel calcestruzzo variano tra 0 ed f_{ct}



Deformazione media del cls

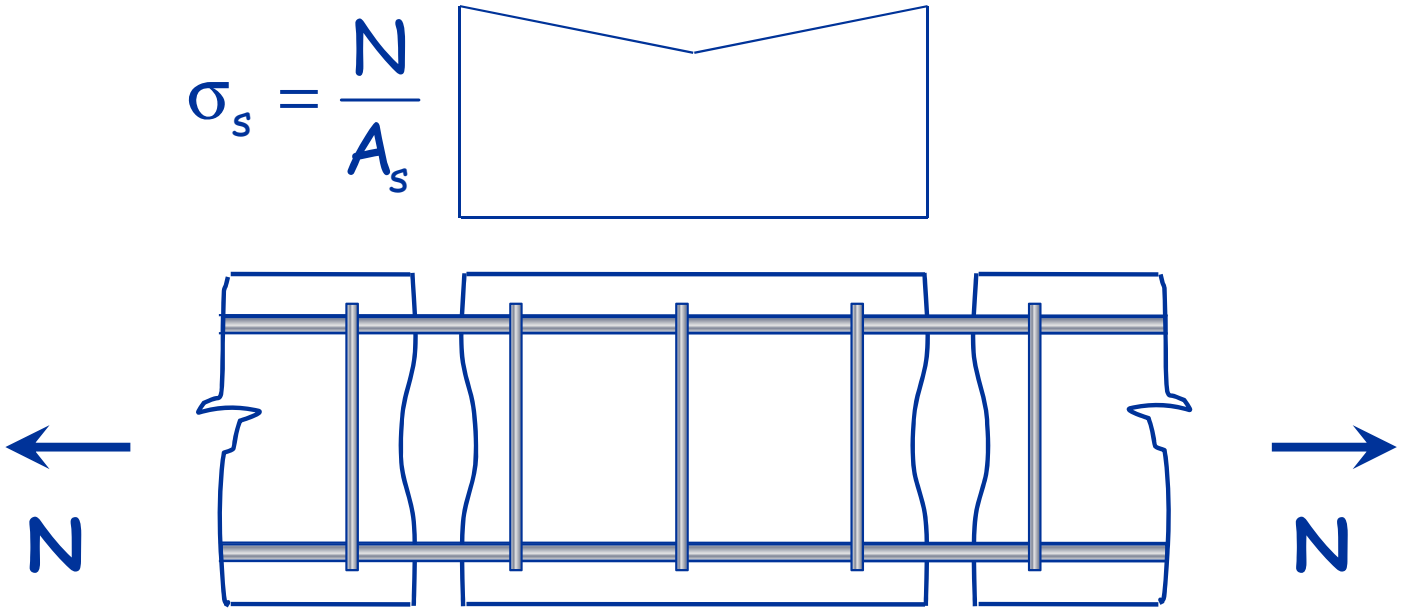
Le tensioni nel calcestruzzo variano tra 0 ed f_{ct}, dunque la deformazione media è pari a:

$$\varepsilon_{cm} = \frac{\sigma_{cm}}{E_{cm}} = 0.5\,\frac{f_{ct}}{E_{cm}}$$



Deformazione media dell'armatura

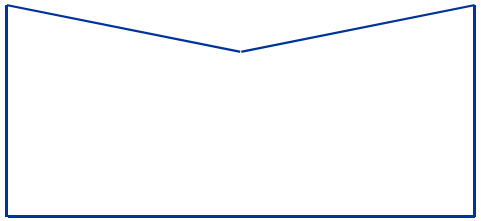
Nella sezione fessurata reagisce solo l'armatura e la tensione σ_s è massima



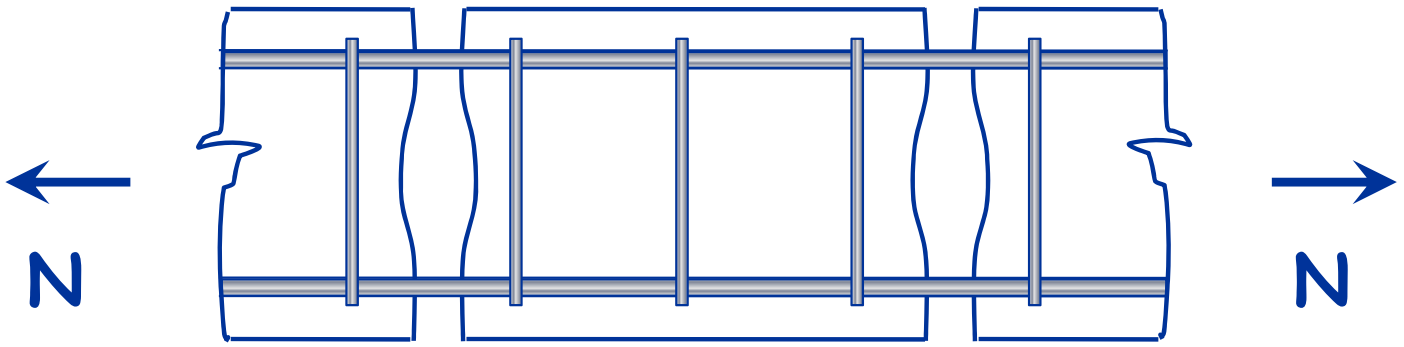
Deformazione media dell'armatura

Le tensione dell'armatura si riduce nella parte interna del concio perché il calcestruzzo assorbe parte della forza di trazione.

$$\sigma_s = \frac{N}{A_s}$$



$$\ddagger \quad \Delta\sigma_s = \frac{A_{c,eff}\ f_{ct}}{A_s}$$

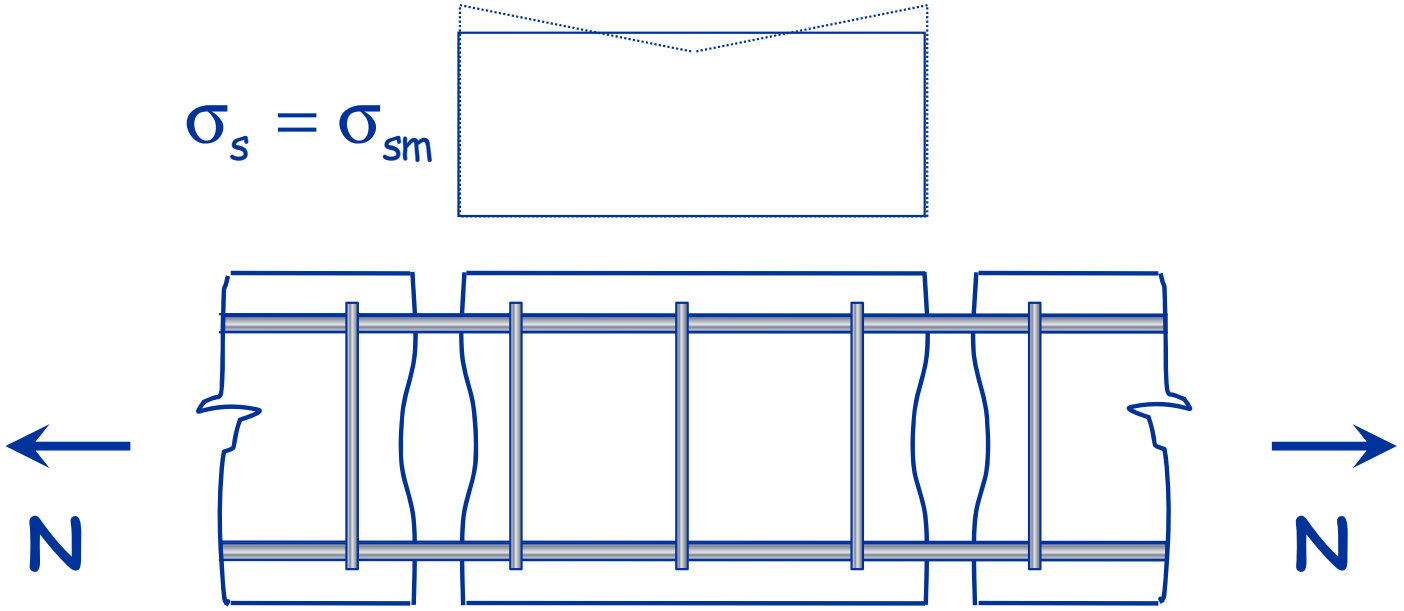


Deformazione media dell'armatura

Le tensione media dell'armatura vale:

$$\sigma_{sm} = \sigma_s - \frac{\Delta\sigma_s}{2} = \sigma_s\left(1 - 0.5\,\frac{A_{c,eff}\ f_{ct}}{A_s\ \sigma_s}\right)$$

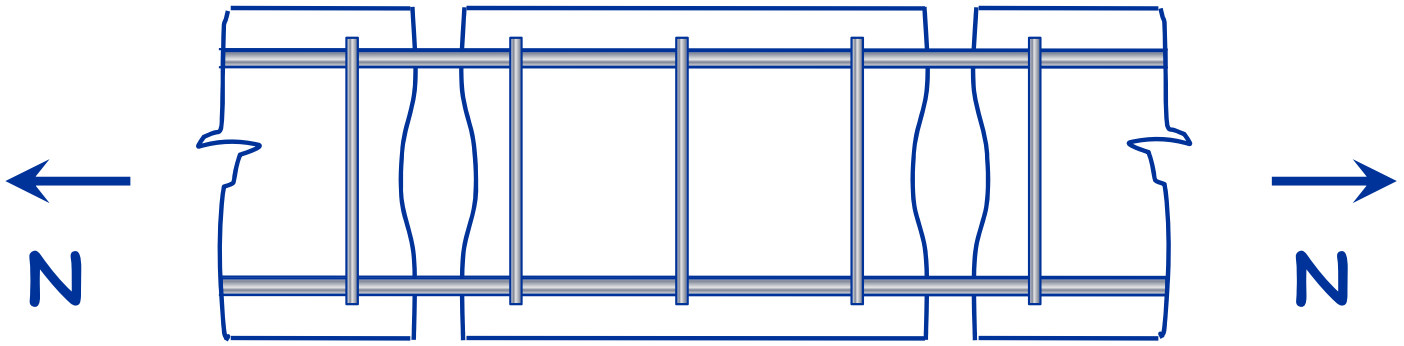
$\sigma_s = \sigma_{sm}$



Deformazione media dell'armatura

... e la deformazione media nell'armatura vale:

$$\varepsilon_s = \frac{\sigma_{sm}}{E_s} = \frac{\sigma_s}{E_s}\left(1 - 0.5\,\frac{A_{c,eff}\ f_{ct}}{A_s\ \sigma_s}\right)$$



Differenza tra deformazioni medie

La differenza tra le deformazioni medie vale

$$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} = \frac{\sigma_s}{E_s}\left(1 - 0.5\,\frac{A_{c,eff}\ f_{ct}}{A_s\ \sigma_s}\right) - 0.5\,\frac{f_{ct}}{E_{cm}}$$

... e può essere espressa anche come segue

$$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} = \frac{\sigma_s}{E_s}\left[1 - 0.5\,\frac{A_{c,eff}\ f_{ct}}{A_s\ \sigma_s}\left(1 + \frac{E_s}{E_{cm}}\,\frac{A_s}{A_{c,eff}}\right)\right]$$

$1/\rho_{eff}$ $\qquad$ ρ_{eff}

Calcolo dell'ampiezza delle fessure

L'Eurocodice2 fornisce una formula appena diversa

$$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} = \frac{\sigma_s}{E_s}\left[1 - k_t \frac{f_{ct,eff}}{\sigma_s \rho_{eff}}\left(1 + \frac{E_s}{E_{cm}}\rho_{eff}\right)\right] \geq 0.6 \frac{\sigma_s}{E_s}$$

$f_{ct,eff}$ resistenza a trazione efficace del calcestruzzo

= f_{ctm} o ad un valore minore se la fessurazione è prevista prima di 28 giorni

k_t (anziché 0.5) dipende dalla durata del carico

= 0.6 per carichi di breve durata

= 0.4 per carichi di lunga durata

EC2, punto 7.3.4

Ampiezza delle fessure

$$w_d = (\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm})\, s_{r,max}$$

w_k secondo EC2

$$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} = \frac{\sigma_s}{E_s}\left[1 - k_t \frac{f_{ct,eff}}{\sigma_s\, \rho_{eff}}\left(1 + \frac{E_s}{E_{cm}}\rho_{eff}\right)\right] \geq 0.6\,\frac{\sigma_s}{E_s}$$

$$s_{r,max} = k_3\, c + k_1\, k_2\, k_4\, \frac{\phi}{\rho_{eff}}$$

EC2, punto 7.3.4 - Circolare 617/09, punto C4.1.2.2.4.6

Esempio numerico

Combinazione di carico quasi permanente

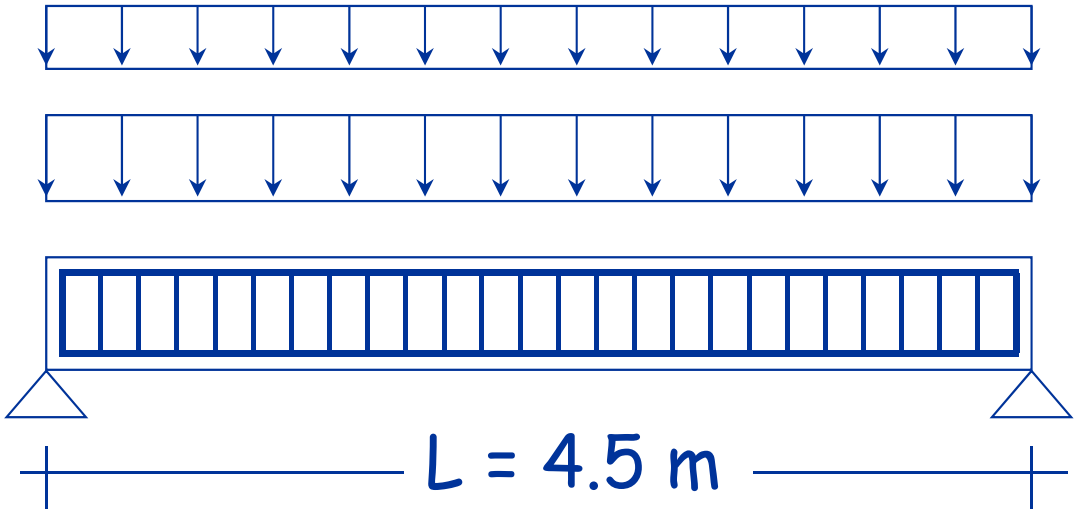
Dati:

Sezione	30x50
Armature	A_s = 3∅20+1∅14
	A'_s = 2∅14

$G_k + \psi_2 Q_k = 32.05$ kN/m

$M_{Ed} = 81.1$ kNm

Calcestruzzo	C25/30
Acciaio	B450C



$\psi_2 Q_k = 5.85$ kN/m

$G_{1k} = 26.2$ kN/m

$$M_{Ed} = M_{max} = \frac{q L^2}{8}$$

Esempio numerico

Combinazione di carico quasi permanente

Dati:

Sezione	30x50
Armature	A_s = 3∅20+1∅14
	A'_s = 2∅14

$G_k + \psi_2 Q_k$ = 32.05 kN/m

M_{Ed} = 81.1 kNm

Calcestruzzo	C25/30
Acciaio	B450C

Procedura:

1 – calcolo il momento di fessurazione

2 - calcolo della distanza massima tra le fessure

3 – calcolo della differenza di deformazione media tra acciaio e calcestruzzo

4 – calcolo dell'ampiezza delle fessure

La trave si fessura?

Il baricentro della sezione omogeneizzata si trova ad una distanza dal bordo superiore pari a:

$$d_{G,sup} = \frac{bh^2/2 + n\,A_s\,d + n\,A_s'\,c}{bh + n\left(A_s + A_s'\right)} = 25.66\ cm$$

$$n = \frac{E_s}{E_{cm}} = \frac{210000}{31476} = 6.67$$

Il baricentro della sezione omogeneizzata si trova ad una distanza dal bordo inferiore pari a:

$$d_{G,inf} = h - d_{g,sup} = 24.34\ cm$$

La trave si fessura?

Nota la posizione del baricentro, fornita dalle distanze:

$$d_{G,sup} = 25.66\ cm$$

$$d_{G,inf} = 24.34\ cm$$

... si calcola il momento d'inerzia della sezione omogeneizzata:

$$I = \frac{b\, d_{G,sup}^3}{3} + \frac{b\, d_{G,inf}^3}{3} + n\, A_s \left(d_{G,sup} - c\right)^2 + n\, A_s^{'} \left(d_{G,inf} - c\right)^2 =$$

$$= 349275\ cm^4$$

La trave si fessura?

Il momento di fessurazione M_r è quello in grado di indurre nella fibra maggiormente tesa (quella inferiore) una tensione pari a f_{cfk}.

$$f_{cfk} = \frac{M_r}{I} d_{G,inf} \Rightarrow M_r = \frac{I}{d_{G,inf}} f_{cfk} =$$

$$= \frac{349275}{24.34} \times \frac{2.15}{10^3} = 30.9 \text{ kNm}$$

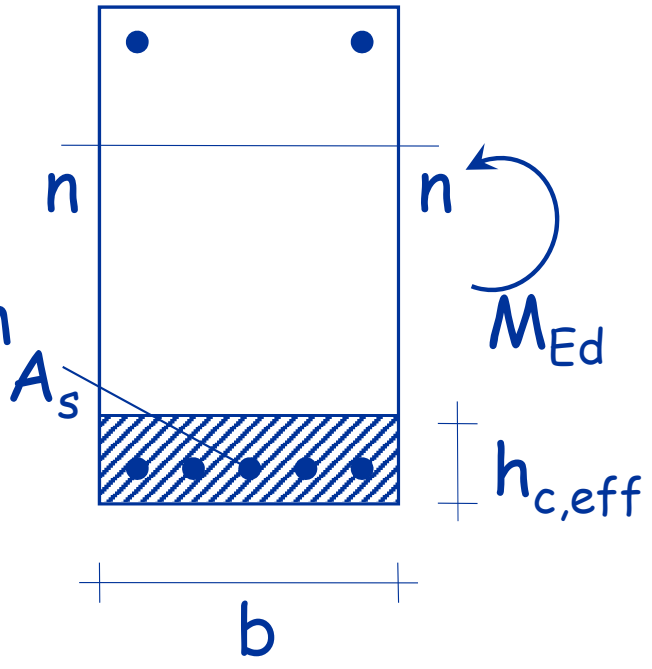
Si, la trave si fessura

Distanza massima tra le fessure

$$s_{r,max} = k_3\, r + k_1\, k_2\, k_4\, \frac{\phi_{eq}}{\rho_{eff}}$$

$$\rho_{eff} = \frac{A_s}{A_{c,eff}} = \frac{A_s}{b\, h_{c,eff}} = \frac{10.96}{30 \times 12.5} = 2.923\%$$

$$h_{c,eff} = \min \begin{cases} \boxed{2.5\, c = 2.5 \times 5 = 12.5 \text{ cm}} \\ \dfrac{h - x}{3} = \dfrac{50 - 12.2}{3} = 12.6 \text{ cm} \\ \dfrac{h}{2} = \dfrac{50}{2} = 25 \text{ cm} \end{cases}$$



Distanza massima tra le fessure

$$s_{r,max} = k_3\, r + k_1\, k_2\, k_4\, \frac{\phi_{eq}}{\rho_{eff}}$$

$$\rho_{eff} = 2.923\%$$

$$\phi_{eq} = \frac{n_1\, \phi_1^2 + n_2\, \phi_2^2}{n_1\, \phi_1 + n_2\, \phi_2} = \frac{14^2 + 3 \times 20^2}{14 + 3 \times 20} = 18.9\ mm$$

Distanza massima tra le fessure

$$s_{r,max} = k_3\, r + k_1\, k_2\, k_4 \frac{\phi_{eq}}{\rho_{eff}} = 212\ mm$$

$$\rho_{eff} = 2.923\%$$

$$\phi_{eq} = 18.9\ mm$$

r = 30 mm

k_1 = 0.8 (barre ad aderenza migliorata)

k_2 = 0.5 (flessione semplice)

k_3 = 3.4

k_4 = 0.425

Deformazioni di acciaio e cls

$$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} = \frac{\sigma_s}{E_s}\left[1 - k_t \frac{f_{ct,eff}}{\sigma_s \rho_{eff}}\left(1 + \frac{E_s}{E_{cm}}\rho_{eff}\right)\right] \geq 0.6 \frac{\sigma_s}{E_s}$$

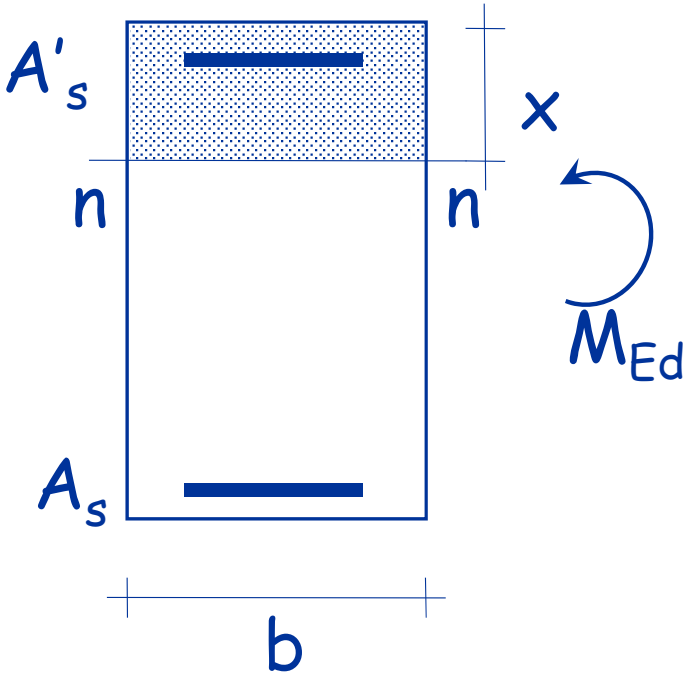
$$\sigma_s = n\frac{M_{Ed}}{I}(d - x) = 187.2 \text{ MPa}$$

n = 15 (carichi di lunga durata)

$x = 16.6$ cm

$I = 184558 \text{ cm}^4$

da verifica sulle tensioni in esercizio



Deformazioni di acciaio e cls

$$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} = \frac{\sigma_s}{E_s}\underbrace{\left[1 - k_t \frac{f_{ct,eff}}{\sigma_s \rho_{eff}}\left(1 + \frac{E_s}{E_{cm}}\rho_{eff}\right)\right]}_{0.7764 > 0.6} \geq 0.6 \frac{\sigma_s}{E_s}$$

$$\sigma_s = n\frac{M_{Ed}}{I}(d - x) = 187.2 \text{ MPa}$$

$f_{ct,eff} = f_{ctm} = 2.56$ MPa

$k_t = 0.4$ (carichi di lunga durata)

Deformazioni di acciaio e cls

$$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} = \frac{\sigma_s}{E_s}\left[1 - k_t \frac{f_{ct,eff}}{\sigma_s \rho_{eff}}\left(1 + \frac{E_s}{E_{cm}}\rho_{eff}\right)\right] =$$

$$= \frac{187.2}{210000} \times 0.7764 = 0.0692\%$$

$$\sigma_s = n\frac{M_{Ed}}{I}(d - x) = 187.2 \text{ MPa}$$

$f_{ct,eff} = f_{ctm} = 2.56$ MPa

$k_t = 0.4$ (carichi di lunga durata)

Verifica dell'ampiezza della fessura

Infine si calcola l'ampiezza delle fessure:

$$w_d = s_{r,max}\left(\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}\right) = 212 \times 0.0692\% = 0.147 \text{ mm}$$

... che deve essere inferiore a 0.3 mm per:

- armature poco sensibili alla corrosione
- combinazione di carico quasi permanente
- ambiente ordinario

La verifica è soddisfatta

Verifica dell'ampiezza della fessura

Infine si calcola l'ampiezza delle fessure:

$$w_d = s_{r,max}\left(\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}\right) = 212 \times 0.0692\% = 0.147 \text{ mm}$$

... che deve essere inferiore a 0.2 mm per:

- armature poco sensibili alla corrosione
- combinazione di carico quasi permanente
- ambiente molto aggressivo

La verifica è ancora soddisfatta

Verifica dell'ampiezza delle fessure senza calcolo diretto

Verifica senza calcolo diretto

La verifica dell'ampiezza delle fessure w_d indotte principalmente da carichi può essere eseguita omettendo il calcolo esplicito se:

- **L'armatura tesa è non inferiore ad un valore minimo $A_{s,min}$**

EC2, punto 7.3.2 e 7.3.3

Criterio di non plasticizzazione

Sforzo normale centrato

Affinché il comportamento di un'opera in conglomerato cementizio armato sia soddisfacente allo stato fessurato è essenziale che l'armatura non risulti plasticizzata in presenza dell'azione di trazione corrispondente alla comparsa delle prime fessure.

Infatti, è solo a questa condizione che potranno formarsi in successione molte fessure di apertura limitata.

Se, al contrario, l'armatura si plasticizza alla comparsa della prima fessura, tale fessura tenderà ad aprirsi indefinitamente al crescere della sollecitazione, con microfessurazione via via crescente del calcestruzzo in prossimità della fessura e deterioramento dell'aderenza armatura-calcestruzzo, al punto che la trasmissione di tensioni di trazione al calcestruzzo sarà molto limitata e non potranno nascere nuove fessure.

Criterio di non plasticizzazione

Sforzo normale centrato

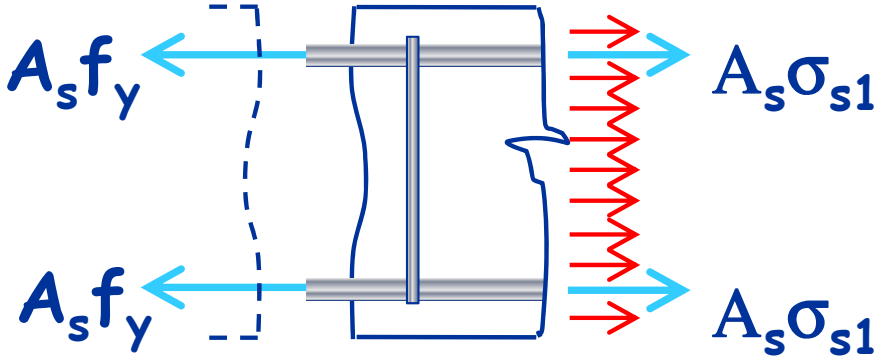
Si consideri l'equilibrio alla traslazione longitudinale
di un tirante tra due sezioni

di cui una

- in secondo stadio di comportamento con tensione di trazione nell'armatura pari alla tensione di snervamento

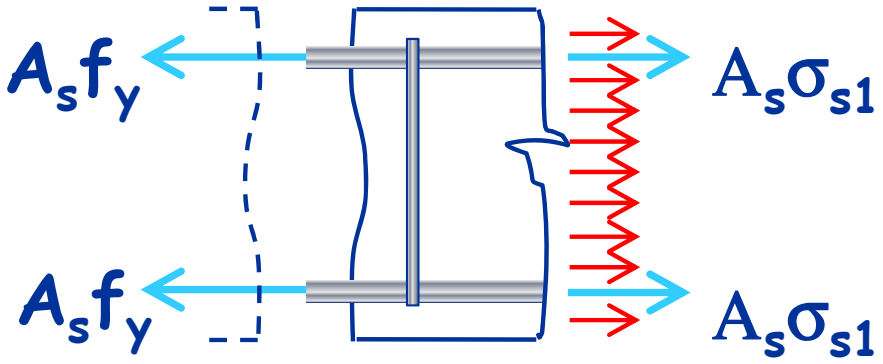
e l'altra

- in primo stadio di comportamento con tensione di trazione nel calcestruzzo pari alla resistenza per trazione



Criterio di non plasticizzazione

Sforzo normale centrato



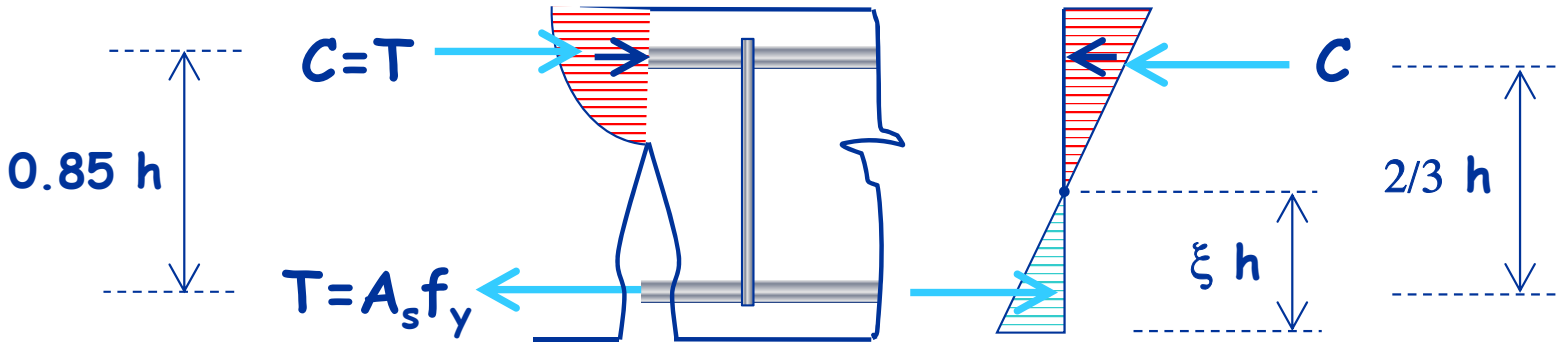
$$A_s f_y = A_c f_{ct} + \sigma_{s1} A_s$$

ovvero, se si trascura il contributo dell'armatura nel primo stadio di comportamento:

$$A_{min} = \frac{f_{ct}}{f_y} A_c$$

Criterio di non plasticizzazione

Momento flettente

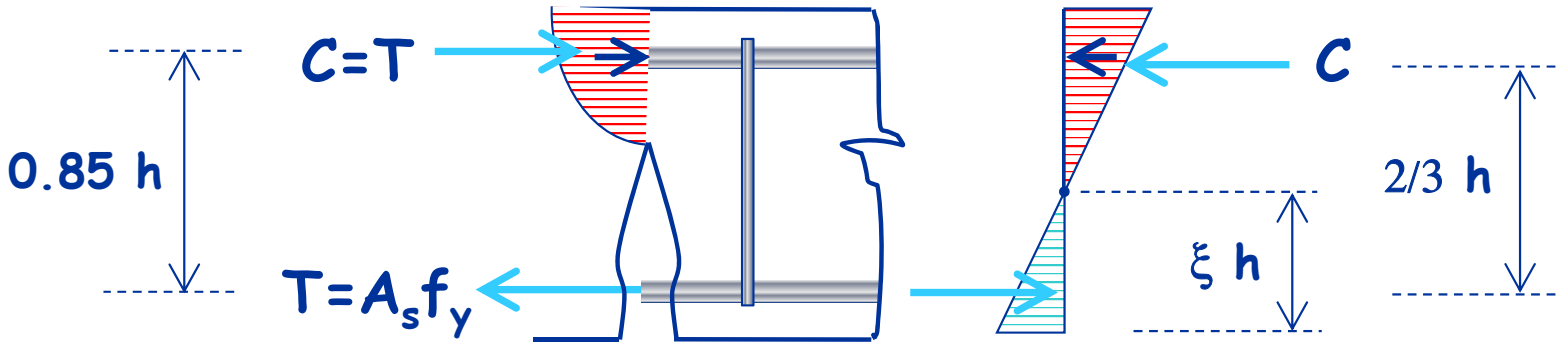


Se si trascura il contributo dell'armatura superiore e si esegue l'equilibrio alla traslazione sulla sezione nel primo stadio di comportamento, si ha:

$$M_1 \cong \frac{1}{2}\xi h b_w f_{ct} \frac{2}{3} h = \frac{1}{3}\xi b_w h^2 f_{ct}$$

Criterio di non plasticizzazione

Momento flettente



Se si esegue l'equilibrio alla traslazione sulla sezione nel secondo stadio di comportamento, si ha:

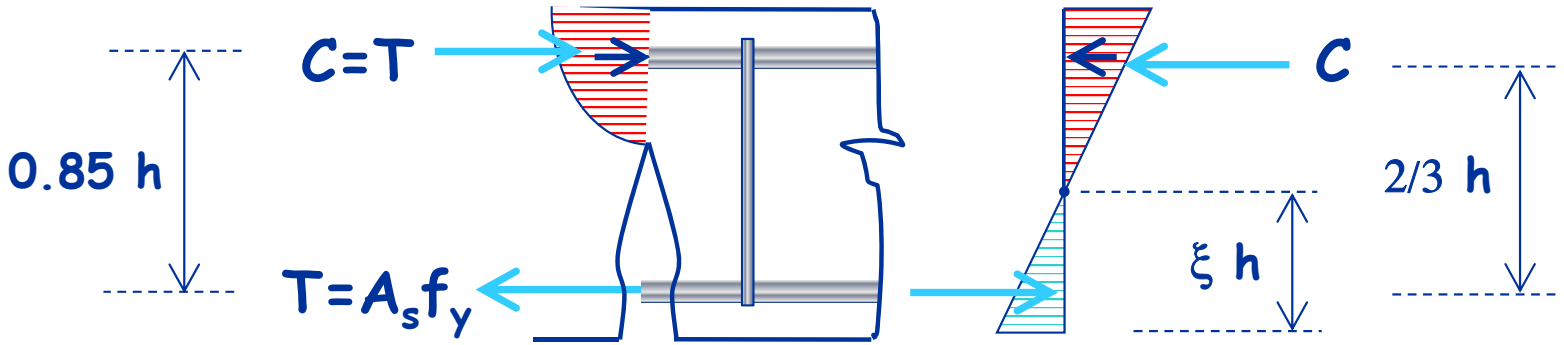
$$M_2 \cong A_s \sigma_{sr}\, 0.85h$$

Dall'equilibrio alla traslazione del concio tra le sezioni esaminate si ha:

$$A_{s,min} = 0.39\xi \frac{A_c f_{ct}}{f_y}$$

Criterio di non plasticizzazione

Momento flettente



Nel caso di flessione, l'area della sezione d'armatura necessaria è spesso espressa in funzione dell'area della parte tesa della sezione di calcestruzzo. La relazione precedente diventa :

$$A_{s,min} = 0.78\,\xi\,\frac{A_{ct}\,f_{ct}}{f_y}$$

Nota: il fattore 0.78 ξ varia tra 0.4 e 0.5 a seconda della forma della sezione.

Armatura minima

$$A_{s,min} = \frac{k_c \; f_{ct,eff} \; A_{ct}}{\sigma_s}$$

k_c dipende dalla distribuzione delle tensioni

vale 1.0 per trazione

0.4 per flessione

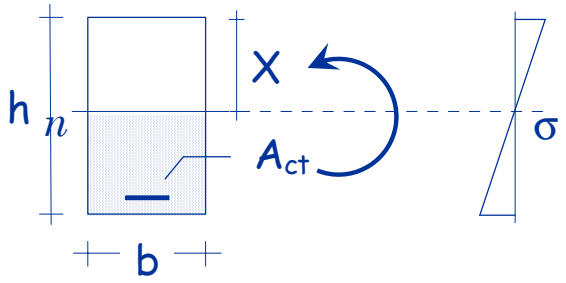
valori intermedi per flessione composta

EC2, punto 7.3.2

Armatura minima

$$A_{s,min} = \frac{k_c \; f_{ct,eff} \; A_{ct}}{\sigma_s}$$

A_{ct} area di calcestruzzo nella zona tesa



$A_{ct} = b\,(h - X) \approx b\,h/2$

per flessione semplice

EC2, punto 7.3.2

Armatura minima

$$A_{s,min} = \frac{k_c \; f_{ct,eff} \; A_{ct}}{\sigma_s}$$

$f_{ct,eff}$ resistenza a trazione efficace del calcestruzzo

si assume pari a f_{ctm} o ad un valore minore
se la fessurazione è prevista prima di 28 giorni

Pertanto... (per la flessione)

$$A_{s,min} = \frac{k_c \; f_{ct,eff} \; A_{ct}}{\sigma_s} \approx 0.4 \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} \frac{b\,h}{2} \approx 0.26 \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} bd$$

EC2, punto 7.3.2

Verifica senza calcolo diretto

La verifica dell'ampiezza delle fessure w_d indotte principalmente da carichi può essere eseguita omettendo il calcolo esplicito se:

- L'armatura tesa è non inferiore ad un valore minimo $A_{s,min}$
- **Il diametro delle barre è non superiore ad un valore massimo ϕ_{max}, o …**
- **… la distanza tra le barre è non superiore ad un valore massimo d_{max}**

EC2, punto 7.3.2 e 7.3.3

Stati limite di fessurazione

Metodo semplificato (4.4.2.3.)

Tensione nell'acciaio [2] [MPa]	Diametro massimo delle barre [mm] [1]		
	w_k = 0,4 mm	w_k = 0,3 mm	w_k = 0,2 mm
160	40	32	25
200	32	25	16
240	20	16	12
280	16	12	8
320	12	10	6
360	10	8	5
400	8	6	4
450	6	5	-

1) I valori nel prospetto sono basati sulle seguenti assunzioni:
c = 25 mm; $f_{ct,eff}$ = 2.9 MPa; h_{cr} = 0,5; (h - d) = 0.1 h ; k_1 = 0.8; k_2 = 0.5;
k_c = 0.4; k = 1.0; k_t = 0.4 e k ' = 1.0.
2) Sotto la combinazione di carico pertinente.

Eurocodice 2 vers. 2005

Stati limite di fessurazione

Metodo semplificato (4.4.2.3.)

Tensione nell'acciaio [2] [MPa]	Spaziatura massima delle barre [mm] [1]		
	w_k = 0,4 mm	w_k = 0,3 mm	w_k = 0,2 mm
160	300	300	200
200	300	250	150
240	250	200	100
280	200	150	50
320	150	100	-
360	100	50	-

1) I valori nel prospetto sono basati sulle seguenti assunzioni:
c = 25 mm; $f_{ct,eff}$ = 2.9 MPa; h_{cr} = 0.5; (h - d) = 0.1 h ; k_1 = 0.8; k_2 = 0.5;
k_c = 0.4; k = 1.0; k_t = 0,4 e k ' = 1.0.
2) Sotto la combinazione di carico pertinente.

Stati limite di fessurazione

Metodo semplificato (4.4.2.3.)

Il diametro massimo delle barre è modificato come segue:

Flessione (sezione parzializzata):

$$\phi_s = \phi_s^* \left(f_{ct,ef}/2.9\right) \frac{k_c h_{cr}}{2(h-d)}$$

Trazione (la sezione è tutta tesa):

$$\phi_s = \phi_s^* \left(f_{ct,ef}/2.9\right) \frac{1}{8(h-d)}$$

dove:

ϕ_s è il diametro massimo "modificato" delle barre;
ϕ^*_s è il diametro massimo dato nel prospetto;
h è l'altezza totale della sezione;
h_{cr} è l'altezza della zona tesa subito prima della fessurazione, considerando i valori caratteristici delle forze assiali sotto la combinazione quasi-permanente;
d è l'altezza utile rispetto al baricentro dello strato più esterno di arm. ordinaria.

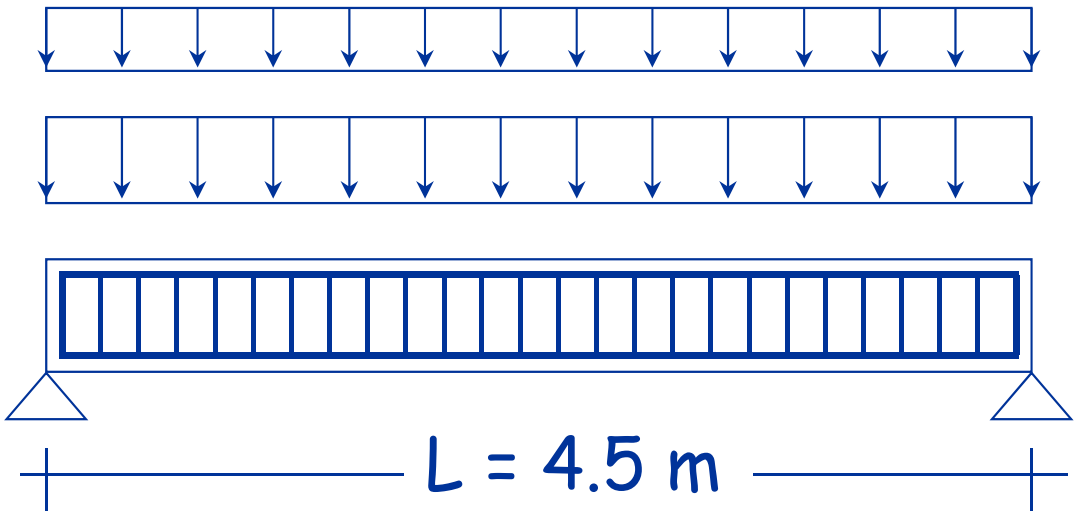
Se tutta la sezione è tesa h-d è la minima distanza tra il baricentro dello strato di armatura e il lembo esterno della sezione.

Esempio numerico

Combinazione di carico quasi permanente

Dati:

Sezione	30x50	Calcestruzzo	C25/30
Armature	A_s = 3∅20+1∅14	Acciaio	B450C
	A'_s = 2∅14		



$$\psi_2 Q_k = 5.85 \text{ kN/m}$$

$$G_{1k} = 26.2 \text{ kN/m}$$

$$M_{Ed} = M_{max} = \frac{q L^2}{8}$$

Esempio numerico

Combinazione di carico quasi permanente

Dati:

Sezione	30x50	Calcestruzzo	C25/30
Armature	A_s = 3∅20+1∅14	Acciaio	B450C
	A'_s = 2∅14		

Procedura:

1 – determinazione dell'armatura tesa minima

2 - determinazione della tensione di lavoro dell'armatura

3 – determinazione della distanza massima tra le barre o il diametro massimo

Calcolo dell'armatura tesa minima

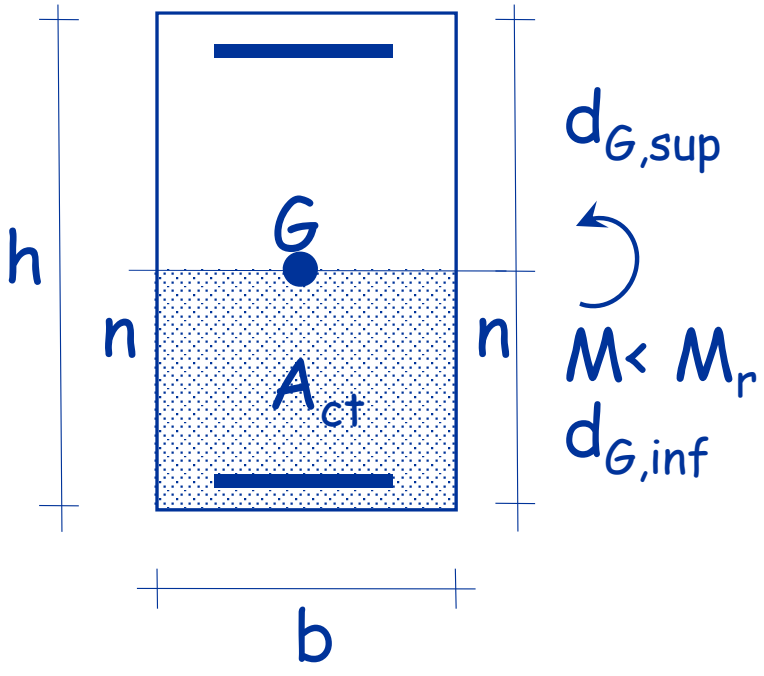
$$A_{s,min} = \frac{k_c \, f_{ct,eff} \, A_{ct}}{\sigma_s}$$

per flessione semplice

$$A_{ct} = b\,(h - x') = b\,d_{G,inf}$$

$$= 30 \times 24.34 = 730.2 \text{ cm}^2$$

$$\approx b\,h/2 = 30 \times 25 = 750 \text{ cm}^2$$



Calcolo dell'armatura tesa minima

$$A_{s,min} = \frac{k_c \, f_{ct,eff} \, A_{ct}}{\sigma_s} = \frac{0.4 \times 2.56 \times 730.2}{450} = 1.66 \text{ cm}^2$$

$A_{ct} = 730 \text{ cm}^2$

$k_c = 0.4$ (flessione)

$f_{ct,eff} = f_{ctm} = 2.56$ MPa

$\sigma_s = f_{yk} = 450$ MPa

L'armatura disposta è ben maggiore, $A_s = 10.96 \text{ cm}^2$

Distanza massima tra le barre

Combinazione di carico quasi permanente

σ_s	$w_d \leq 0.4$ mm	$w_d \leq 0.3$ mm	$w_d \leq 0.2$ mm
160	300	300	200
200	300	250	150
240	250	200	100
280	200	150	50
320	150	100	--
360	100	50	--

$\sigma_s = 187.2$ MPa

Da verifica su tensioni in esercizio

Distanza massima tra le barre

Combinazione di carico quasi permanente

σ_s	$w_d \leq 0.4$ mm	$w_d \leq 0.3$ mm	$w_d \leq 0.2$ mm
160	300	300	200
200	300	250	150
240	250	200	100
280	200	150	50
320	150	100	--
360	100	50	--

Nella sezione in esame vi sono 4 barre ad una distanza di circa 70 mm e la verifica è soddisfatta

… o in alternativa

Diametro massimo delle barre

Combinazione di carico quasi permanente

σ_s	$w_d \leq 0.4$ mm	$w_d \leq 0.3$ mm	$w_d \leq 0.2$ mm
160	40	32	25
200	32	25	16
240	20	16	12
280	16	12	8
320	12	10	6
360	10	8	5
400	8	6	4
450	6	5	-

$\sigma_s = 187.2$ MPa

Per armature poco sensibili e condizioni ambientali ordinarie deve essere $w_d < 0.3$ mm

Diametro massimo delle barre

Combinazione di carico quasi permanente

Dalla tabella si ha

$$\phi^*_{max} = \frac{32+25}{2} = 28.5\ mm$$

e quindi il diametro modificato vale

$$\phi_{max} = \phi^*_{max} \frac{f_{ct,eff}}{2.9} \frac{k_c\ h}{4\ c} = 28.5 \times \frac{2.56}{2.9} \times \frac{0.4 \times 50}{4 \times 5} = 25.2\ mm$$

Nella sezione in esame sono state utilizzate barre ϕ20 e la verifica è soddisfatta

Stato limite di deformazione

Stati limite di deformazione

CONTROLLO DELLA DEFORMAZIONE

Metodo semplificato

Calcolo diretto
della deformazione

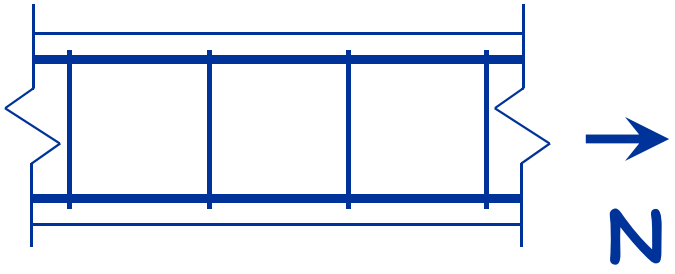
Verifica esplicita delle deformazioni

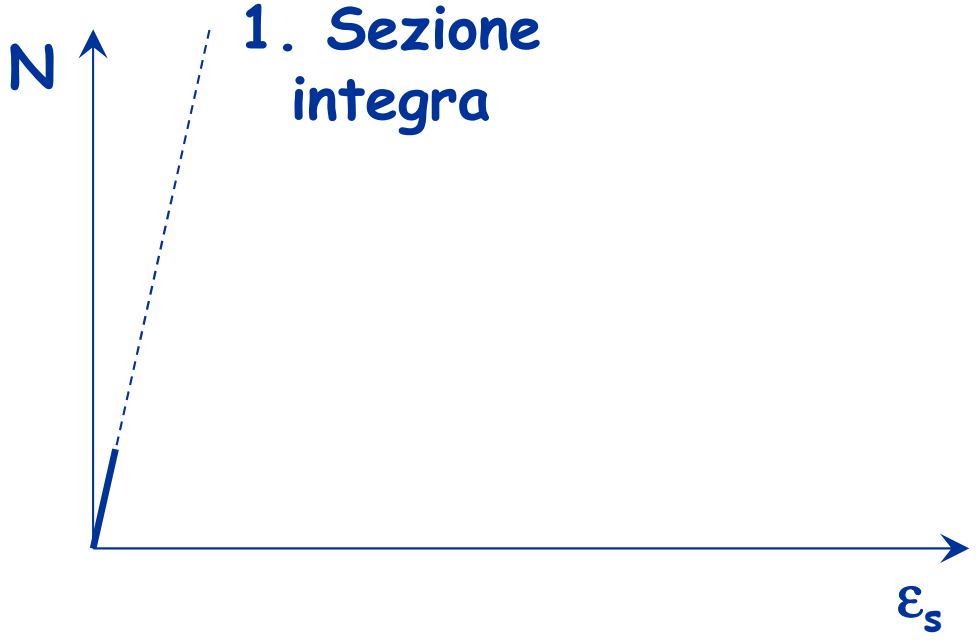
Elemento teso

Per bassi valori di carico vi è perfetta aderenza tra acciaio e calcestruzzo e le deformazioni di acciaio e calcestruzzo sono uguali

$$\sigma_{c1} = \frac{N}{A_c + n\,A_s} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{s1} = \varepsilon_{c1} = \frac{N}{E_c\,(A_c + n\,A_s)}$$

$$n = \frac{E_s}{E_c}$$





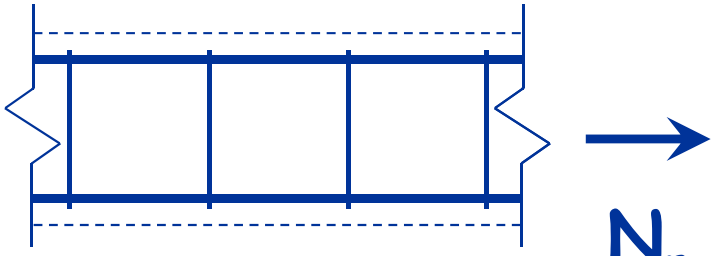
Elemento teso

Quando N = N_r (sforzo di fessurazione) il calcestruzzo si fessura

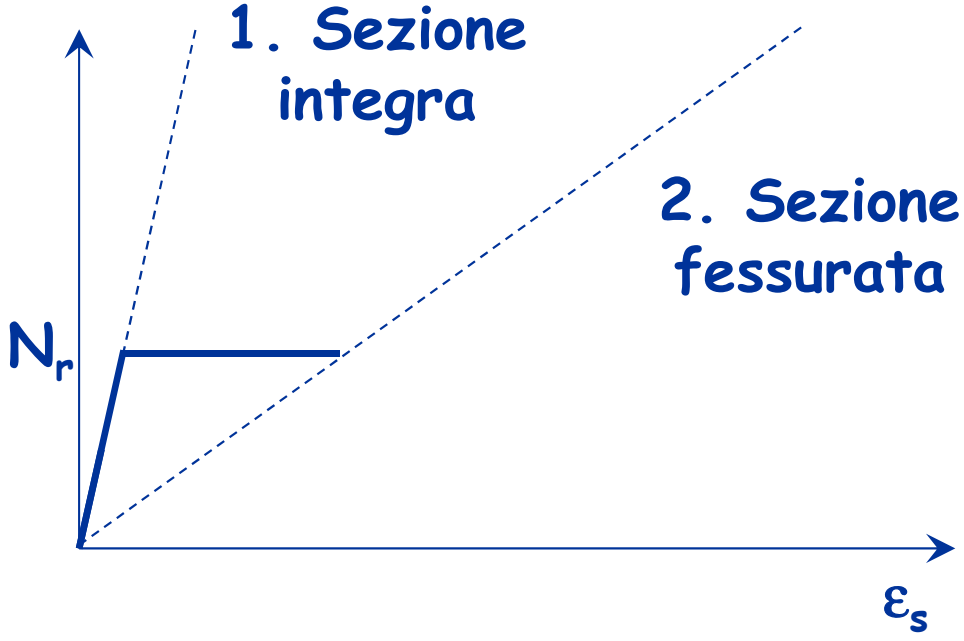
$$f_{ct} = \frac{N_r}{A_c + n\,A_s} \quad \Rightarrow \quad N_r = (A_c + n\,A_s)\,f_{ct}$$

Se la fessurazione interessasse tutte le sezioni...

$$\varepsilon_{sr2} = \frac{N_r}{E_s\,A_s}$$

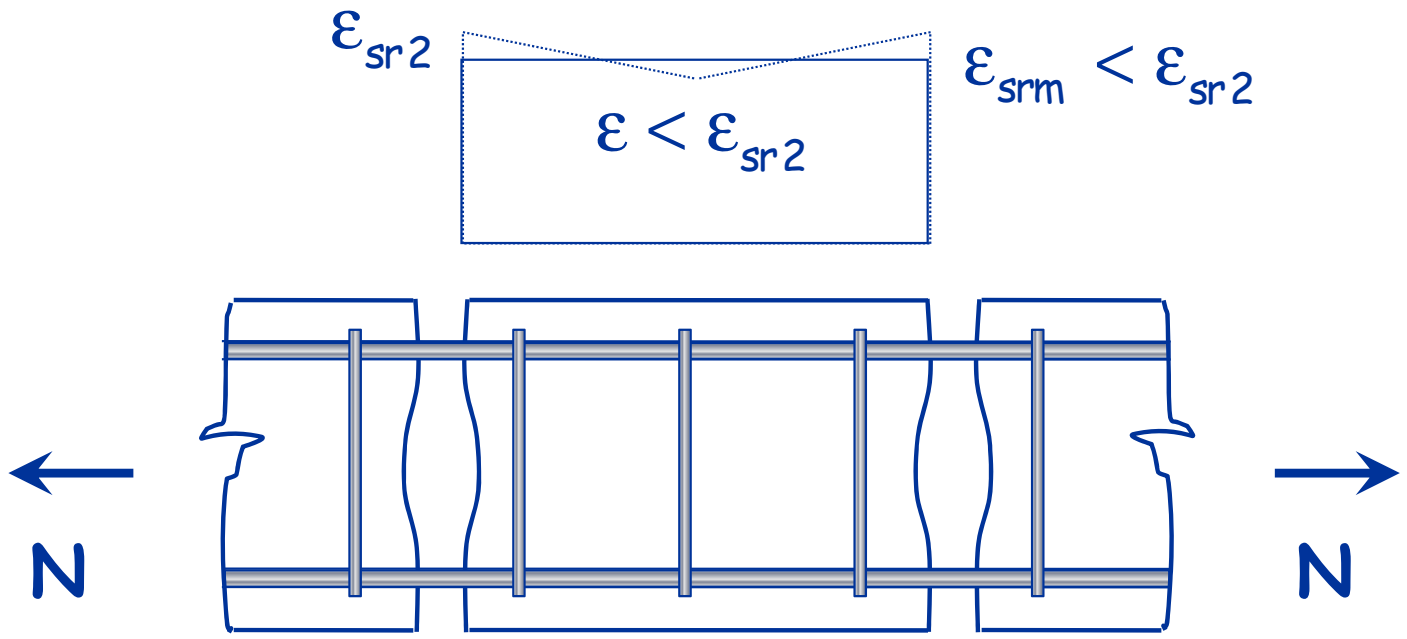


N_r



Tension-stiffening

Ma il calcestruzzo teso tra le fessure porta parte della forza di trazione e riduce le deformazioni dell'acciaio. Dunque il valore medio della deformazione dell'acciaio ε_{srm} sarà minore di ε_{sr2}.

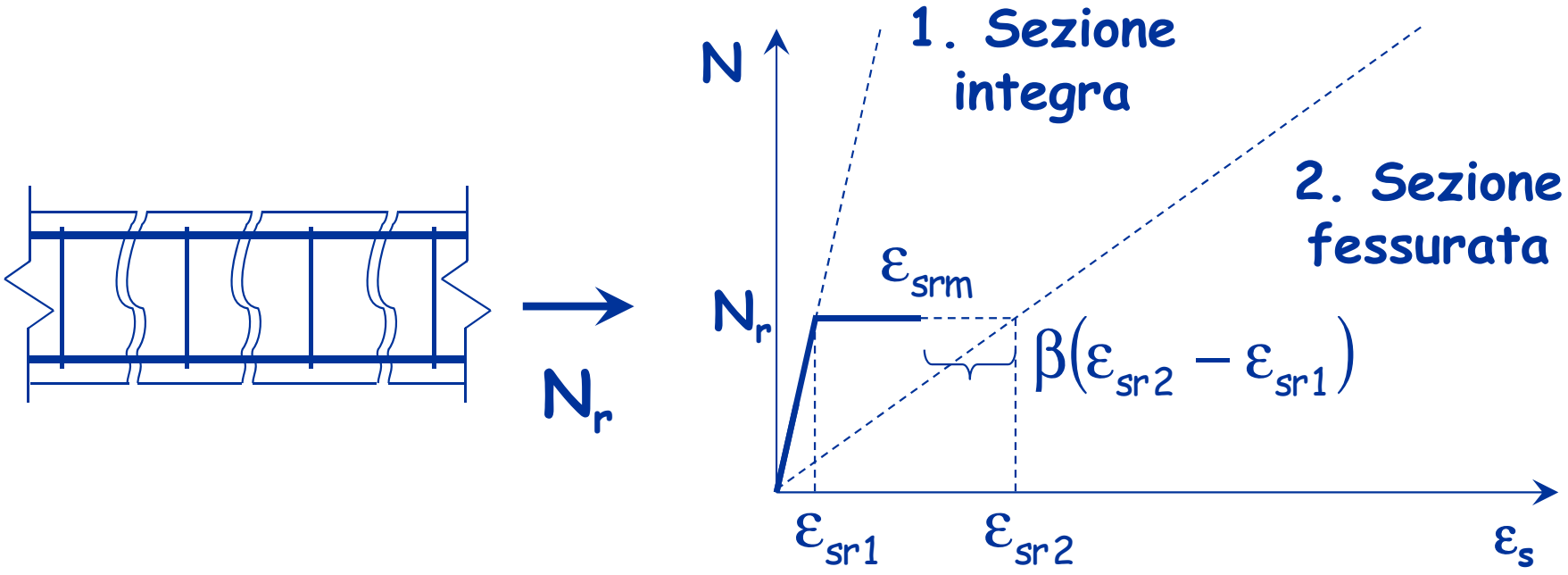


Deformazione media

La deformazione media dell'armatura si può scrivere come segue

$$\varepsilon_{srm} = \varepsilon_{sr2} - \beta\left(\varepsilon_{sr2} - \varepsilon_{sr1}\right)$$

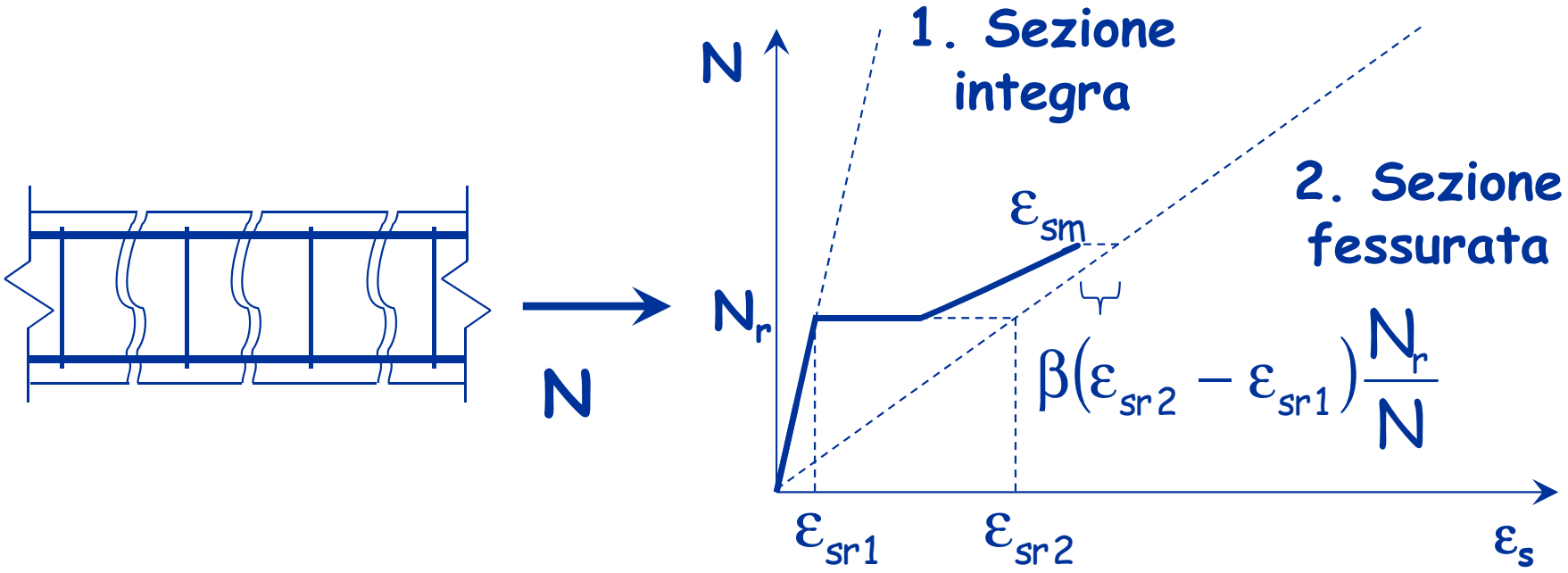
con β coefficiente adimensionale ≤ 1.



Deformazione media

Quando la trazione aumenta, il contributo positivo del calcestruzzo si riduce progressivamente

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{s2} - \beta\left(\varepsilon_{sr2} - \varepsilon_{sr1}\right)\frac{N_r}{N}$$

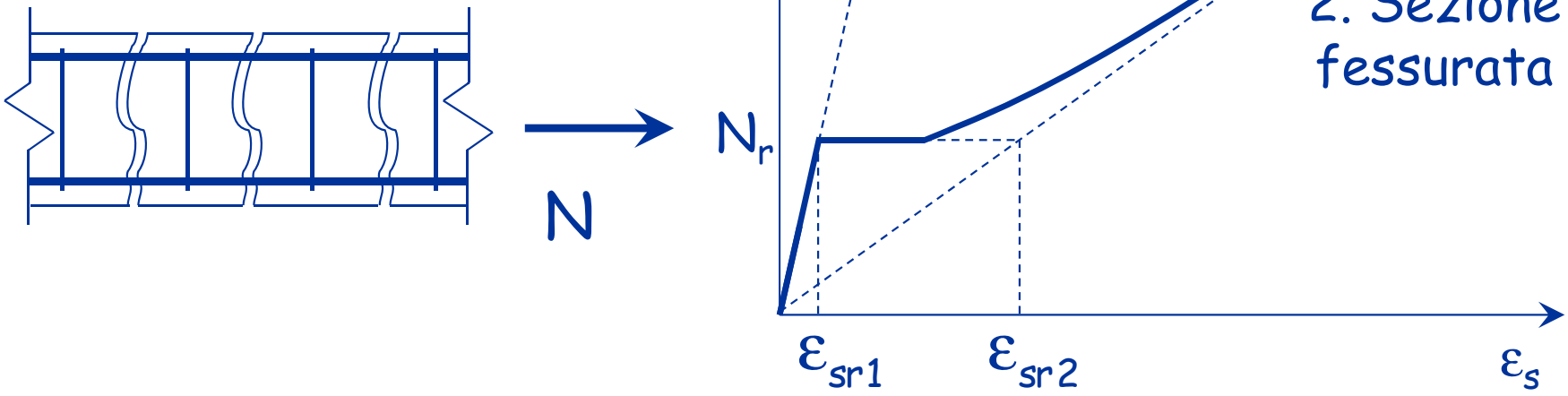


Deformazione media

Quando la trazione aumenta, il contributo positivo del calcestruzzo si riduce progressivamente

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{s2} - \beta\left(\varepsilon_{sr2} - \varepsilon_{sr1}\right)\frac{N_r}{N}$$

... ed il comportamento dell'elemento tende a quello della sezione fessurata.



Deformazione media

Se si considera che

$$\varepsilon_{sr1} = \varepsilon_{s1} \frac{N_r}{N} \qquad \varepsilon_{sr2} = \varepsilon_{s2} \frac{N_r}{N}$$

... la deformazione media dell'acciaio per N assegnato

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{s2} - \beta \left(\varepsilon_{sr2} - \varepsilon_{sr1}\right) \frac{N_r}{N}$$

... si può scrivere come segue

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{s2} - \beta\, \varepsilon_{s2} \left(\frac{N_r}{N}\right)^2 + \beta\, \varepsilon_{s1} \left(\frac{N_r}{N}\right)^2$$

Deformazione media

$$\varepsilon_{sm} = \underbrace{\left[1 - \beta\left(\frac{N_r}{N}\right)^2\right]}_{\zeta}\varepsilon_{s2} + \underbrace{\beta\left(\frac{N_r}{N}\right)^2}_{1-\zeta}\varepsilon_{s1}$$

ζ tiene conto del tension-stiffening e vale:

- $1 - \beta\left(\frac{M_r}{M}\right)^2$ nel caso di flessione
- $1 - \beta\left(\frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s}\right)^2$ in generale

Parametri di deformazione

- deformazione $\varepsilon_{sm} = \zeta\,\varepsilon_{s2} + (1-\zeta)\,\varepsilon_{s1}$

- curvatura $\chi_m = \zeta\,\chi_{m2} + (1-\zeta)\,\chi_{m1}$

- freccia $f = \zeta\,f_2 + (1-\zeta)\,f_1$

$$\zeta = 1 - \beta\left(\frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s}\right)^2$$ in generale

σ_{sr} = tensione per il carico di fessurazione

σ_s = tensione per il carico agente

β dipende dal tipo di carico

= 1.0 per carico di breve durata

= 0.5 per carichi permanenti

EC2, punto 7.4.3

Effetti della viscosità

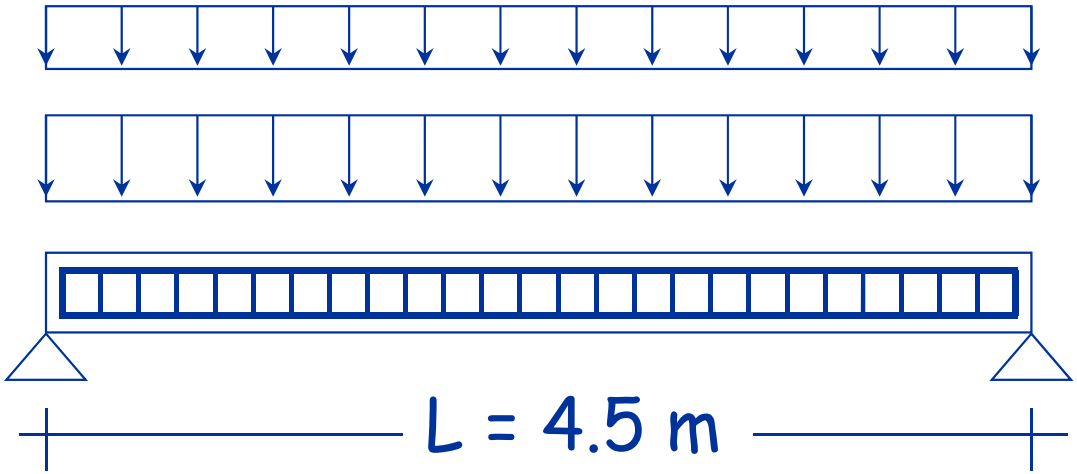
Per carichi di lunga durata bisogna tener conto degli effetti viscosi usando il modulo di elasticità efficace del calcestruzzo per il calcolo dei parametri di deformazione:

$$E_{c,eff} = \frac{E_{cm}}{1+\varphi}$$

φ = coefficiente di viscosità del calcestruzzo

EC2, punto 7.4.3

Struttura per esempio numerico



$Q_k = 13.5 \ \text{kN/m}$

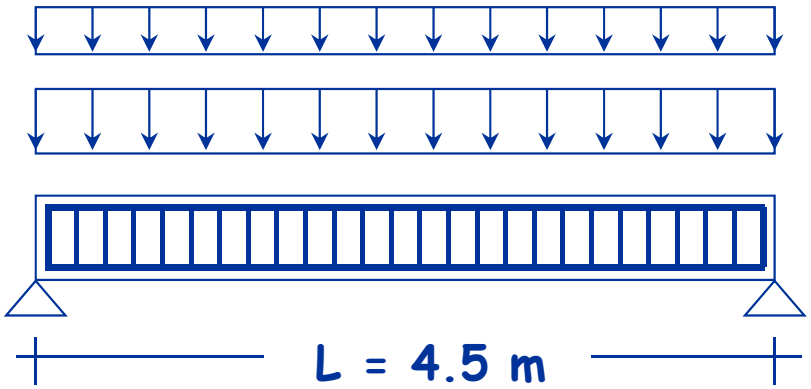
$G_{1k} = 17.5 \ \text{kN/m}$

Comb. di carico per SLU

$$\gamma_{G1} G_{1k} + \gamma_Q Q_k = 1.3 \times 17.5 + 1.5 \times 13.5 = 43.0 \ \text{kN/m}$$

$$M_{Ed} = M_{max} = \frac{q L^2}{8} \qquad M_{Ed} = 108.8 \ \text{kNm}$$

Struttura per esempio numerico



$Q_k = 13.5 \ \text{kN/m}$

$G_{1k} = 17.5 \ \text{kN/m}$

$$M_{max} = \frac{q L^2}{8}$$

Comb. di carico rara

$G_{1k} + Q_k = 31.00 \ \text{kN/m}$ ➡ $M_{Ed} = 78.5 \ \text{kNm}$

Comb. di carico frequente

$G_{1k} + \psi_1 \ Q_k = 24.3 \ \text{kN/m}$ ➡ $M_{Ed} = 61.5 \ \text{kNm}$

Comb. di carico quasi permanente

$G_{1k} + \psi_2 Q_k = 21.6 \ \text{kN/m}$ ➡ $M_{Ed} = 54.7 \ \text{kNm}$

Esempio numerico

Combinazione di carico quasi permanente

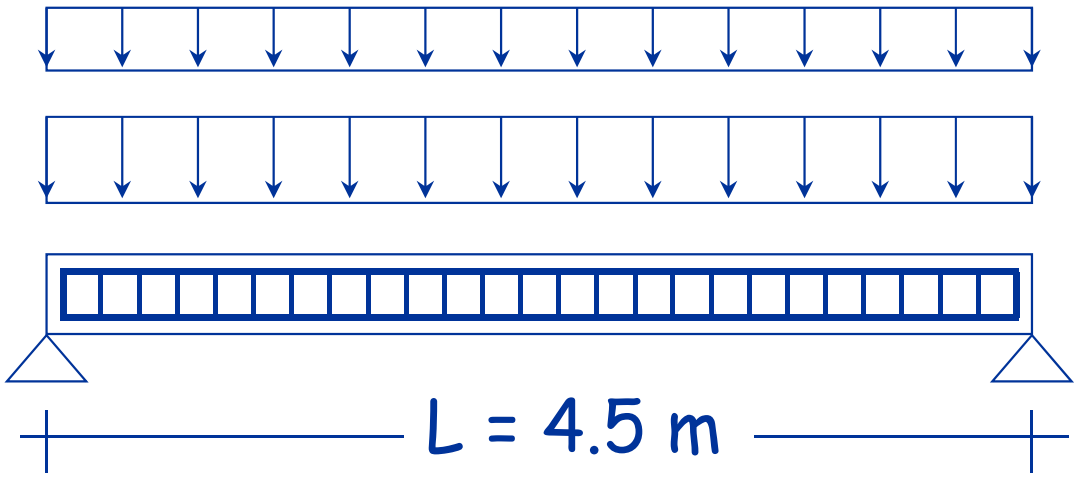
Dati:

Sezione	90x26
Armature	A_s = 5∅20
	A'_s = 4∅14

$G_k + \psi_2 Q_k = 21.6$ kN/m

$M_{Max} = 54.7$ kNm

Calcestruzzo	C25/30
Acciaio	B450C



$\psi_2 Q_k = 4.1$ kN/m (cat. A)

$G_{1k} = 17.5$ kN/m

$$f = \frac{5}{384}\frac{(G_k + \psi_2 Q_k)L^4}{EI}$$

Esempio numerico

Combinazione di carico quasi permanente

Dati:

Sezione	90x26
Armature	A_s = 5∅20
	A'_s = 4∅14

$G_k + \psi_2 Q_k$ = 21.6 kN/m

M_{Max} = 54.7 kNm

Calcestruzzo	C25/30
Acciaio	B450C

Procedura:

1 - determinazione della freccia in condizione fessurata f_2

2 - se $f_2 > f_{max}$ determinazione della freccia
in condizione non fessurata f_1

3 - determinazione della freccia interpolando tra i valori f_1 ed f_2

Esempio numerico

Combinazione di carico quasi permanente

$$f = \zeta\, f_2 + (1-\zeta)\, f_1$$

$$f_1 = \frac{5}{384}\frac{(G_k + \psi_2 Q_k) L^4}{E_{c,eff}\, I_1} \qquad f_2 = \frac{5}{384}\frac{(G_k + \psi_2 Q_k) L^4}{E_{c,eff}\, I_2}$$

$$\zeta = 1 - \beta \left(\frac{M_r}{M_{Ed}}\right)^2$$

$$E_{c,eff} = \frac{E_{cm}}{1+\varphi} = \frac{31476}{1+2.5} = 8993\ \text{MPa}$$

Andrebbe calcolato

Condizione fessurata

Combinazione di carico quasi permanente

Ricordando che:

$$n = \frac{E_s}{E_{c,eff}} = \frac{210000}{8993} = 23.4 \qquad n = 15$$

... si calcola la posizione dell'asse neutro:

$$x = \frac{n\,(A_s + A'_s)}{b}\left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2\,b\,(A_s d + A'_s c)}{n\,(A_s + A'_s)^2}}\right] =$$

$$= 7.9\ cm$$

Condizione fessurata

Combinazione di carico quasi permanente

Quindi si calcola il momento d'inerzia della sezione reagente omogeneizzata :

$$I_2 = \frac{b\,x^3}{3} + n\,A'_s\,(x-c)^2 + n\,A_s\,(d-x)^2 =$$

$$= 55982\ \text{cm}$$

... ed infine si calcola la freccia della trave in condizione fessurata:

$$f_2 = \frac{5}{384}\frac{(G_k + \psi_2 Q_k)\,L^4}{E_{c,eff}\ I_2} = \frac{5}{384}\frac{21.6 \times 4.5^4}{8993 \times 55982} \times 10^8 =$$

$$= 22.9\ \text{mm}$$

è maggiore di L/250 = 18 mm

Condizione non fessurata

Combinazione di carico quasi permanente

Il baricentro della sezione omogeneizzata si trova ad una distanza dal bordo superiore pari a:

$$d_{G,sup} = \frac{bh^2/2 + n\,A_s\,d + n\,A_s'\,c}{bh + n\left(A_s + A_s'\right)} = 13.20\ cm$$

$$n = \frac{E_s}{E_{cm}} = \frac{210000}{31476} = 6.67$$

Il baricentro della sezione omogeneizzata si trova ad una distanza dal bordo inferiore pari a:

$$d_{G,inf} = h - d_{G,sup} = 12.80\ cm$$

Condizione non fessurata

Combinazione di carico quasi permanente

Nota la posizione del baricentro, si calcola il momento d'inerzia della sezione omogeneizzata:

$$I_1 = \frac{b\, d_{G,sup}^3}{3} + \frac{b\, d_{G,inf}^3}{3} + n\, A_s \left(d_{G,sup} - c\right)^2 + n\, A_s' \left(d_{G,inf} - c\right)^2 =$$

$$= 141047\ cm^4$$

... ed infine si calcola la freccia della trave in condizione non fessurata:

$$f_1 = \frac{5}{384} \frac{\left(G_k + \psi_2 Q_k\right) L^4}{E_{c,eff}\ I_1} = \frac{5}{384} \frac{21.6 \times 4.5^4}{8993 \times 141047} \times 10^8 =$$

$$= 9.1\ mm$$

Momento di fessurazione

Il momento di fessurazione M_r è quello in grado di indurre nella fibra maggiormente tesa (quella inferiore) una tensione pari a f_{cfm}.

$$M_r = \frac{I_1}{d_{G,inf}} f_{cfm} = \frac{141047}{12.8} \times \frac{3.08}{10^3} = 33.9 \text{ kNm}$$

$M_{Max} = 54.7 \text{ kNm} > M_r = 33.9 \text{ kNm}$

la trave si fessura

Esempio numerico

Combinazione di carico quasi permanente

$$f = \zeta\, f_2 + (1-\zeta)\, f_1 = 0.5687 \times 22.9 + 0.4313 \times 9.1 = 16.9 \text{ mm}$$

$$f_1 = 9.1 \text{ mm} \qquad f_2 = 22.9 \text{ mm}$$

$$\zeta = 1 - \beta \left(\frac{M_r}{M_{Ed}} \right)^2 = 1 - 0.5 \left(\frac{33.9}{36.5} \right)^2 = 0.5687$$

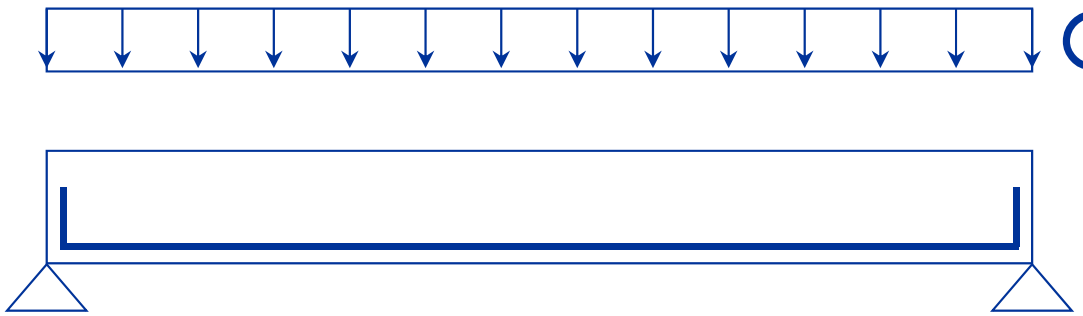
$$\frac{2}{3} \times 54.7 \text{ kNm}$$

$$E_{c,eff} = 8993 \text{ MPa}$$

La freccia è minore di L/250 = 18 mm

Verifica delle deformazioni senza calcolo diretto

Freccia della trave



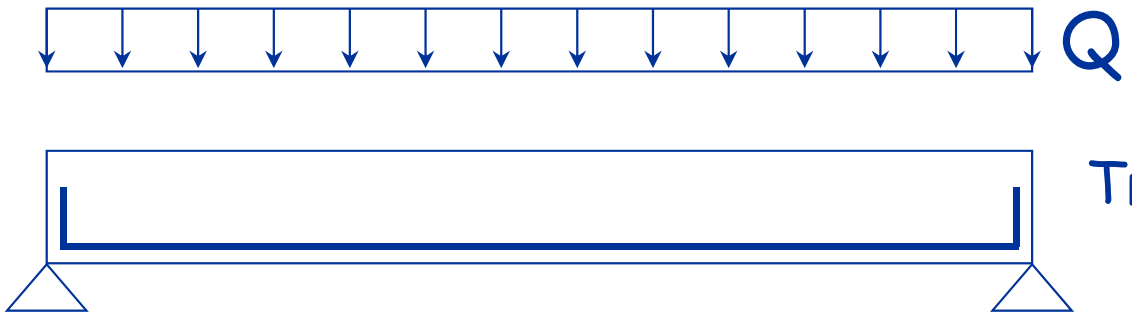
Trave a semplice armatura

La freccia della trave vale:

$$f \approx f_2 = \frac{5}{384}\frac{Q L^4}{E_c I_2} = \frac{40}{384}\frac{M_{max} L^2}{E_c I_2} \quad \text{con} \quad M_{max} = \frac{Q L^2}{8}$$

f_2 calcolata considerando le sezioni tutte le sezioni fessurate

Freccia della trave



Trave a semplice armatura

La tensione nell'armatura vale:

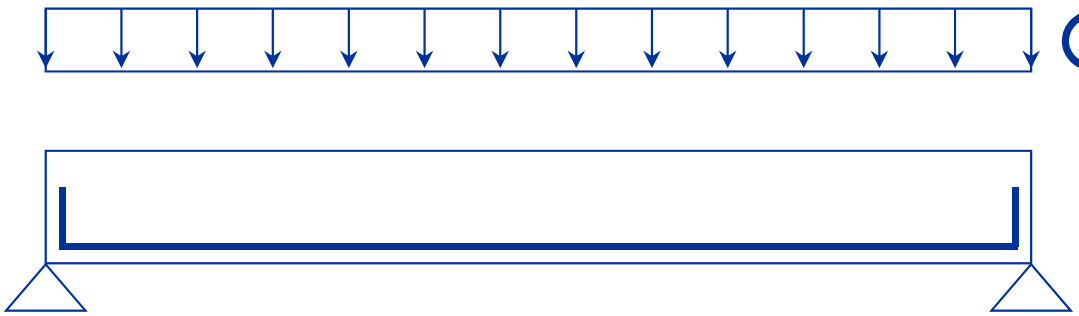
$$\sigma_s = n \frac{M_{max}}{I_2} (d - x)$$

... e quindi:

$$M_{max} = \frac{\sigma_s \, I_2}{n (d - x)} = \frac{\sigma_s \, I_2}{n \, d \, (1 - \xi)} \qquad \text{con} \quad \xi = \frac{x}{d}$$

Sostituendo nell'espressione precedente si ottiene ...

Rapporto L/d e freccia della trave



Trave a semplice armatura

... il rapporto f/L della trave vale:

$$\frac{f}{L} = \frac{40}{384}\,\frac{1}{(1-\xi)}\,\frac{\sigma_s}{E_s}\,\frac{L}{d}$$

... mentre per altri schemi statici vale:

$$\frac{f}{L} = c_2\,\frac{1}{(1-\xi)}\,\frac{\sigma_s}{E_s}\,\frac{L}{d}$$

(c_2 dipende dalla schema statico)

Rapporto L/d e freccia della trave

$$\frac{L}{d} \le \frac{(1-\xi)}{c_2}\,\frac{E_s}{\sigma_s}\left(\frac{f}{L}\right)_{lim}$$

(c_2 dipende dalla schema statico)

Il massimo rapporto L/d dipende da:

- Schema statico (attraverso c_2);
- tensione di lavoro dell'acciaio σ_s;
- tipo di calcestruzzo (attraverso ξ);
- ρ e ρ' (attraverso ξ);
- Il rapporto f/L ritenuto accettabile.

Verifica delle deformazioni

Nell'Eurocodice 2 sono fornite relazioni analitiche per il calcolo dei valori limiti del rapporto L/d (valide per σ_s=310 MPa corrispondente a f_{yk}=500 MPa):

$$\frac{L}{d} \le k\left[11 + 1.5\sqrt{f_{ck}}\,\frac{\rho_0}{\rho} + 3.2\sqrt{f_{ck}}\left(\frac{\rho_0}{\rho} - 1\right)^{\frac{3}{2}}\right] \qquad \text{se } \rho \le \rho_0$$

$$\frac{L}{d} \le k\left[11 + 1.5\sqrt{f_{ck}}\,\frac{\rho_0}{\rho - \rho'} + \frac{1}{12}\sqrt{f_{ck}\,\frac{\rho'}{\rho_0}}\right] \qquad \text{se } \rho > \rho_0$$

EC2, punto 7.4.2

Verifica delle deformazioni

$$\frac{L}{d} = k\left[11 + 1.5\sqrt{f_{ck}}\,\frac{\rho_0}{\rho} + 3.2\sqrt{f_{ck}}\left(\frac{\rho_0}{\rho} - 1\right)^{\frac{3}{2}}\right] \qquad \text{se } \rho \le \rho_0$$

$$\frac{L}{d} = k\left[11 + 1.5\sqrt{f_{ck}}\,\frac{\rho_0}{\rho - \rho'} + \frac{1}{12}\sqrt{f_{ck}\,\frac{\rho'}{\rho_0}}\right] \qquad \text{se } \rho \ge \rho_0$$

k	dipende dallo schema statico
ρ	percentuale di armatura tesa in mezzeria
ρ'	percentuale di armatura compressa in mezzeria
ρ_0	percentuale di riferimento dell'armatura tesa pari a: $\rho_0 = \frac{\sqrt{f_{ck}}}{1000}$ (f_{ck} in MPa)

EC2, punto 7.4.2

Verifica delle deformazioni

La circolare n. 617 fornisce formule più semplici per il calcolo dei valori limiti del rapporto L/h:

$$\frac{L}{h} \le k\left[11 + \frac{0.0015\, f_{ck}}{\rho + \rho'}\right]\frac{500}{f_{yk}}\,\frac{A_{s,eff}}{A_{s,calc}}$$

k	dipende dallo schema statico
ρ	percentuale di armatura tesa
ρ'	percentuale di armatura compressa
$A_{s,eff}$	area di armatura tesa effettivamente presente
$A_{s,calc}$	area di armatura tesa calcolata

Circolare 2/02/2009, punto 4.1.2.2.2

Verifica delle deformazioni

Per f_{ck}=25 MPa, f_{yk} = 450 MPa, ρ'=0 e $A_{s,eff}$=$A_{s,calc}$, si può omettere il calcolo esplicito della freccia se non sono superati i seguenti valori di L/h:

Schema statico	k	ρ = 0.5%	ρ = 1.0%	ρ = 1.5%
Travi appoggiate	1.0	20.6	16.4	15.0
Estremità travi continue	1.3	26.7	21.3	19.5
Campate interne di travi continue	1.5	30.8	24.6	22.5
Mensole	0.4	8.2	6.6	6.0

Circolare 2/02/2009, punto 4.1.2.2.2

Verifica delle deformazioni

- Per travi e piastre nervate di luce maggiore di 7 m, caricate da tramezzi fragili, i valori di L/h indicati in tabella devono essere moltiplicati per 7/L (L in metri).

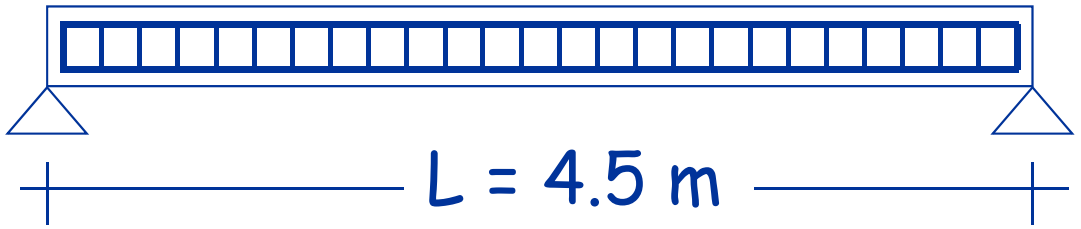
- Per piastre non nervate di luce maggiore di 8.5 m, caricate da tramezzi fragili, i valori di L/h indicati in tabella devono essere moltiplicati per 8.5/L (L in metri).

Circolare 2/02/2009, punto 4.1.2.2.2

Esempio numerico

Dati:

Sezione	90x26
Calcestruzzo	C25/30
Acciaio	B450C



c = 5 cm

Procedura:

1 - determinazione dei valori limite del rapporto L/h corrispondenti ai materiali utilizzati

2 - confronto con il rapporto L/h dell'elemento strutturale in esame

Esempio numerico

Poiché si usa un calcestruzzo con C25/30 ed un acciaio con f_{yk} = 450 MPa i valori massimi di L/h sono:

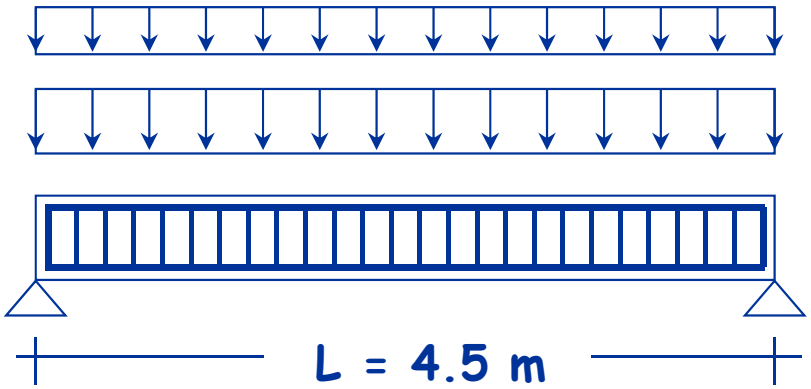
Schema statico	k	ρ = 0.5%	ρ = 1.0%	ρ = 1.5%
Travi appoggiate	1.0	20.6	16.4	15.0
Estremità travi continue	1.3	26.7	21.3	19.5
Campate interne di travi continue	1.5	30.8	24.6	22.5
Mensole	0.4	8.2	6.6	6.0

Esempio numerico

Lo schema statico è di trave appoggiata

Schema statico	k	ρ = 0.5%	ρ = 1.0%	ρ = 1.5%
Travi appoggiate	1.0	20.6	16.4	15.0
Estremità travi continue	1.3	26.7	21.3	19.5
Campate interne di travi continue	1.5	30.8	24.6	22.5
Mensole	0.4	8.2	6.6	6.0

Armatura tesa



$Q_k = 13.5 \ \text{kN/m}$

$G_{1k} = 17.5 \ \text{kN/m}$

Comb. di carico per SLU

$$\gamma_{G1} G_{1k} + \gamma_Q Q_k = 1.3 \times 17.5 + 1.5 \times 13.5 = 43.0 \ \text{kN/m}$$

$$M_{Ed} = M_{max} = \frac{q L^2}{8} \qquad M_{Ed} = 108.8 \ \text{kNm}$$

$$A_s = \frac{M_{Ed}}{0.9 \, d \, f_{yd}} = \frac{108.8 \times 10}{0.9 \times 0.21 \times 391.3} = 14.7 \ \text{cm}^2$$

Esempio numerico

Lo schema statico è di trave appoggiata

La percentuale di armatura tesa è

$$\rho = \frac{14.7}{90 \times 21} = 0.78\%$$

... ed interpolando ...

Schema statico	k	ρ = 0.5%	ρ = 1.0%	ρ = 1.5%
Travi appoggiate	1.0	20.6	16.4	15.0
Estremità travi continue	1.3	26.7	21.3	19.5
Campate interne di travi continue	1.5	30.8	24.6	22.5
Mensole	0.4	8.2	6.6	6.0

Esempio numerico

… si ottiene un rapporto L/h massimo di 18.2, che è maggiore di quello della trave in esame pari a:

$$\frac{L}{h} = \frac{450}{26} = 17.3$$

Schema statico	k	ρ = 0.5%	ρ = 1.0%	ρ = 1.5%
Travi appoggiate	1.0	20.6	16.4	15.0
Estremità travi continue	1.3	26.7	21.3	19.5
Campate interne di travi continue	1.5	30.8	24.6	22.5
Mensole	0.4	8.2	6.6	6.0

Fine