

Lezione

TECNICA DELLE COSTRUZIONI

Prof. Pier Paolo Rossi

Università degli Studi di Catania

La torsione

Torsione

Considerazioni preliminari

TORSIONE PER EQUILIBRIO

allorché le forze esterne possono essere equilibrate unicamente attraverso l'attivazione di una resistenza a torsione.

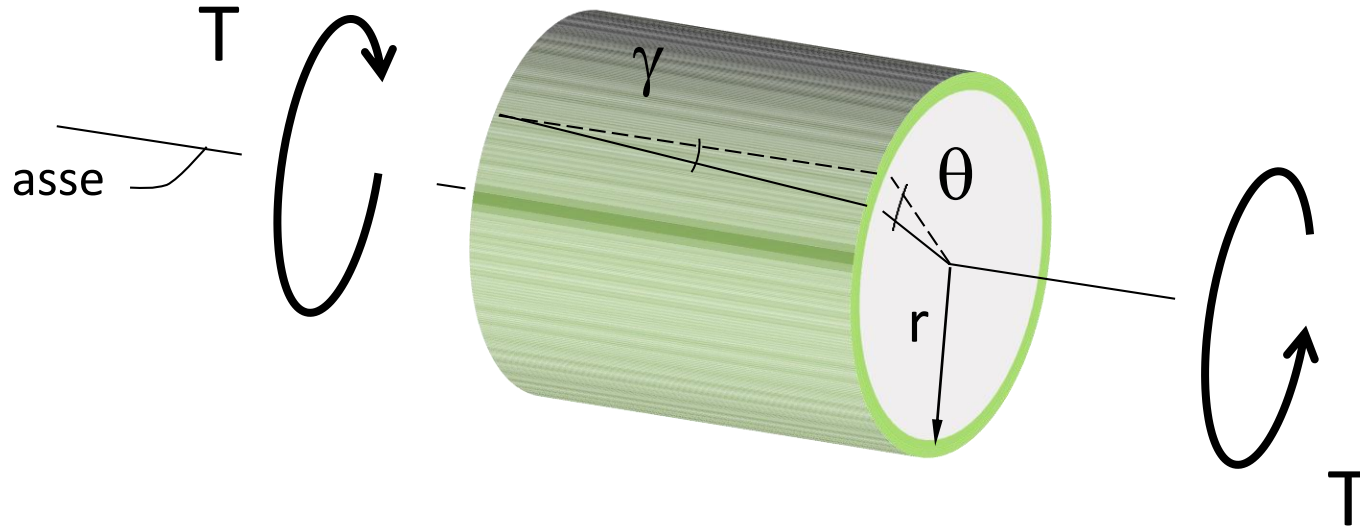
TORSIONE PER CONGRUENZA

allorché le forze esterne possono essere equilibrate anche a seguito di una variazione del vincolo mutuo e quindi attraverso caratteristiche della sollecitazione diverse dalla torsione.

Torsione

Sezione anulare di materiale omogeneo

Se un elemento a sezione anulare di piccolo spessore è soggetto a un momento torcente ...



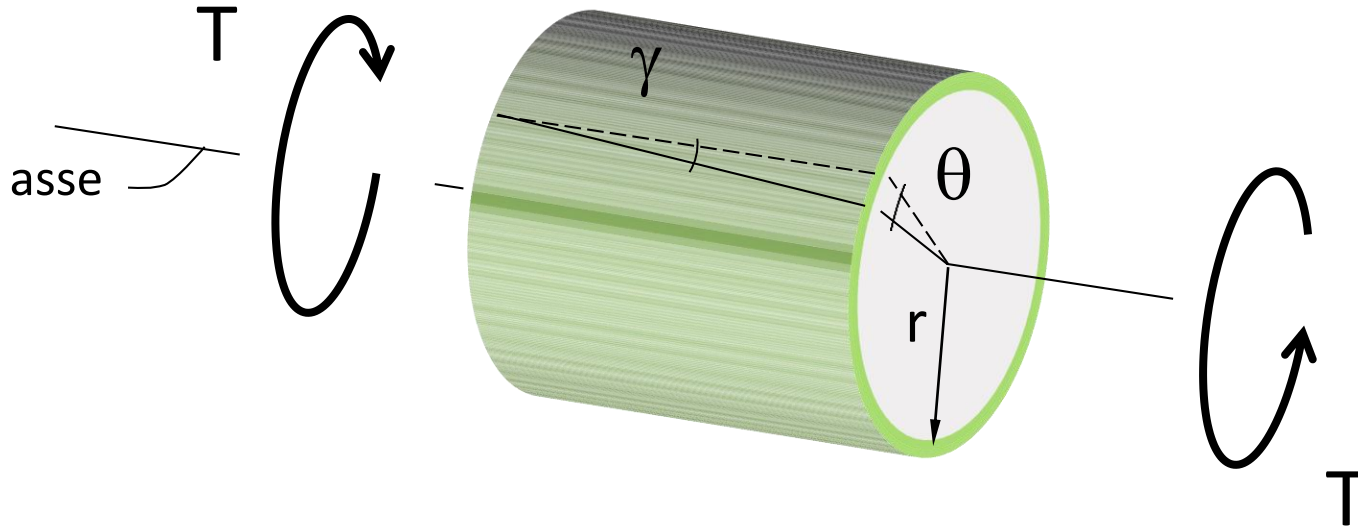
L'asse dell'asta rimane rettilineo e le fibre anulari ruotano rigidamente. Le fibre longitudinali si deformano trasformandosi in eliche che si avvolgono lungo il cilindro.

Torsione

Sezione anulare di materiale omogeneo

Le tensioni sono costanti nello spessore del cilindro e pari a:

$$\tau = G \gamma$$



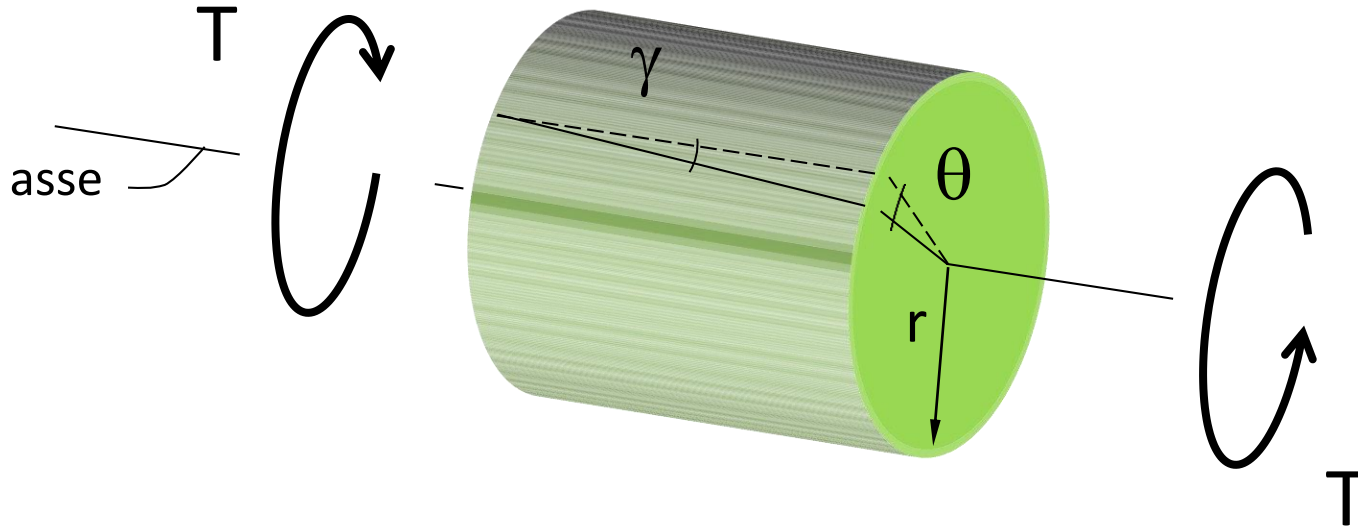
L'angolo unitario di rotazione θ
(rotazione relativa tra due facce a distanza unitaria) è :

$$\theta = \gamma / r$$

Torsione

Sezione circolare di materiale omogeneo

Se un elemento a sezione circolare
piena è soggetto a un momento
torcente ...



L'asse dell'asta rimane rettilineo e le fibre anulari
ruotano rigidamente.

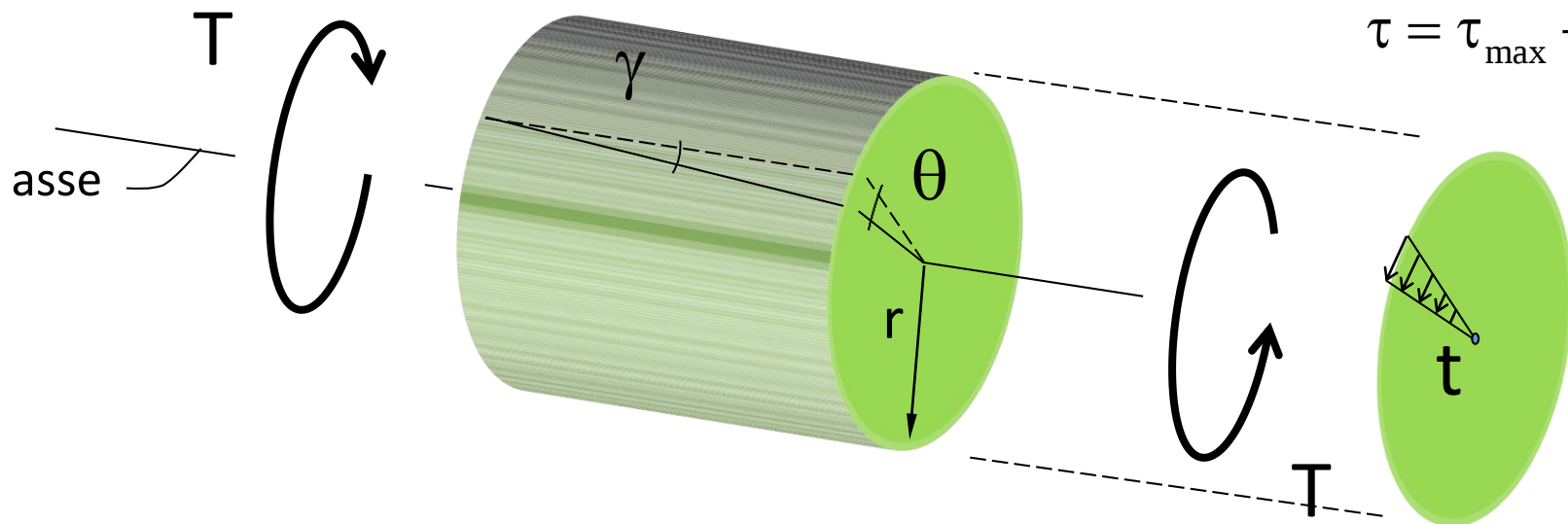
Le fibre longitudinali subiscono uno scorrimento γ
crescente con r .

Torsione

Sezione circolare di materiale omogeneo

Le tensioni sono crescenti con la distanza r dal centro e pari a:

$$\tau = \tau_{\max} \frac{r}{R}$$



L'asse dell'asta rimane rettilineo e le fibre anulari ruotano rigidamente.

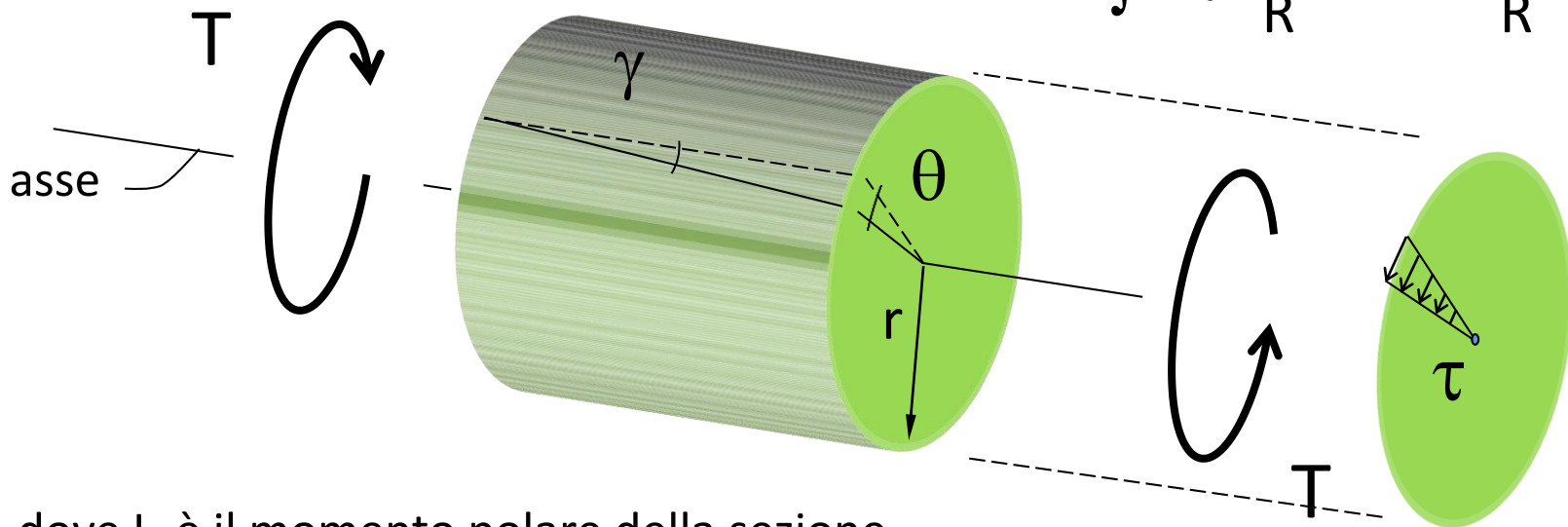
Le fibre longitudinali subiscono uno scorrimento γ crescente con r .

Torsione

Sezione circolare di materiale omogeneo

Imponendo l'equilibrio alla rotazione si ha :

$$T = \int \tau_{\max} \frac{r^2}{R} dA = \frac{\tau_{\max} I_p}{R}$$



dove I_p è il momento polare della sezione,
che nel caso di una sezione circolare vale :

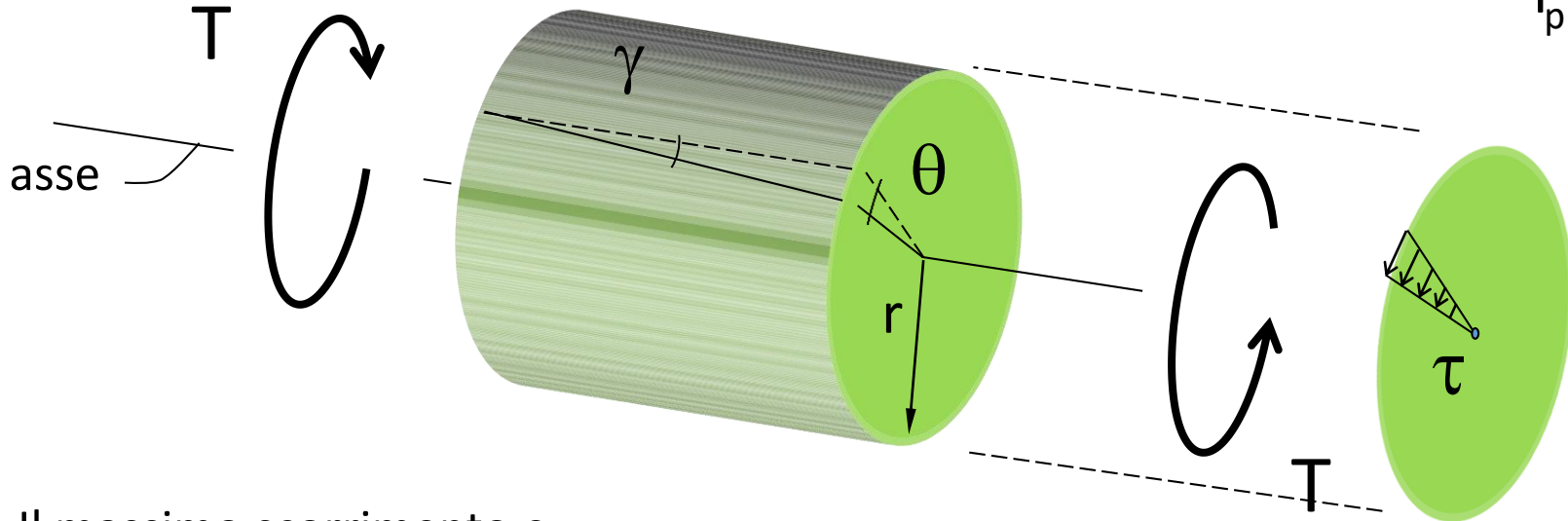
$$I_p = \frac{\pi R^4}{2}$$

Torsione

Sezione circolare di materiale omogeneo

La massima tensione tangenziale vale :

$$\tau_{\max} = \frac{T R}{I_p}$$



Il massimo scorrimento e
l'angolo unitario di rotazione valgono :

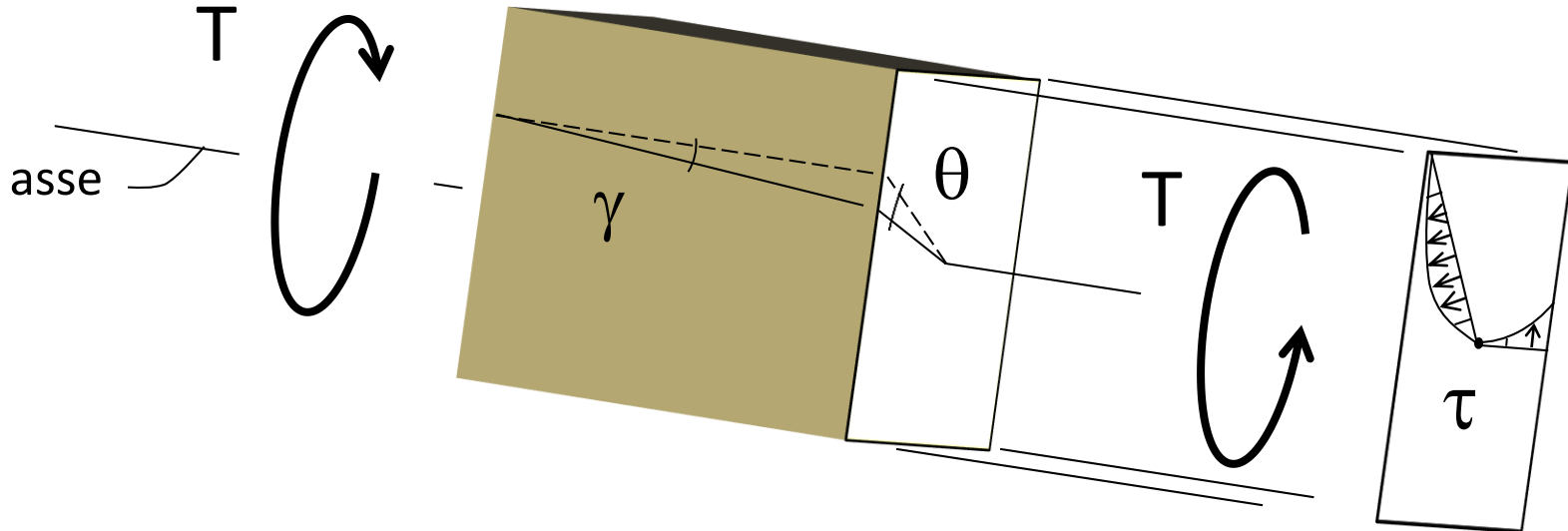
$$\gamma_{\max} = \frac{T R}{G I_p}$$

$$\theta = \frac{T}{G I_p}$$

Torsione

Sezione rettangolare di materiale omogeneo

La tensione tangenziale deve essere parallela al contorno e quindi nulla agli spigoli

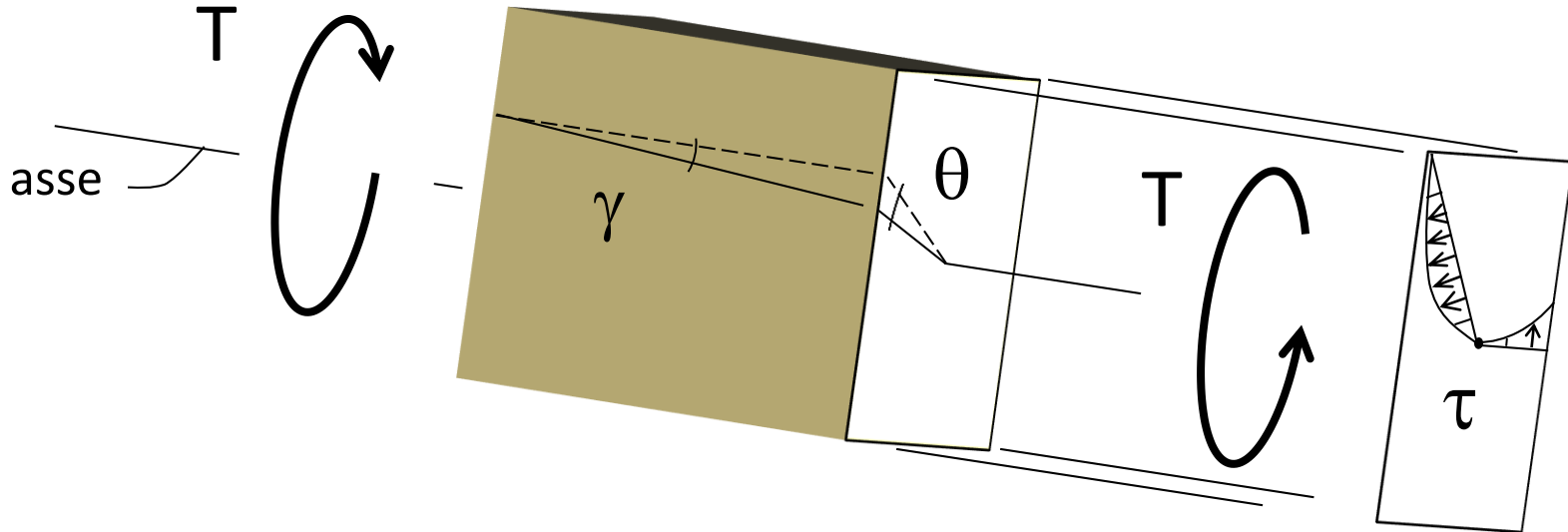


La sezione trasversale, oltre a ruotare nel proprio piano, deve presentare deformazioni fuori piano (ingobbimento)

Torsione

Sezione rettangolare di materiale omogeneo

La tensione tangenziale deve essere parallela al contorno e quindi nulla agli spigoli



Il valore massimo della tensione tangenziale è :

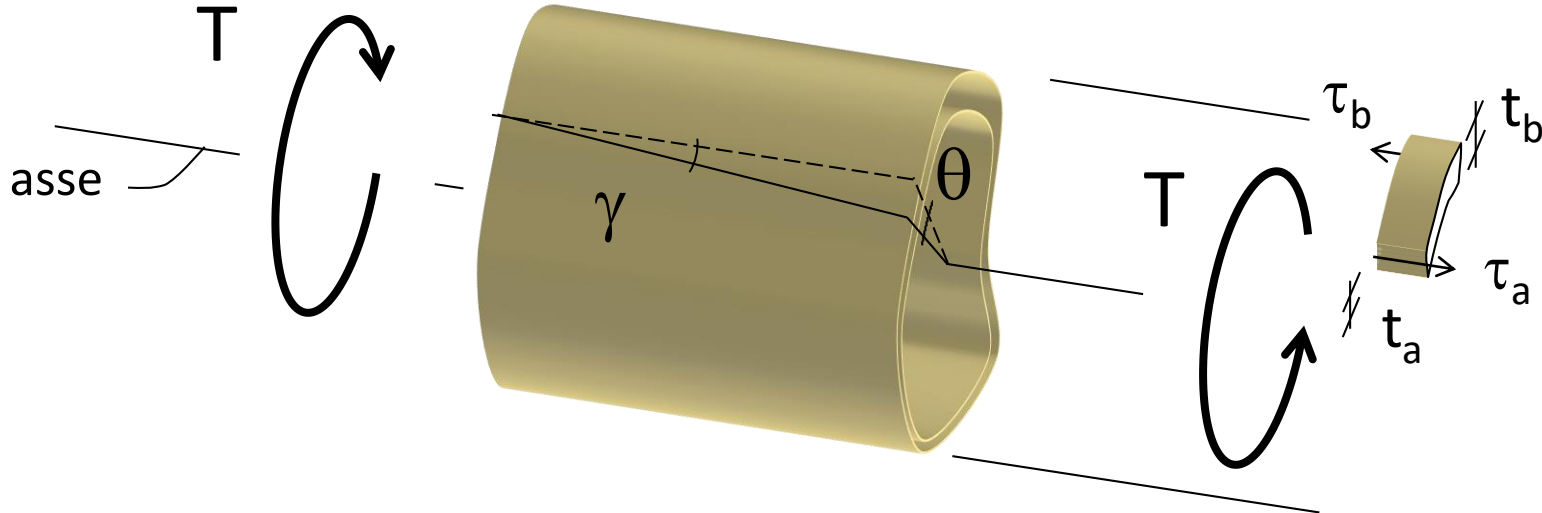
$$\tau_{\max} = \psi \frac{T}{ab^2} \quad \text{dove} \quad \psi = 3 + \frac{2.6}{0.45 + a/b}$$

a dim. lato maggiore
b dim. lato minore

Torsione

Sezione sottile a spessore variabile di materiale omogeneo

Se un elemento a sezione chiusa di spessore piccolo è soggetto a un momento torcente ...



Per l'equilibrio, il prodotto $\tau \cdot t$ è costante
(essendo t lo spessore della corda)

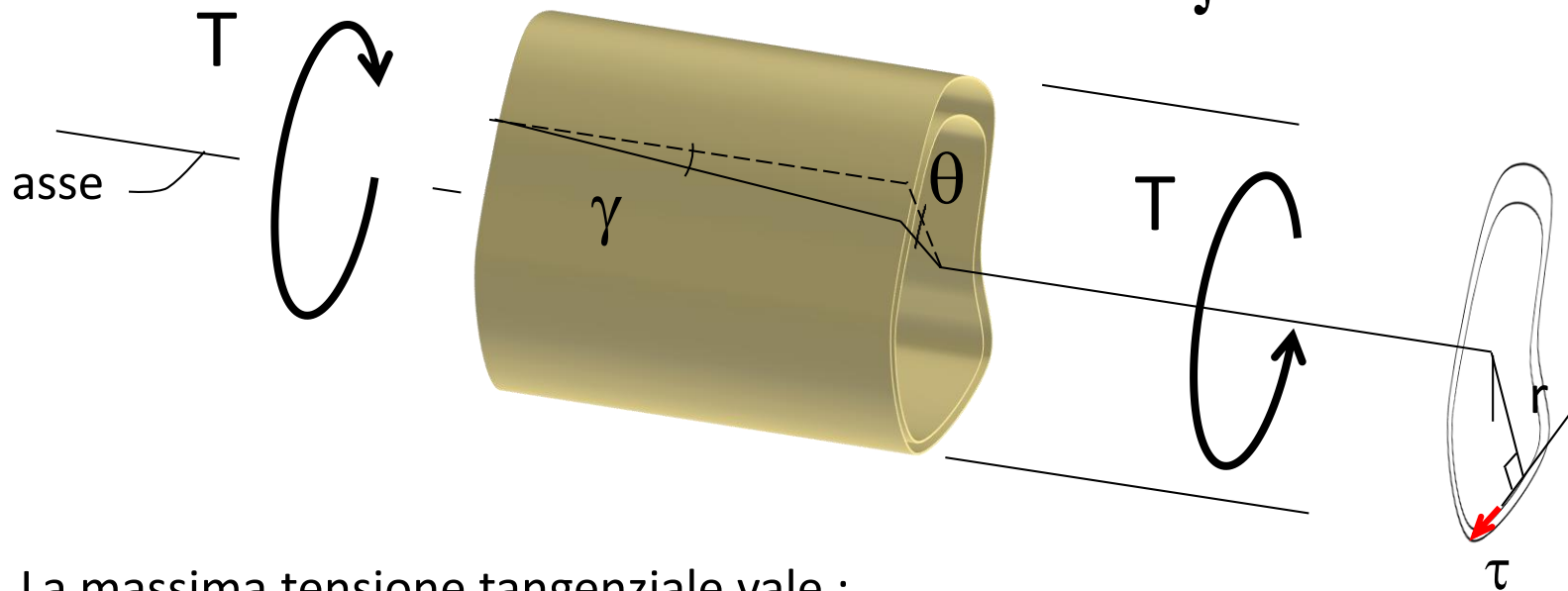
ovvero $\tau_a t_a = \tau_b t_b$

Torsione

Sezione sottile a spessore variabile di materiale omogeneo

Imponendo l'equilibrio alla rotazione si ha :

$$T = \int \tau t r ds = 2 \tau t A_k$$



La massima tensione tangenziale vale :

$$\tau_{\max} = \frac{T}{2 A_k t_{\min}}$$

essendo A_k l'area settoriale racchiusa dalla linea media

Torsione in elementi in c.a.

1° stadio di comportamento

Fin quando l'elemento in c.a. non è fessurato (per torsione), il momento torcente è equilibrato sostanzialmente dalle tensioni tangenziali che si sviluppano nel calcestruzzo.

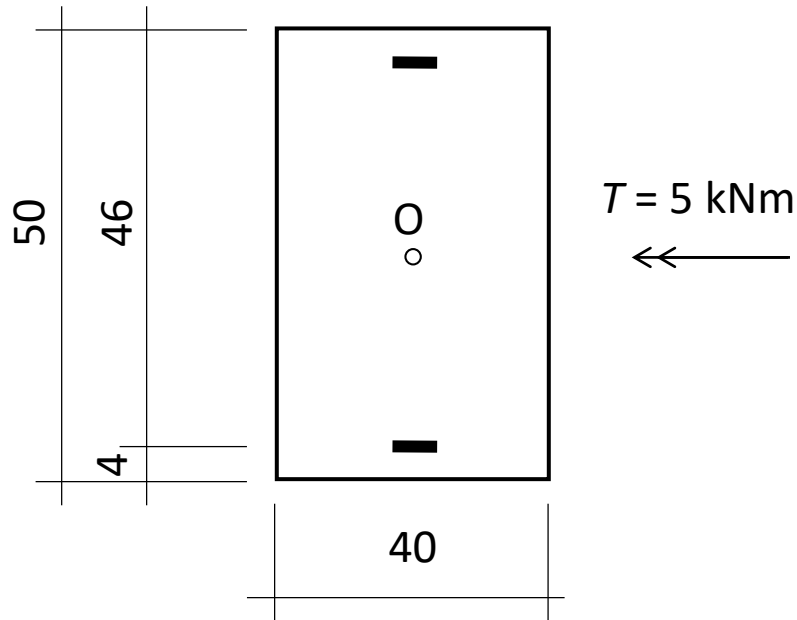
Nel I stadio di comportamento dei materiali,
le armature partecipano marginalmente alla resistenza strutturale per torsione.



Pertanto, le tensioni tangenziali del calcestruzzo sono valutate con riferimento all'intero momento torcente, mentre quelle delle armature sono assunte nulle.

Esempio

1° stadio di comportamento



Il valore massimo della tensione tangenziale è :

$$\tau_{\max} = \psi \frac{T}{ab^2}$$

dove :

$$\psi = 3 + \frac{2.6}{0.45 + a/b}$$

a dim. lato maggiore
b dim. lato minore

Nel caso in esame è :

$$\psi = 3 + \frac{2.6}{0.45 + 50/40} = 4.53$$

Quindi :

$$\tau_{\max} = \psi \frac{T}{ab^2} = 4.53 \frac{5}{0.50 \cdot 0.40^2} \frac{1}{1000} = 0.28 \text{ MPa}$$

Torsione in elementi in c.a.

2° stadio di comportamento

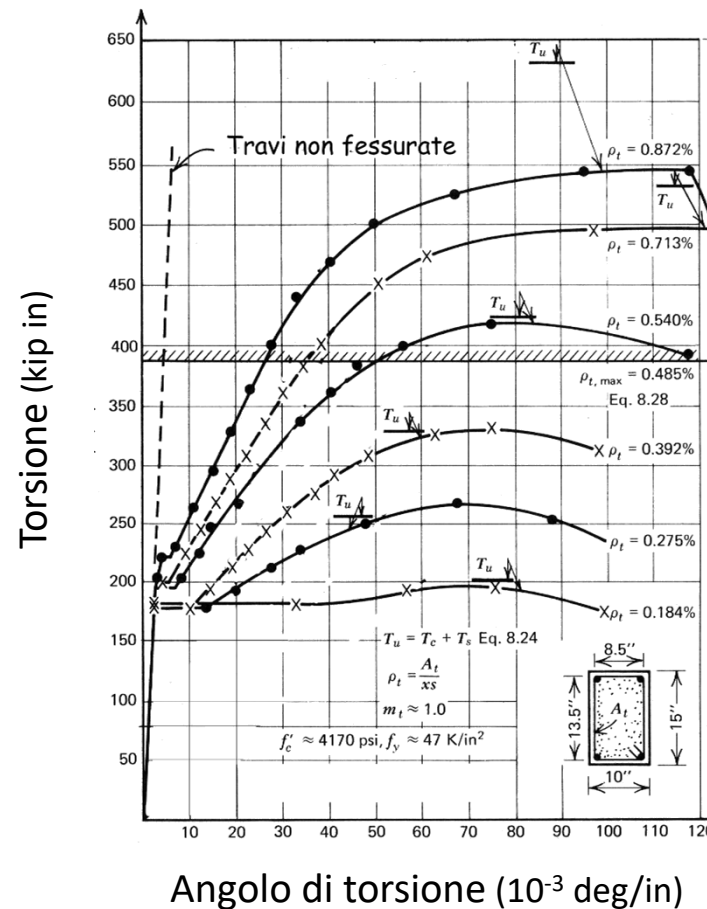
Quando le tensioni principali di trazione nel calcestruzzo attingono il valore di rottura subentra una radicale modifica del meccanismo resistente, con l'instaurarsi di un quadro fessurativo specifico, e con l'intervento diretto delle armature metalliche.

La rigidezza torsionale si riduce rispetto a quella nel primo stadio di comportamento, in funzione dell'armatura trasversale presente.

In particolare, la riduzione è significativa per bassi valori dell'armatura trasversale.

Torsione in elementi in c.a.

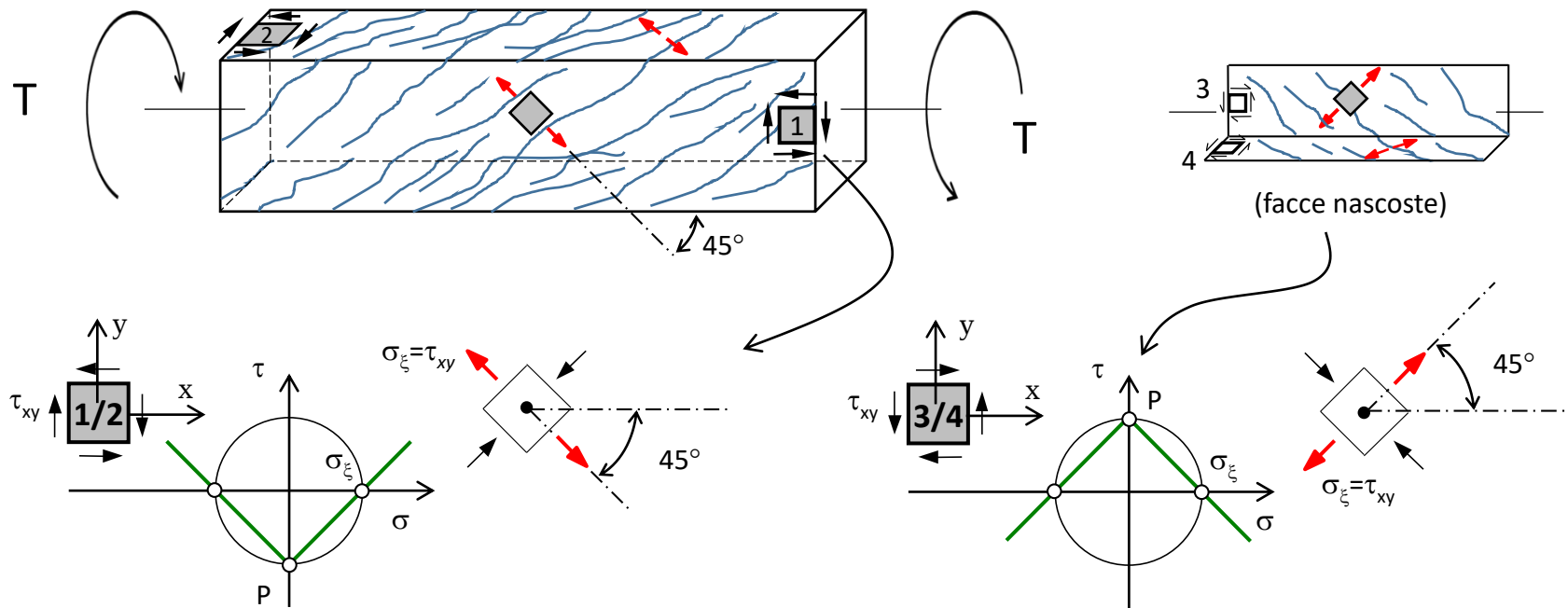
2° stadio di comportamento



Torsione in elementi in c.a.

2° stadio di comportamento

Le fessure nel calcestruzzo sono inclinate di un angolo pari all'incirca a 45° , e si sviluppano con un andamento a spirale lungo la superficie del solido.



Torsione in elementi in c.a.

2° stadio di comportamento

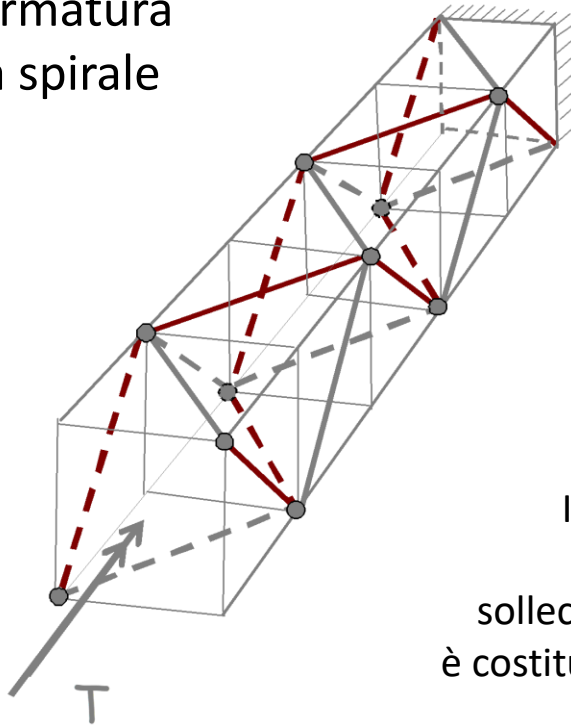
Solo uno strato di calcestruzzo, vicino alla superficie esterna dell'elemento e relativamente poco spesso, partecipa alla resistenza torsionale

Su ogni parete della trave può essere ipotizzato un traliccio costituito da bielle di conglomerato inclinate rispetto all'asse della trave ed armature contenute nello spessore della parete tubolare fittizia, che possono essere costituite da un'elica, o da barre parallele all'asse della trave e a staffe ad esse normali.

Il modello di trave reticolare

Elementi costitutivi

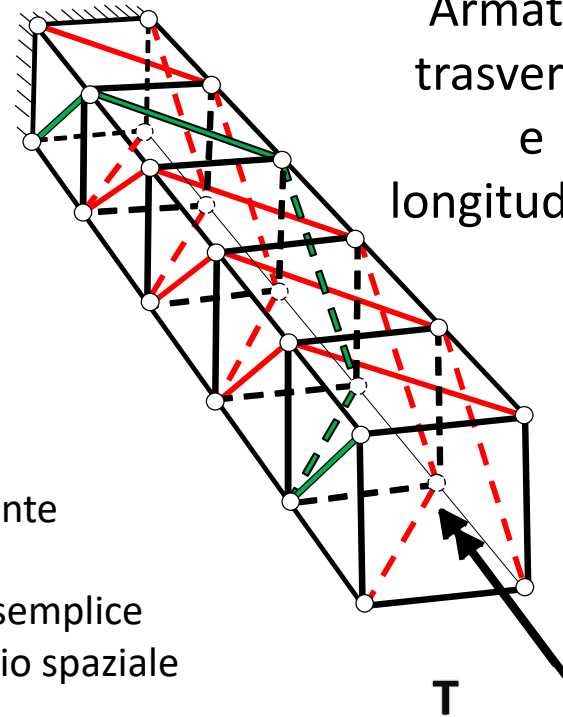
Armatura
a spirale



correnti longitudinali
diagonali tese (armatura a spirale)
diagonali compresse (calcestruzzo)

Il modello resistente
di travi in c.a.
sollecitate a torsione semplice
è costituito da un traliccio spaziale
composto da:

Armatura
trasversale
e
longitudinale



correnti longitudinali
(staffe) montanti tesi
(calcestruzzo) diagonali compresse

(ispirata a F. Leonhardt: calcolo di progetto e tecniche costruttive)

Modello di trave reticolare

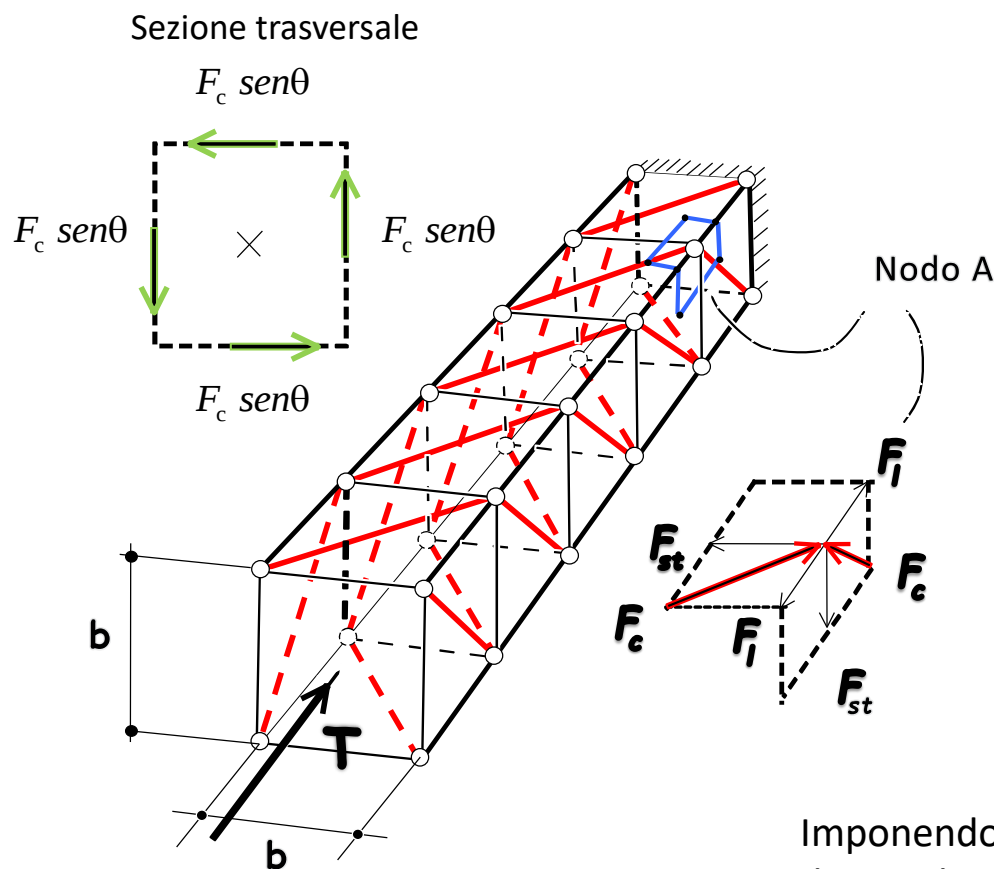
Verifiche di sicurezza

Nella logica degli stati limite la verifica di sicurezza strutturale viene ricondotta alla verifica dei quattro stati limite ultimi:

- Rottura per compressione delle bielle di calcestruzzo;
- Snervamento delle staffe;
- Snervamento dell'armatura longitudinale;
- Cedimenti degli ancoraggi o di nodi dell'elemento strutturale.

Momento torcente resistente

Staffe e ferri long. ($\theta=45^\circ$)



Dall'equilibrio alla traslazione del nodo A si ha:

$$F_c \sin \theta = F_{st} \quad F_c \cos \theta = F_l$$

Dall'equilibrio alla rotazione del generico tronco si ha:

$$4F_c \sin \theta \cdot \frac{b}{2} = T \quad \text{quindi} \quad F_c = \frac{T}{2 \sin \theta b}$$

La tensione di compressione della diagonale in calcestruzzo vale:

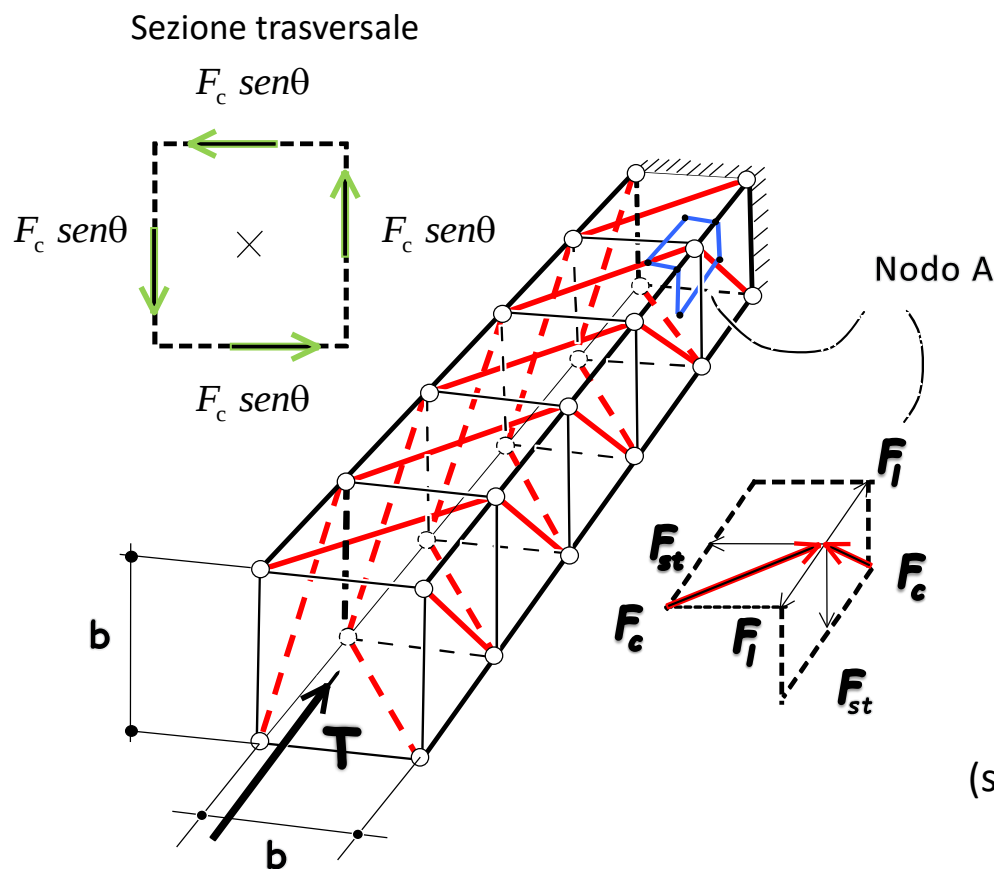
$$\sigma_c = \frac{T}{2 \sin \theta b} \cdot \frac{1}{b t \cos \theta} = \frac{T(1 + \cot^2 \theta)}{2 t A_k \cot \theta}$$

Imponendo per la tensione di compressione della diagonale in calcestruzzo il suo valore ultimo si ha:

$$T_{Rd,max} = \frac{2 v f_{cd} t A_k \cot \theta}{1 + \cot^2 \theta}$$

Momento torcente resistente

Staffe e ferri long. ($\theta=45^\circ$)



La tensione nelle staffe e nell'armatura longitudinale vale:

$$\text{(staffe)} \quad \sigma_{st} = \frac{T \Delta x}{2 b^2 \cotg \theta A_{st}}$$

$$\text{(arm. longitudinale)} \quad \sigma_l = \frac{2 T \cotg \theta u_k}{2 b^2 A_{sl}}$$

Imponendo per la tensione di trazione dell'armatura il suo valore di snervamento si ha:

$$\text{(staffe)} \quad T_{Rd,s(st)} = 2 A_k f_{ywd} \frac{A_{st}}{\Delta x} \cotg \theta$$

$$\text{(arm. long.)} \quad T_{Rd,s(l)} = \frac{2 A_k f_{yld} A_{lw}}{u_k \cotg \theta}$$

Metodi di calcolo a torsione

Eurocodice 2

Il momento torcente di calcolo
deve soddisfare le due condizioni seguenti:

$$T_{Ed} \leq T_{Rd,max}$$

$$T_{Ed} \leq T_{Rd,s}$$

dove :

$T_{Rd,max}$ momento torcente corrispondente
alla rottura per schiacciamento delle bielle compresse

$T_{Rd,s}$ momento torcente corrispondente
allo snervamento dell'armatura

Metodi di verifica a torsione

Eurocodice 2

Il momento torsionale resistente
corrispondente alla rottura per schiacciamento delle bielle compresse è :

$$T_{Rd,max} = 2v f_{cd} t A_k / (\cot \theta + \tan \theta)$$

dove :

- t spessore di parete equivalente $\leq A / u$
- A area totale della sezione retta racchiusa dal perimetro esterno
- u perimetro esterno
- A_k area compresa all'interno della linea media della sezione trasversale a pareti sottili
- θ angolo tra le bielle di calcestruzzo e l'asse longitudinale della trave

Metodi di verifica a torsione

Eurocodice 2

Il momento torsionale resistente
corrispondente alla rottura per schiacciamento delle bielle compresse è :

$$T_{Rd,max} = 2vf_{cd}t A_k / (\cot\theta + \tan\theta)$$

essendo:

$$v = 0.7 * (0.7 - f_{ck} / 200) \geq 0.35 \quad (f_{ck} \text{ in N/mm}^2)$$

Questo valore di v si applica se ci sono staffe solo lungo il perimetro esterno dell'elemento. Se si dispongono staffe chiuse su entrambi le facce di ciascun elemento della sezione cava equivalente, o di ciascun elemento di una sezione a cassone:

$$v = (0.7 - f_{ck}/200) \geq 0.5 \quad (f_{ck} \text{ in N/mm}^2)$$

Metodi di verifica a torsione

Eurocodice 2

$$T_{Rd,s} = \min \left\{ \begin{array}{l} 2A_k f_{ywd} \frac{A_{sw}}{s} \cotg \theta \\ \frac{2A_k f_{yld} A_{lw}}{u_k \cotg \theta} \end{array} \right.$$

dove :

u_k è il perimetro dell'area A_k

s è il passo delle staffe

f_{ywd} è la tensione di snervamento di calcolo delle staffe

f_{yld} è la tensione di snervamento di calcolo dell'armatura longitudinale A_{sl}

A_{sw} è l'area della sezione trasversale delle staffe

A_{sl} è l'area aggiuntiva di acciaio longitudinale richiesta per la torsione

Metodi di progetto a torsione

Eurocodice 2

Dalla relazione

$$T_{Rd,s} = \min \left\{ \begin{array}{l} 2A_k f_{ywd} \frac{A_{sw}}{s} \cotg \theta \\ \frac{2A_k f_{yld} A_{lw}}{u_k \cotg \theta} \end{array} \right.$$

posto $T_{Sd} = T_{Rd,s}$, le aree aggiuntive di staffe e di barre longitudinali per torsione sono fornite dalle equazioni:

$$\frac{A_{sw}}{s} = \frac{T_{Ed}}{2A_k f_{ywd} \cotg \theta}$$

$$A_{lw} = \frac{T_{Ed} u_k \cotg \theta}{2A_k f_{yld}}$$

Armatura a torsione

Eurocodice 2

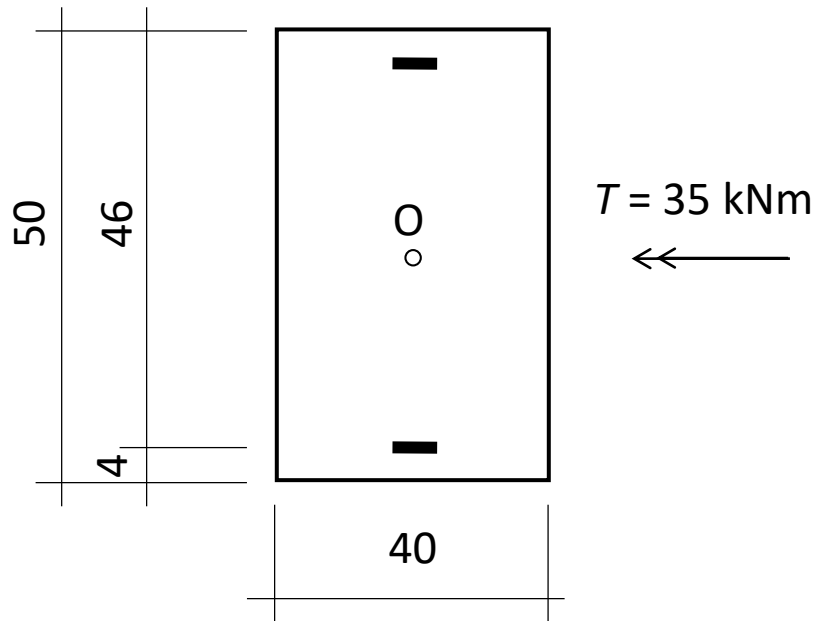
Le staffe per la torsione devono di regola essere o chiuse e ancorate per sovrapposizione e formare un angolo di 90° con l'asse dell'elemento strutturale.

La distanza longitudinale fra le staffe di torsione non deve di regola essere maggiore di $| u_k/8 |$

Le barre longitudinali devono di regola essere disposte in modo tale che ci sia almeno una barra per angolo, essendo le rimanenti uniformemente distribuite lungo il perimetro delle staffe e distanti fra loro non più di $| 350 \text{ mm } |$.

Esempio n. 5

3° stadio di comportamento



Lo spessore della sezione tubolare è :

$$t = \max \begin{cases} 2c = 8 \text{ cm} \\ A/u = 2400 / 200 = 12 \text{ cm} \end{cases}$$

Dunque :

$$a_k = 60 - 12 = 48 \text{ cm}$$

$$b_k = 40 - 12 = 28 \text{ cm}$$

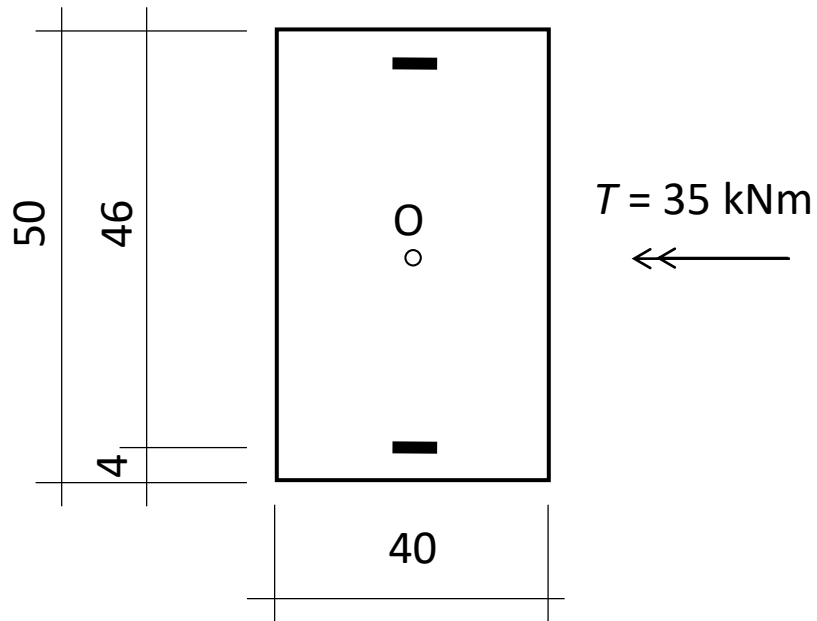
$$A_k = 48 \times 28 = 1344 \text{ cm}^2$$

$$T_{Rd,max} = \frac{2 \cdot 0.5 \cdot 14.17 \cdot 12 \cdot 1344 \cdot \cotg \theta}{1 + \cotg^2 \theta} \cdot 10^{-3} = 228.5 \frac{\cotg \theta}{1 + \cotg^2 \theta}$$

Quindi : $T_{Rd,max} = 114.3 \text{ kNm}$ se $\cotg \theta = 1$ e $T_{Rd,max} = 78.8 \text{ kNm}$ se $\cotg \theta = 2.5$

Esempio n. 6

3° stadio di comportamento



L'armatura necessaria a torsione ($\cotg\theta=1$) è :

$$A_{st} = \frac{35 \cdot 100}{2 \cdot 1344 \cdot 391.3 \cdot 1} \cdot 10^3 = 3.33$$

$$A_{s,lon} = \frac{35 \cdot 152 \cdot 1}{2 \cdot 1344 \cdot 391.3} \cdot 10^3 = 5.06$$

Se si dispongono staffe $\phi 8/20$ ($>u/8$) e si impone :

$$T_{Rd,s(st)} = 2A_k f_{yd} \frac{A_{st}}{s} \cotg\theta = T_{Ed}$$

$$\cotg\theta = \frac{T_{Ed} s}{2A_k f_{yd} A_{st}} = \frac{35 \cdot 100}{2 \cdot 1344 \cdot 391.3 \cdot 2.5} \cdot 10^3 = 1.331$$

$$A_{s,lon} = \frac{35 \cdot 152 \cdot 1.331}{2 \cdot 1344 \cdot 391.3} \cdot 10^3 = 6.73 \text{ cm}^2$$

Effetti combinati

Procedimento generale

Si usa lo stesso procedimento descritto per la torsione pura per definire una sezione chiusa equivalente a pareti sottili. Le tensioni normali e tangenziali in tale sezione si determinano con i metodi di calcolo convenzionali elastico o plastico.

Quando siano state calcolate le tensioni, l'armatura necessaria in ogni punto della sezione a pareti sottili può essere determinata con le formule per lo stato di tensione biassiale. Analogamente può essere determinata la tensione del calcestruzzo.

L'armatura così trovata, se non è praticamente realizzabile, può essere sostituita con un'altra disposizione staticamente equivalente, a condizione che gli effetti di tale modifica siano presi in conto nelle zone vicine a fori e alle estremità della trave.

Effetti combinati

Procedimento generale

La tensione nel calcestruzzo risultante da taglio e torsione combinati nelle singole pareti della sezione equivalente a pareti sottili non deve, di regola, essere maggiore di $\sigma_c = v f_{cd}$.

Per sezioni a cassone, con armatura su entrambe le facce di ogni parete, nel caso di tensioni tangenziali originate da taglio e torsione combinati v può essere assunto pari a

$$v = (0,7 - f_{ck}/200) \geq 0,5.$$

Effetti combinati

Torsione combinata con flessione e/o forze longitudinali

Le armature longitudinali richieste per flessione e torsione devono, di regola, essere determinate separatamente.

Si applicano inoltre le seguenti regole:

- **nella zona tesa per flessione**, l'armatura longitudinale di torsione va di regola aggiunta a quella richiesta per resistere alla flessione e alle forze assiali;
- **nella zona compressa per flessione**, se la tensione di trazione dovuta alla torsione è minore della tensione di compressione nel calcestruzzo dovuta alla flessione, non è necessaria armatura longitudinale aggiuntiva per torsione.

Effetti combinati

Torsione combinata con taglio

Il momento torcente di calcolo e il taglio di calcolo applicato, T_{Ed} e V_{Ed} rispettivamente, devono di regola soddisfare la seguente condizione:

$$\frac{T_{Ed}}{T_{Rd,max}} + \frac{V_{Ed}}{V_{Rd,max}} \leq 1$$

dove :

$T_{Rd,max}$ è il momento resistente torcente di calcolo

$V_{Rd,max}$ è il taglio resistente di calcolo
relativo a una biella inclinata di un angolo θ

Effetti combinati

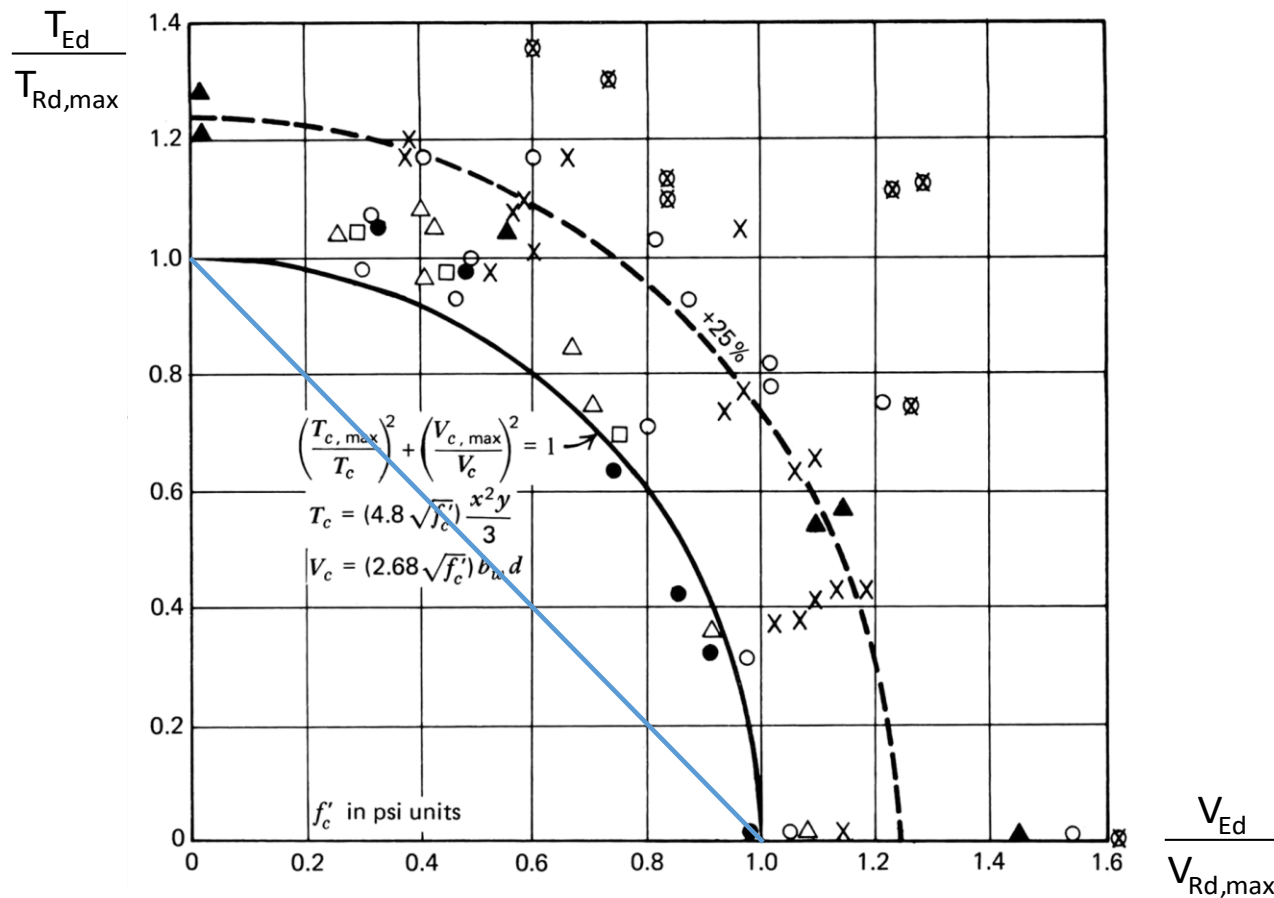
Torsione combinata con taglio

I calcoli per il progetto delle staffe possono essere effettuati separatamente, per la torsione secondo e per il taglio.

L'angolo θ delle bielle equivalenti di calcestruzzo è lo stesso sia per la torsione che per il taglio.

EFFETTI COMBINATI

Torsione combinata con taglio



Fine