

Lezione

TECNICA DELLE COSTRUZIONI

Prof. Pier Paolo Rossi

Università degli Studi di Catania

IL MOMENTO FLETTENTE

Verifica di sezioni inflesse

Momento flettente

1° stadio (Formule di Scienza delle Costruzioni)

Con riferimento alla sezione omogeneizzata vale la formula di Scienza delle Costruzioni

$$\sigma = E(\varepsilon_G + \chi_x x + \chi_y y)$$

Pertanto:

$$N = E\varepsilon_G \int dA + E\chi_x \int x dA + E\chi_y \int y dA = E\varepsilon_G A = 0 \longrightarrow \boxed{\varepsilon_G = 0}$$

$$M_x = E\varepsilon_G \int y dA + E\chi_x \int xy dA + E\chi_y \int y^2 dA = E\chi_y I_x$$

$$M_y = E\varepsilon_G \int x dA + E\chi_x \int x^2 dA + E\chi_y \int xy dA = - E\chi_x I_y$$

$$\text{essendo } \int x dA = \int y dA = 0 \text{ e } \int xy dA = 0$$

Momento flettente

1° stadio (Formule di Scienza delle Costruzioni)

Con riferimento alla sezione omogeneizzata vale
la formula di Scienza delle Costruzioni

$$\sigma = E(\varepsilon_G + \chi_x x + \chi_y y)$$

Curvatura nel piano x-z



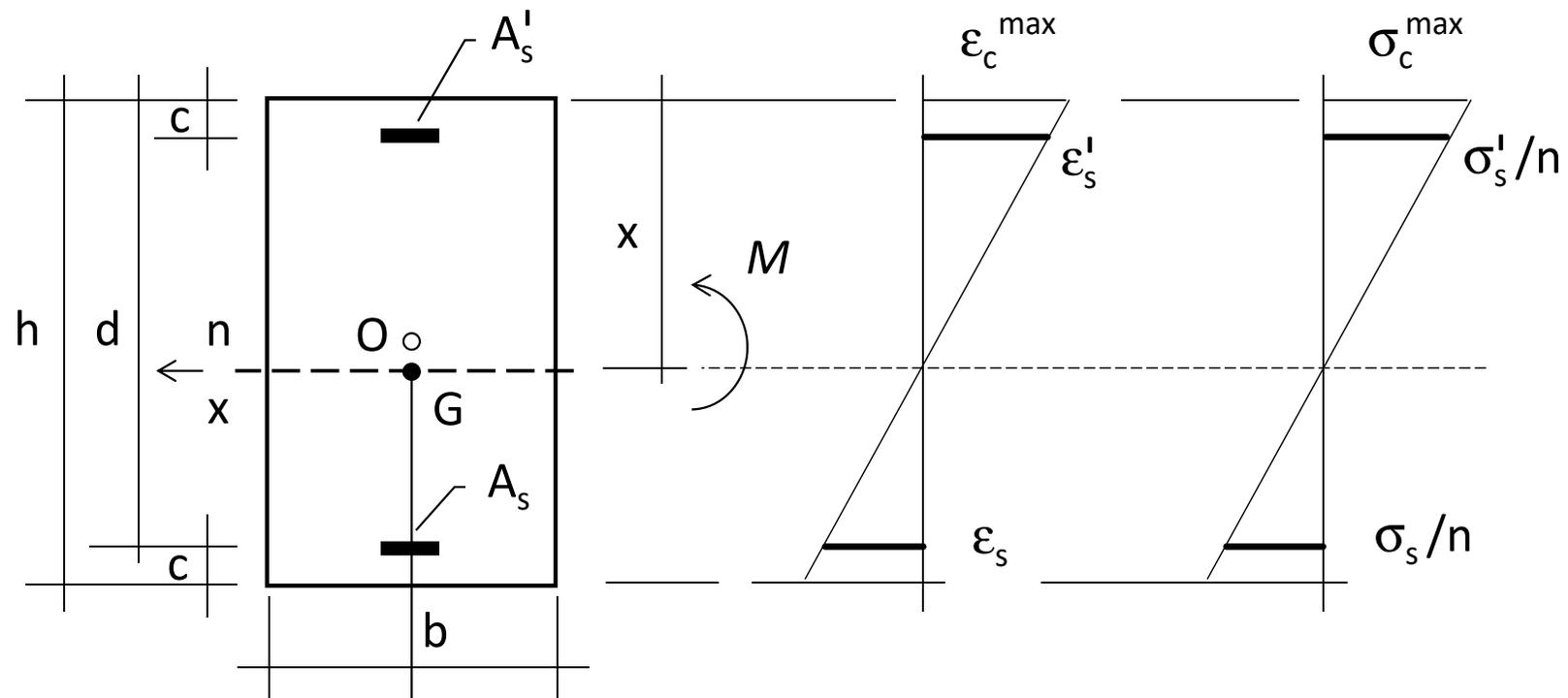
Curvatura nel piano y-z

Poiché $\varepsilon_G = 0$

$$\sigma = -\frac{M_y}{I_y} x + \frac{M_x}{I_x} y$$

Momento flettente

1° stadio (Calcolo delle tensioni)

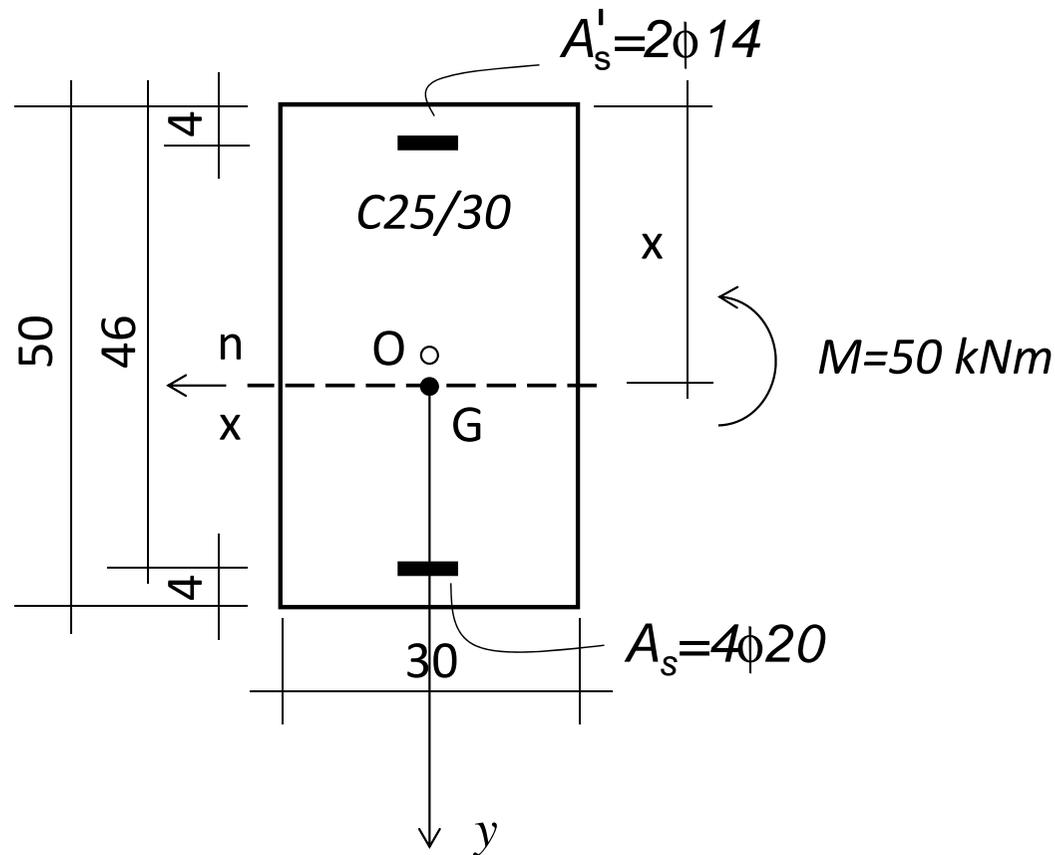


$$\sigma_c = \frac{M_x}{I_x} y \quad \sigma_s = n \frac{M_x}{I_x} y$$

Nota: il punto O coincide con G
se le armature A_s e A'_s sono uguali

Momento flettente

1° stadio (Esercizio)



Dati:

Geometria della sezione

Armature

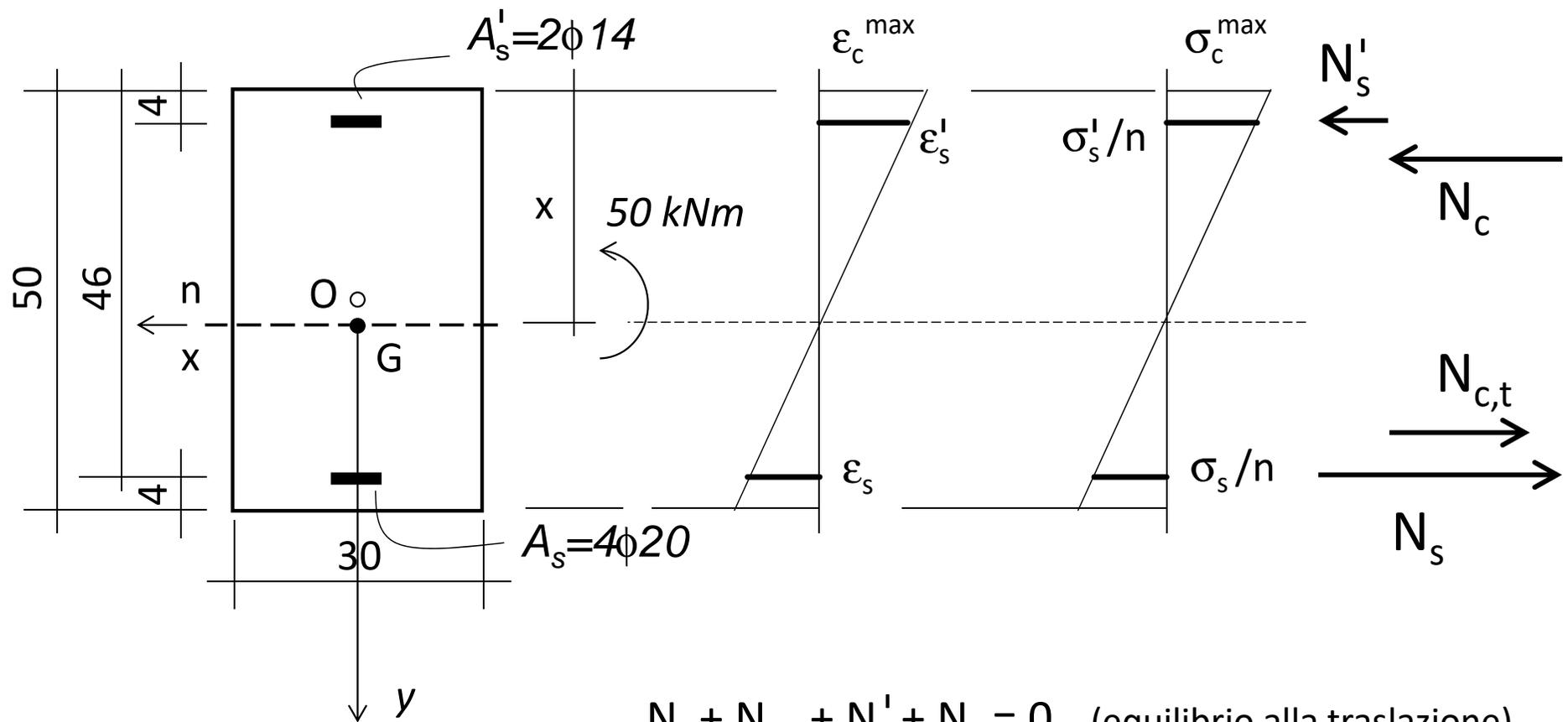
Incognite:

Posizione dell'asse neutro

Tensioni massime

Momento flettente

1° stadio (Esercizio)



$$N_c + N_{c,t} + N_s' + N_s = 0 \quad (\text{equilibrio alla traslazione})$$

oppure

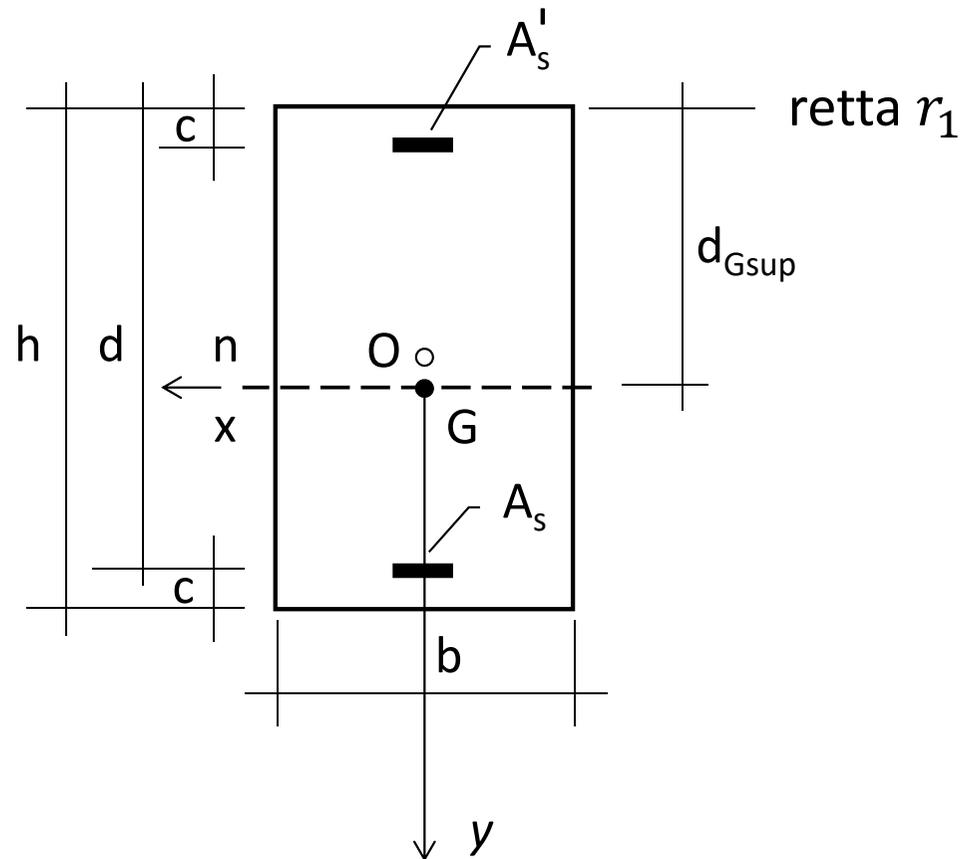
$$S_n = 0$$

(asse neutro baricentrico)

1. Calcolo della posizione dell'asse neutro

Momento flettente

1° stadio (Esercizio)



$$S_n = 0 = S_{r1} + A d_{G,sup}$$

(l'asse neutro è baricentrico)

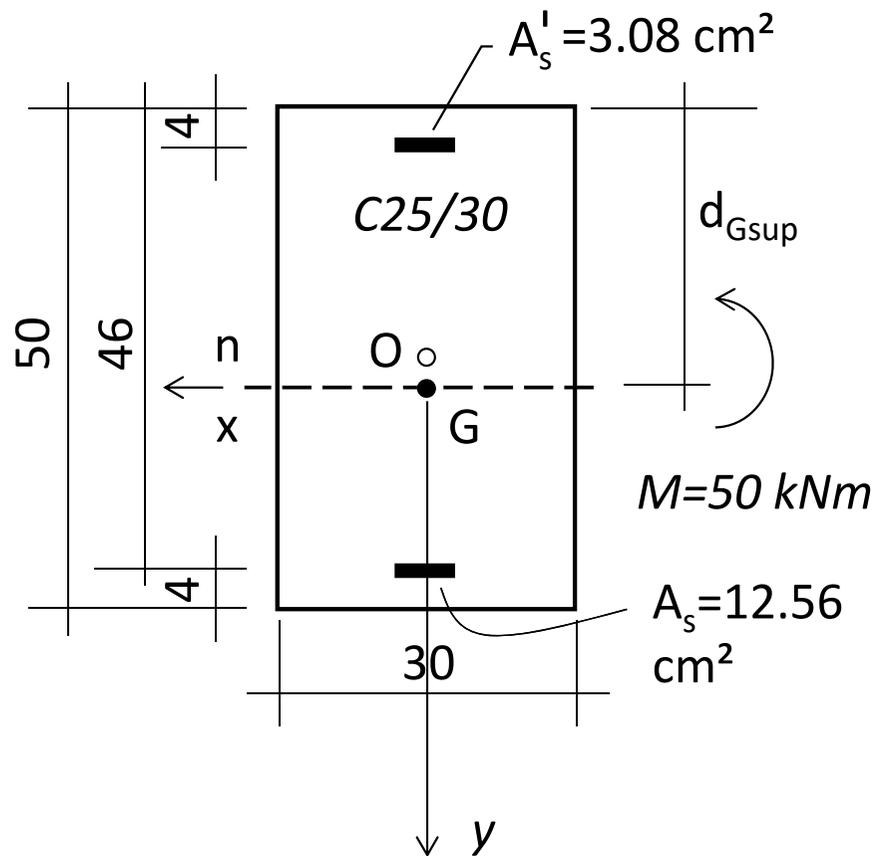
$$\dots \quad d_{G,sup} = S_{r1} / A$$

$$S_{r1} = S_{cls} + S_{As} + S_{A's}$$

dove $S_{cls} = bh^2/2$; $S_{as} = n A_s d$; $S_{A's} = n A'_s c$

Momento flettente

1° stadio (Esercizio)



$S_n = 0$
(l'asse neutro è baricentrico)

$$A = bh + n(A_s + A'_s) = 30 \cdot 50 + 6.35 \cdot (12.56 + 3.08) = 1599.3 \text{ cm}^2$$

$$S = bh^2/2 + n(A_s d + A'_s c) = 30 \cdot 50^2/2 + 6.35 \cdot (12.56 \cdot 46 + 3.08 \cdot 4) =$$

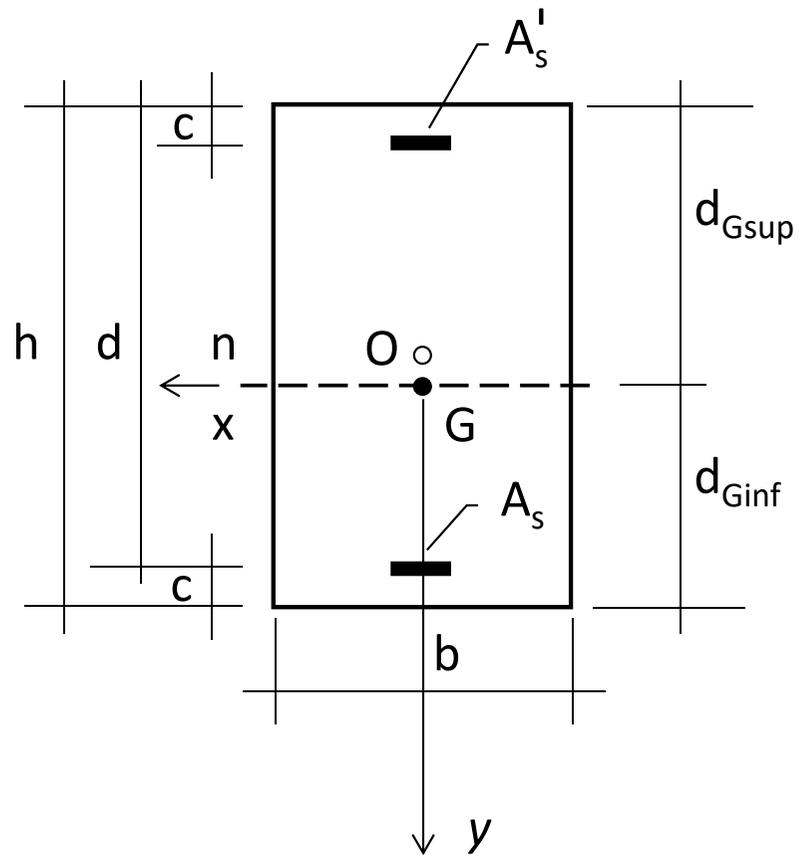
41247 cm³ (calcolato rispetto ad un asse passante per il bordo superiore della sezione)

$$d_{G,\text{sup}} = S/A = 41247/1599.3 = 25.79 \text{ cm}$$

$$d_{G,\text{inf}} = h - d_{G,\text{sup}} = 50 - 25.79 = 24.21 \text{ cm}$$

Momento flettente

1° stadio (Esercizio)



2. Calcolo del momento d'inerzia

$$I_x = I_{cls} + I_{A_s} + I_{A'_s}$$

dove :

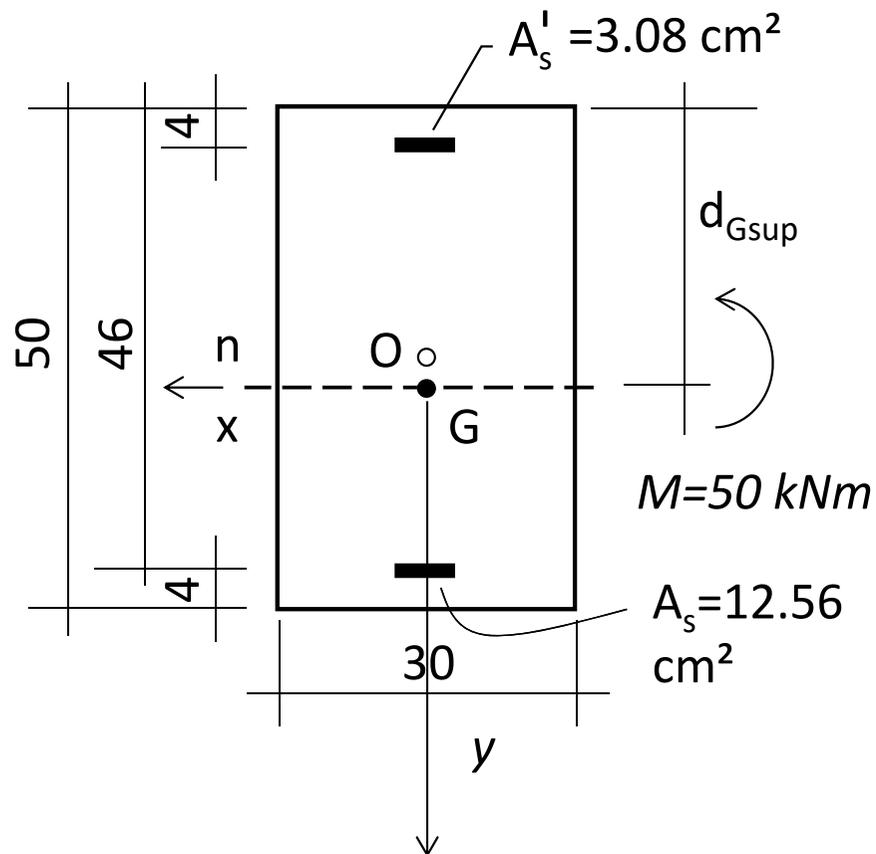
$$I_{cls} = b d_{G,sup}^3/3 + b d_{G,inf}^3/3$$

$$I_{A_s} = n A_s (d_{G,inf} - c)^2$$

$$I_{A'_s} = n A'_s (d_{G,sup} - c)^2$$

Momento flettente

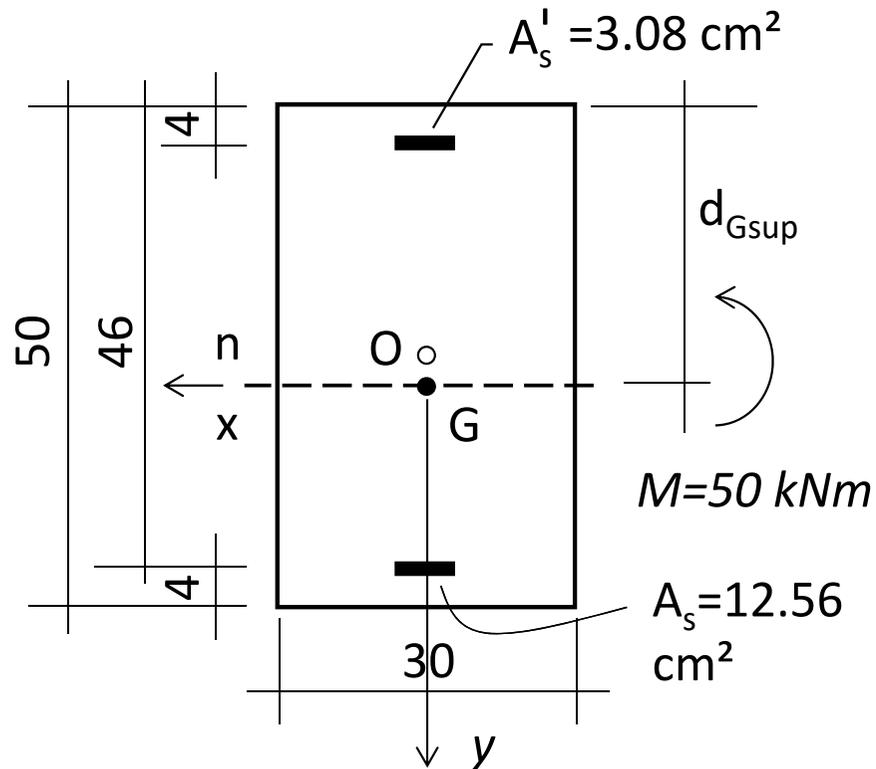
1° stadio (Esercizio)



$$I = b d_{G,\text{sup}}^3/3 + b d_{G,\text{inf}}^3/3 + n[A_s(d_{G,\text{inf}} - c)^2 + A'_s(d_{G,\text{sup}} - c)^2] =$$
$$30 \cdot (24.21^3 + 25.79^3)/3 + 6.35 \cdot [12.56 \cdot (24.21 - 4)^2 + 3.08 \cdot (25.79 - 4)^2] =$$
$$355298 \text{ cm}^4$$

Momento flettente

1° stadio (Esercizio)



3. Calcolo delle tensioni

$$\sigma_{c,sup} = \frac{50 \cdot 10^6}{(355298 \cdot 10^4)} (-25.79) \cdot 10 =$$

$$-3.63 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{c,inf} = 1.407 \cdot 10^{-2} \cdot 24.21 \cdot 10 =$$

$$3.41 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{s,sup} = 6.35 \cdot 0.01407 \cdot (-25.79 + 4) \cdot 10 = -19.5 \text{ MPa}$$

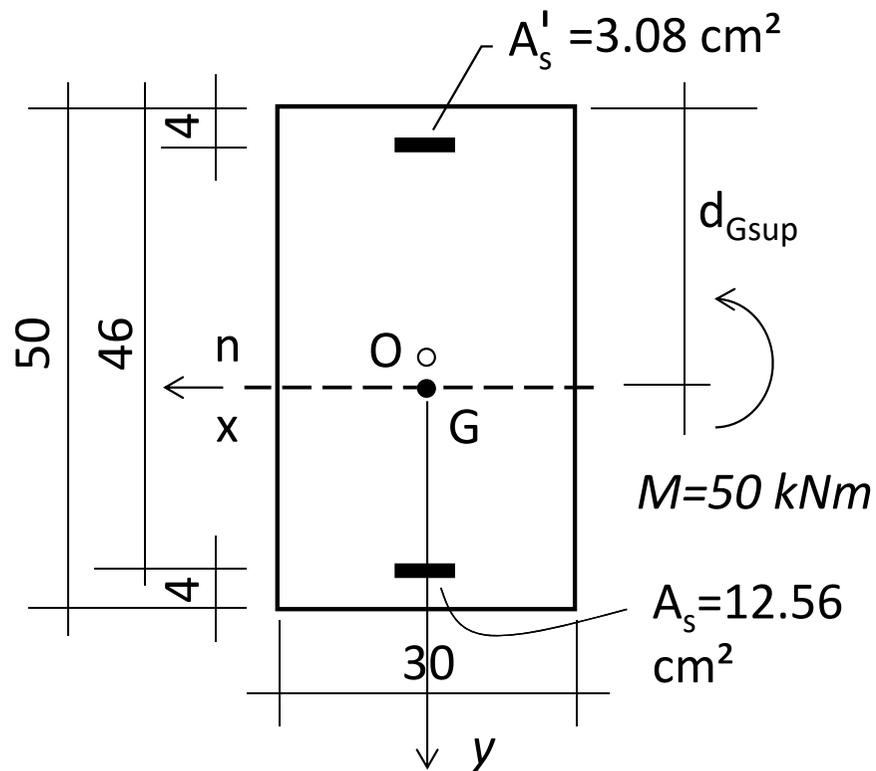
$$f_{cfk} = 2.16 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{s,inf} = 6.35 \cdot 0.01407 \cdot (24.21 - 4) \cdot 10 = 18.1 \text{ MPa}$$

La sezione è fessurata

Momento flettente

1° stadio (Esercizio)



Calcolo del momento di prima fessurazione

$$\sigma_c = \frac{M_x}{I_x} d_{G,\text{inf}} = f_{\text{cfk}}$$

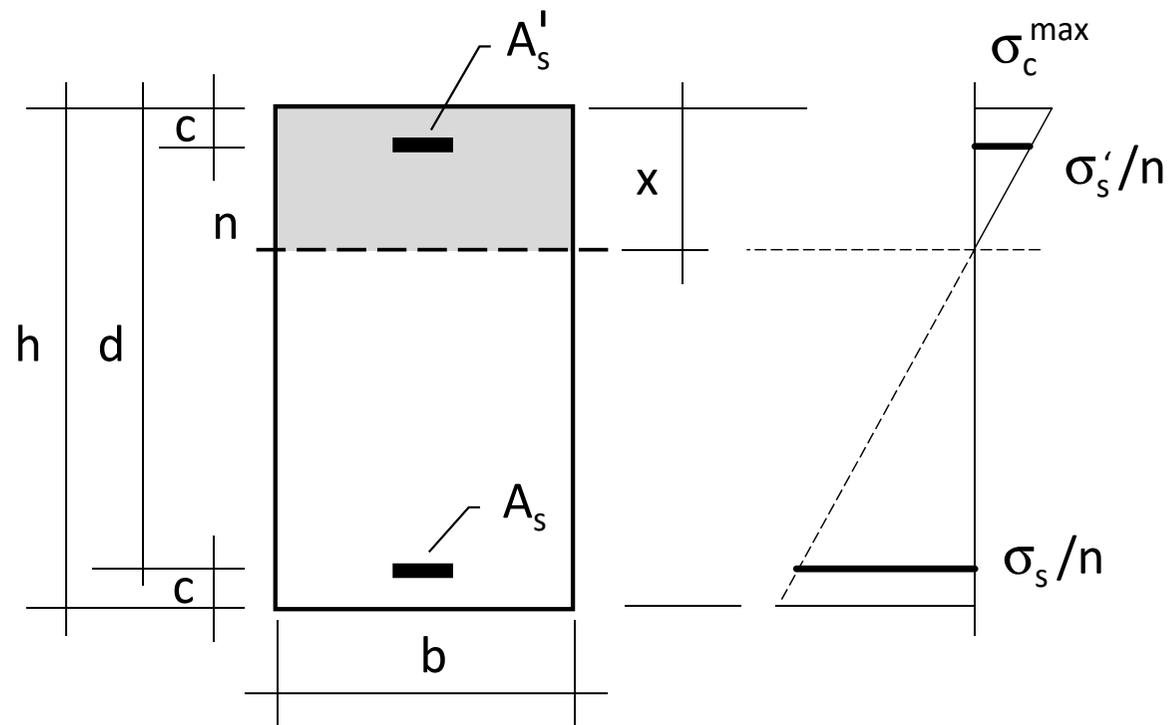
dove $f_{\text{cfk}} = 2.16 \text{ MPa}$

(per calcestruzzo C25/30)

$$M_f = \frac{355298 \cdot 10^4 \cdot 2.16 \cdot 10^{-6}}{(24.21 \cdot 10)} = 31.7 \text{ kNm}$$

Momento flettente

2° stadio



Dati:

Geometria della sezione

Armature

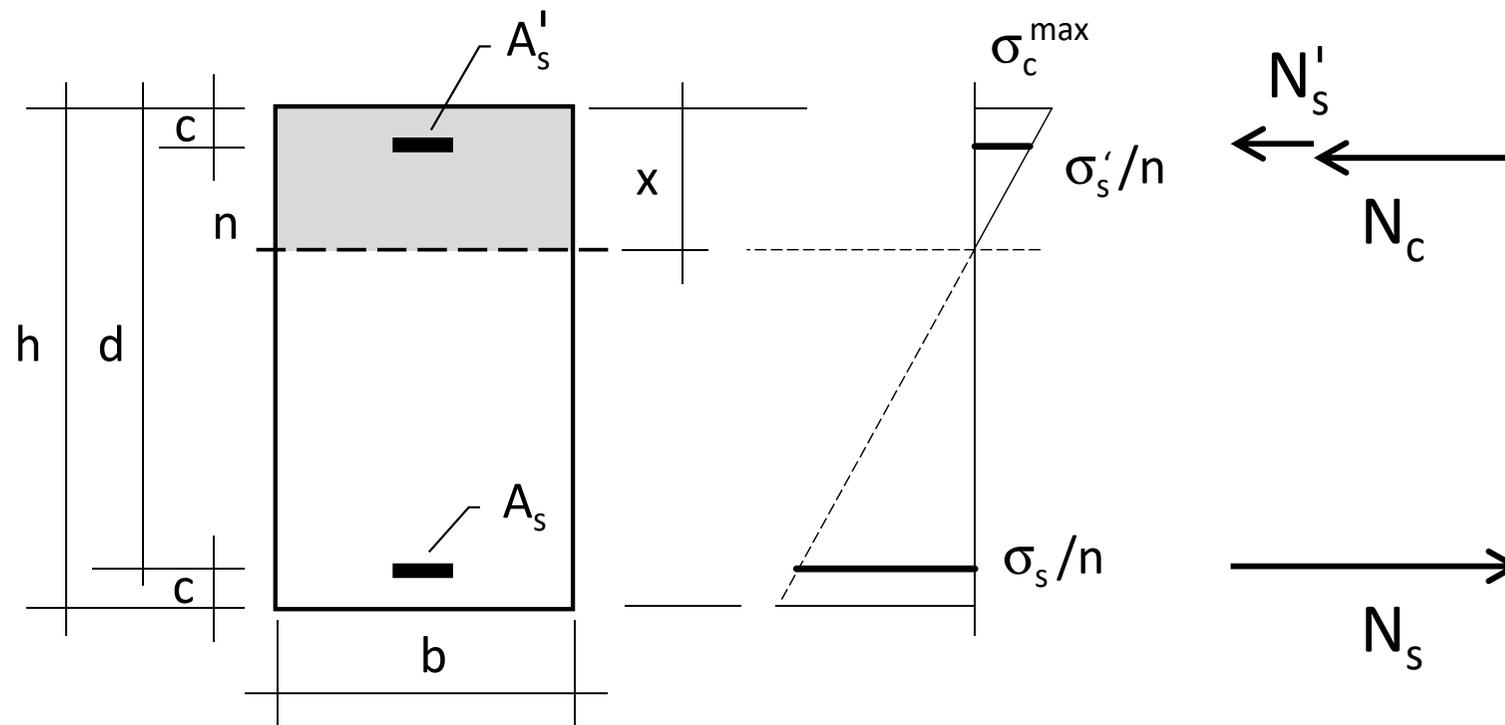
Incognite:

Posizione dell'asse neutro

Tensioni massime

Momento flettente

2° stadio



Per trovare l'asse neutro:

$$N_c + N'_s + N_s = 0$$

(equilibrio alla traslazione)

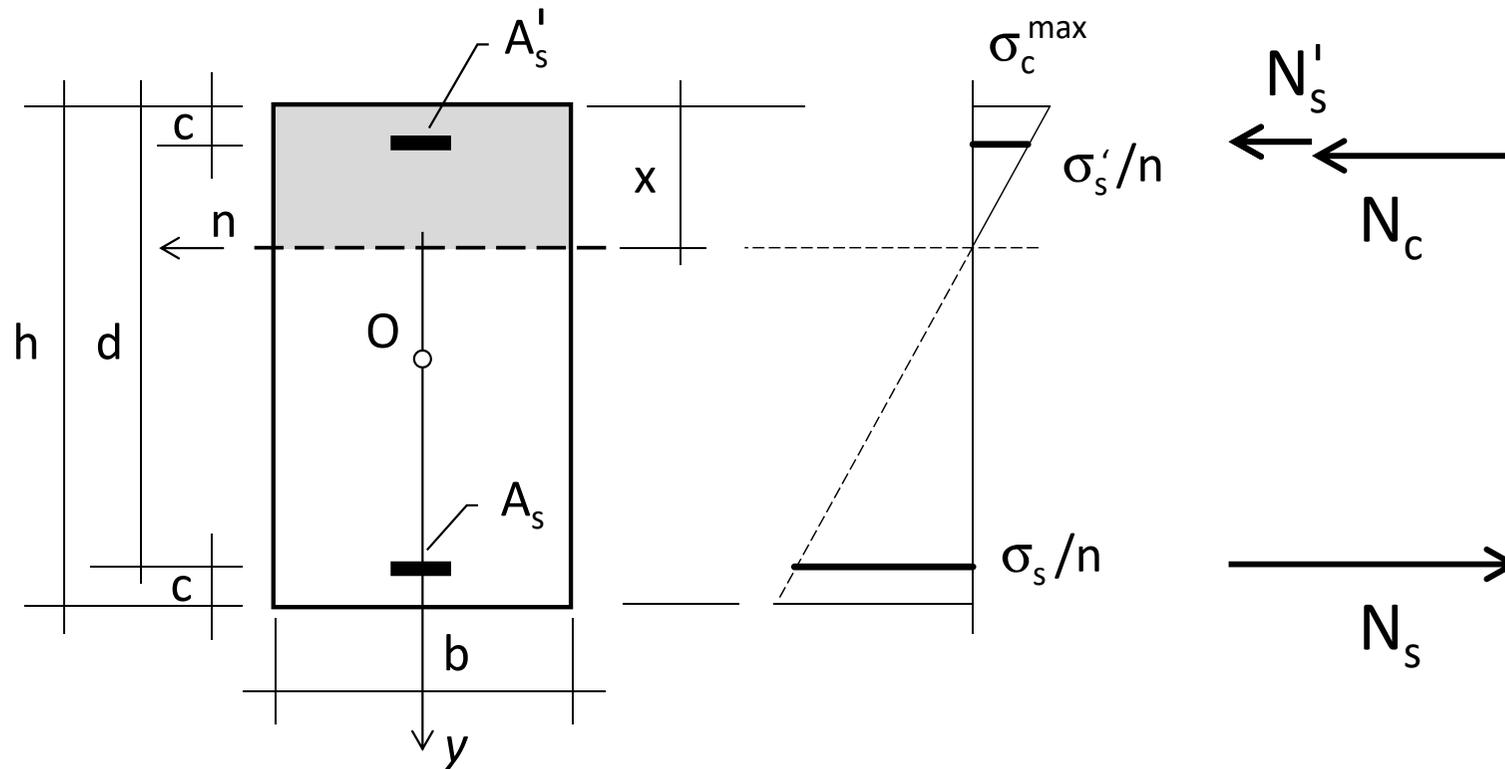
oppure ...

$$S_n = 0$$

(l'asse neutro è baricentrico)

Momento flettente

2° stadio



$$S_n = -\frac{bx^2}{2} - nA'_s(x-c) + nA_s(d-x) = 0$$

ovvero ...
$$\frac{b}{2}x^2 + n(A_s + A'_s)x - n(A_s d + A'_s c) = 0$$

Momento flettente

2° stadio

Equazione di secondo grado, con soluzione:

$$x = \frac{n(A_s + A'_s)}{b} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2b(A_s d + A'_s c)}{n(A_s + A'_s)^2}} \right]$$

e poi:

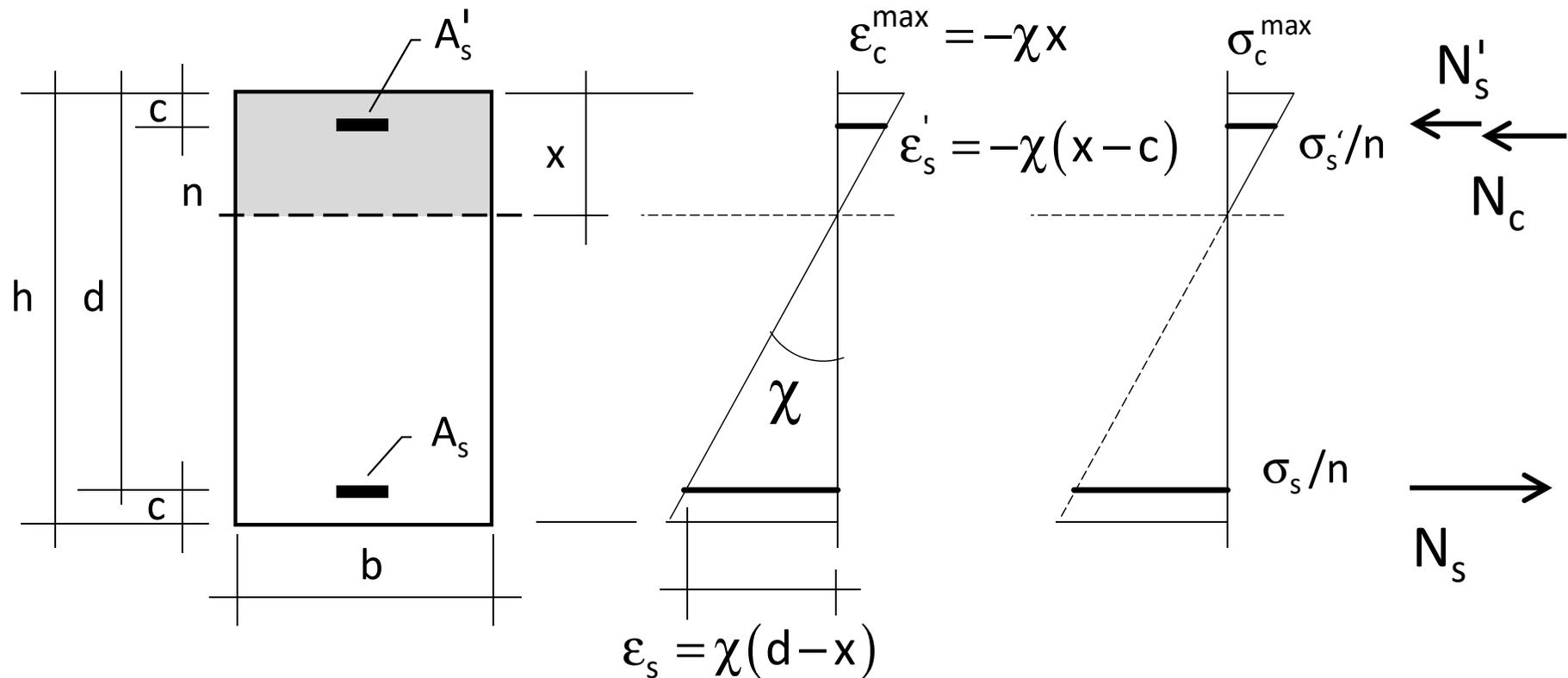
$$\sigma_c = -\frac{M_x}{I_x} y \quad \sigma_s = -n \frac{M_x}{I_x} y$$

con:

$$I_x = \frac{b x^3}{3} + n A'_s (x - c)^2 + n A_s (d - x)^2$$

Momento flettente

2° stadio ($N_c + N'_s + N_s = S_n = 0$)



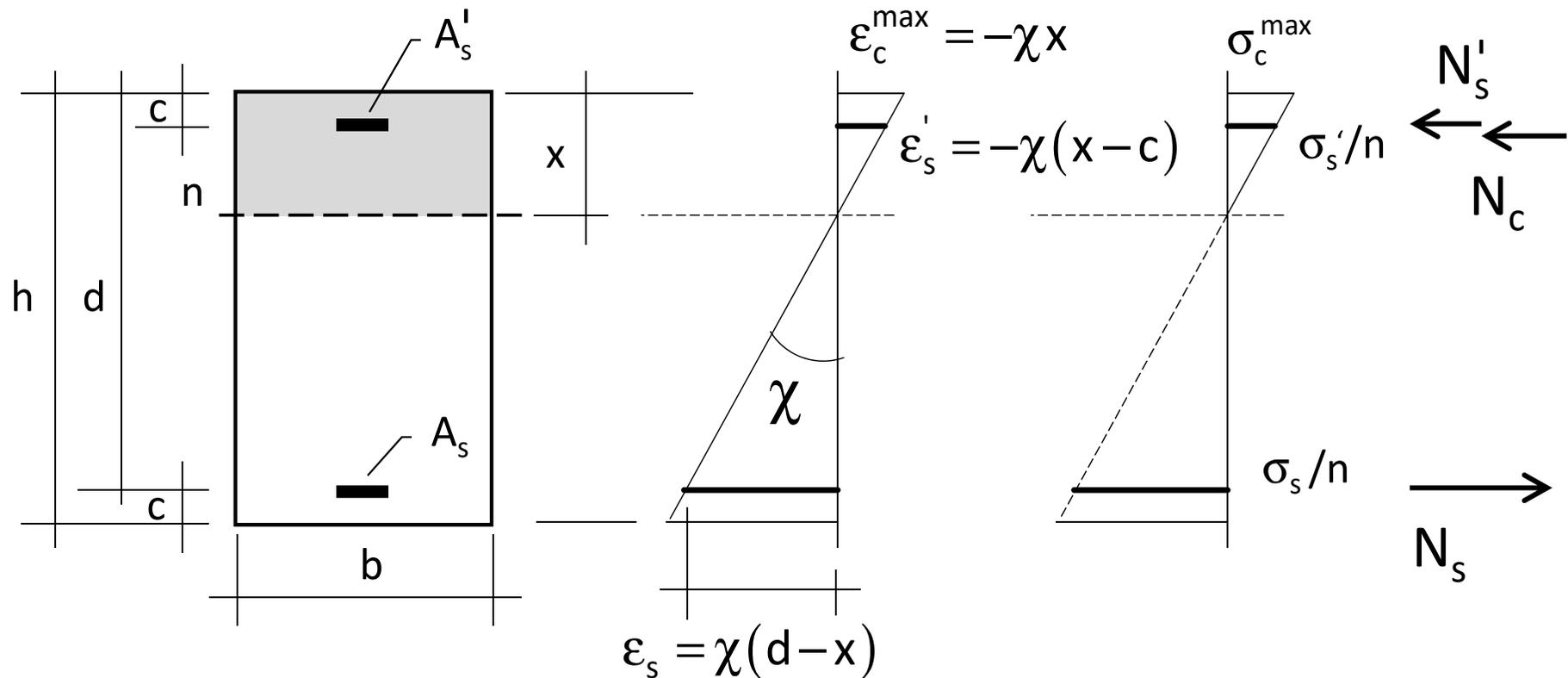
$$N_c = \frac{bx}{2} \sigma_c^{\max} = -E_c \chi \frac{bx^2}{2}$$

$$N_s = \sigma_s A_s = E_c \chi n A_s (d - x)$$

$$N'_s = \sigma'_s A'_s = -E_c \chi n A'_s (x - c)$$

Momento flettente

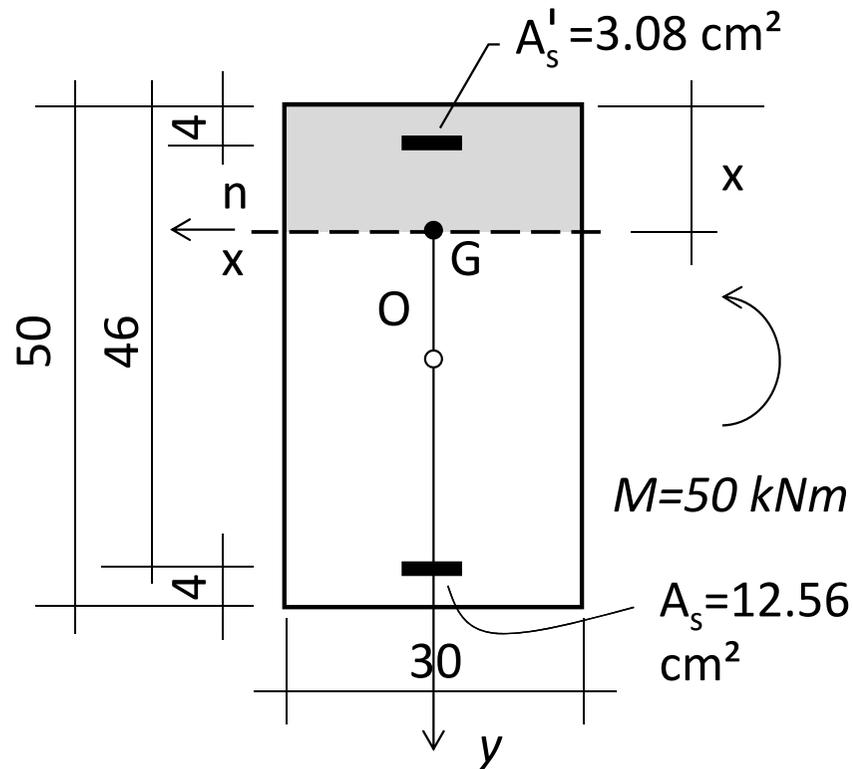
2° stadio ($N_c + N'_s + N_s = S_n = 0$)



$$N_c + N_s + N'_s = -E_c \chi \frac{bx^2}{2} + E_c \chi n A_s (d - x) - E_c \chi n A'_s (x - c) = 0$$

Momento flettente

2° stadio (Esercizio)



1. Calcolo della posizione dell'asse neutro

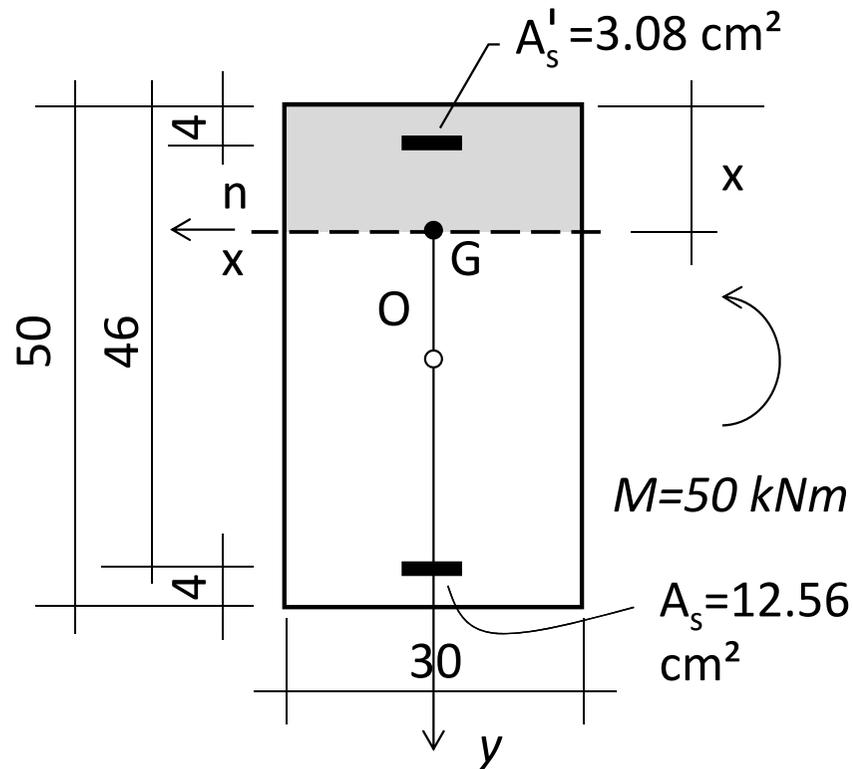
$$x = \frac{n (A_s + A'_s)}{b} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2 b (A_s d + A'_s c)}{n (A_s + A'_s)^2}} \right]$$

Se i carichi sono di breve durata ovvero...
 $n = 6.35$ (per calcestruzzo C25/30)

$$x = \frac{6.35 (12.56 + 3.08)}{30} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 30 (12.56 \cdot 46 + 3.08 \cdot 4)}{6.35 (12.56 + 3.08)^2}} \right] = 12.84 \text{ cm}$$

Momento flettente

2° stadio (Esercizio)



2. Calcolo del momento di inerzia

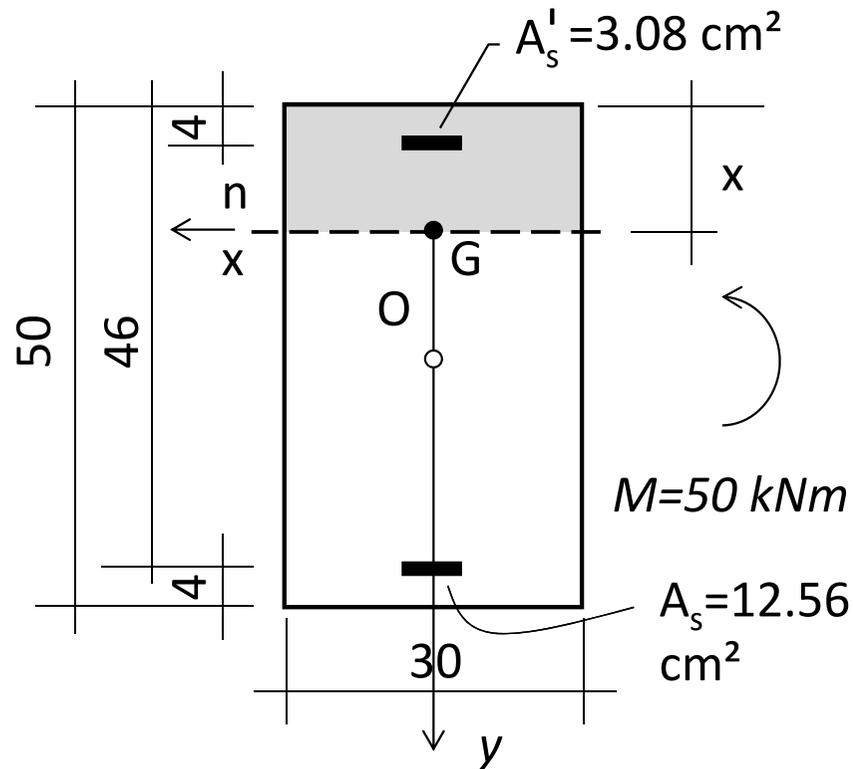
$$I_x = \frac{b x^3}{3} + n A'_s (x - c)^2 + n A_s (d - x)^2$$

Se i carichi sono di breve durata ovvero...
 $n=6.35$

$$I = \frac{30 \cdot 12.84^3}{3} + 6.35 \left[3.08 (12.84 - 4)^2 + 12.56 (46 - 12.84)^2 \right] = 110385 \text{ cm}^4$$

Momento flettente

2° stadio (Esercizio)



3. Calcolo delle tensioni

$$\sigma_c = \frac{M_x}{I_x} y \quad \sigma_s = n \frac{M_x}{I_x} y$$

Se i carichi sono di breve durata ovvero...
 $n=6.35$

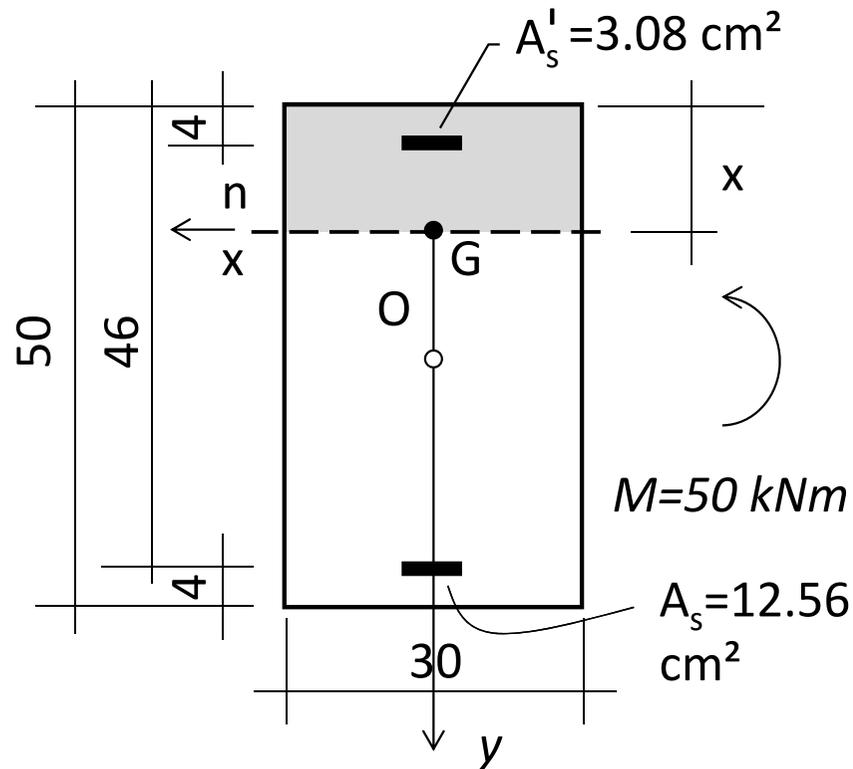
$$\sigma_s' = -6.35 \cdot 0.0453 \cdot (12.84 - 4) \cdot 10 = -25.4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_s = 6.35 \cdot 0.0453 \cdot (46 - 12.84) \cdot 10 = 95.4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{c,\text{sup}} = -\frac{50 \cdot 10^6}{110385 \cdot 10^4} 12.84 \cdot 10 = -5.81 \text{ MPa}$$

Momento flettente

2° stadio (Esercizio)



1. Calcolo della posizione dell'asse neutro

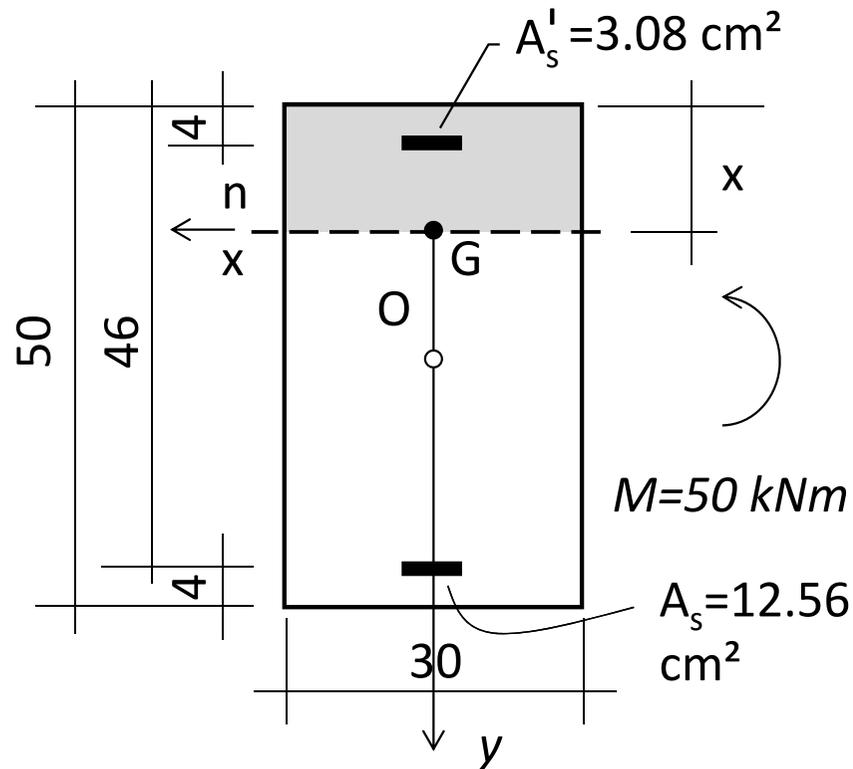
$$x = \frac{n (A_s + A'_s)}{b} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2 b (A_s d + A'_s c)}{n (A_s + A'_s)^2}} \right]$$

Se i carichi sono di lunga durata ovvero...
 $n=15$

$$x = \frac{15 (12.56 + 3.08)}{30} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 30 (12.56 \cdot 46 + 3.08 \cdot 4)}{15 (12.56 + 3.08)^2}} \right] = 17.70 \text{ cm}$$

Momento flettente

2° stadio (Esercizio)



2. Calcolo del momento di inerzia

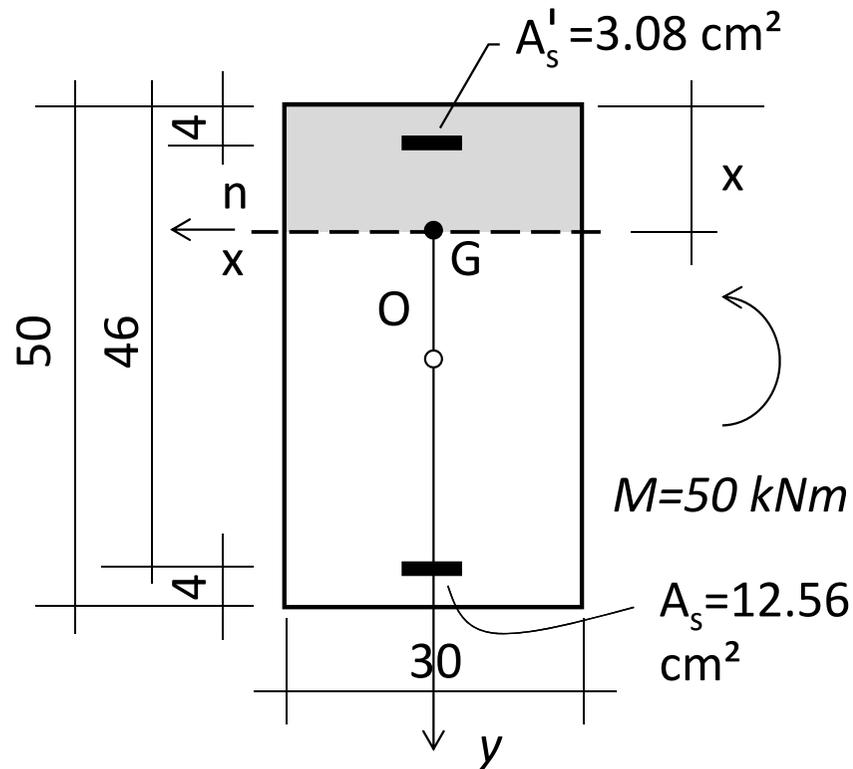
$$I_x = \frac{b x^3}{3} + n A'_s (x - c)^2 + n A_s (d - x)^2$$

Se i carichi sono di lunga durata ovvero...
 $n = 15$

$$I = \frac{30 \cdot 17.70^3}{3} + 15 \left[3.08 (17.70 - 4)^2 + 12.56 (46 - 17.70)^2 \right] = 215011 \text{ cm}^4$$

Momento flettente

2° stadio (Esercizio)



3. Calcolo delle tensioni

$$\sigma_c = \frac{M_x}{I_x} y \quad \sigma_s = n \frac{M_x}{I_x} y$$

Se i carichi sono di lunga durata ovvero...
 $n=15$

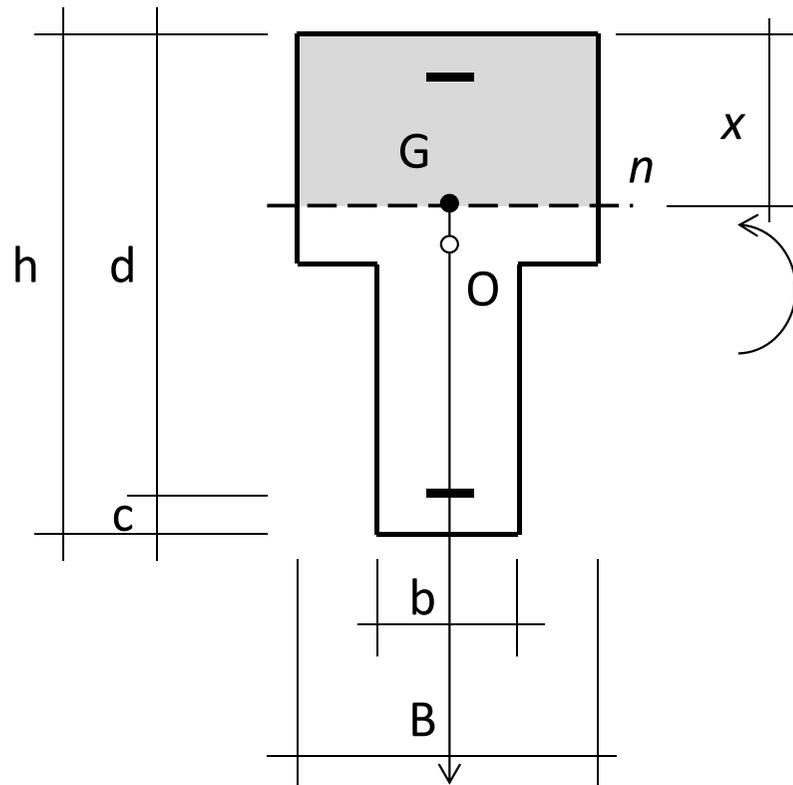
$$\sigma_s' = -15 \cdot 0.0453 \cdot (17.70 - 4) \cdot 10 = -47.8 \text{ MPa}$$

$$\sigma_s = 15 \cdot 0.0453 \cdot (46 - 17.70) \cdot 10 = 98.7 \text{ MPa}$$

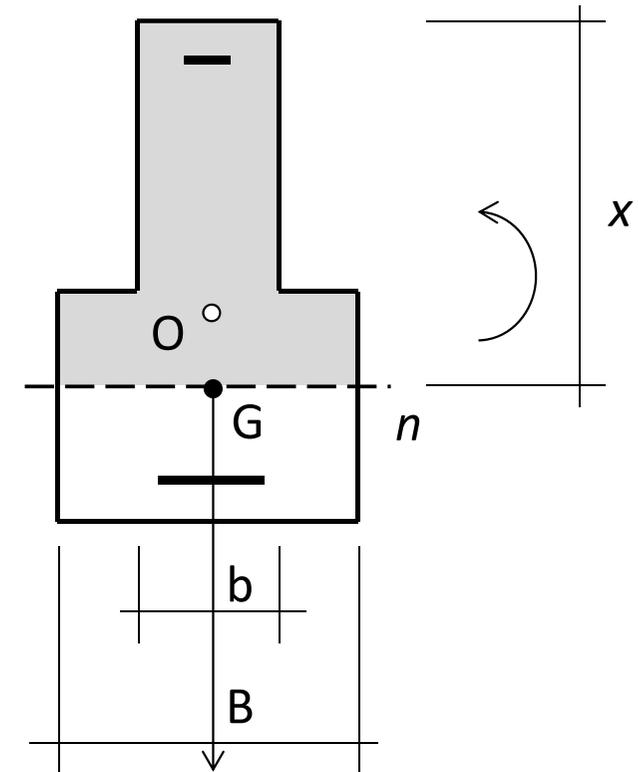
$$\sigma_{c,\text{sup}} = -\frac{50 \cdot 10^6}{215011 \cdot 10^4} 17.70 \cdot 10 = -4.12 \text{ MPa}$$

Momento flettente

2° stadio (sezioni non rettangolari)



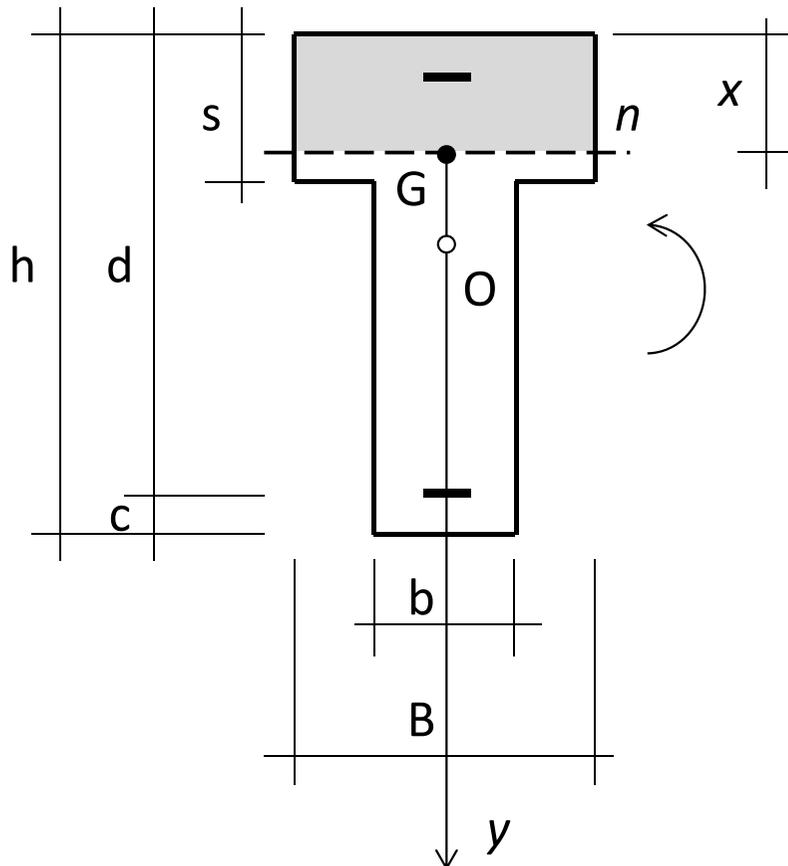
La sezione può essere trattata come rettangolare



La sezione NON può essere trattata come rettangolare

Momento flettente

2° stadio (sezioni non rettangolari)



In presenza di una sezione rettangolare a tratti si può fare dapprima l'ipotesi che la parte compressa sia rettangolare (ovvero, nel caso in figura, che l'asse neutro tagli l'ala).

Si determina la posizione dell'asse neutro con la formula:

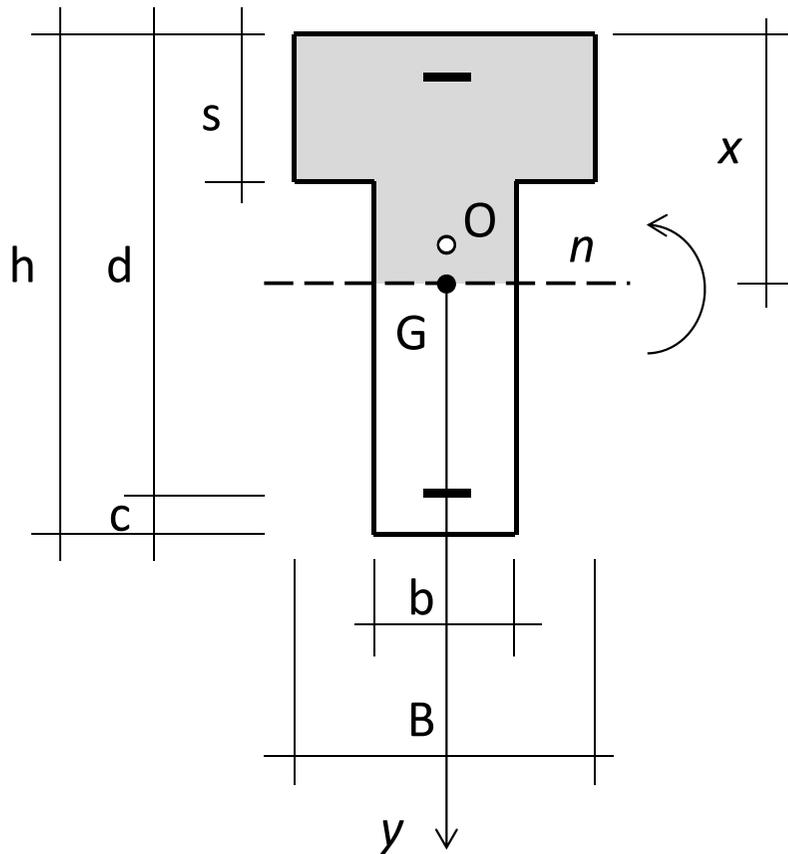
$$x = \frac{n (A_s + A'_s)}{b} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2 b (A_s d + A'_s c)}{n (A_s + A'_s)^2}} \right]$$

Se l'asse neutro taglia l'ala:

La posizione dell'asse neutro è corretta e il momento d'inerzia della sezione reagente omogeneizzata può essere calcolato con le formule della sezione rettangolare.

Momento flettente

2° stadio (sezioni non rettangolari)



Se l'asse neutro non taglia l'ala, la posizione calcolata dell'asse neutro è errata.

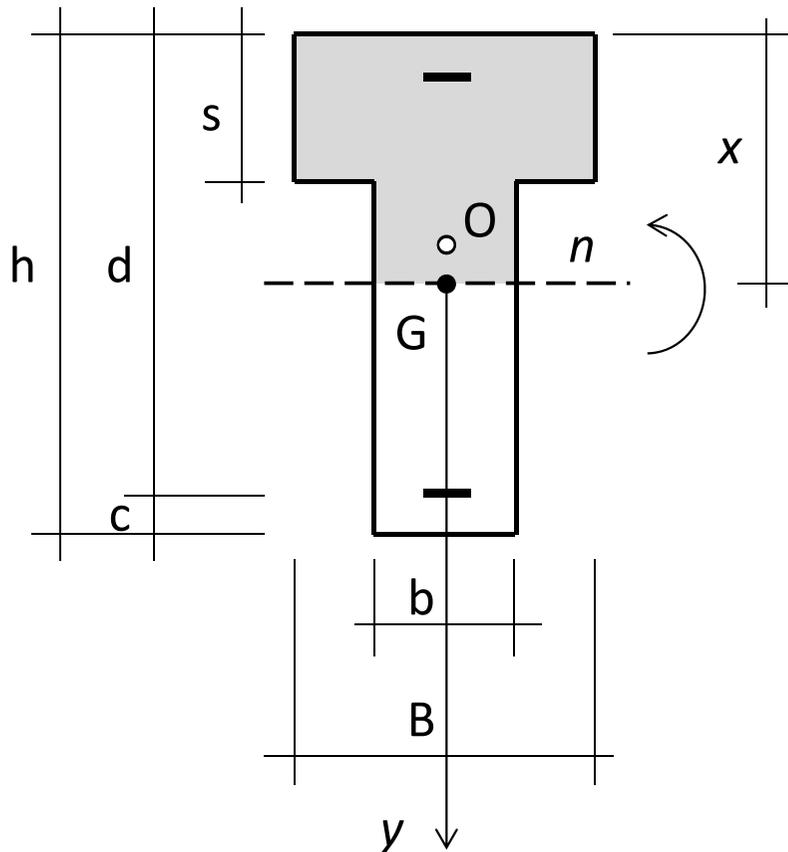
La posizione dell'asse neutro deve essere rivalutata ipotizzando che l'asse neutro tagli l'anima.

La nuova posizione dell'asse neutro può essere calcolata imponendo $N=0$ oppure $S_n=0$.

$$S_n = -\frac{B}{2}x^2 + \frac{(B-b)(x-s)^3}{2} - nA'_s(x-c) + nA_s(d-x) = 0$$

Momento flettente

2° stadio (sezioni non rettangolari)



Se l'asse neutro non taglia l'ala, la posizione calcolata dell'asse neutro è errata.

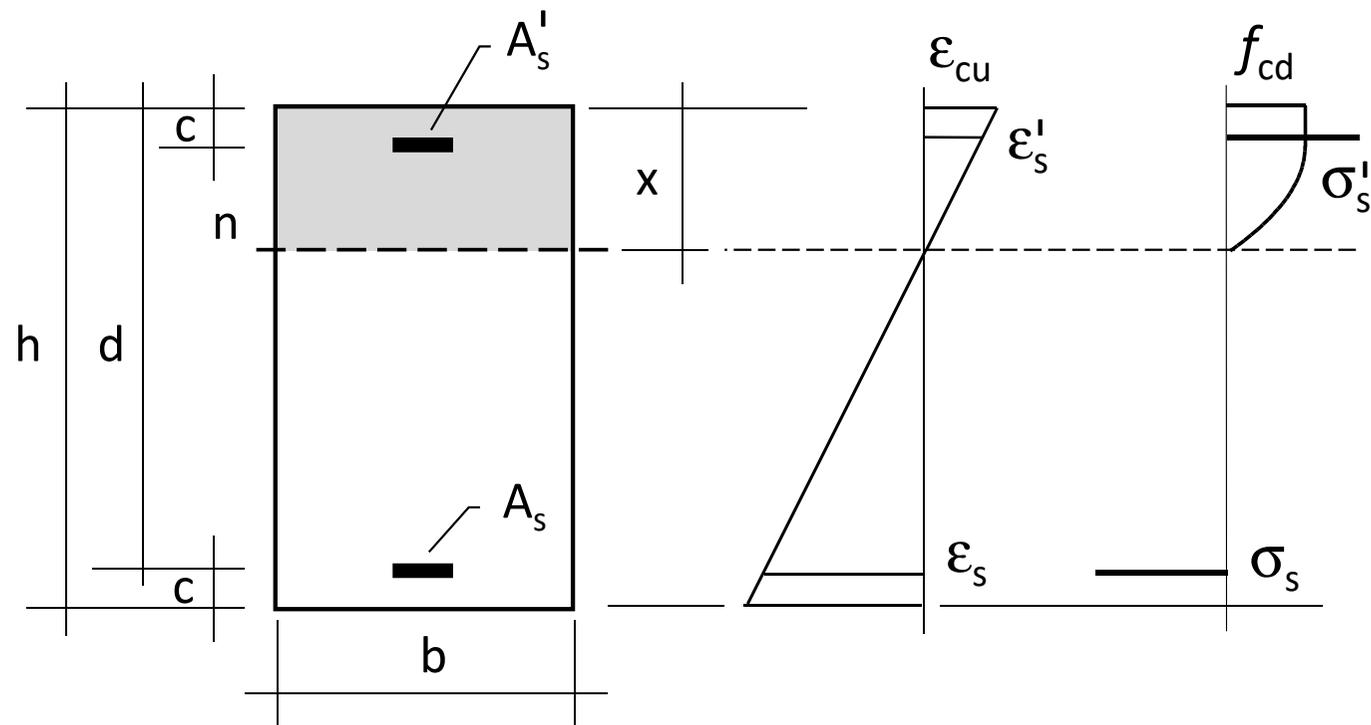
Con riferimento alla sezione in figura, la posizione dell'asse neutro deve essere rivalutata ipotizzando che l'asse neutro tagli l'anima.

Il momento d'inerzia deve essere calcolato facendo riferimento alla effettiva sezione reagente omogena.

$$I_x = \frac{Bx^3 - (B-b)(x-s)^3}{3} + nA_s(d-x)^2 + nA'_s(x-c)^2$$

Momento flettente

3° stadio



Dati:

Geometria della sezione

Armature

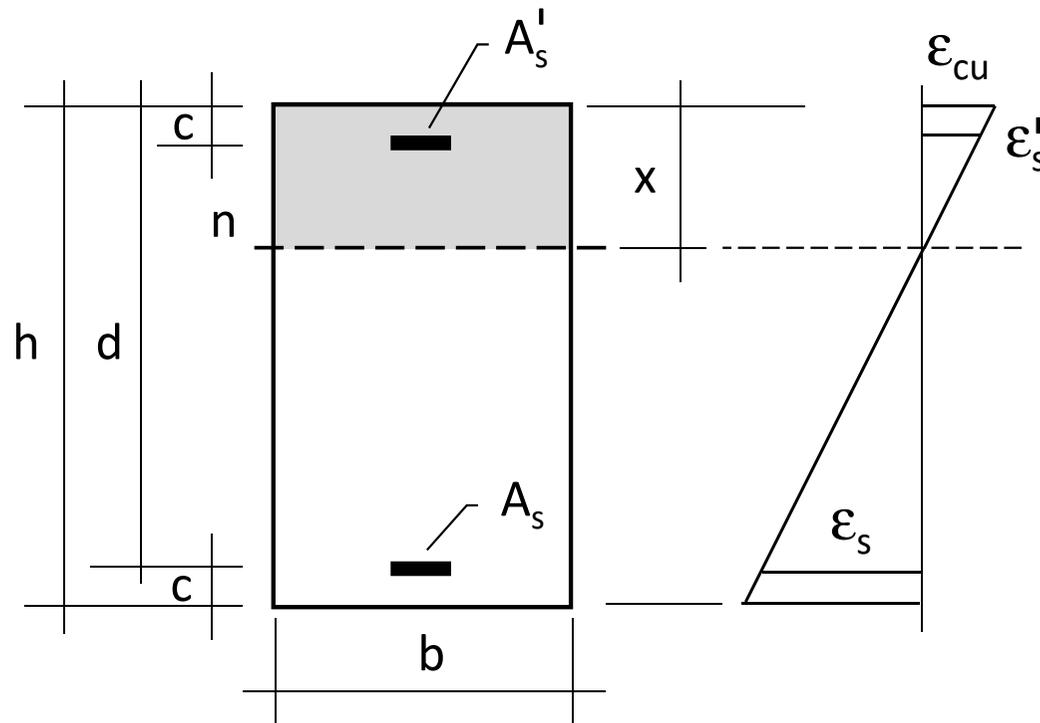
Incognite:

Posizione dell'asse neutro

Momento resistente

Momento flettente

3° stadio



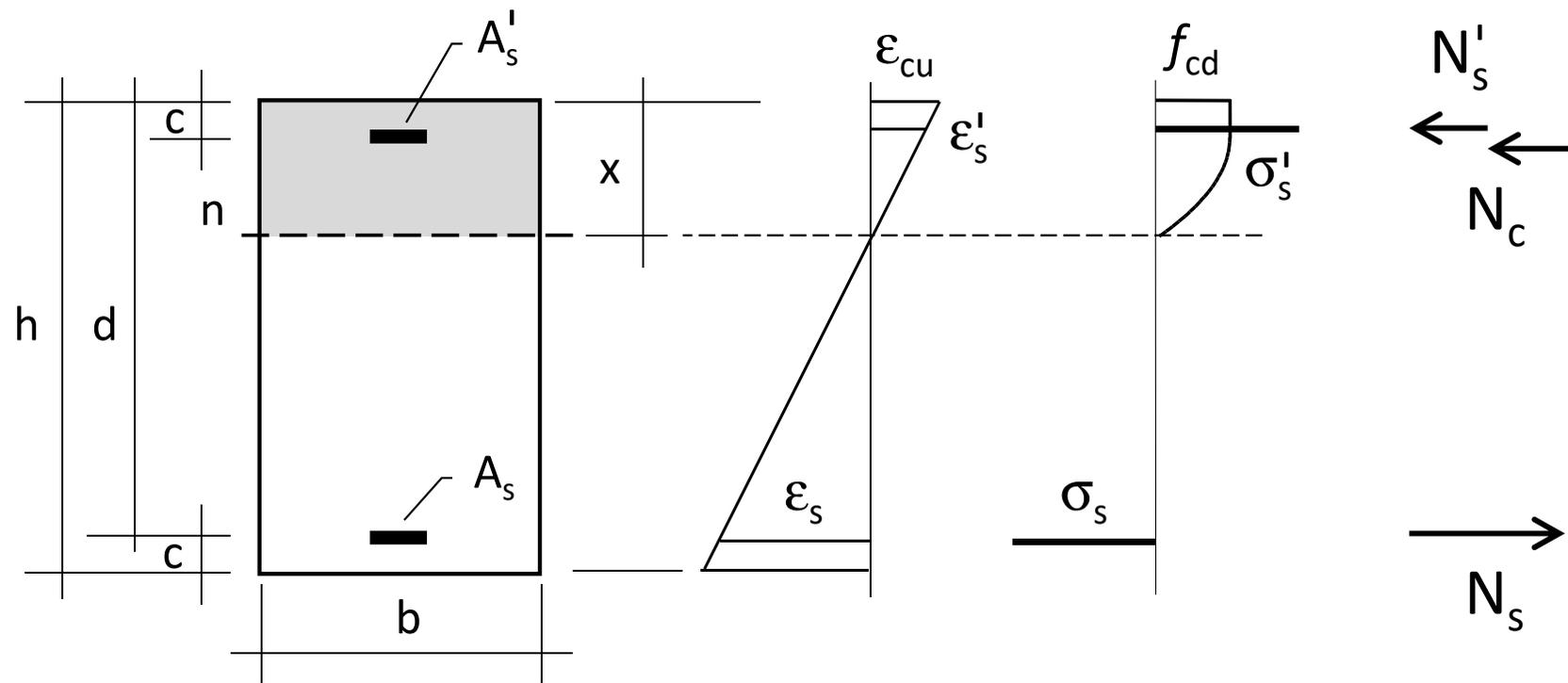
Il momento resistente corrisponde all'attingimento della deformazione ultima in almeno uno dei due materiali (calcestruzzo e acciaio)

Nota: il legame costitutivo considerato per l'acciaio (elastico perfettamente plastico) non richiede alcun controllo della deformazione.

Pertanto, il momento resistente corrisponde al raggiungimento della deformazione ultima ε_{cu} del calcestruzzo compresso.

Momento flettente

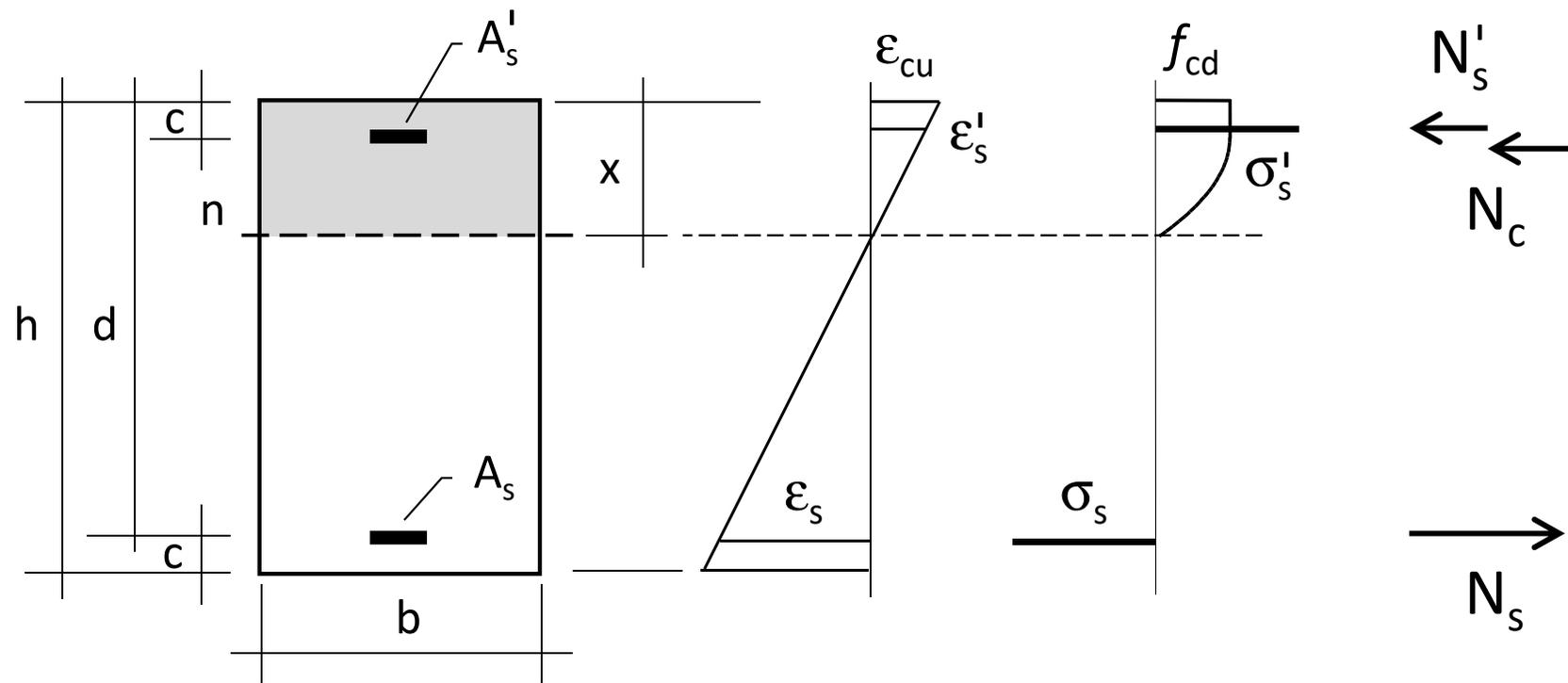
3° stadio



Per trovare l'asse neutro corrispondente al momento resistente, impongo che la deformazione sia pari ad ϵ_{cu} in corrispondenza della fibra compressa più esterna

Momento flettente

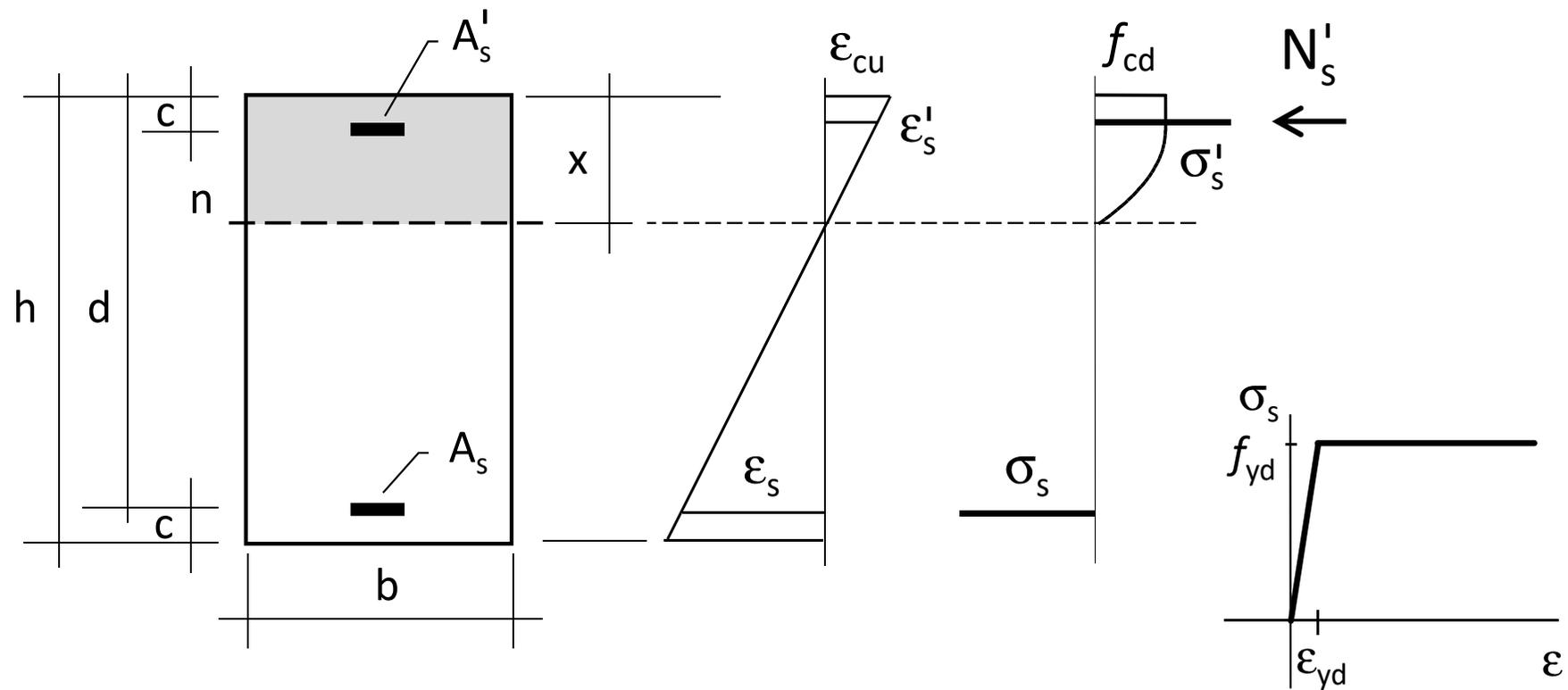
3° stadio



E impongo che ci sia equilibrio
alla traslazione longitudinale:

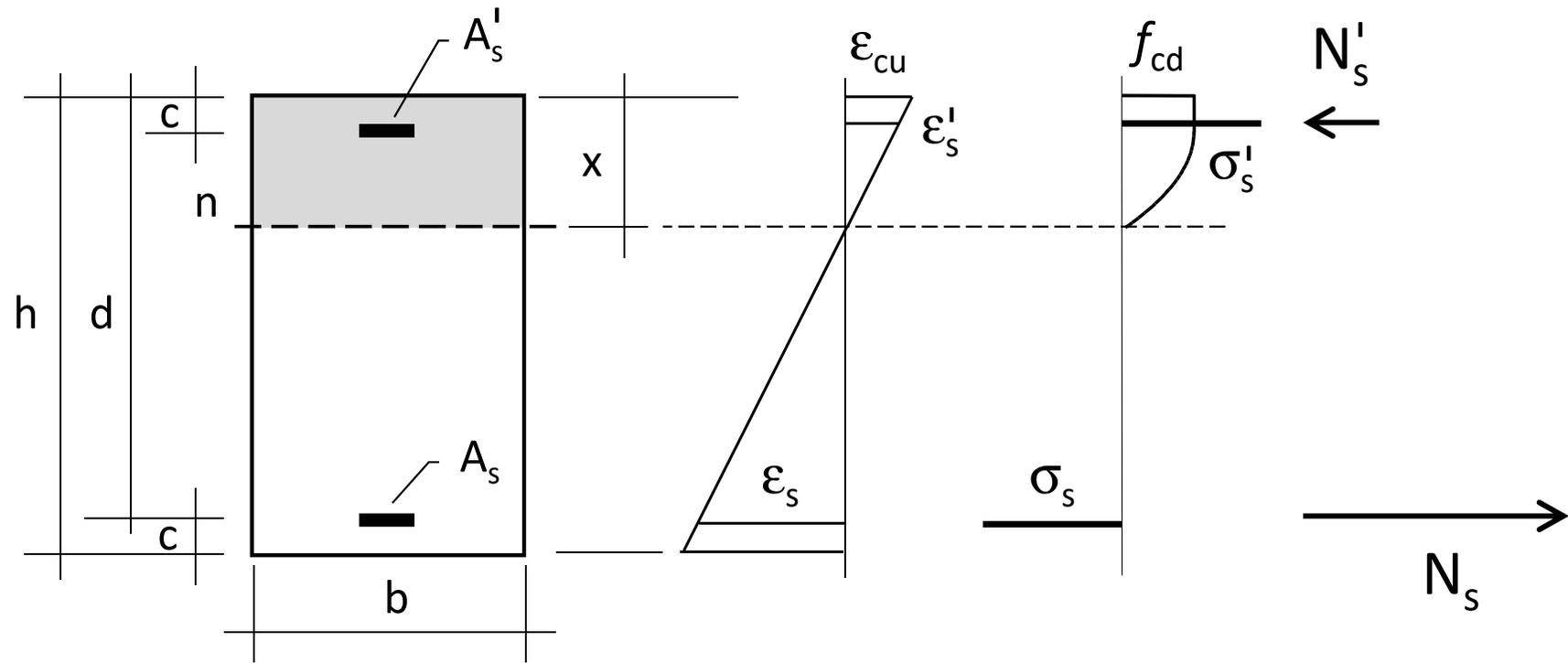
$$N_c + N'_s + N_s = 0$$

Imporre questa condizione è facile, perché:



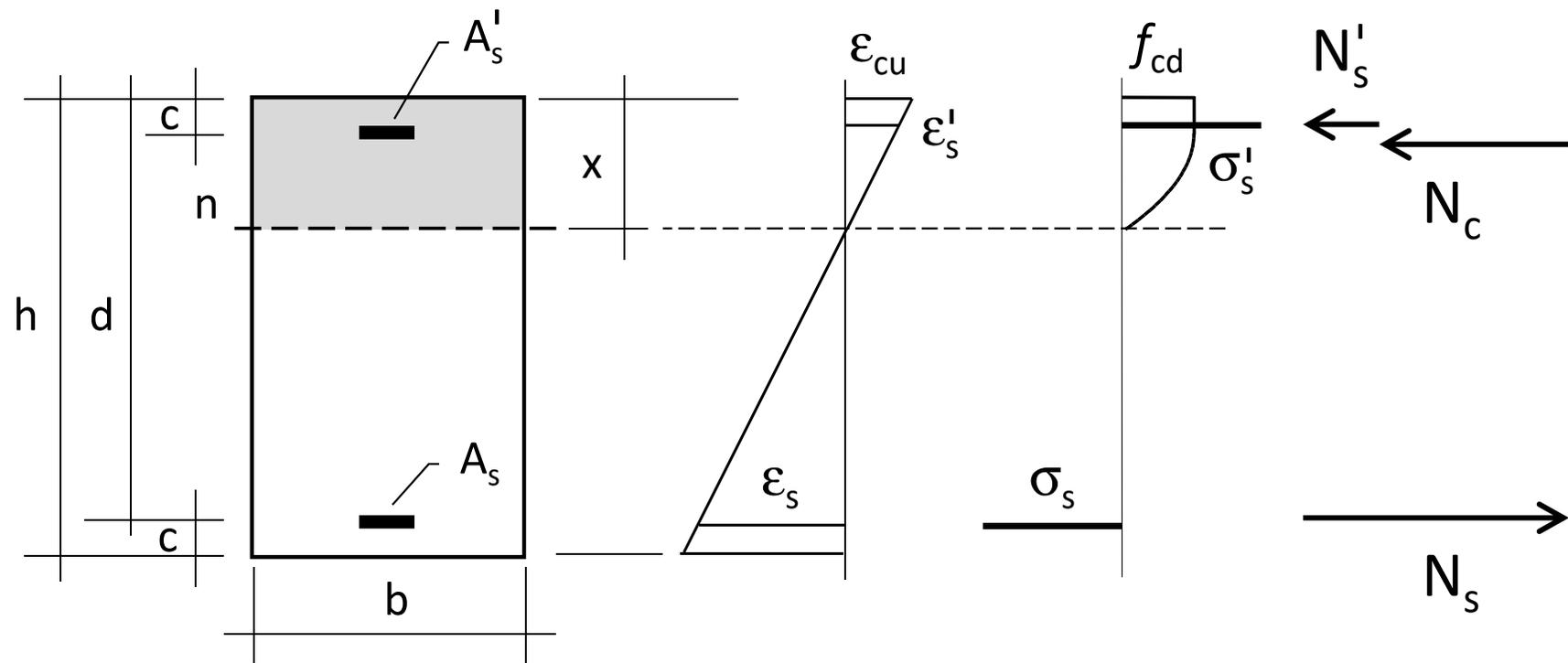
$$\epsilon_s^l = \frac{x-c}{x} \epsilon_{cu} \left\{ \begin{array}{l} \text{se } \epsilon_s^l > \epsilon_{yd} \text{ (molti casi)} \Rightarrow N_s^l = -A_s^l f_{yd} \\ \text{se } \epsilon_s^l \leq \epsilon_{yd} \Rightarrow \sigma_s^l = f_{yd} \epsilon_s^l / \epsilon_{yd} \Rightarrow N_s^l = A_s^l \sigma_s^l \end{array} \right.$$

Imporre questa condizione è facile, perché:



si ha sempre $\epsilon_s > \epsilon_{yd} \Rightarrow N_s = A_s f_{yd}$

Imporre questa condizione è facile, perché:

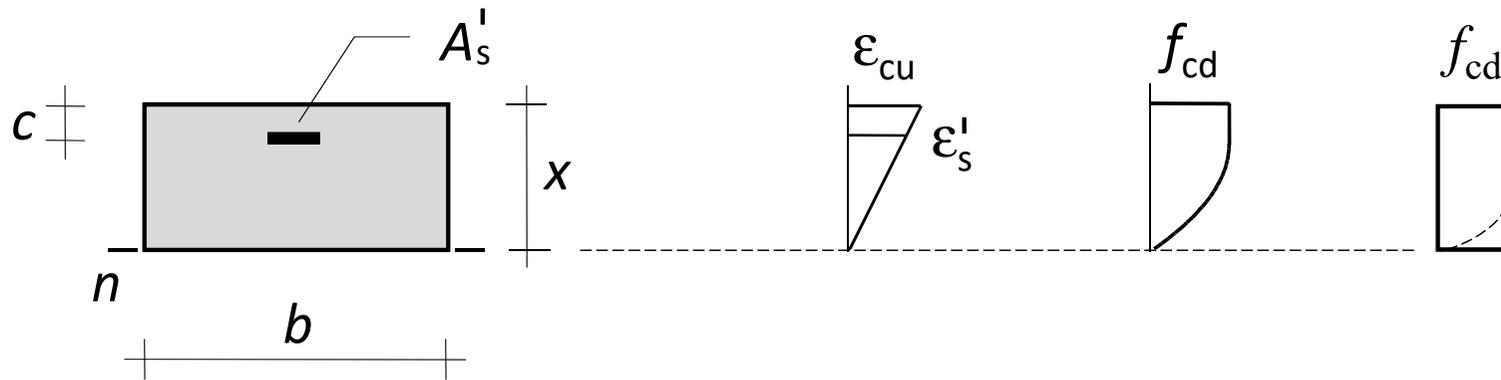


Il coefficiente β tiene conto del fatto che la tensione nella parte compressa non è costante

$$N_c = -\beta b x f_{cd}$$

coefficiente di riempimento

Il coefficiente di riempimento

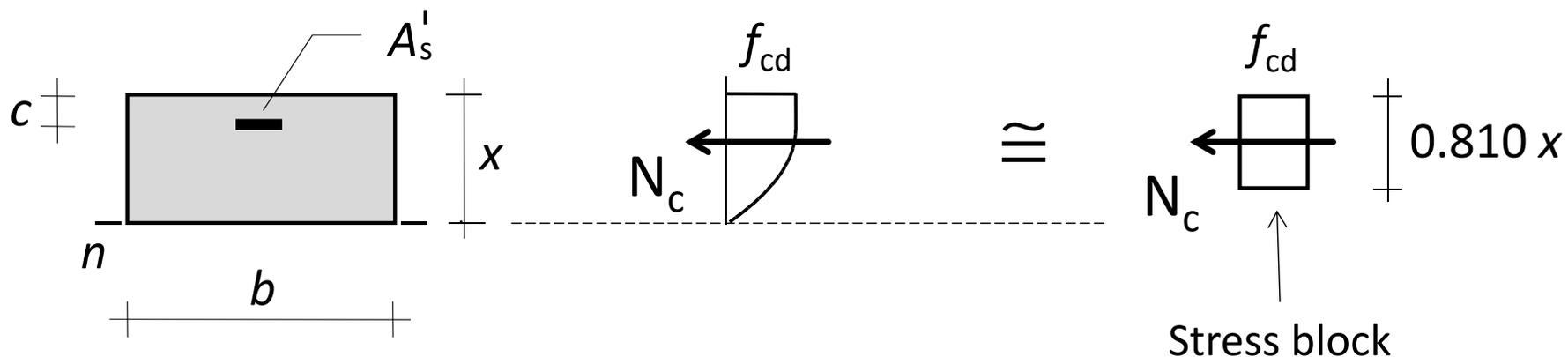


Il coefficiente β rappresenta il rapporto tra

- il volume delle tensioni agenti sulla parte compressa di calcestruzzo
- il volume delle tensioni caratterizzato da una tensione costante pari a f_{cd} su tutta la profondità dell'asse neutro:

$$\beta = \frac{\int_0^x \sigma(y) b(y) dy}{f_{cd} \int_0^x b(y) dy}$$

Il coefficiente di riempimento



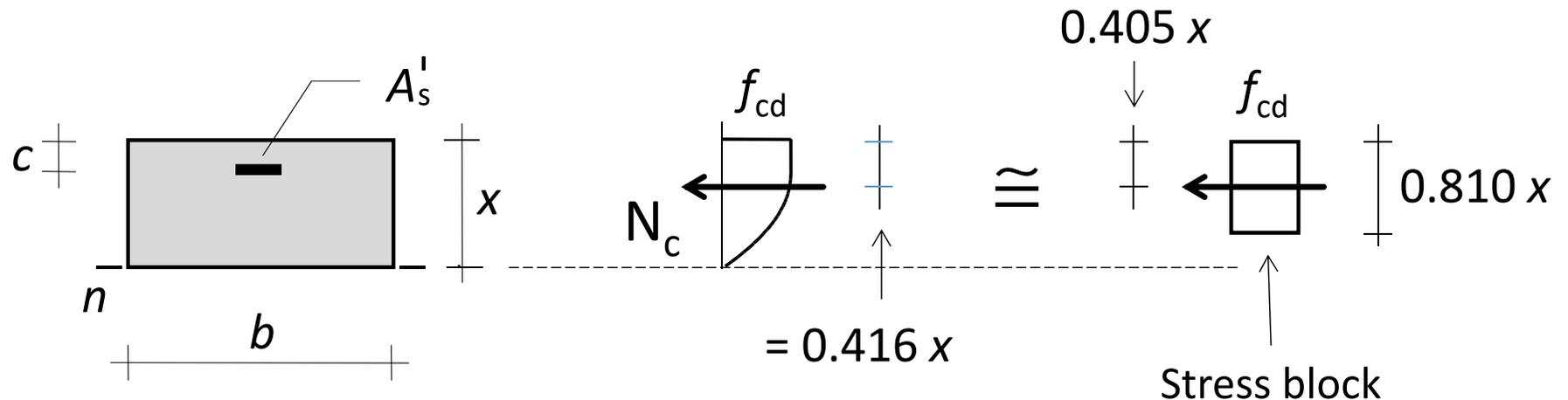
Se la larghezza della parte compressa del cls è costante ...

$$\beta = \frac{b \int_0^x \sigma(y) dy}{f_{cd} b x} = \frac{\int_0^x \sigma(y) dy}{f_{cd} x}$$

e se la deformazione massima del cls è ϵ_{cu}

β vale 0.810

Il coefficiente di profondità



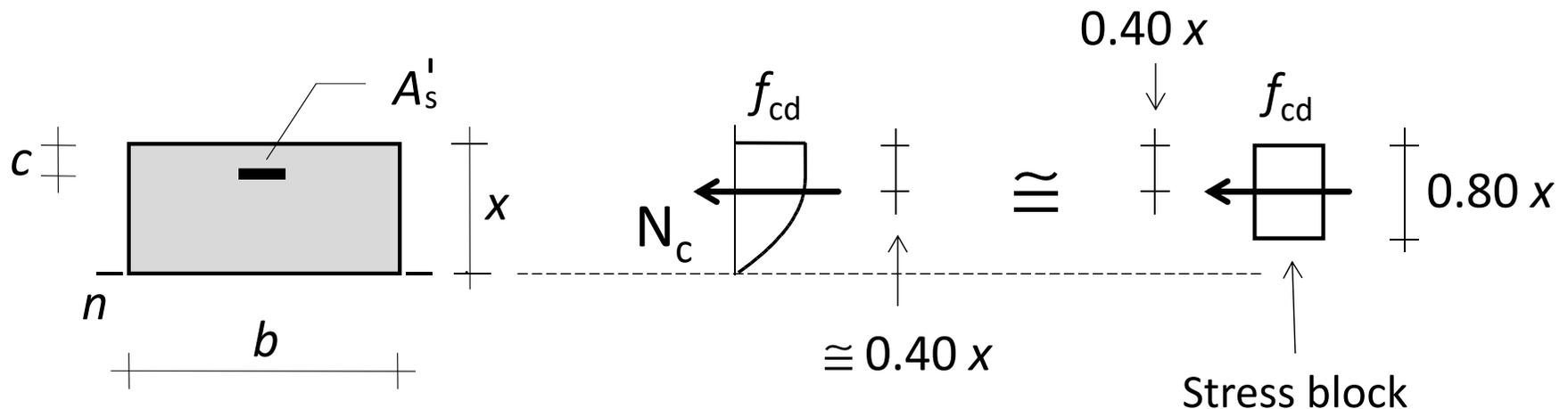
Se la larghezza della parte compressa del cls è costante e la deformazione massima del cls è ϵ_{cu}

... se il coefficiente β assume il valore 0.810,

- La distanza della risultante delle tensioni dello stress block dal bordo superiore vale $0.810/2$
- La posizione della risultante dello stress block è molto vicina a quella della risultante delle tensioni del diagramma parabola-rettangolo ... ovvero $0.416 x$

I coeff. di riempimento e profondità

Valori di progetto



Se la larghezza della parte compressa del cls è costante e la deformazione massima del cls è ϵ_{cu}

... si assume

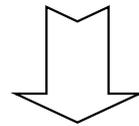
- il coefficiente di riempimento $\beta = 0.810$ (adottati nel seguito)
- il coefficiente di profondità della risultante $k = 0.416$

... o per maggiore semplicità si può assumere

- il coefficiente di riempimento $\beta = 0.80$
- il coefficiente di profondità della risultante $k = 0.40$

Individuazione dell'asse neutro

$$N_c + N_s + N_s^l = 0$$



$$-\beta b x f_{cd} + A_s^l \sigma_s^l + A_s f_{yd} = 0$$

Nota ! Il valore della tensione σ_s^l dipende dalla deformazione dell'acciaio compresso (che non è nota a priori !).

Pertanto ...

Individuazione dell'asse neutro

Si può prima ipotizzare che sia $\varepsilon'_s \geq \varepsilon_{yd}$, ovvero ...

$$\sigma_s^l = -f_{yd}$$

In tale condizione (o quando non vi è armatura compressa)
la condizione di equilibrio diventa

$$-\beta b x f_{cd} - A_s^l f_{yd} + A_s f_{yd} = 0$$

e quindi

$$x = \frac{(A_s - A_s^l) f_{yd}}{\beta b f_{cd}}$$

Individuazione dell'asse neutro

Attenzione ! Tale soluzione è corretta se risulta verificata l'ipotesi che la deformazione ε'_s sia maggiore o uguale a ε_{yd}

Per eseguire questa verifica,
la deformazione ε'_s può essere calcolata mediante
la seguente relazione di proporzionalità :

$$\varepsilon'_s = \frac{x-c}{x} \varepsilon_{cu}$$

Individuazione dell'asse neutro

Se invece $\varepsilon'_s < \varepsilon_{yd}$,

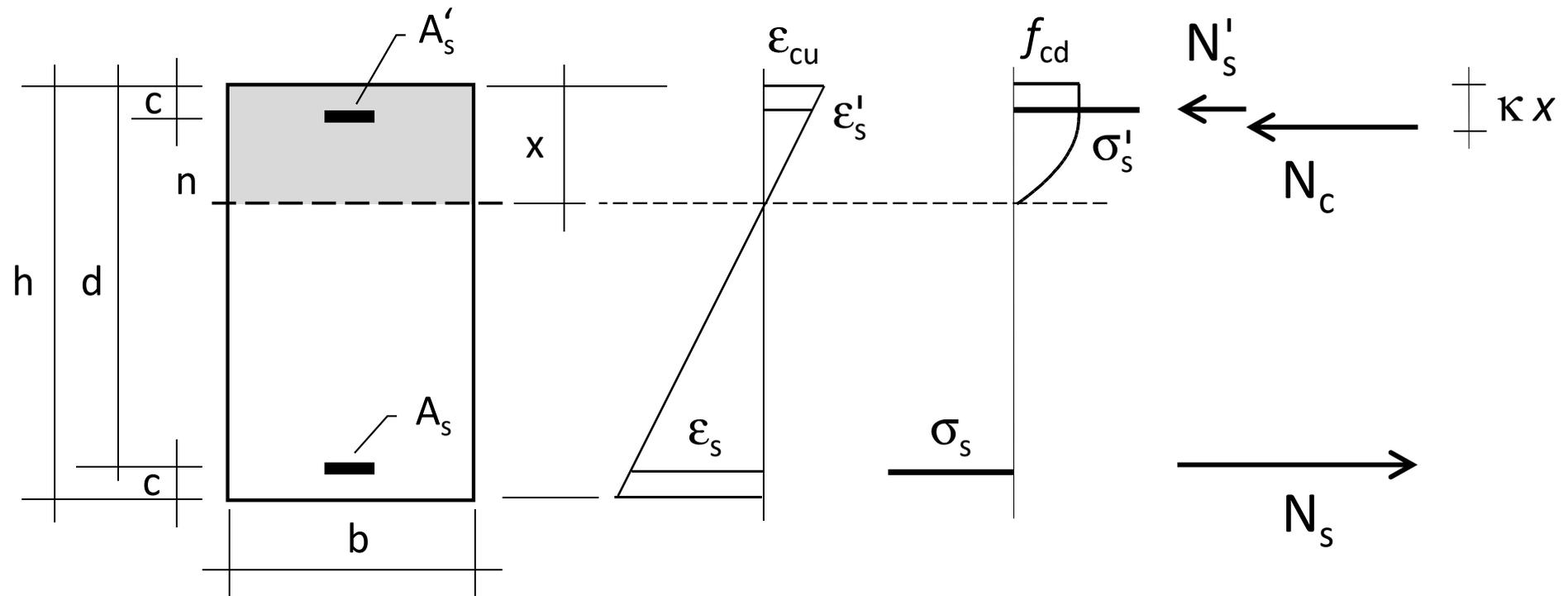
la condizione di equilibrio è un'equazione di secondo grado :

$$-\beta b x f_{cd} - A'_s \frac{x-c}{x} \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} f_{yd} + A_s f_{yd} = 0$$

con soluzione

$$x = \left(A_s - \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} A'_s \right) \frac{f_{yd}}{2\beta b f_{cd}} + \sqrt{\left(A_s - \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} A'_s \right)^2 \left(\frac{f_{yd}}{2\beta b f_{cd}} \right)^2 + \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} \frac{A'_s c f_{yd}}{\beta b f_{cd}}}$$

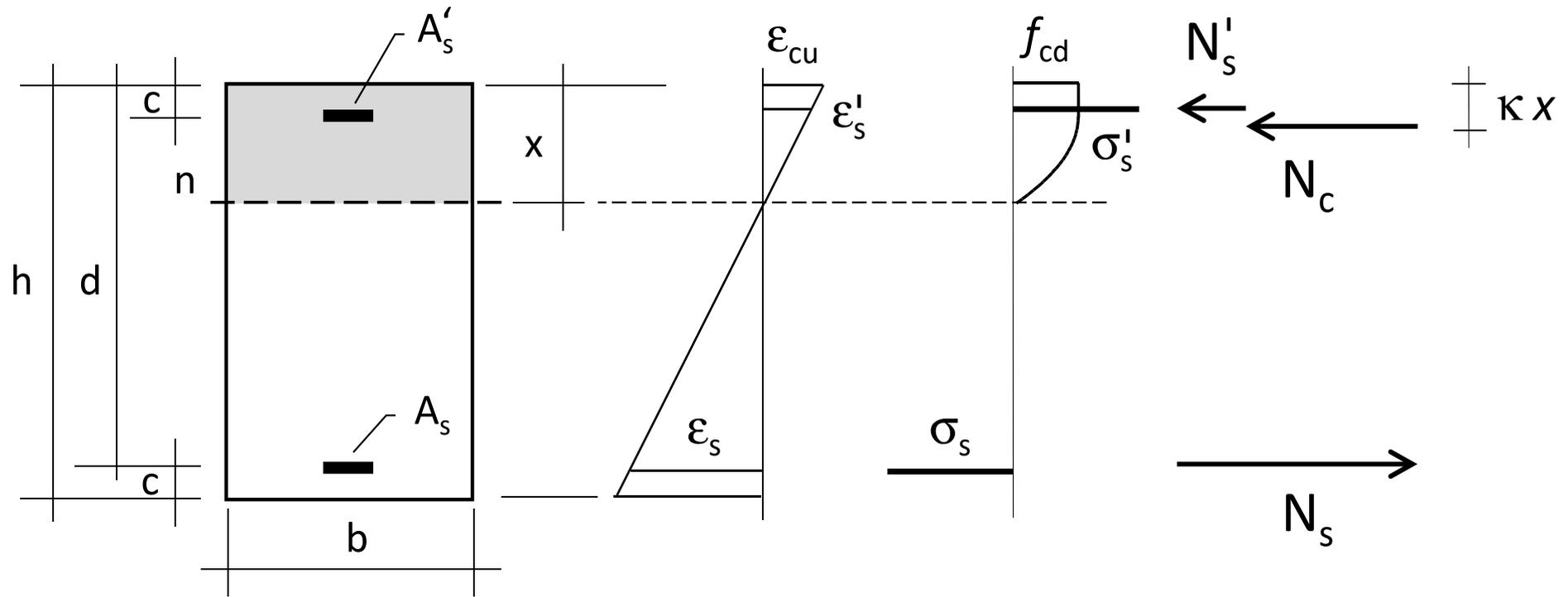
Momento resistente



Si determina imponendo
l'equilibrio alla rotazione
(rispetto a un punto qualsiasi)

Nota ! L'equilibrio può essere
imposto rispetto ad un qualunque
punto della sezione.
Il risultato non cambia.

Momento resistente



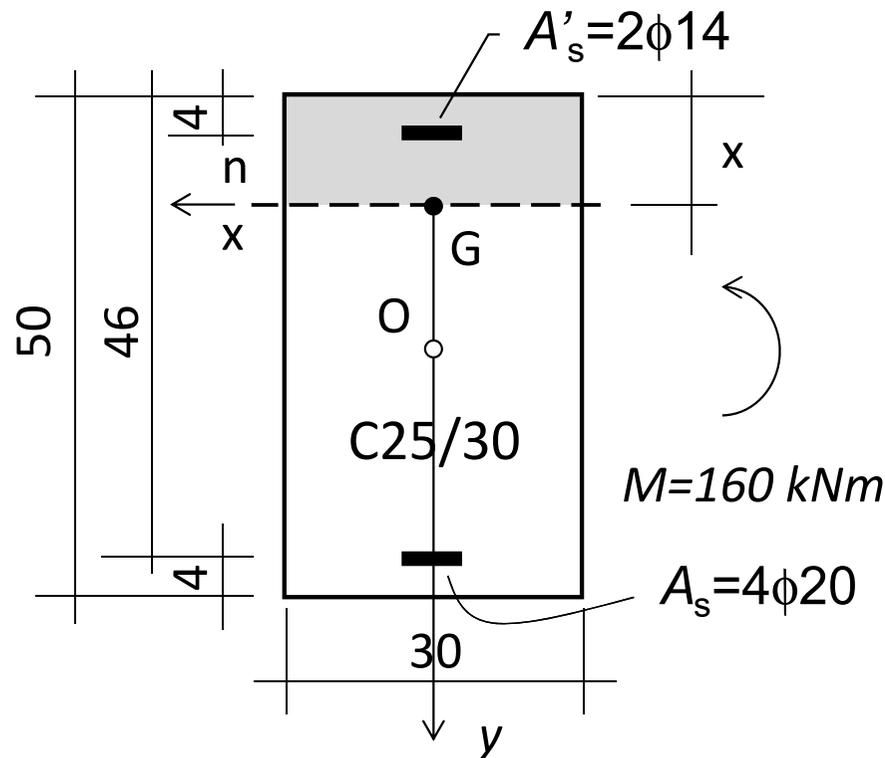
(rot. rispetto alla posiz. di N_c)

Si determina imponendo
l'equilibrio alla rotazione
(rispetto a un punto qualsiasi)

$$M_{Rd} = N_s (d - k x) - N'_s (k x - c)$$

Esempio n. 1

Verifica di sezione rettangolare



Procedura:

1. individuazione dell'asse neutro

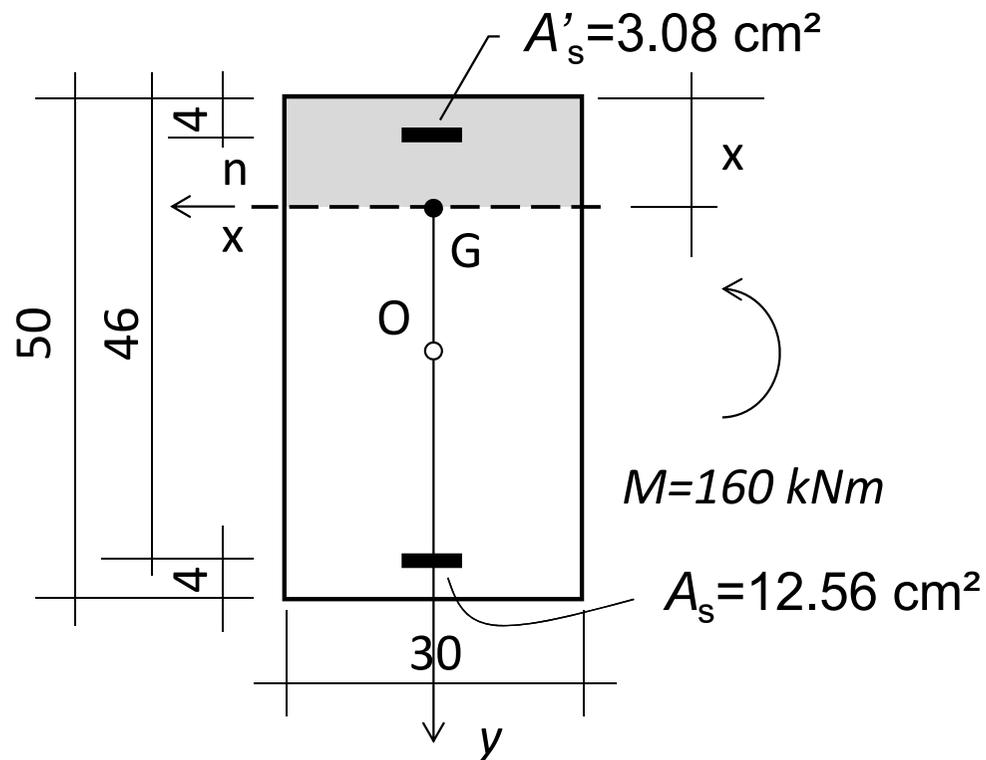
(si può ipotizzare che l'armatura compressa sia snervata, controllare se è vero e in caso contrario passare all'equazione di secondo grado)

2. determinazione del momento resistente

3. confronto tra M_{Ed} e M_{Rd}

Esempio n. 1

Individuazione dell'asse neutro

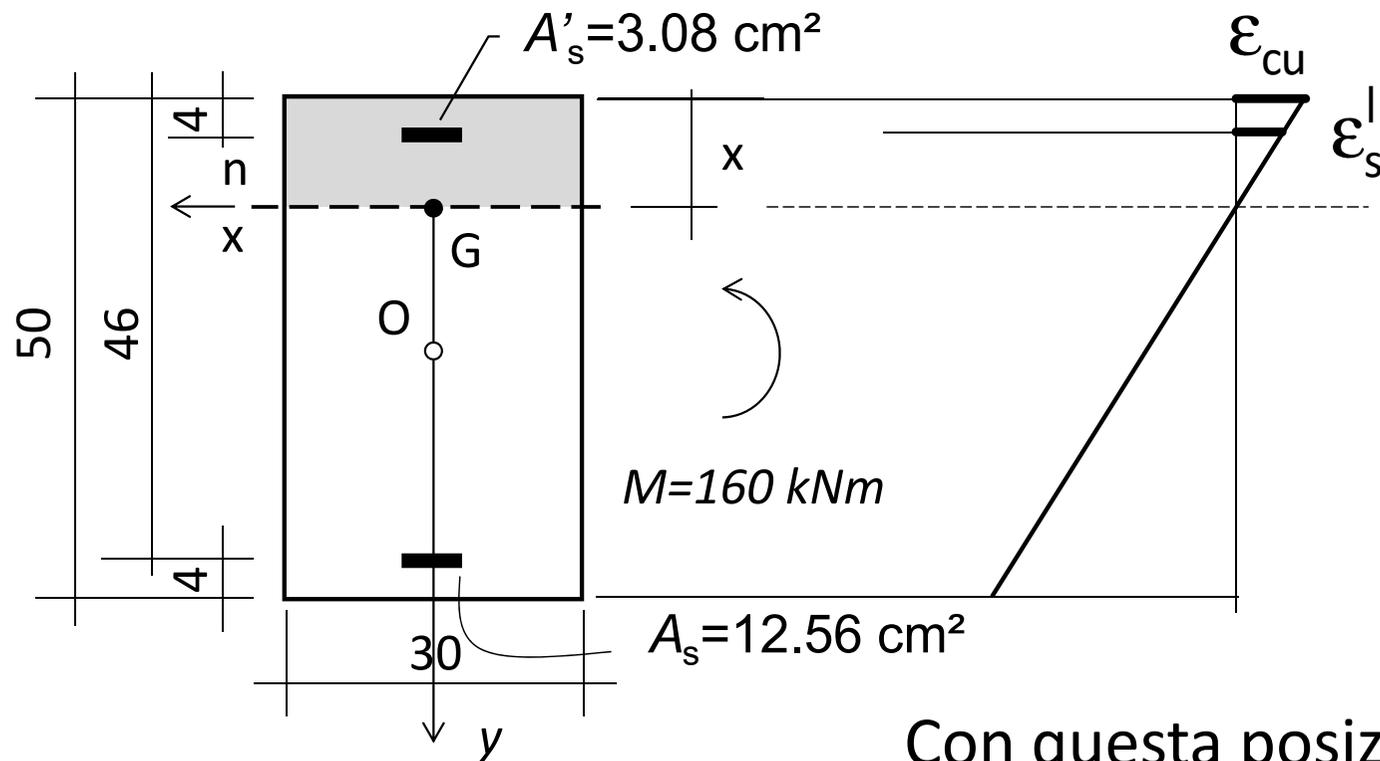


Se l'armatura compressa è snervata:

$$x = \frac{(A_s - A'_s) f_{yd}}{\beta b f_{cd}} = \frac{(12.56 - 3.08) \times 391}{0.810 \times 30 \times 14.2} = 10.77 \text{ cm}$$

Esempio n. 1

Individuazione dell'asse neutro



Con questa posizione dell'asse neutro:

$$\epsilon'_s = \frac{x - c}{x} \epsilon_{cu} = \frac{10.77 - 4}{10.77} \times 3.5 \times 10^{-3} = 2.20 \times 10^{-3}$$

Poiché $\epsilon'_s > \epsilon_{yd} (1.96 \times 10^{-3})$ la posizione trovata è esatta

Esempio n. 1

Individuazione dell'asse neutro

Nota:

Ricordando che l'armatura compressa è snervata se

$$\varepsilon_s^l = \frac{x-c}{x} \varepsilon_{cu} \geq \varepsilon_{yd}$$

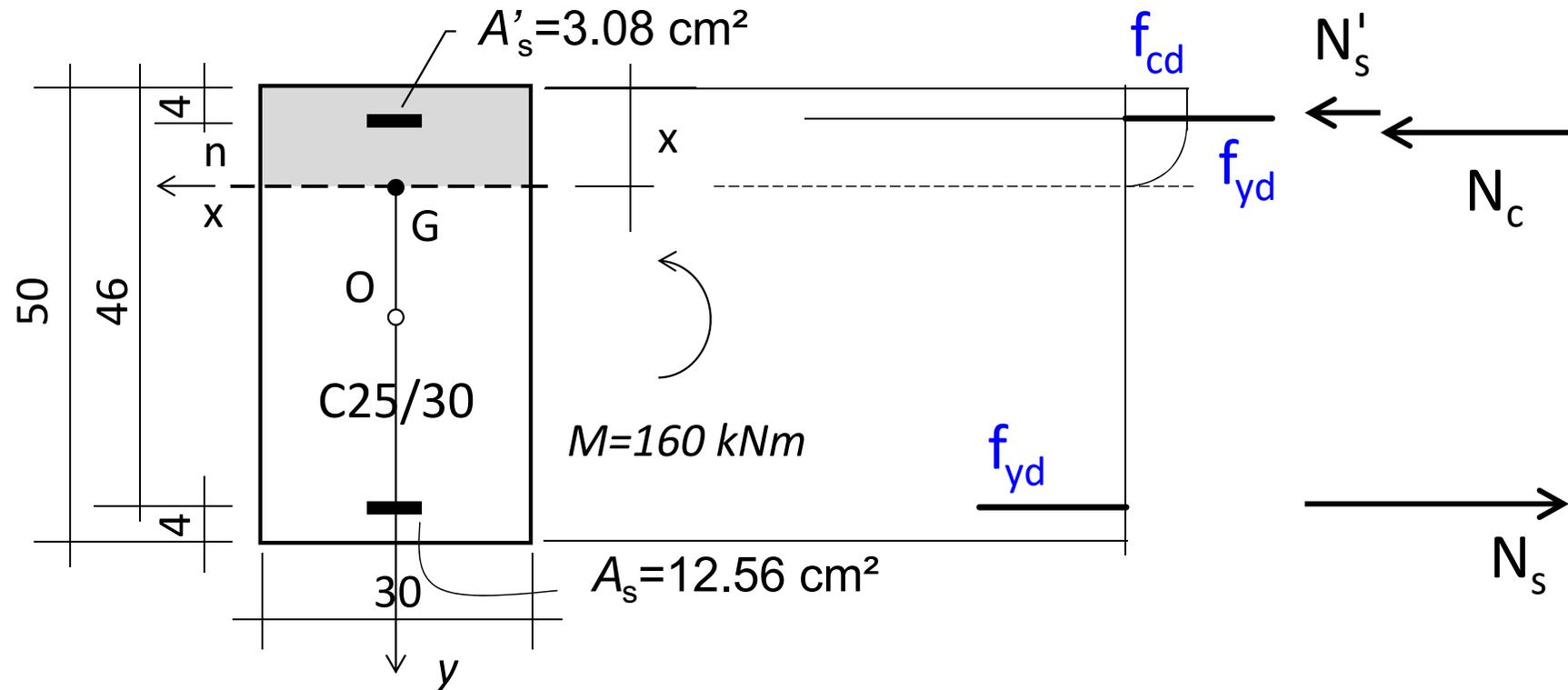
ovvero...affinché l'armatura compressa sia snervata deve essere:

$$x \geq \varepsilon_s^l = \frac{|\varepsilon_{cu}|}{|\varepsilon_{cu}| - \varepsilon_{yd}} c = 2.27 c \quad \text{B450C}$$

Nell'esempio : $x = 10.77 \text{ cm} \geq 2.27 c = 9.08 \text{ cm}$

Esempio n. 1

Calcolo del momento resistente



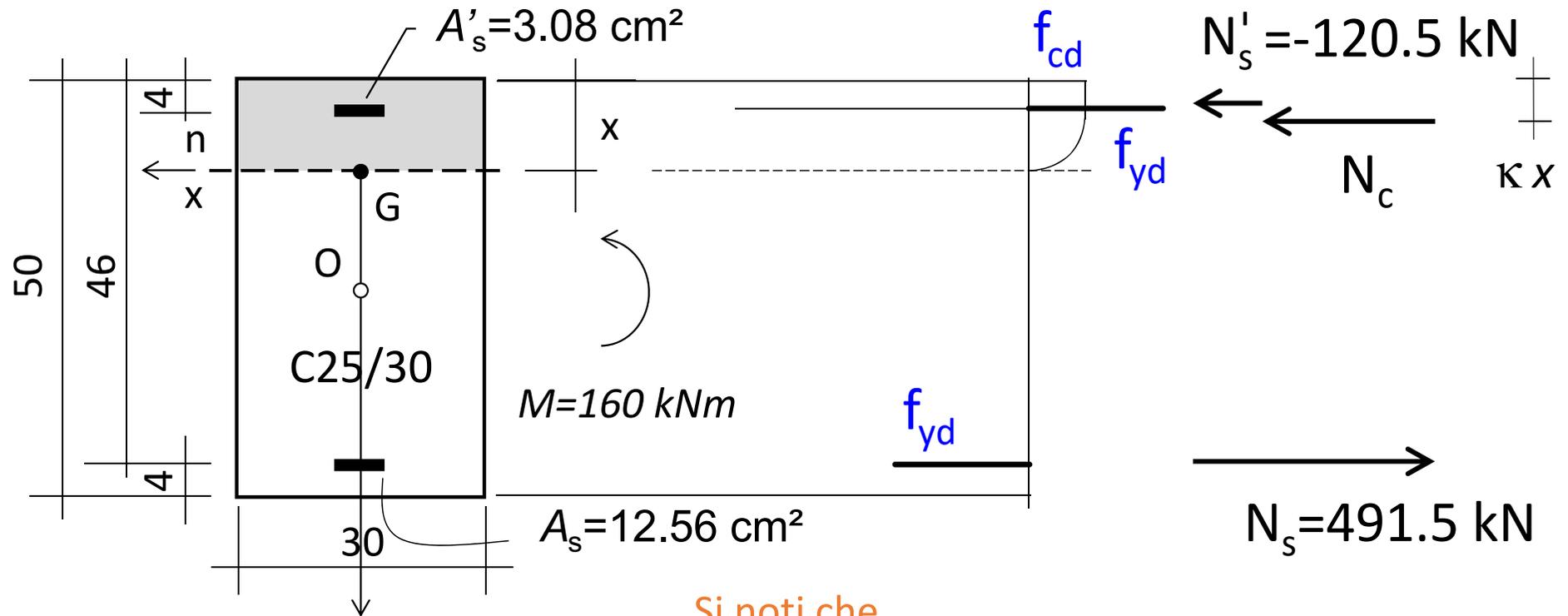
$$M_{Rd} = N_s (d - kx) - N'_s (kx - c)$$

$$N_s = 12.56 \times 391.3 \times 10^{-1} = 491.5 \text{ kN}$$

$$N'_s = -3.08 \times 391.3 \times 10^{-1} = -120.5 \text{ kN}$$

Esempio n. 1

Calcolo del momento resistente



Si noti che
 $kx \cong c$

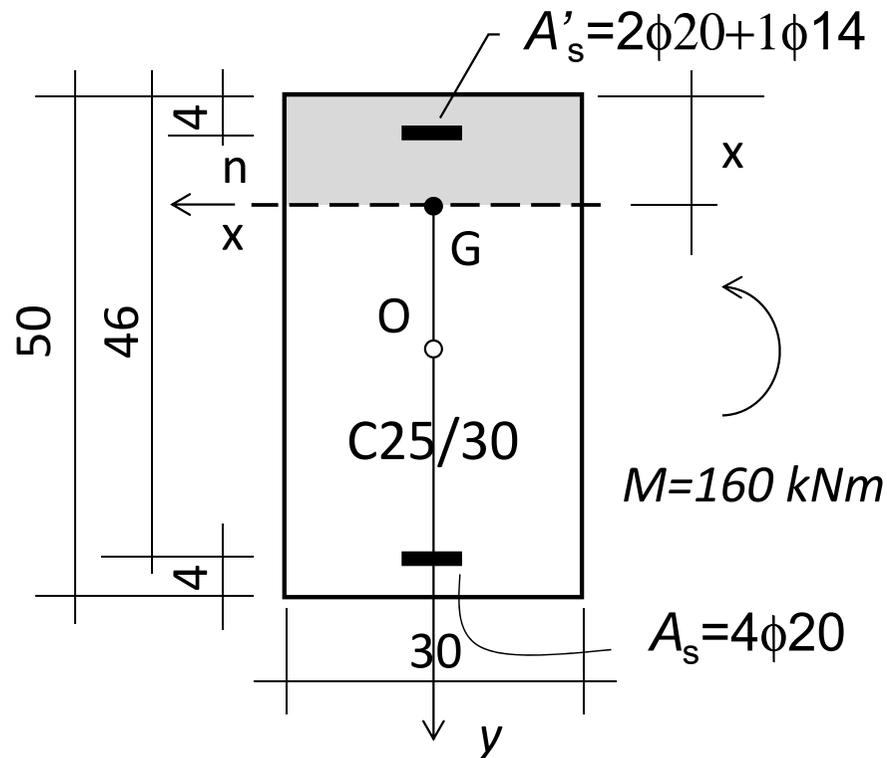
$$M_{Rd} = N_s (d - kx) - N'_s (kx - c)$$

$$= [491.5 \times (46 - 0.416 \times 10.77) + 120.5 \times (0.416 \times 10.77 - 4)] \times 10^{-2} = 204.6 \text{ kNm}$$

$M_{Ed} < M_{Rd}$ la sezione è verificata

Esempio n. 2

Verifica di sezione rettangolare



Procedura:

1. individuazione dell'asse neutro

(si può ipotizzare che l'armatura compressa sia snervata, controllare se è vero e in caso contrario passare all'equazione di secondo grado)

2. determinazione del momento resistente

3. confronto tra M_{Ed} e M_{Rd}

Esempio n. 2

Individuazione dell'asse neutro

Se l'armatura compressa fosse snervata:

$$x = \frac{(A_s - A_s^l) f_{yd}}{\beta b f_{cd}} = \frac{(12.56 - 7.82) \times 391.3}{0.810 \times 30 \times 14.17} = 5.39 \text{ cm}$$

Ma poiché la profondità dell'asse neutro è inferiore al limite minimo (2.27 c):

$$x = 5.39 \text{ cm} < 2.27 c = 9.1 \text{ cm}$$

L'armatura compressa non è snervata e ...

Esempio n. 2

Individuazione dell'asse neutro

... bisogna calcolare la profondità dell'asse neutro risolvendo l'equazione di secondo grado:

$$x = \left(A_s - \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} A_s^l \right) \frac{f_{yd}}{2\beta b f_{cd}} + \sqrt{\left(A_s - \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} A_s^l \right)^2 \left(\frac{f_{yd}}{2\beta b f_{cd}} \right)^2 + \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} \frac{A_s^l c f_{yd}}{\beta b f_{cd}}} = 7.20 \text{ cm}$$

che è inferiore al limite minimo (2.27 c):

$$x = 7.20 \text{ cm} < 2.27 c = 9.1 \text{ cm}$$

Esempio n. 2

Individuazione dell'asse neutro

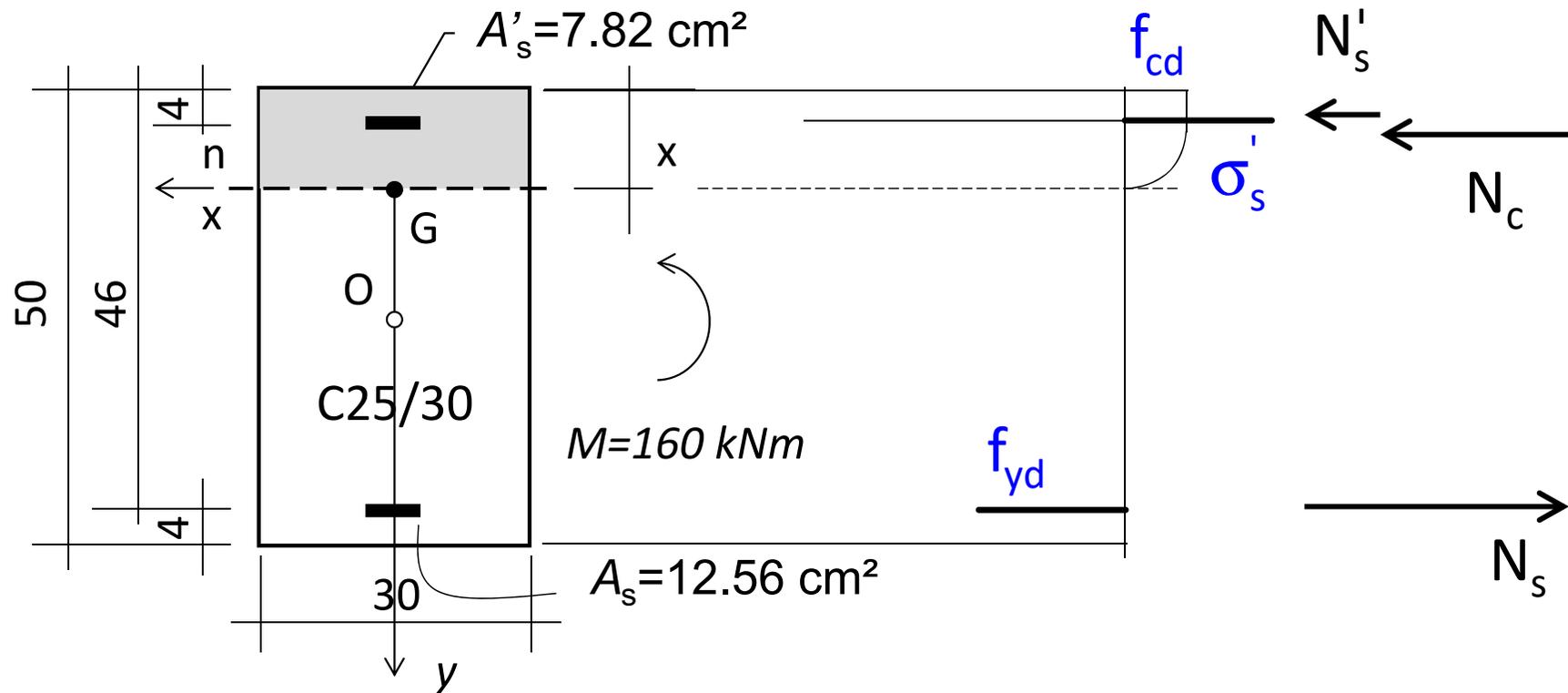
... bisogna calcolare la profondità dell'asse neutro risolvendo l'equazione di secondo grado:

$$x = \left(A_s - \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{yd}} A_s^l \right) \frac{f_{yd}}{2\beta b f_{cd}} + \sqrt{\left(A_s - \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{yd}} A_s^l \right)^2 \left(\frac{f_{yd}}{2\beta b f_{cd}} \right)^2 + \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{yd}} \frac{A_s^l c f_{yd}}{\beta b f_{cd}}} = 7.20 \text{ cm}$$

$$\sigma_s^l = \underbrace{\frac{x - c}{x}}_{\epsilon'_s} \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{yd}} f_{yd} = -311.5 \text{ MPa}$$

Esempio n. 2

Calcolo del momento resistente



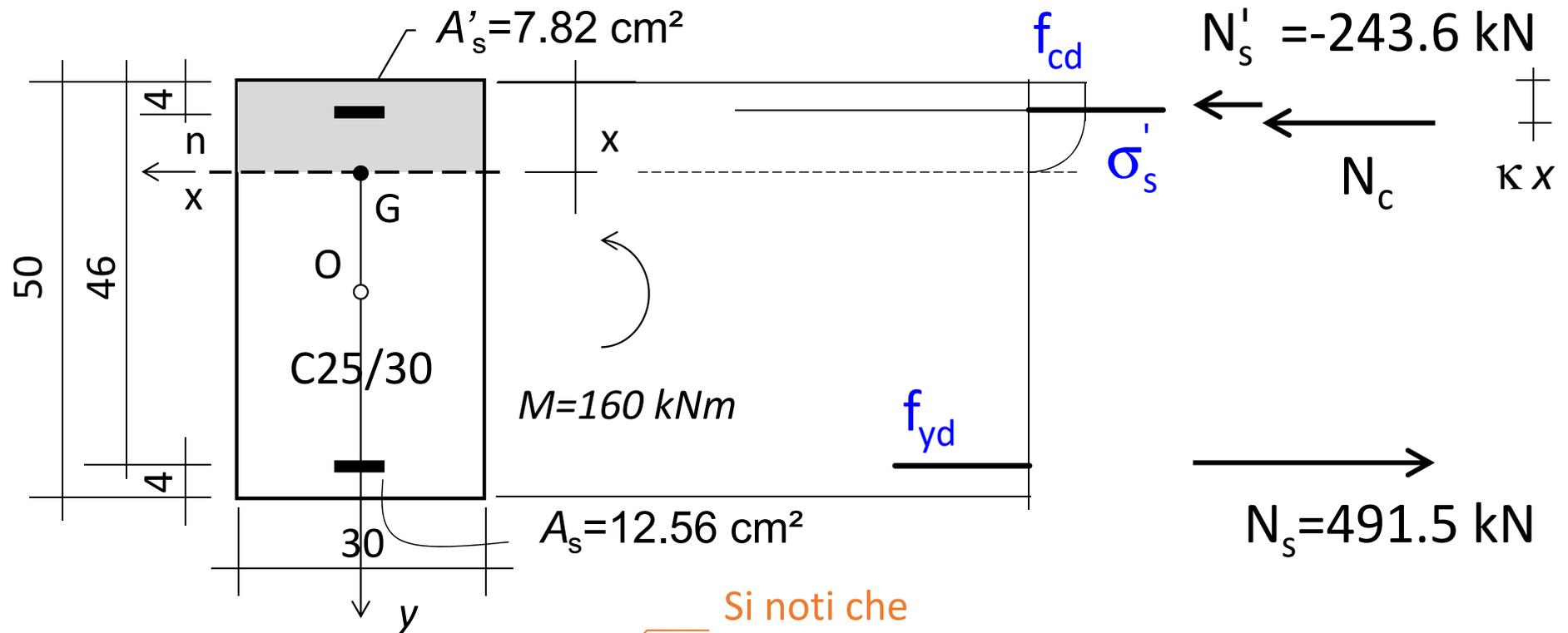
$$M_{Rd} = N_s (d - k x) - N'_s (k x - c)$$

$$N_s = 12.56 \times 391.3 \times 10^{-1} = 491.5 \text{ kN}$$

$$N'_s = -7.82 \times 311.5 \times 10^{-1} = -243.6 \text{ kN}$$

Esempio n. 2

Calcolo del momento resistente



$$M_{Rd} = N_s (d - kx) - N'_s (kx - c) =$$

$$= [491.5 \times (46 - 0.416 \times 7.20) + 243.6 \times (0.416 \times 7.20 - 4)] \times 10^{-2} = 208.9 \text{ kNm}$$

Si noti che
 $kx \cong c$

$M_{Ed} < M_{Rd}$ la sezione è verificata

Progetto di sezioni inflesse

Progetto

Duttività della sezione

Un parametro fondamentale nel valutare il modo in cui la sezione giunge al collasso è la duttilità.

Duttività = rapporto tra rotazione ultima e rotazione corrispondente allo snervamento dell'armatura tesa

Nota: Una sezione che presenti una rottura duttile dà chiari segnali di preavviso (elevata fessurazione, notevole incremento della deformazione) che possono mettere in allarme e consentire interventi prima del crollo

In zona sismica la capacità di deformarsi plasticamente permette di dissipare con cicli isteretici

Duttilità della sezione

Esempio

Sezione 30x50

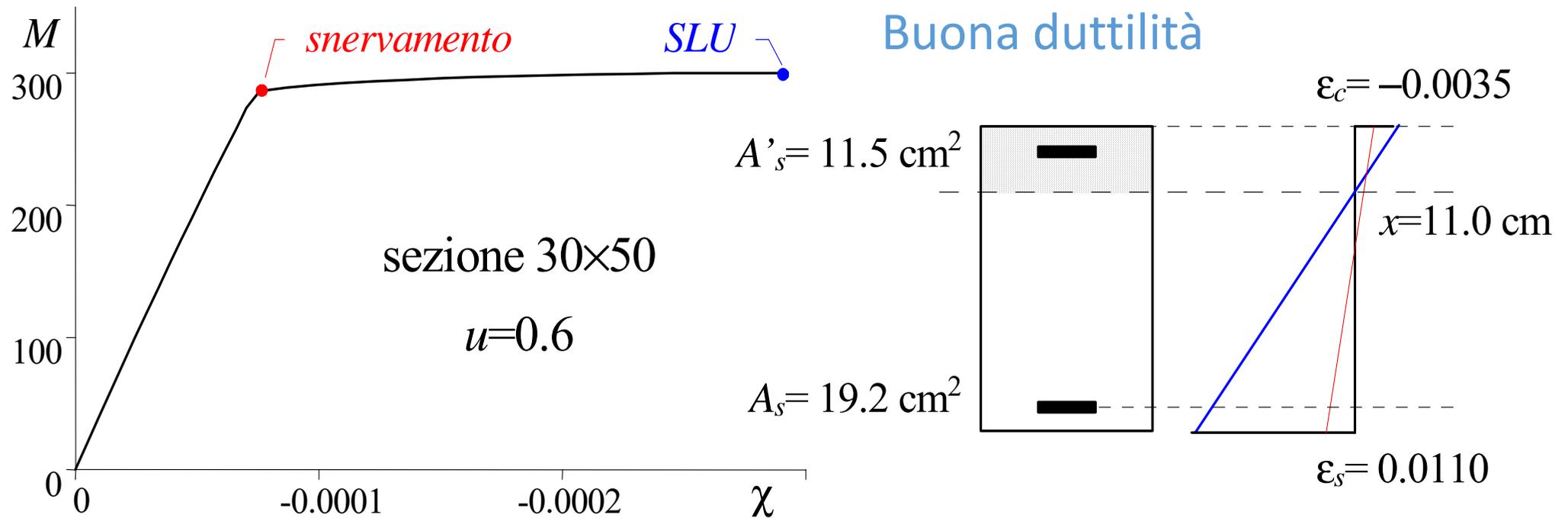
$$u = A'_s / A_s = 0.6$$

$$M_{Rd} = 300 \text{ kNm}$$

$$\varepsilon_{su} > 10 \times 10^{-3}$$

$$x_u = 11.0 \text{ cm}$$

$$\chi_u = -0.000286$$



Duttilità della sezione

Esempio

Sezione 30x50

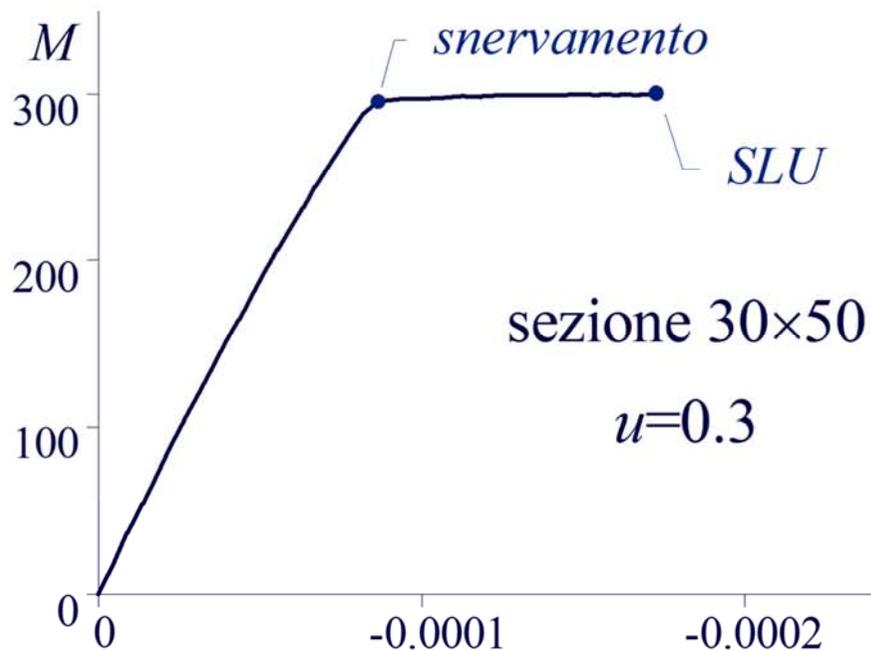
$$\varepsilon_{su} = 4.5 \times 10^{-3}$$

$$u = A'_s / A_s = 0.3$$

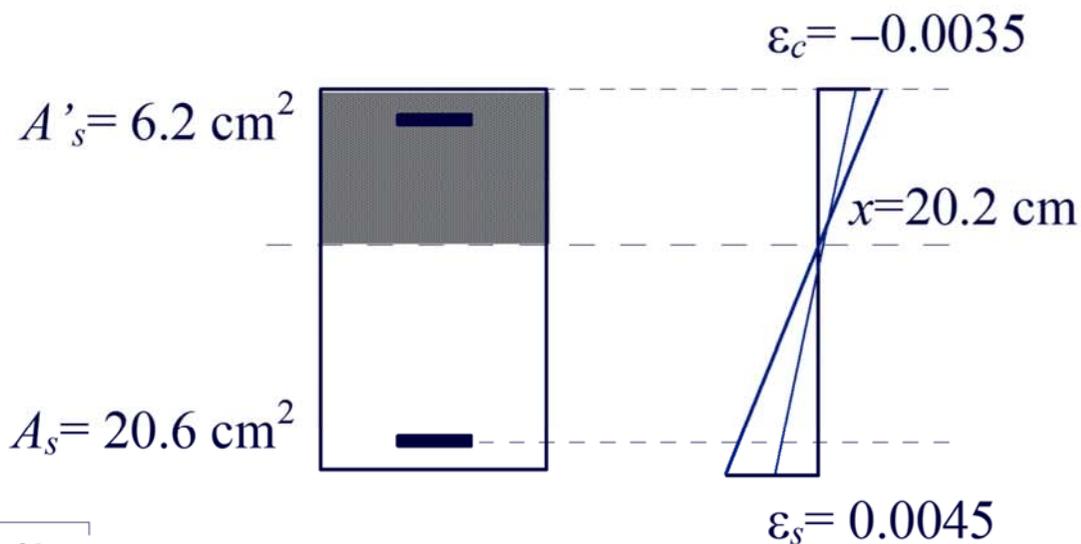
$$x_u = 20.2 \text{ cm}$$

$$M_{Rd} = 300 \text{ kNm}$$

$$\chi_u = -0.000184$$



Duttilità discreta



Duttilità della sezione

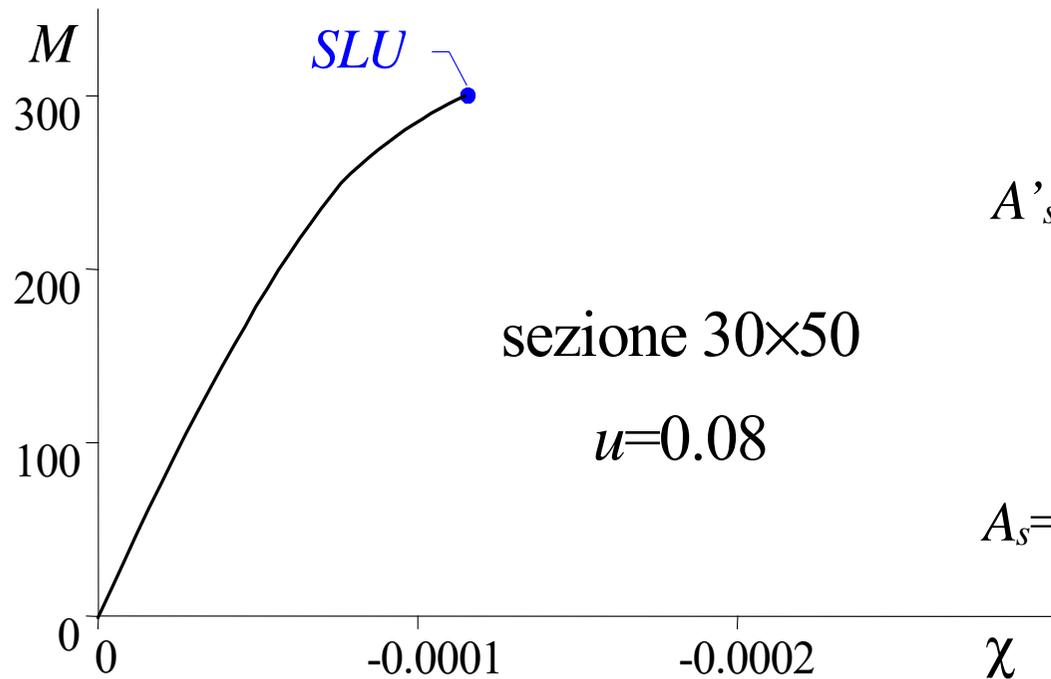
Esempio

Sezione 30x50

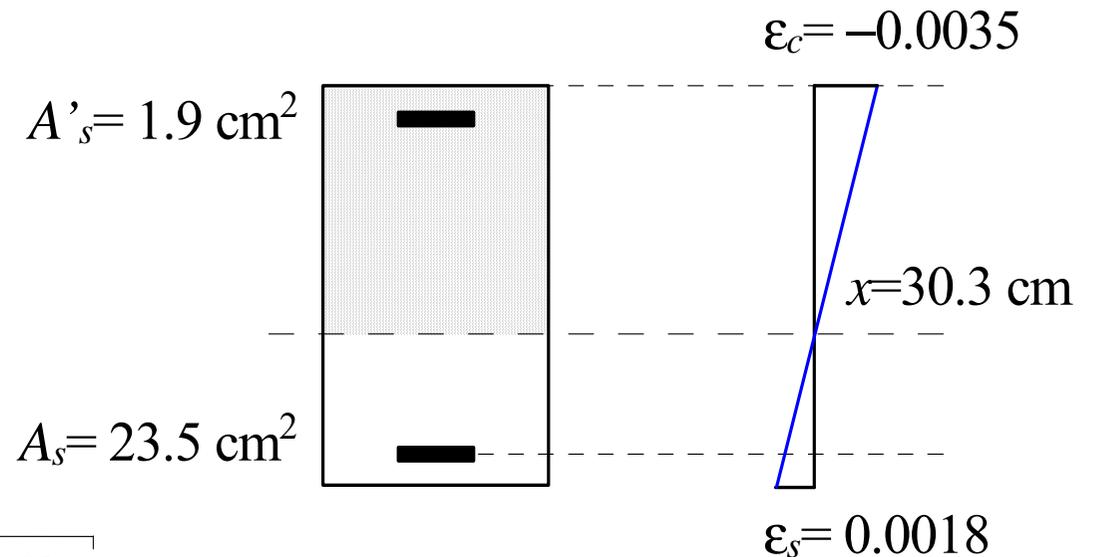
$$\varepsilon_{su} = 1.8 \times 10^{-3}$$

$$u = A'_s / A_s = 0.08 \quad M_{Rd} = 300 \text{ kNm}$$

$$x_u = 30.3 \text{ cm} \quad \chi_u = -0.000116$$



Bassa duttilità



Duttilità della sezione

- Le sezioni con minore armatura tesa sono più duttili
- La duttilità cresce con la deformazione ϵ_s dell'armatura tesa allo SLU

Possiamo classificare le sezioni inflesse:

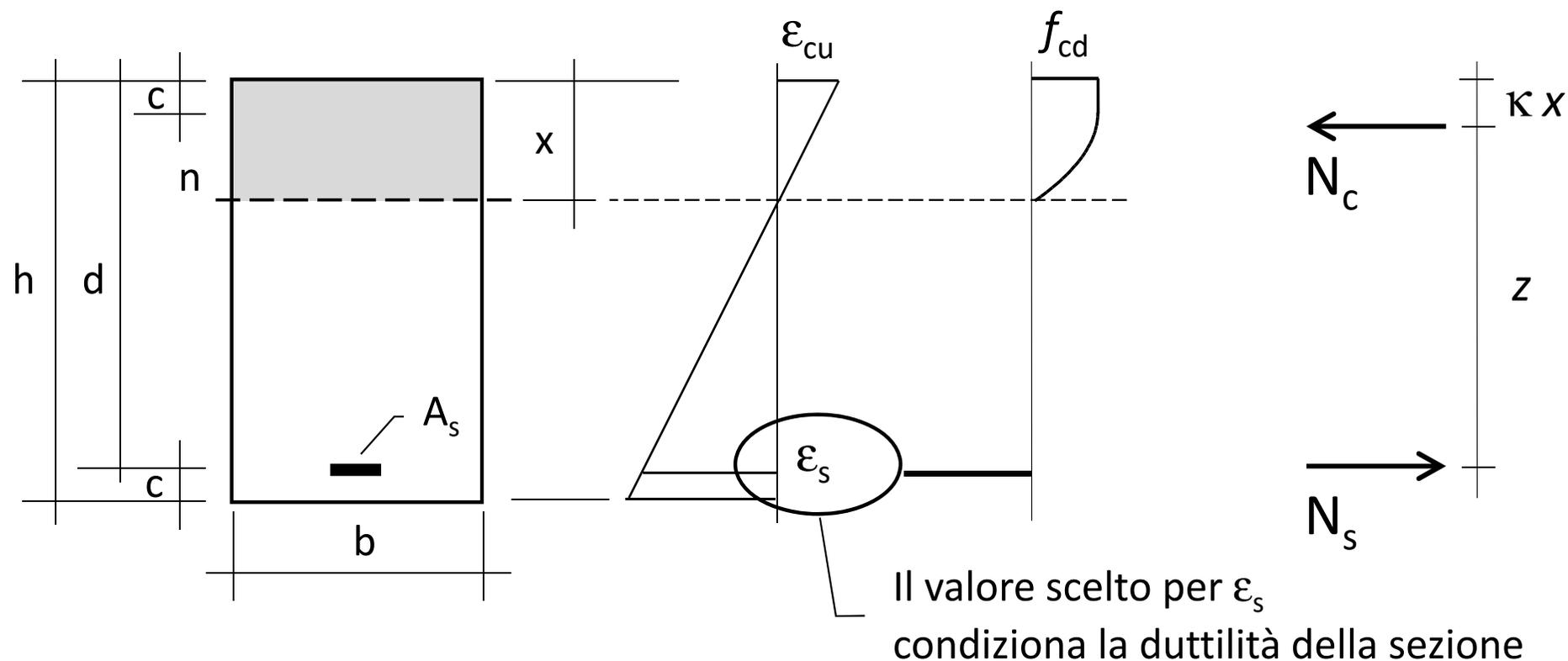
- ad alta duttilità se $\epsilon_s \geq 0.010$
- a media duttilità se $\epsilon_{yd} < \epsilon_s < 0.010$
- a bassa duttilità se $\epsilon_s \leq \epsilon_{yd}$

Per ottenere sezioni duttili in c.a.

le progetteremo sempre assumendo $\epsilon_s \geq 0.010$

Progetto (caso semplice armatura)

Stato limite ultimo



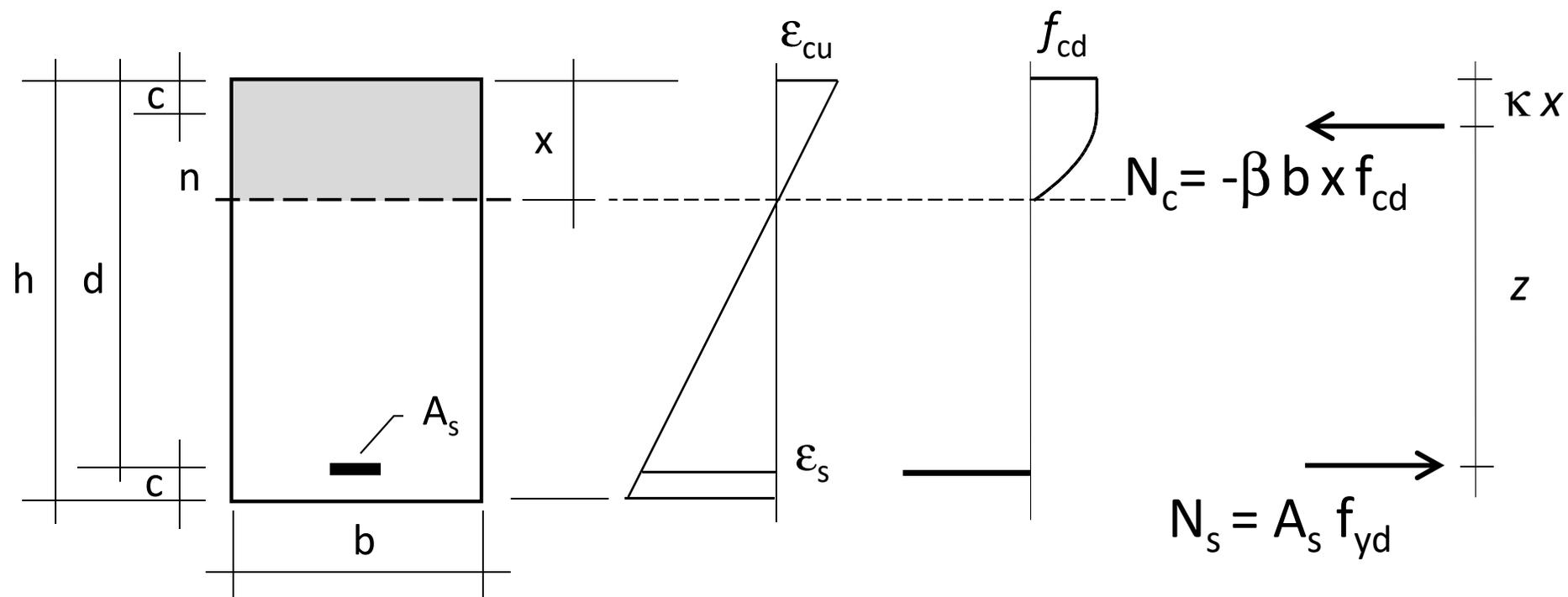
1. Si assegna il diagramma di deformazioni che si vuole avere nella sezione

Buona duttilità con $\epsilon_{su} \cong 10 \times 10^{-3}$

... oppure $x=0.25 d$

Progetto (caso semplice armatura)

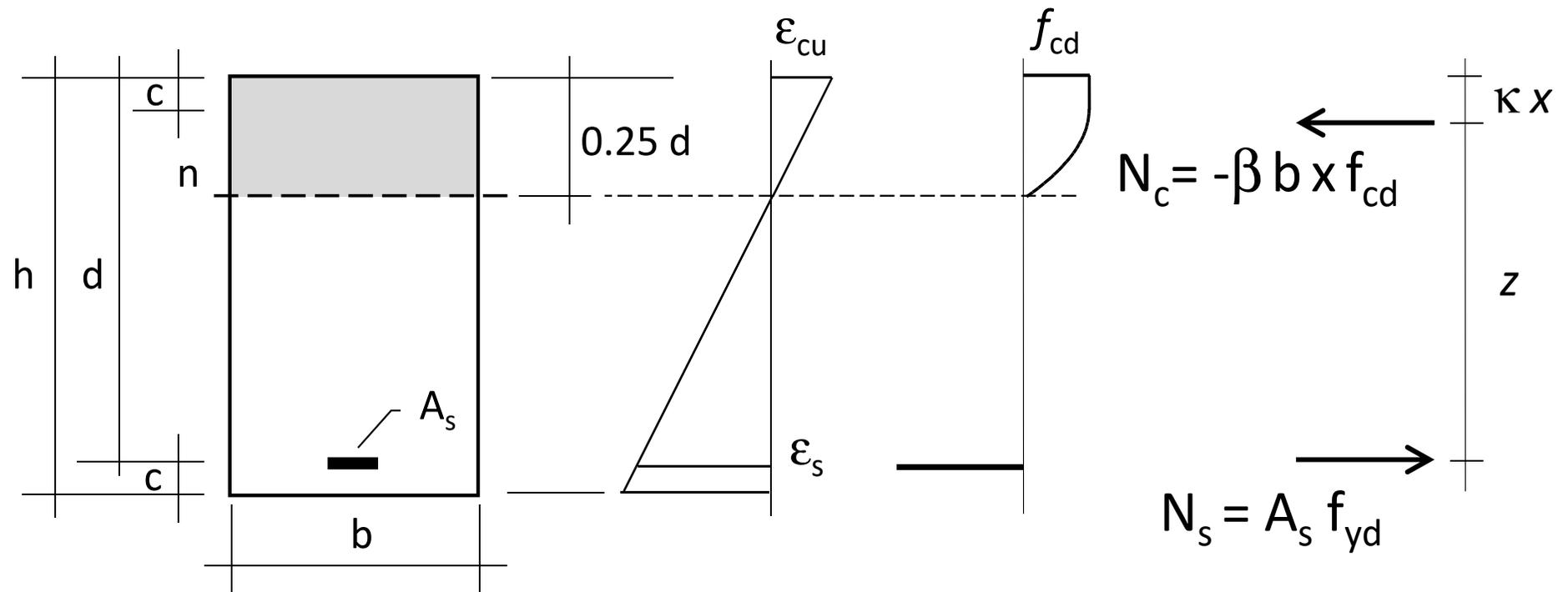
Stato limite ultimo



2. Dall'equilibrio alla rotazione rispetto alla risultante delle trazioni si ha ...

Progetto (caso semplice armatura)

Stato limite ultimo



$$z = d - \kappa x = d(1 - \kappa \xi)$$

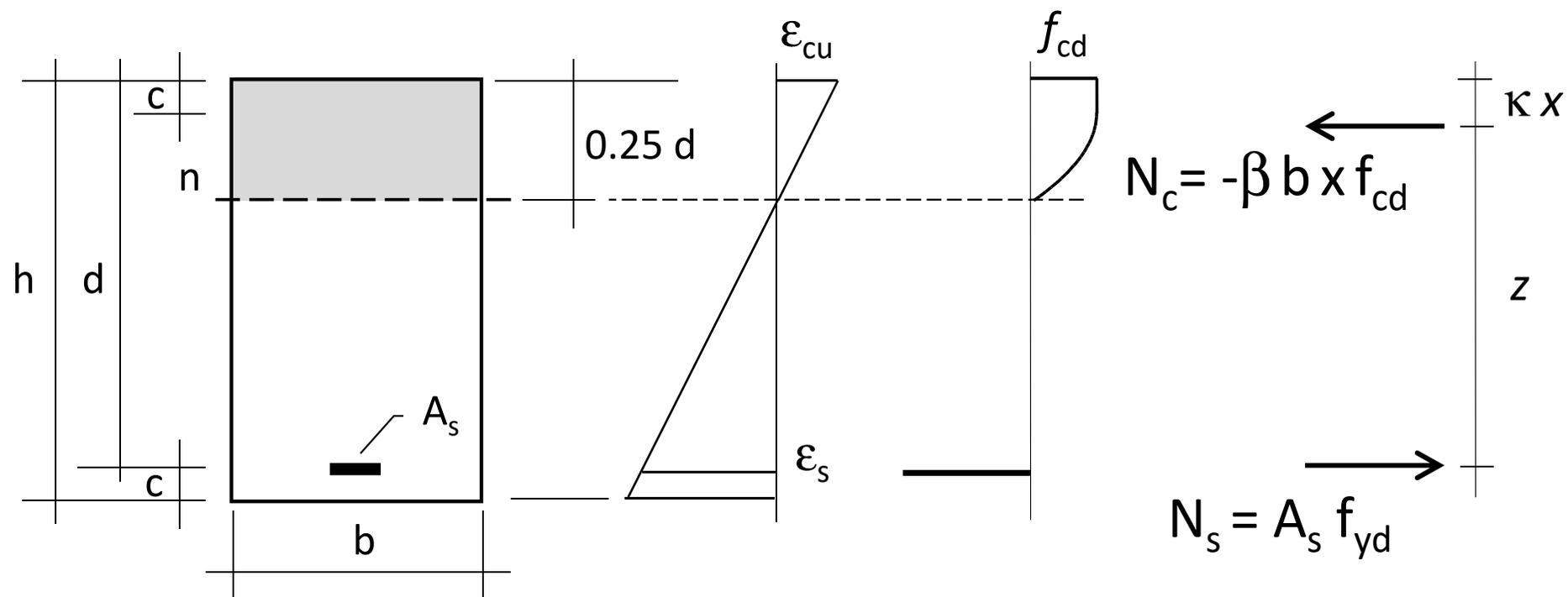
e

$$M_{Rd} = -N_c z = b d^2 \beta \xi (1 - \kappa \xi) f_{cd}$$

Nota
 $\xi = x/d$

Progetto (caso semplice armatura)

Stato limite ultimo



Se si pone:

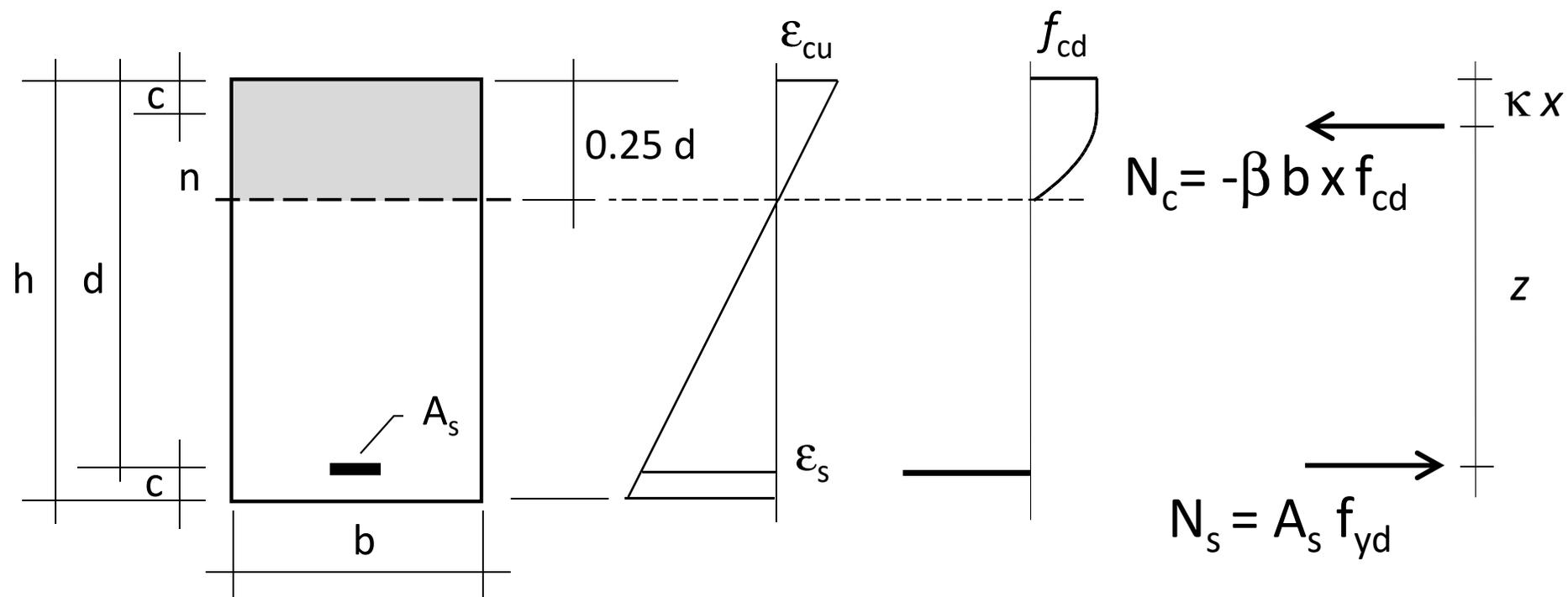
$$r = \frac{1}{\sqrt{\beta \xi (1 - \kappa \xi) f_{cd}}}$$

La precedente relazione diventa:

$$d = r \sqrt{\frac{M}{b}}$$

Progetto (caso semplice armatura)

Stato limite ultimo

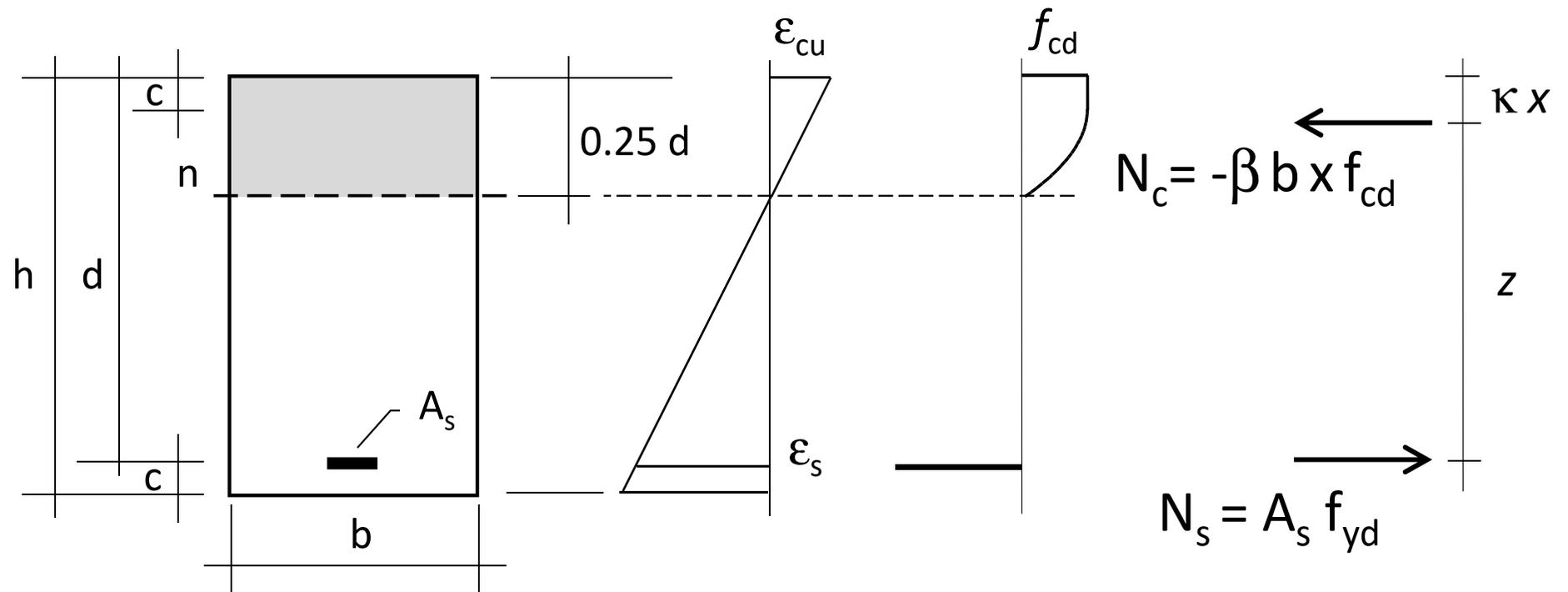


3. Dall'equil. alla rotazione rispetto alla risultante di compressione si ha ...

$$M_{Rd} = N_s z = A_s d (1 - \kappa \xi) f_{yd}$$

Progetto (caso semplice armatura)

Stato limite ultimo



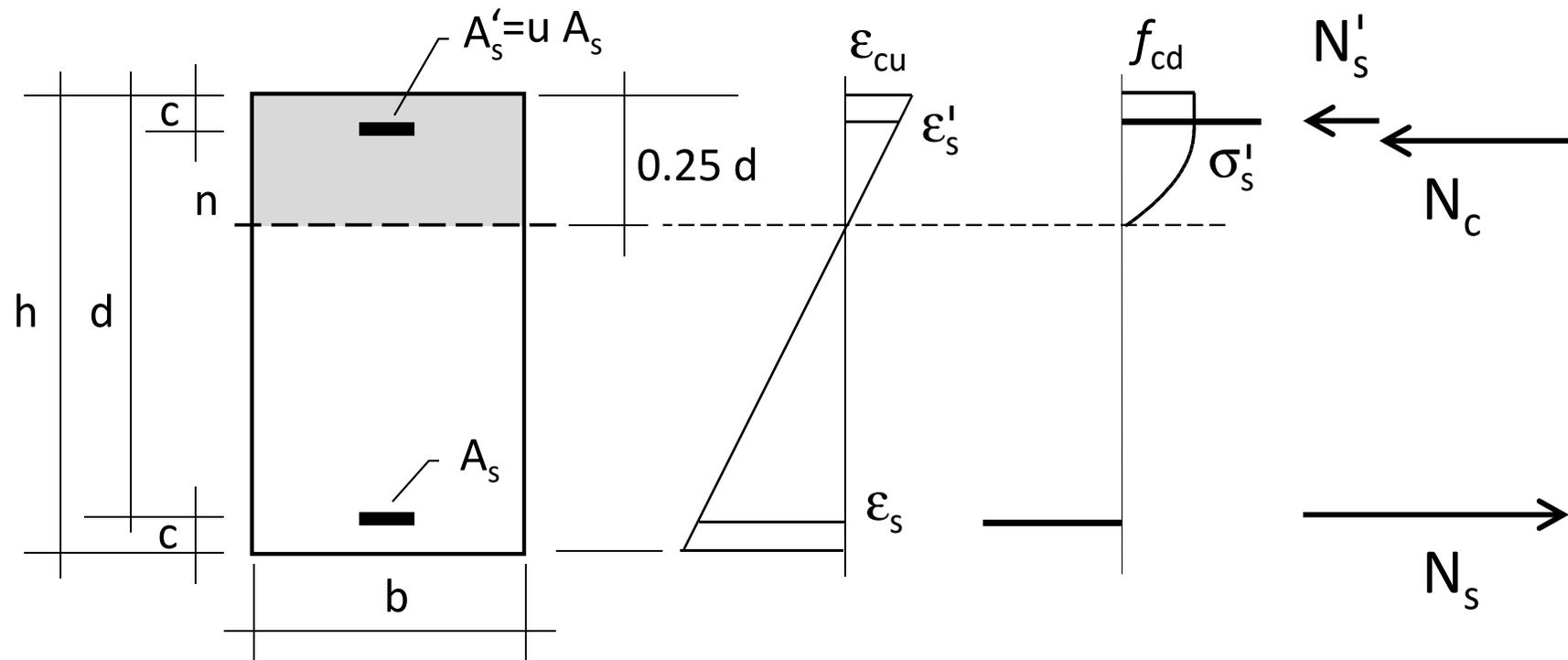
$$(1 - \kappa \xi) \cong 0.9$$

pertanto...

$$A_s = \frac{M}{0.9 d f_{yd}}$$

Progetto (caso doppia armatura)

Stato limite ultimo

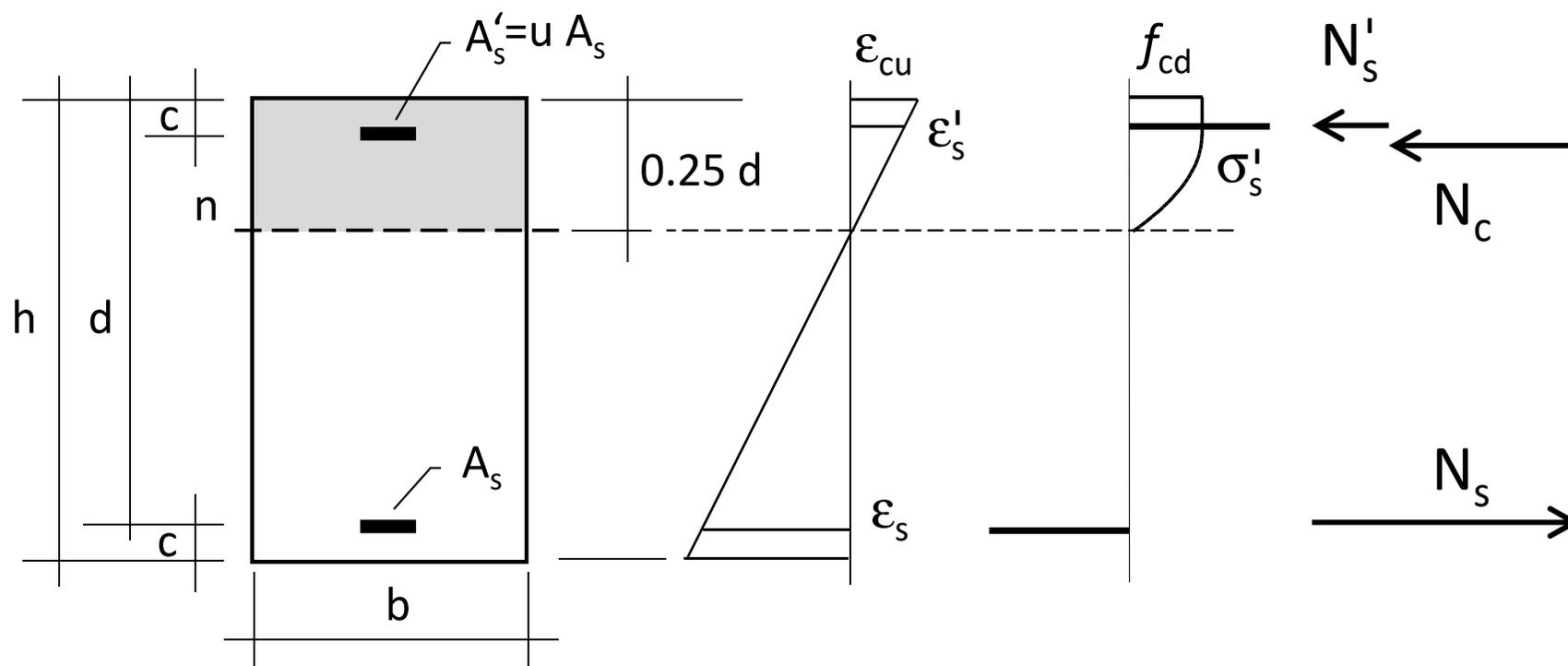


Se poniamo $u = \frac{A'_s}{A_s}$ e $s^l = \frac{-\sigma'_s}{f_{yd}}$

$$N'_s = A'_s \sigma'_s = u A_s (-s^l f_{yd}) = -s^l u N_s$$

Progetto (caso doppia armatura)

Stato limite ultimo



se l'arm. compressa è snervata

$$s^l = \frac{-\sigma'_s}{f_{yd}} = 1$$

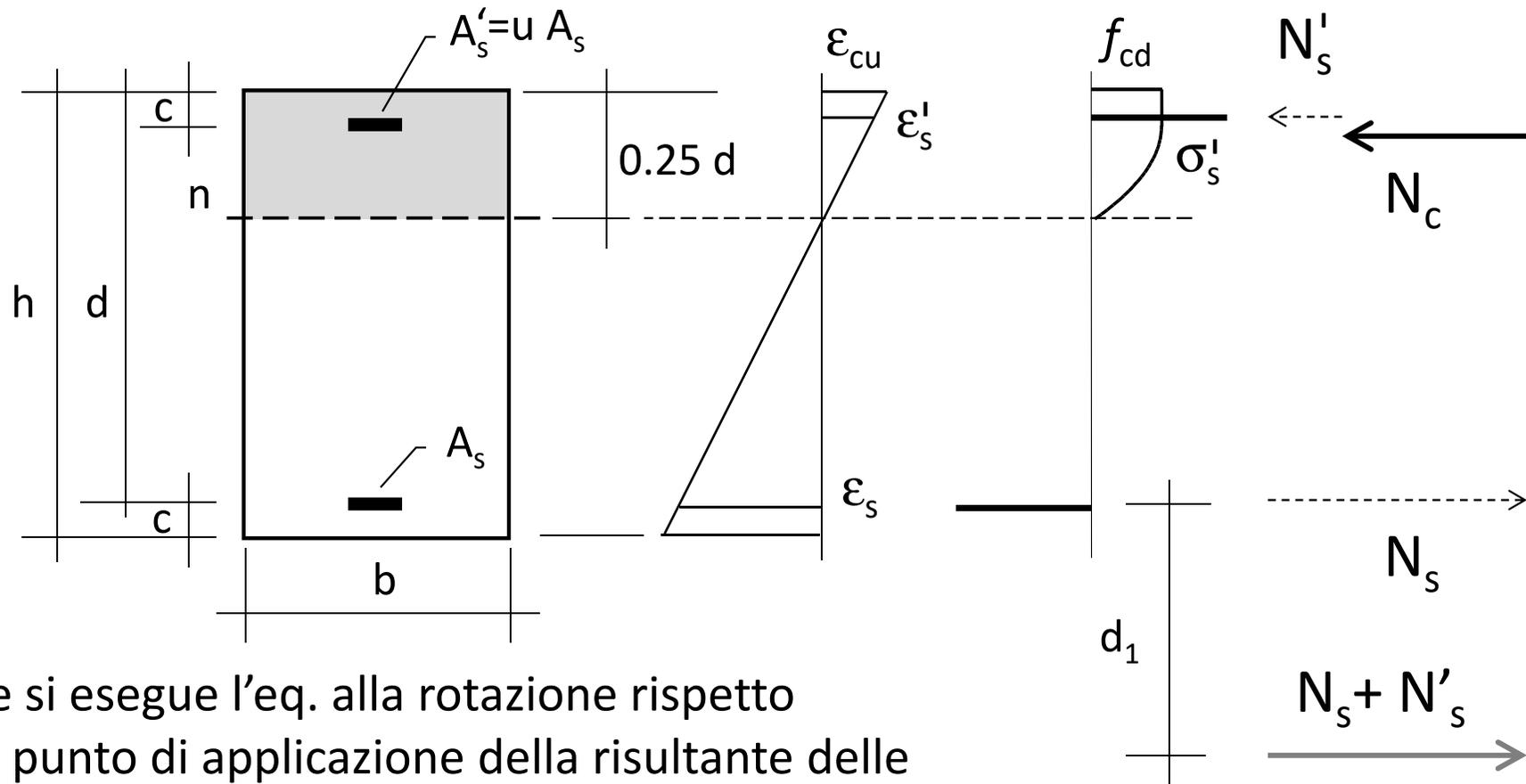
... in caso contrario

$$s^l = \frac{-\sigma'_s}{f_{yd}} = \frac{x - c}{x} \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{yd}} = \frac{\xi - \gamma}{\xi} \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{yd}}$$

L'armatura compressa (acciaio B450C) è snervata se $\gamma \leq 0.11$

Progetto (caso doppia armatura)

Stato limite ultimo



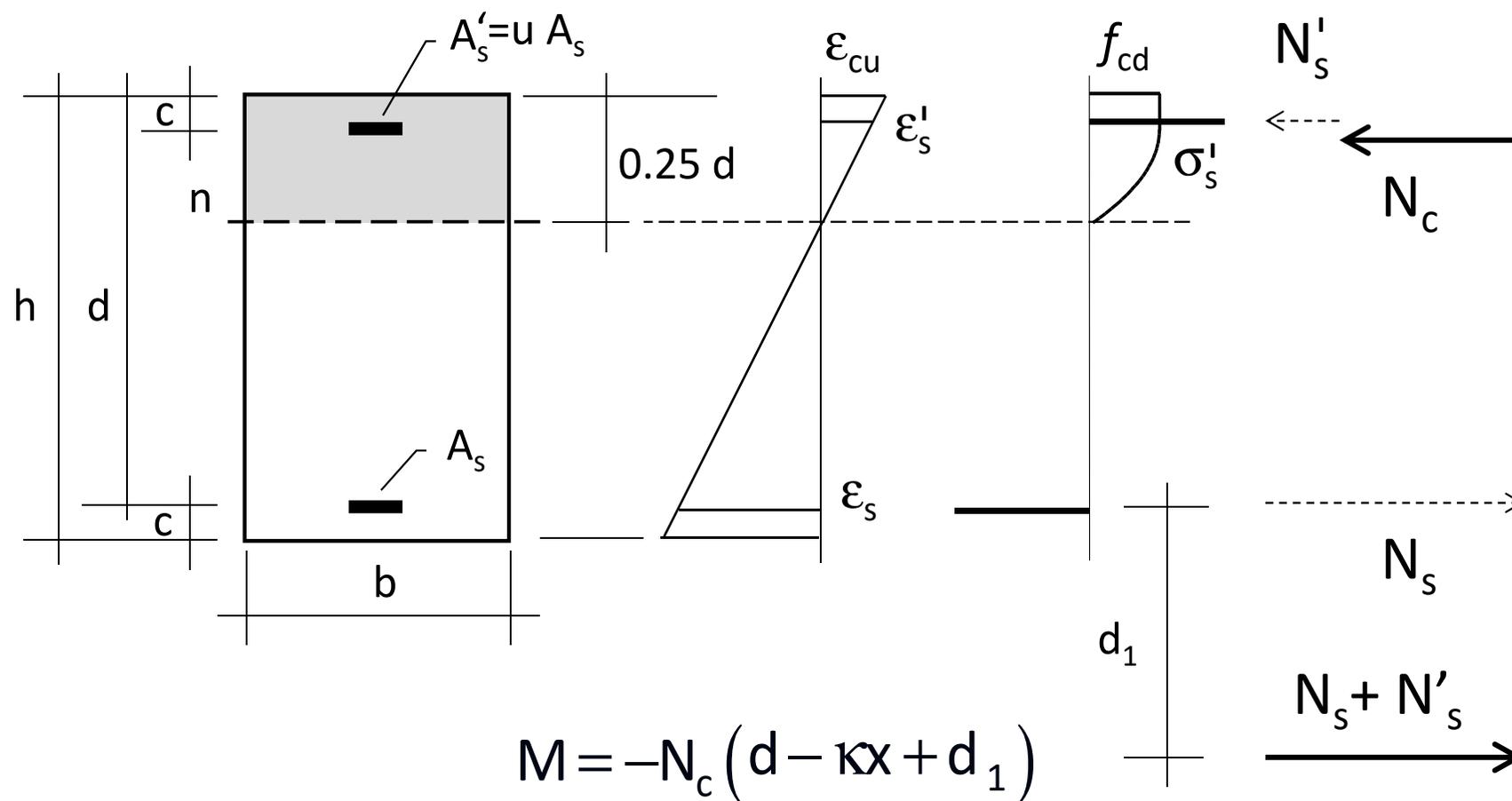
Se si esegue l'eq. alla rotazione rispetto al punto di applicazione della risultante delle tensioni delle armature, si ha:

$$-N'_s(d-c+d_1) = N_s d_1 \quad \text{ovvero}$$

$$d_1 = \frac{\gamma u (1-\gamma) d}{1-\gamma u}$$

Progetto (caso doppia armatura)

Stato limite ultimo



$$M = bd^2 \beta \xi (1 - \kappa \xi) f_{cd} \left[1 + \frac{s'u}{1 - s'u} \frac{1 - \gamma}{1 - \kappa \xi} \right]$$

Progetto (caso doppia armatura)

Stato limite ultimo

$$M = bd^2 \beta \xi (1 - \kappa \xi) f_{cd} \left[1 + \frac{s'u}{1 - s'u} \frac{1 - \gamma}{1 - \kappa \xi} \right]$$

$$M = bd^2 \frac{1}{r^2}$$

dove

$$\frac{1}{r^2} = \beta \xi (1 - \kappa \xi) f_{cd}$$

$$\frac{1}{k^2} = \left[1 + \frac{s'u}{1 - s'u} \frac{1 - \gamma}{1 - \kappa \xi} \right]$$

Che relazione c'è tra r ed r' ?

Dalla relazione

$$\frac{1}{r'^2} = \beta \xi (1 - \kappa \xi) \left[1 + \frac{s^l u}{1 - s^l u} \frac{1 - \gamma}{1 - \kappa \xi} \right]$$

si ottiene :

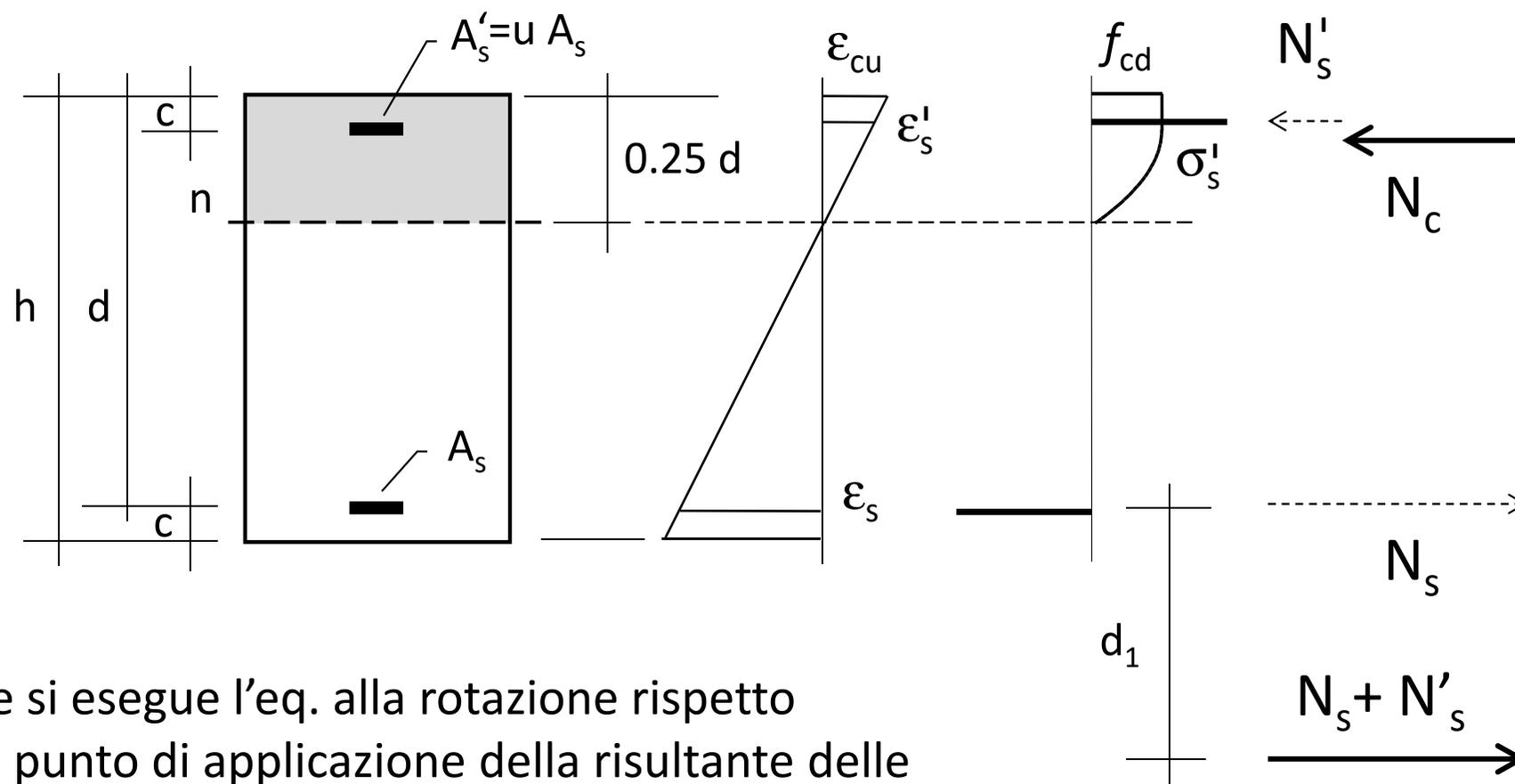
$$r^l \cong r \sqrt{1 - s^l u} \quad \text{con} \quad s^l = \frac{\sigma_s^l}{\sigma_{s,\max}} \quad u = \frac{A_s^l}{A_s}$$

Nota: s' dipende principalmente dal copriferro c
(o meglio, dal rapporto $\gamma = c/d$)

per SLU s' è spesso pari a 1 (minore solo per travi a spessore)

Progetto A_s (caso doppia armatura)

Stato limite ultimo

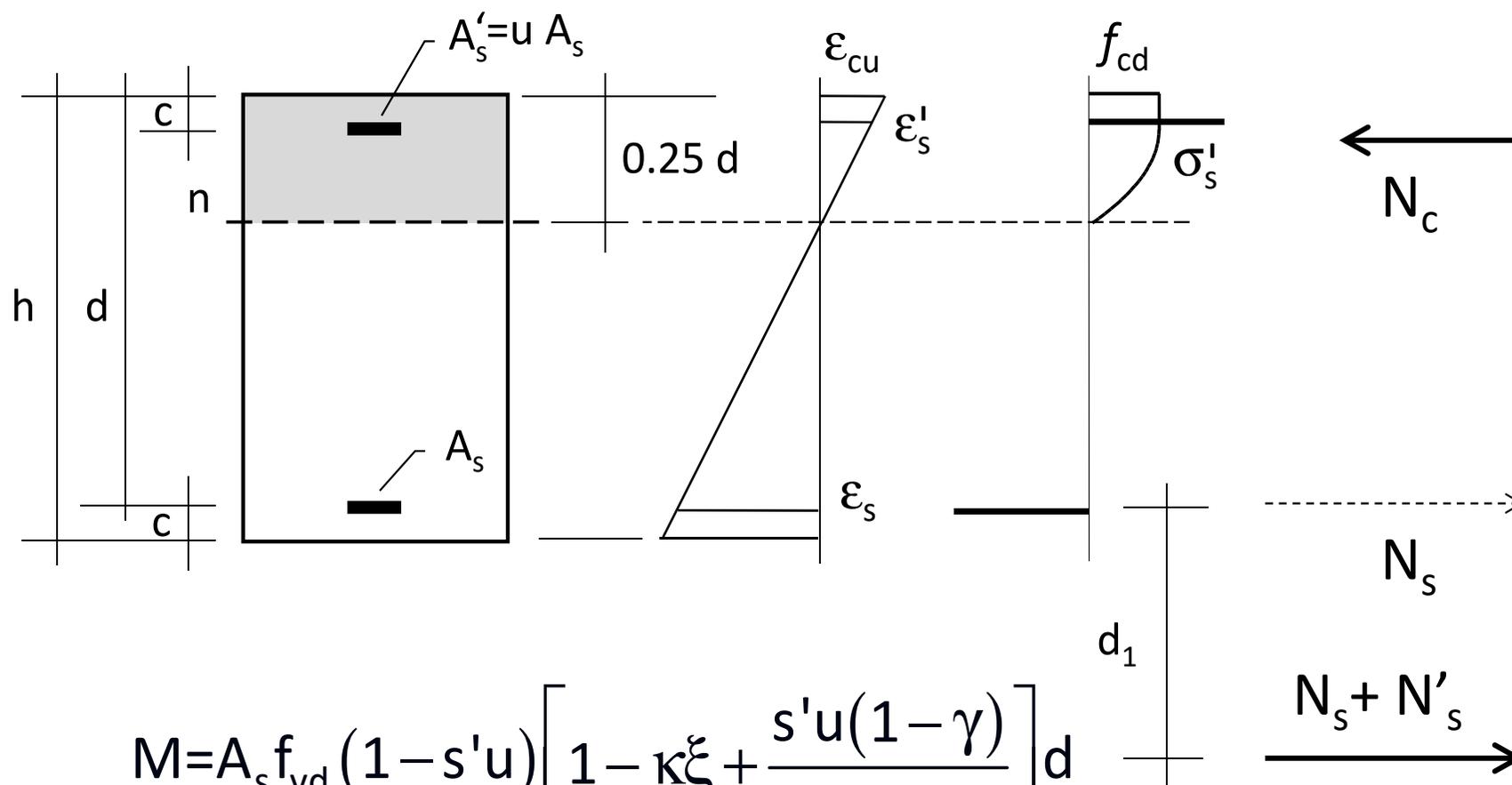


Se si esegue l'eq. alla rotazione rispetto al punto di applicazione della risultante delle tensioni del calcestruzzo, si ha:

$$M = (N_s + N'_s)(d - \kappa x + d_1)$$

Progetto A_s (caso doppia armatura)

Stato limite ultimo

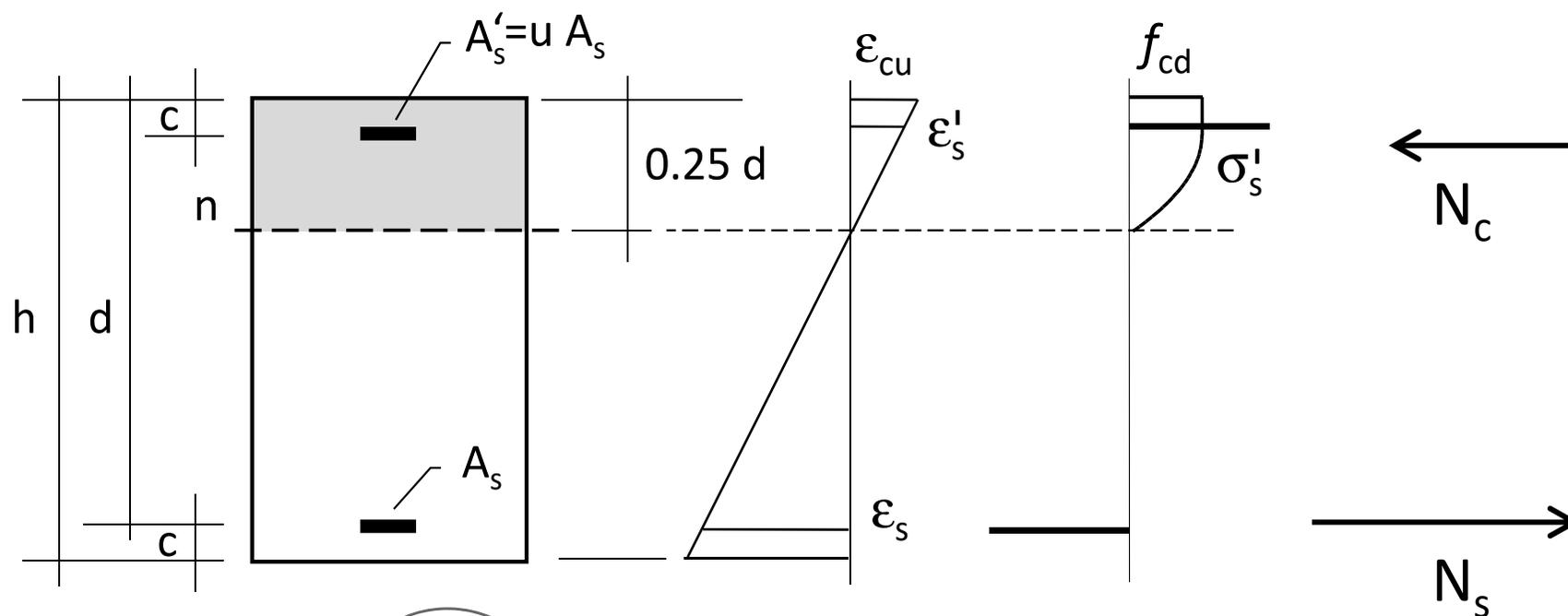


$$M = A_s f_{yd} (1 - s'u) \left[1 - \kappa \xi + \frac{s'u(1 - \gamma)}{1 - s'u} \right] d$$

$$M = A_s f_{yd} \left[1 - \kappa \xi + s'u(\kappa \xi - \gamma) \right] d = A_s f_{yd} z \cong A_s f_{yd} 0.9 d$$

Progetto A'_s (caso doppia armatura)

Stato limite ultimo



$$bd^2 \frac{1}{r^2}$$

$$\Delta M = M_{Ed} - M_{Rd, A'_s=0}$$



$$A'_s = \frac{\Delta M}{(d-c) s' f_{yd}}$$

Valori di z/d (C25/30, B450C)

Sezioni progettate con $\varepsilon_c = \varepsilon_{cu}$ e $\xi = 0.25$

	$\gamma = 0.10$	$\gamma = 0.15$	$\gamma = 0.20$
u	$s' = 1.00$	$s' = 0.72$	$s' = 0.36$
0	0.896		
0.25	0.897	0.888	0.887
0.50	0.898	0.880	0.879

Sempre molto prossimo a 0.9

Quanto vale il coefficiente r?

$$r = \frac{1}{\sqrt{\beta \xi (1 - \kappa \xi) f_{cd}}}$$

Stato limite ultimo:
dipende solo dal calcestruzzo

per C25/30: \longrightarrow $r = 0.0197$

Valori di r' (C25/30, B450C)

	$\gamma = 0.10$	$\gamma = 0.15$	$\gamma = 0.20$
u	$s' = 1.00$	$s' = 0.72$	$s' = 0.36$
0	0.0197		
0.25	0.0171	0.0180	0.0189
0.50	0.0139	0.0160	0.0181

Nota: $\gamma = 0.10$ per travi emergenti
 $\gamma = 0.20$ per travi a spessore

Valori di r'/r (C25/30, B450C)

	$\gamma = 0.10$	$\gamma = 0.15$	$\gamma = 0.20$
u	$s' = 1.00$	$s' = 0.72$	$s' = 0.36$
0	1.000		
0.25	0.868	0.913	0.0959
0.50	0.706	0.812	0.919

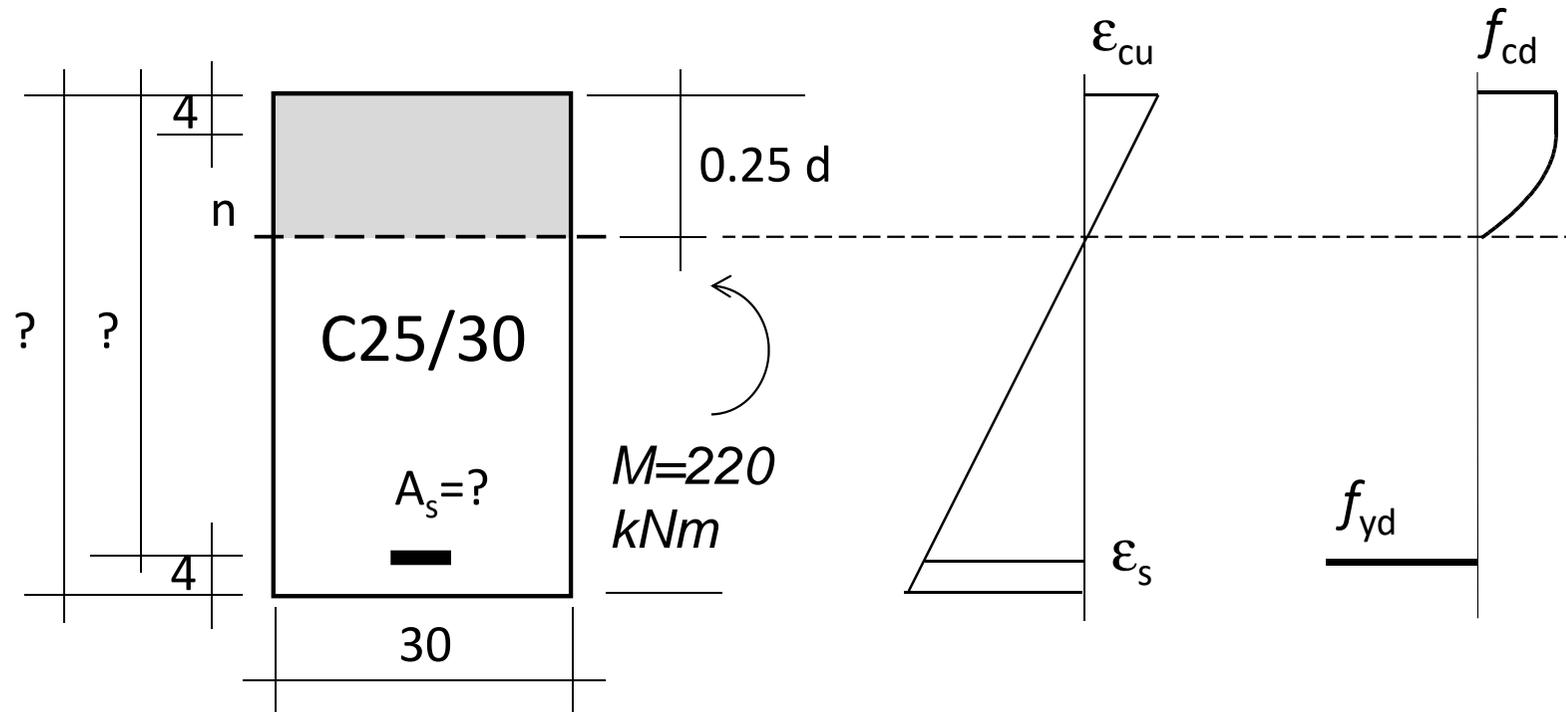


Travi emergenti

Travi a spessore

Esempio n. 1

Progetto di sezione a semplice armatura



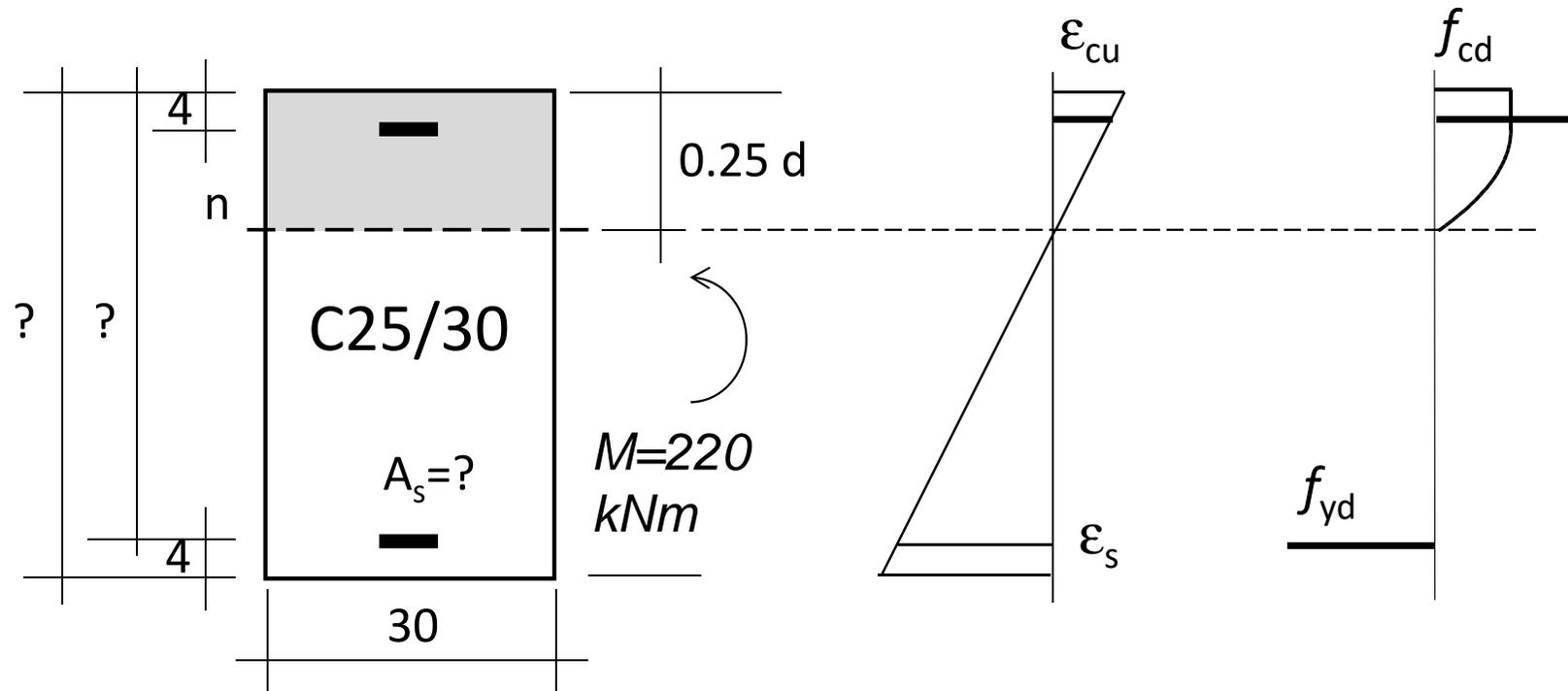
$$d = r \sqrt{\frac{M_{Ed}}{b}} = 0.0180 \sqrt{\frac{220}{0.30}} = 0.49 \text{ m}$$

uso 30x60

$$A_s = \frac{M}{0.9 d f_{yd}} = \frac{220 \times 10}{0.9 \times 0.56 \times 391.3} = 11.2 \text{ cm}^2$$

Esempio n. 2

Progetto di sezione a doppia armatura



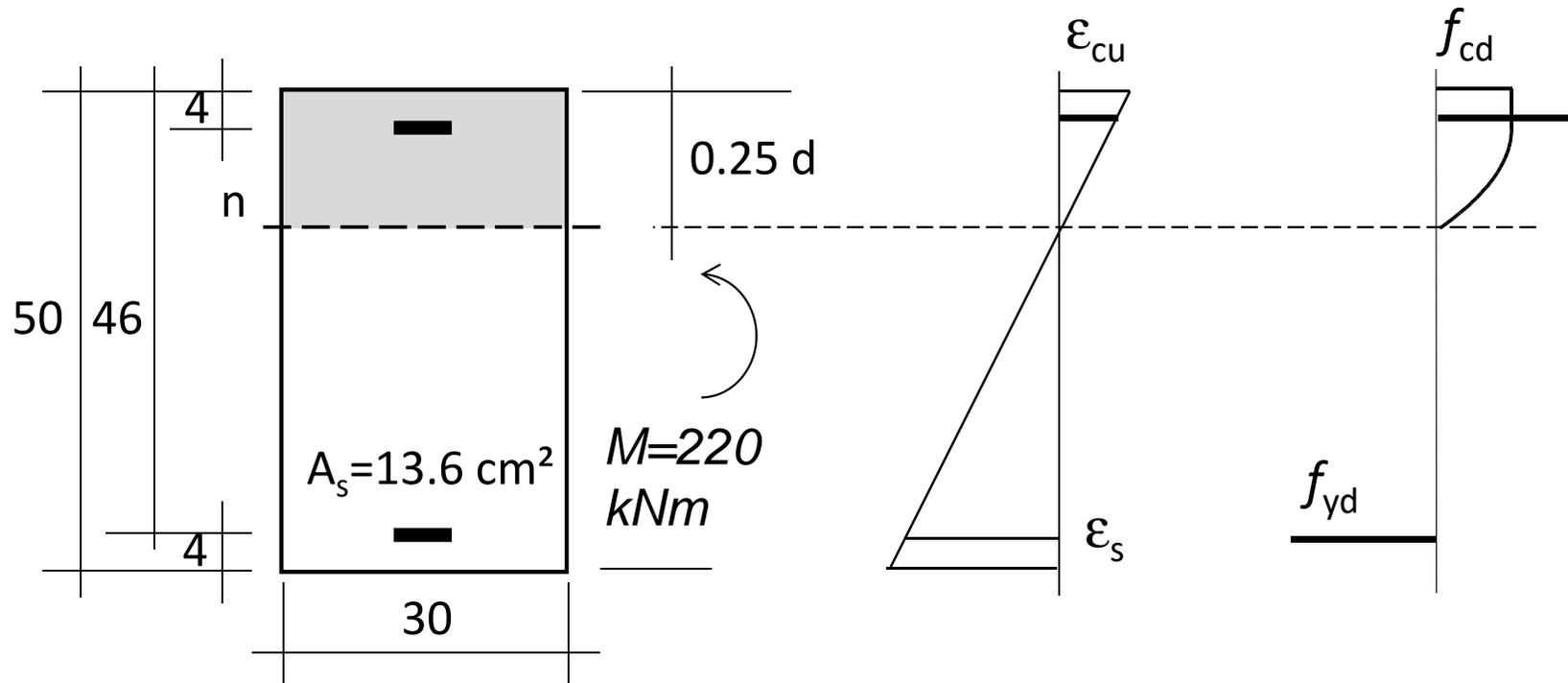
$$d = r \sqrt{\frac{M_{Ed}}{b}} = 0.0160 \sqrt{\frac{220}{0.30}} = 0.43 \text{ m}$$

$$A_s = \frac{M}{0.9 d f_{yd}} = \frac{220 \times 10}{0.9 \times 0.46 \times 391.3} = 13.6 \text{ cm}^2$$

uso 30x50

Esempio n. 2

Progetto di sezione a doppia armatura

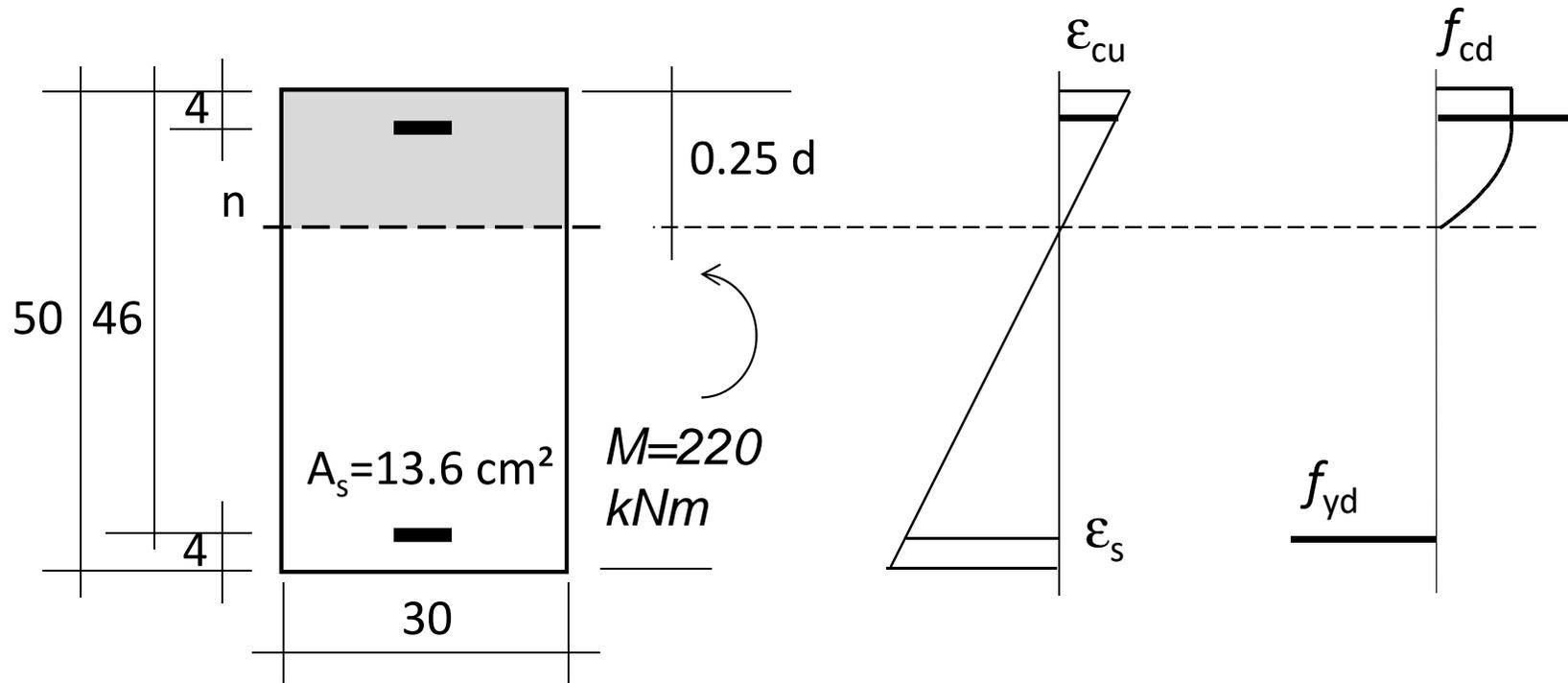


**OCCORRE armatura
a compressione**

$$M_{Rd, A_s^l=0} = \frac{bd^2}{r^2} = \frac{0.30 \times 0.46^2}{0.0197^2} = 163.6 \text{ kNm}$$

Esempio n. 2

Progetto di sezione a doppia armatura



Ricorda che:

$$s^l = \frac{-\sigma_s^l}{f_{yd}} = \frac{\xi - \gamma \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{yd}}}{\xi} \leq 1$$

$$A_s^l = \frac{\Delta M}{(d-c) s^l f_{yd}} = \frac{(220 - 163.6)}{0.42 \times 391.3} = 3.4 \text{ cm}^2$$

Quanto è possibile ridurre la sezione grazie all'armatura compressa?

- Aumentando $u = A'_s/A_s$ è possibile ridurre l'altezza della sezione
- Riducendo l'altezza aumenta l'armatura necessaria
- Necessità tecnologiche impongono limiti alla quantità di armatura (ribaditi dalla normativa)

Armatura minima:

$$A_s = 0.26 \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} b d \geq 0.13\% b d$$

0.15% per C25/30 e B450C

Armatura massima:

$$A_s \leq 4\% b h$$

$$A'_s \leq 4\% b h$$

Percentuale massima consigliata: 1 ÷ 1.5%

Limiti alle formule di progetto

per tener conto dei limiti all'armatura

Imponendo un limite all'armatura tesa:

$$A_s \leq \rho b d \quad \text{con } \rho = 0.010 \div 0.015$$

si ha: $A_s = \frac{M_{Ed}}{0.9 d f_{yd}} \leq \rho b d$ e quindi:

$$d \geq r_s \sqrt{\frac{M_{Ed}}{b}}$$

con

$$r_s = \sqrt{\frac{1}{0.9 \rho f_{yd}}}$$

$$= 0.0169$$

se $\rho=0.010$

$$= 0.0138$$

se $\rho=0.015$

Nota: Non si può utilizzare un valore di r' inferiore a r_s !

Si suggerisce per r' un limite tra 0.015 e 0.017

Criteri di buona progettazione (SLU)

- Per il progetto della sezione
 $r' = 0.018$ o 0.017
(corrisponde a $0 < u < 25\%$ per C25/30)
- Per travi molto basse (a spessore)
 $r' = 0.019$ (corrisponde a $0 < u < 25\%$ per C25/30)
- Se si ritiene accettabile una percentuale di armatura dell'1.5% si può scendere al valore
 $r' = 0.015$ (ma non andare mai al di sotto di questi)

Criteri di buona progettazione (SLU)

Per il progetto dell'armatura tesa considerare un braccio della coppia interna pari a $0.9 d$

Nota:

Per sezioni a forte armatura (sconsigliate per la carenza di duttilità) il braccio della coppia interna dovrebbe essere minore ($0.8 d$)

FINE